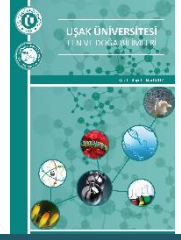




**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa  
Bilimleri Dergisi**  
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>



*Araştırma Makalesi / Research Article*

## Farklı Türden Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

*Fatma KORKMAZ, Deniz UÇAR\**

*Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi Fakültesi, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye*

*Geliş: 30 Ekim 2019*

*Kabul: 22 Kasım 2019 / Received: 30 Ekim 2019*

*Accepted: 22 Kasım 2019*

### Abstract

In this study, we obtain new fractional integral inequalities for convex functions and some different functions, using conformable fractional derivative and integral. We extend and generalize some important inequalities in the literature.

**Keywords:** *Conformable derivative and integral, convex functions.*

### Özet

Bu çalışmada, uyumlu kesirli türev ve integral tanımları yardımıyla, konveks fonksiyonlar ve bazı farklı türden fonksiyonlar için yeni kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Literatürde var olan bazı önemli eşitsizlikler genişletilmiş ve genelleştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** *Uyumlu türev ve integral, konveks fonksiyon.*

©2019 Usak University all rights reserved.

## 1. Giriş

Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Kesirli mertebeden türev kavramı ilk kez L'Hospital ve Leibnitz arasındaki mektuplaşma sırasında ortaya çıkmıştır. Bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmıştır. Bu konuda ilk uygulamanın yazılması 1823'de Niels Henrik Abel'e aittir. Abel bir çalışmada karşısına çıkan bir integral denklem çözümünde kesirli basamaktan türevleri uygulamıştır. Abel'in bu güzel çözümü, Liouville'nin dikkatini çekmiş ve ilk olarak Liouville tarafından kesirli basamaktan türev için mantıklı bir tanım verilmesini sağlamıştır. Liouville'nin tanımını birçok matematikçi zaman zaman yeniden ele alarak yeni kesirli türev ve integral tanımları elde etmişlerdir [1-3]. Bu tanımlardan bazıları şunlardır.

\*Corresponding author:

E-mail: deniz.ucar@usak.edu.tr

**Tanım 1.1:**  $f$  fonksiyonu her sonlu,  $(a, t)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m - 1 \leq \alpha < m$  olmak üzere  $t > a$  için reel bir  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville türevi

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha+1-m}} d\tau$$

ile tanımlanır.

**Tanım 1.2:**  $f \in C_\mu$  ( $\mu \geq -1$ ) olmak üzere  $t > 0$  ve  $\alpha \geq 0$  iken  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli integrali operatörü için  $\alpha, \beta \geq 0$  olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t)$$

sağlanır.

**Tanım 1.3 :**  $\alpha > 0$  ve  $y > a$  için,

$$J_{a^+}^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (y - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale  $\alpha$ . mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.  $\alpha > 0$  ve  $y < b$  için,

$$J_b^{\alpha-} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^b (\tau - y)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale ise  $\alpha$ . mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

**Tanım 1.4:**  $m$  pozitif bir tam sayı olmak üzere  $m - 1 < \alpha < m$  için  $f$  fonksiyonunun Caputo Türevi,

$${}_{\alpha}D_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\alpha}^z (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

şeklindedir.

**Tanım 1.5:**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $t > 0$  ve  $\alpha \in (0,1)$  için

$$T_{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ifadesine,  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ -kesirli türevi veya uyumlu türevi denir.

**Tanım 1.6:**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$T_{\alpha}^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer  $(a, b)$  aralığında  $T_{\alpha}^a(f)(t)$  türevi varsa

$$T_{\alpha}^a(f)(a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\alpha}^a f(t)$$

şeklindedir. Benzer şekilde  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi,

$${}^bT_{\alpha}(f)(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Uyumlu türevin bazı temel özellikleri şu şekildedir.

1.  $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
3.  $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$ .
4.  $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$
5.  $T_{\alpha}(c) = 0, c$  sabit.

**Tanım 1.7:**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin.  $t > 0$  ve  $\alpha \in (0,1)$  için,

$$I_{\alpha}^a f(t) = \int_a^t x^{\alpha-1} f(x) dx$$

integraline,  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ -uyumlu kesirli integrali denir.

Uyumlu kesirli analiz yardımıyla bazı farklı fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler incelenirken kullanacağımız fonksiyon tanımları ise şu şekilde verilebilir.

**Tanım 1.8:**  $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in [u, v]$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $f$  fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse  $f$  fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

**Tanım 1.9:** Negatif olmayan  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in I$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $Q(I)$  sınıfındandır denir.

**Tanım 1.10:**  $f$  negatif olmayan bir fonksiyon ve  $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$  aralığı için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $P$  fonksiyonudur veya  $P(I)$  sınıfına aittir, denir.

**Tanım 1.11:**  $h: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bir pozitif fonksiyon olsun.  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon,  $\forall x, y \in I$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa,  $f$  fonksiyonu  $h$ -konveks fonksiyondur veya  $SX(h, I)$  sınıfındandır, denir.

$x$  ve  $y$  pozitif sayıların  $r$ . mertebeden kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Pearce ve diğerleri bu eşitsizliği,  $\forall x, y \in [a, b]$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y), \lambda) = \begin{cases} (\lambda [f(x)]^r + (1 - \lambda)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $r$ -konveks pozitif  $f$  fonksiyonuna genelleştirmişlerdir. Farklı türden fonksiyonlar ile ilgili daha ayrıntılı bilgi [4-8] makalelerinde bulunabilir.

## 2. Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde, farklı türden fonksiyonlar için uyumlu kesirli analiz yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler verilmiştir.

**Teorem 2.1 :**  $f \in Q(I)$ ,  $a, b \in I$ ,  $0 \leq a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  olsun.  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} n! \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} [I_a^\alpha f(b) + {}^b I_\alpha f(a)]$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

**İspat :**  $f \in Q(I)$  olduğundan,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğinde  $\lambda = \frac{1}{2}$  seçilirse  $\forall x, y \in I$  için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2(f(x) + f(y))$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{n!} f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \leq \frac{2}{n!} (f(x) + f(y)) t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlik  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 (f(x) + f(y)) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 f(x) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt + \frac{2}{n!} \int_0^1 f(y) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$x = at + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$$

yazılarak dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ & \leq \frac{2}{n!} \int_0^1 f(at + (1-t)b) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ & \quad + \frac{2}{n!} \int_0^1 f((1-t)a + tb) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \leq I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{2}{n!} \int_0^1 f(at + (1-t)b) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$u = at + (1-t)b, du = (a-b)dt, t = \frac{b-u}{b-a}, t = 0 \rightarrow u = b, t = 1 \rightarrow u = a$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{n!} \int_b^a f(u) \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n \left(1 - \frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{a-b} \\ &= \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \frac{(b-u)^n (u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^n (b-a)^{\alpha-n-1}} \frac{1}{b-a} du \\ &= \frac{2}{n!} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(u) (b-u)^n (u-a)^{\alpha-n-1} du = \frac{2}{(b-a)^\alpha} (I_a^a f)(b) \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{2}{n!} \int_0^1 f((1-t)a + tb) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$u = (1-t)a + tb, du = (b-a)dt, t = \frac{u-a}{b-a}, t = 0 \rightarrow u = a, t = 1 \rightarrow u = b$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n \left(1 - \frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{b-a} = \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \frac{(u-a)^n (b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^n (b-a)^{\alpha-n-1}} \frac{du}{b-a} \\ &= \frac{2}{n!} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(u) (u-a)^n (b-u)^{\alpha-n-1} du = \frac{2}{(b-a)^\alpha} {}^b I_a f(a) \end{aligned}$$

$B(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$  olduğundan,

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} B(n+1, \alpha-n) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)]$$

bulunur. Elde edilenler düzenlenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} n! \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.2 :**  $f \in P(I)$ ,  $a, b \in I$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$ ,  $\beta > 0$  olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} n! \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] \leq 2[f(a) + f(b)]$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** Teorem 2.1 deki ispata benzer şekilde,

$$2[f(at + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} \frac{2}{n!} \int_0^1 f(at + (1-t)b) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt + \frac{2}{n!} \int_0^1 f((1-t)a + tb) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ \geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \end{aligned}$$

$$I_1 + I_2 \geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$$I_1 = \frac{2}{n!} \int_0^1 f(at + (1-t)b) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt$$

$u = at + (1-t)b$ ,  $du = (a-b)dt$ ,  $t = \frac{b-u}{b-a}$ ,  $t = 0 \rightarrow u = b$ ,  $t = 1 \rightarrow u = a$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{2}{n!} \int_b^a f(u) \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n \left(1 - \frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{a-b} \\
 &= \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \frac{(b-u)^n (u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^n (b-a)^{\alpha-n-1}} \frac{1}{b-a} du \\
 &= \frac{2}{n!} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(u) (b-u)^n (u-a)^{\alpha-n-1} du = \frac{2}{(b-a)^\alpha} (I_a^\alpha f)(b) \\
 I_2 &= \frac{2}{n!} \int_0^1 f((1-t)a + tb) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt
 \end{aligned}$$

$u = (1-t)a + tb, du = (b-a)dt, t = \frac{u-a}{b-a}, t = 0 \rightarrow u = a, t = 1 \rightarrow u = b$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n \left(1 - \frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \frac{du}{b-a} = \frac{2}{n!} \int_a^b f(u) \frac{(u-a)^n (b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^n (b-a)^{\alpha-n-1}} \frac{du}{b-a} \\
 &= \frac{2}{n!} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b f(u) (u-a)^n (b-u)^{\alpha-n-1} du = \frac{2}{(b-a)^\alpha} {}^b I_\alpha f(a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!} \beta(n+1, \alpha-n) \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} [I_a^\alpha f(b) + {}^b I_\alpha f(a)]$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n)}{n! \Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{2}{(b-a)^\alpha} [I_a^\alpha f(b) + {}^b I_\alpha f(a)]$$

elde edilir ve böylece birinci kısım ispatlanmış olur.

$f \in P(I)$  olduğundan,

$$f(at + (1-t)b) \leq f(a) + f(b)$$

$$f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b)$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq 2(f(a) + f(b))$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integrallenirse,



$$\begin{aligned}
 \frac{2}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (f(a) + f(b)) dt \\
 &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (f(a) + f(b)) dt \\
 &\leq \frac{2(f(a) + f(b))}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\
 &\leq \frac{2(f(a) + f(b))}{n!} \beta(n+1, \alpha-n) \leq \frac{2(f(a) + f(b))}{n!} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
 \\
 \frac{2}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] &\leq \frac{2(f(a) + f(b))}{n!} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}
 \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3** :  $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ ,  $[a, b]$  üzerinde  $r$ -konveks bir fonksiyon ve  $0 < r \leq 1$  olsun.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] \\
 \leq \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + \frac{1}{r} + 1, \alpha - n\right) + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha + n + \frac{1}{r}\right) \\
 + \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha - n + \frac{1}{r}\right) + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1 + \frac{1}{r}, \alpha - n\right)
 \end{aligned}$$

uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri sağlanır.

**İspat** :  $f$  fonksiyonu  $r$ -konveks ve  $r > 0$  olduğundan  $t \in [0,1]$  için

$$f(at + (1-t)b) \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}$$

$$f(a(1-t) + tb) \leq ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
 f(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + tb) \\
 \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} + ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}
 \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [f(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + tb)] \\ & \leq \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \left[ (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} \right. \\ & \quad \left. + ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} \right] \\ & \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(at + (1-t)b) dt \\ & \quad + \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(a(1-t) + tb) dt \\ & \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} dt \\ & \quad + \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} dt \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{\frac{1}{r}} dt \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left( \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} t^{\frac{1}{r}} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (1-t)^{\frac{1}{r}} f(b) dt \right)^r \\ I_1^* &= \int_0^1 \frac{1}{n!} t^{n+\frac{1}{r}} (1-t)^{\alpha-n-1} f(a) dt = \frac{f(a)}{n!} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}} (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + \frac{1}{r} + 1, \alpha - n\right) \\ I_1^{**} &= \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-1+\frac{1}{r}} f(b) dt = \frac{f(b)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-1+\frac{1}{r}} dt = \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha - n + \frac{1}{r}\right) \\ I_1 &\leq \left( \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n + \frac{1}{r} + 1, \alpha - n\right) \right)^r + \left( \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n + 1, \alpha - n + \frac{1}{r}\right) \right)^r \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 \leq \left( \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (1-t)^{\frac{1}{r}} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} t^{\frac{1}{r}} f(b) dt \right)^r$$

$$I_2^* = \frac{f(a)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1+\frac{1}{r}} dt = \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right)$$

$$I_2^{**} = \frac{f(b)}{n!} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}} (1-t)^{\alpha-n-1} dt = \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n \right)$$

bulunur.

$$I_2 \leq \left( \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right) \right)^r + \left( \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n \right) \right)^r$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(at + (1-t)b) dt \\ & + \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(a(1-t) + tb) dt \leq \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n \right) \\ & + \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right) + \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right) \\ & + \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2 deki  $I_1$  ve  $I_2$  den

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a(f(b)) + \frac{1}{(b-a)^\alpha} {}^b I_\alpha f(a) = \frac{1}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a(f(b)) + {}^b I_\alpha f(a)] \\ & \leq \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n \right) + \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right) \\ & + \frac{f(a)}{n!} \beta \left( n+1, \alpha-n+\frac{1}{r} \right) + \frac{f(b)}{n!} \beta \left( n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n \right) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.4** :  $f \in SX(h, I)$ ,  $a, b \in I$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  olsun.  $h$ -konveks fonksiyonlar için,

$$\begin{aligned}
 f(a+b) &\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a(f(b)) + {}^bI_\alpha f(a)] \\
 &\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} [h(t) \\
 &\quad + h(1-t)] dt
 \end{aligned}$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

**İspat :**  $f$  fonksiyonu  $h$ -konveks olduğundan,

$x = at + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$  ve  $\alpha = \frac{1}{2}$  seçilirse,

$$f\left(\frac{at + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)f(at + (1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right)f((1-t)a + tb)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(at + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)]$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt &\leq \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}h\left(\frac{1}{2}\right)f(at + (1-t)b)dt \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}h\left(\frac{1}{2}\right)f((1-t)a + tb)dt
 \end{aligned}$$

Teorem 2.1 deki ispata benzer şekilde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\beta(n+1, \alpha-n)}{n!} \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a(f(b)) + \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha} {}^bI_\alpha f(a)$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a(f(b)) + {}^bI_\alpha f(a)]$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin birinci kısmı ispatlanmış olur.

$f \in SX(h, I)$  olduğundan

$$f(ta + (1-t)b) \leq h(t)f(a) + h(1-t)f(b)$$

$$f((1-t)a + tb) \leq h(1-t)f(a) + h(t)f(b)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq h(t)f(a) + h(1-t)f(b) + h(1-t)f(a) + h(t)f(b)$$

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı  $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  aralığında  $t$  ye göre integralenirse,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(ta + (1-t)b) dt \\ & + \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f((1-t)a + tb) dt \\ & \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a(f(b)) + \frac{1}{(b-a)^\alpha} {}^b I_\alpha f(a) \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [h(t) + h(1-t)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+b)}{n!} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} & \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a(f(b)) + {}^b I_\alpha f(a)] \\ & \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a) + f(b)]}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [h(t) + h(1-t)] dt \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

### 3. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada bazı önemli kesirli türev ve integral tanımlarına yer verilmiştir. Uyumlu (conformable) kesirli integrali yardımıyla özel tipten fonksiyonlar için önemli kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiştir. Çalışmada elde edilen bu eşitsizlikler farklı yeni kesirli integral tanımları kullanılarak genişletilerek yeni araştırma alanları oluşturulabilir.

### Kaynaklar

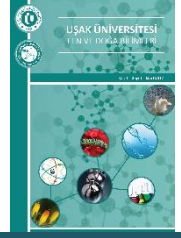
1. Ross B. Fractional Calculus and Its Applications. Springer, Berlin Heidelberg, 1975: 1-385.
2. Khalil R., Al Horani M., Yousef A. & Sababheh M. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014; 264: 65-70.

3. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015; 279: 57-66.
4. Hudzik H. & Maligranda L. Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 1994; 48(1): 100-111.
5. Dragomir S. S. On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2001; 5(4): 775-788.
6. Yıldız Ç., Özdemir M. E. & Önalın H. K. Fractional integral inequalities for different functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2015; 3(2): 110-117.
7. Dragomir S.S. & Fitzpatrick S. The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense, *Demonstratio Mathematica*, 1999; 32(4): 687-696.
8. Set E., Sarıkaya, M. Z., Özdemir M. E. & Yıldırım H. The Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results, *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 2011; 10(2): 69-83.



**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa  
Bilimleri Dergisi**  
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>



*Araştırma Makalesi / Research Article*

## **Düzlem Eğrilerinin Kendi Frenet Vektörlerine Göre Kongrüent Eğrileri**

Halime DAĞAŞAN<sup>1\*</sup>, Yılmaz TUNÇER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uşak, Türkiye

<sup>2</sup>Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uşak, Türkiye

Geliş: 21 Kasım 2019

Kabul: 5 Aralık 2019 / Received: 21 Kasım 2019

Accepted: 5 Aralık 2019

### **Abstract**

In this study, we have defined the congruence curves of planar curves constructed by their own Frenet vectors and examined their properties under some special cases.

**Keywords:** Congruent curves, Frenet frame, plane curve.

### **Özet**

Bu çalışmada düzlemsel eğrilerin kendi Frenet vektörleri yardımıyla oluşturdukları kongrüans eğrileri tanımladık, bazı özel durumlar altında özelliklerini inceledik.

**Anahtar Kelimeler:** Kongrüent eğriler, Frenet çatısı, düzlem eğrisi.

©2019 Usak University all rights reserved.

## **1. Giriş**

Bir  $\alpha(t)$  düzlem eğrisi  $I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^2$  ile tanımlansın.  $\omega(t)$  eğri boyunca, eğrinin her noktasında  $\{T(t_0), N(t_0)\}$  vektörleri ile sıkı sıkıya bağlı bir vektör alanı olsun. Herhangi bir  $t = t_0 \in I$  için  $\{\omega(t_0), \alpha(t_0)\}$  lineer bağımsız olmak üzere  $\omega(t_0)$  vektör alanına göre bir kongrüansı

\*Corresponding author:  
E-mail: dagasanhlm64@hotmail.com

$$\beta(t_0) - \alpha(t_0) \in Sp\{\omega(t_0)\} \Leftrightarrow \alpha(t_0) \equiv \beta(t_0) \pmod{\omega(t_0)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlı bağıntının denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Her  $t_0 \in I$  için tanımlanan denklik bağıntısı ile elde edilen  $\overrightarrow{O\beta(t_0)}$  vektörleri düzlemde yeni bir eğri oluşturur. Oluşan bu eğrinin regüler eğri olma şartı

$$\left. \frac{d\alpha(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + \omega(t_0) \left. \frac{d\lambda(t)}{dt} \right|_{t=t_0} + \lambda(t_0) \left. \frac{d\omega(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \neq 0$$

ile verilebilir.

$\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  üçlüsüne  $\alpha(s)$  eğrisinin Frenet çatısı denir. Burada  $T(s)$ ,  $N(s)$  and  $B(s)$  vektörlerine  $\alpha(s)$  eğrisinin sırasıyla teğet, aslinormal ve binormal vektörleri denir.  $\alpha(s)$  eğrisi için Frenet çatısı

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

bağıntısı ile verilir, burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$  değerlerine eğrinin eğriliği ve torsiyonu(burulması) denir. Bir uzay eğrisi kendisine ait eğrilik ve burulma değerleriyle bellidir [1-3].

## 2. Düzlemsel Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

**Tanım 2.1:**  $\alpha$  eğrisi bir düzlemsel eğri,  $\{T_\alpha, N_\alpha\}$  Frenet vektörleri olsun.  $\alpha$  eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \alpha \in Sp\{T\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \pmod{T}$$

bağıntısı ile tanımlı  $\beta$  vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye  $\alpha$  'nın teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi denir.

$\beta$  eğrisinin yay parametresi  $s^*$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda T_\alpha \quad (2.1)$$

olarak yazabiliriz. (2.1) eşitliğinin her iki tarafının,  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre türevi alınrsa;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda') T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha \quad (2.2)$$

bulunur.  $\beta$  eğrisi birim hızlı eğri olacağından,  $s^*$  ile  $s$  arasında,



$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(1 + \lambda')^2 + \lambda^2 \kappa^2} \quad (2.3)$$

bağıntısı vardır.  $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$  dersek, (2.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(1 + \lambda')}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa}{\sigma} N_\alpha \quad (2.4)$$

halini alır.  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = P T_\alpha + R N_\alpha \quad (2.5)$$

olup burada,  $P = \frac{(\lambda'' - \lambda \kappa_\alpha^2) \sigma - (1 + \lambda') \sigma'}{\sigma^2}$ ,  $R = \frac{(\kappa_\alpha + 2\kappa_\alpha \lambda' + \lambda \kappa_\alpha') \sigma - \lambda \kappa_\alpha \sigma'}{\sigma^2}$  ve dolayısıyla (2.4) ve (2.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 2.1:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$ 'te bir eğri ve  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  ise  $\beta$ 'nin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{(1 + \lambda')}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha \\ N_\beta &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\left\{ (\lambda'' - \lambda \kappa_\alpha^2)^2 + (\kappa_\alpha + 2\kappa_\alpha \lambda' + \lambda \kappa_\alpha')^2 \right\} \sigma^2 + \left\{ (1 + \lambda')^2 + \lambda^2 \kappa_\alpha^2 \right\} (\sigma')^2 - 2 \left\{ \lambda'' + \lambda'' \lambda' - 2\lambda \kappa_\alpha^2 - 3\lambda \lambda' \kappa_\alpha^2 - \lambda^2 \kappa_\alpha \kappa_\alpha' \right\} \sigma' \sigma}$$

ile bellidir.

$\lambda$ 'nin sabit olması durumunda, (2.3) eşitliğinden

$$\sigma = \sqrt{1 + \lambda^2 \kappa_\alpha^2}$$

(2.6) ve (2.7) eşitlikleri  $P = \frac{-\lambda \kappa_\alpha (\kappa_\alpha + \lambda^2 \kappa_\alpha^3 + \lambda \kappa_\alpha')}{\sigma^3}$ ,  $R = \frac{\kappa_\alpha + \lambda^2 \kappa_\alpha^3 + \lambda \kappa_\alpha'}{\sigma^3}$  halini alır

ve  $\beta$  eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_\beta = \frac{1}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa}{\sigma} N_\alpha$$

halini alır. Eğrinin eğriliği ise  $\sigma' = \frac{\lambda^2 \kappa_\alpha \kappa_\alpha'}{\sigma}$  olmak üzere

$$\kappa_\beta = \frac{\varepsilon(\kappa_\alpha + \lambda^2 \kappa_\alpha^3 + \lambda \kappa_\alpha')}{\sigma^2} \quad (2.7)$$

olacaktır. Burada

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & , \text{sgn}(\kappa_\alpha + \lambda^2 \kappa_\alpha^3 + \lambda \kappa_\alpha') = 1 \\ -1 & , \text{sgn}(\kappa_\alpha + \lambda^2 \kappa_\alpha^3 + \lambda \kappa_\alpha') = -1 \end{cases}$$

olacak şekilde işaret değeridir. (2.7) eşitliğinden kolaylıkla görülür ki,  $\alpha$  eğrisi sabit eğrilikli bir eğri olduğunda teğete göre kongrüent eğrisi  $\kappa_\beta = \varepsilon \kappa_\alpha$  eğriliğine sahip bir eğri olup o da sabit eğrilikli olacaktır. O halde şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 2.2:** Düzlemsel sabit eğrilikli  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi de sabit eğrilikli bir eğri olup tersi doğru değildir.

$\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin teğet vektörlerinin dik olması özel durumunda  $\lambda = -s + c$  olup,  $\beta$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin involütü olur ki bu tip eğriler hakkında literatürde çok fazla yayın bulunmaktadır.

### 3. Düzlemsel Eğrinin Kendi Normal Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

**Tanım 3.1:**  $\alpha$  eğrisi bir düzlemsel eğri,  $\{T_\alpha, N_\alpha\}$  Frenet vektörleri olsun.  $\alpha$  eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \alpha \in Sp\{N\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \pmod{N}$$

bağıntısı ile tanımlı  $\beta$  vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye  $\alpha$ 'nın normal vektörüne göre kongrüent eğrisi denir.

$\beta$  eğrisinin yay parametresi  $s^*$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha \quad (3.1)$$

olarak yazabiliriz. (3.1) eşitliğinin her iki tarafının,  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre türevi alınır;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda \kappa_\alpha) T_\alpha + \lambda' N_\alpha \quad (3.2)$$

bulunur.  $\beta$  eğrisi birim hızlı eğri olacağından,  $s^*$  ile  $s$  arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(1 - \lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2} \quad (3.3)$$

bağıntısı vardır.  $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$  dersek, (3.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(1 - \lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma} N_\alpha \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınır;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \quad (3.5)$$

olup burada,  $P = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha')\sigma - (1 - \lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$ ,  $R = \frac{(\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')\sigma - \lambda'\sigma'}{\sigma^2}$  ve dolayısıyla (3.4) ve (3.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 3.1:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$ 'te bir eğri ve  $\alpha$  eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  ise  $\beta$  eğrisinin Frenet elemanları

$$T_\beta = \frac{(1 - \lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma} N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\left\{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha')^2 + (\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\}\sigma^2 + \left\{(1 - \lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2\right\}(\sigma')^2 - 2\left\{\lambda'\lambda'' - \lambda'\kappa_\alpha + \lambda\lambda'\kappa_\alpha^2 - \lambda\kappa_\alpha' + \lambda^2\kappa_\alpha\kappa_\alpha'\right\}\sigma'\sigma}$$

olarak elde edilir.

$\lambda$  'nın sabit olması durumunda, (3.4) eşitliğinden

$$T_\beta = \frac{(1 - \lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha$$

olup, burada  $\sigma = |1 - \lambda\kappa_\alpha|$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur ve Frenet elemanları  $T_\beta = \pm T_\alpha$ ,  $N_\beta = \pm N_\alpha$  ve  $\kappa_\beta = \pm \kappa_\alpha$  şeklinde elde edilir. O halde şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 3.2:** Sabit olmayan eğriliğe sahip  $\alpha$  eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  olmak üzere, eğrilerin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit ise  $\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$  dir.

$\kappa_\alpha$  sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda' N_\alpha - \lambda \kappa_\alpha T_\alpha$$

bulunur. Burada,

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda \kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2}$$

olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınır;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-2\lambda' \kappa_\alpha)\sigma - (1 - \lambda \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2} T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha - \lambda \kappa_\alpha^2 + \lambda'')\sigma - \lambda' \sigma'}{\sigma^2} N_\alpha$$

bulunur. Burada,  $P = \frac{(-2\lambda' \kappa_\alpha)\sigma - (1 - \lambda \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$ ,  $R = \frac{(\kappa_\alpha - \lambda \kappa_\alpha^2 + \lambda'')\sigma - \lambda' \sigma'}{\sigma^2}$  alınır,

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha$$

olup,

$$T_\beta = \frac{(1 - \lambda \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma} N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{PT_\alpha + RN_\alpha}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

ve eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\left\{(-2\lambda' \kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha - \lambda \kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\} \sigma^2 + \left\{(1 - \lambda \kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2\right\} (\sigma')^2 - 2\left\{\lambda' \lambda'' - \lambda' \kappa_\alpha + \lambda \lambda' \kappa_\alpha^2\right\} \sigma' \sigma}$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 3.3:** Sabit eğrilikli  $\alpha$  eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  olmak üzere

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\left\{(-2\lambda' \kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha - \lambda \kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\} - (\sigma')^2}$$

burada,  $\sigma = \sqrt{(1 - \lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2}$  şeklindedir.

Eğer  $\lambda$  ve  $\kappa_\alpha$  sabit ise, bu durumda  $\dot{\beta}(s^*)\sigma = (1 - \lambda\kappa_\alpha)T_\alpha$  olup, burada,  $\sigma = |1 - \lambda\kappa_\alpha|$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin Frenet elemanları  $T_\beta = \pm T_\alpha$ ,  $N_\beta = \pm N_\alpha$  ve  $\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$  şeklinde elde edilir.

#### 4. Düzlemsel Eğrinin Teğet Vektörünün Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

**Tanım 4.1:**  $\alpha$  eğrisi bir düzlemsel eğri,  $\{T_\alpha, N_\alpha\}$  Frenet vektörleri olsun.  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü ile

$$\beta - T \in Sp\{N\} \Leftrightarrow T \equiv \beta \pmod{N}$$

bağıntısı ile tanımlı  $\beta$  vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye  $\alpha$ 'nın teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi denir.

$\beta$  eğrisinin yay parametresi  $s^*$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = T_\alpha + \lambda N_\alpha \quad (4.1)$$

olarak yazabiliriz. (4.1) eşitliğinin her iki tarafının,  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre türevi alınır;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\lambda\kappa_\alpha T_\alpha + (\kappa_\alpha + \lambda') N_\alpha \quad (4.2)$$

bulunur.  $\beta$  eğrisi birim hızlı eğri olacağından,  $s^*$  ile  $s$  arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha + \lambda')^2} \quad (4.3)$$

bağıntısı vardır.  $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$  dersek, (4.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{-\lambda\kappa_\alpha}{\sigma} T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha + \lambda')}{\sigma} N_\alpha \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınır;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \quad (4.5)$$

olup burada,  $P = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha' - \kappa_\alpha^2)\sigma + (\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$  ve  $R = \frac{(\lambda'' + \kappa_\alpha' - \lambda\kappa_\alpha^2)\sigma - (\lambda' + \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$

dolayısıyla (4.4) ve (4.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 4.1:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$  'te bir eğri olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörünün, eğrinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  ise  $\beta$  'nın Frenet elemanları

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{-\lambda\kappa_\alpha}{\sigma} T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha + \lambda')}{\sigma} N_\alpha \\ N_\beta &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha \end{aligned} \quad (4.6)$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\left\{ 4(\lambda')^2 \kappa_\alpha^2 + (\lambda^2 + 1)(\kappa_\alpha')^2 + \kappa_\alpha^4 + 4\lambda' \lambda \kappa_\alpha \kappa_\alpha' + 4\lambda' \kappa_\alpha^3 \right\} - (\sigma')^2 + 2\lambda \kappa_\alpha^2 \kappa_\alpha' + (\lambda'')^2 + 2\lambda'' \kappa_\alpha' - 2\lambda'' \lambda \kappa_\alpha^2 - 2\lambda'' \lambda \kappa_\alpha^2}$$

ile bellidir.

$\lambda$  'nın sabit olması durumunda,

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\lambda \kappa_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha N_\alpha$$

olur burada,  $\sigma = |\kappa_\alpha| \sqrt{1 + \lambda^2}$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\lambda \kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

olur ve

$$T_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha, \quad N_\beta = \frac{(-1)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha \quad \text{ve} \quad \kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 4.2:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$  'te bir eğri olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü eğrisinin,  $\alpha$  eğrisinin normal vektörü boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu  $\beta$  eğrisi  $\alpha$  ile aynı eğrilige sahip bir eğridir.

$\kappa_\alpha$  sabit olması durumunda;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\lambda \kappa_\alpha T_\alpha + (\kappa_\alpha + \lambda') N_\alpha$$

olur. Burada,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sigma = \sqrt{(-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha + \lambda')^2}$$

olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \kappa_\alpha^2)\sigma + (\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2} T_\alpha + \frac{(\lambda'' - \lambda\kappa_\alpha^2)\sigma - (\lambda' + \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2} N_\alpha$$

olup burada,  $P = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \kappa_\alpha^2)\sigma + (\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$  ve  $R = \frac{(\lambda'' - \lambda\kappa_\alpha^2)\sigma - (\lambda' + \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$

$$T_\beta = \frac{(-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha + \lambda')}{\sigma} N_\alpha, \quad N_\beta = \frac{PT_\alpha + RN_\alpha}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

ve

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &4(\lambda')^2 \kappa_\alpha^2 + (\lambda^2 + 1)\kappa_\alpha^4 + 4\lambda' \kappa_\alpha^3 \\ &+ (\lambda'')^2 - 2\lambda'' \lambda \kappa_\alpha^2 - 2\lambda'' \lambda \kappa_\alpha^2 \end{aligned} \right\} - (\sigma')^2}$$

şeklinde elde edilir. Eğer  $\lambda$  ve  $\kappa_\alpha$  sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\lambda\kappa_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha N_\alpha$$

olur burada,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sigma = |\kappa_\alpha| \sqrt{1 + \lambda^2}$$

olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{\kappa_\alpha}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\lambda\kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

bulunur ve

$$T_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{(-1)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

$$\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir. Bu ise sabit eğrilikli  $\alpha$  eğrisinin teğeti vektörü eğrisi ile  $\alpha$  eğrisinin normal boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu  $\beta$  eğrisi de  $\alpha$  ile aynı eğriliğe sahip sabit eğrilikli bir eğri olacağı anlamına gelir.

## 5. Düzlemsel Eğrinin Normal Vektörünün, Eğrinin Teğat Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

**Tanım 5.1:**  $\alpha$  eğrisi bir düzlemsel eğri,  $\{T_\alpha, N_\alpha\}$  Frenet vektörleri olsun.  $\alpha$  eğrisinin normal vektörü ile

$$\beta - N \in Sp\{T\} \Leftrightarrow N \equiv \beta(\text{mod}T)$$

bağıntısı ile tanımlı  $\beta$  vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye  $\alpha$ 'nın normal vektörünün eğrinin teğat vektörüne göre kongrüent eğrisi denir.

$\beta$  eğrisinin yay parametresi  $s^*$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = N_\alpha + \lambda T_\alpha \quad (5.1)$$

olarak yazabiliriz. (5.1) eşitliğinin her iki tarafının,  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre türevi alınır;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (\lambda' - \kappa_\alpha) T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha \quad (5.2)$$

bulunur.  $\beta$  eğrisi birim hızlı eğri olacağından,  $s^*$  ile  $s$  arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(\lambda' - \kappa_\alpha)^2 + \lambda^2 \kappa_\alpha^2} \quad (5.3)$$

bağıntısı vardır.  $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$  dersek, (5.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha \quad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınır;

$$\ddot{\beta}(s^*) = P T_\alpha + R N_\alpha \quad (5.5)$$

olup burada,  $P = \frac{(\lambda'' - \kappa_\alpha' - \lambda \kappa_\alpha^2) \sigma - (\lambda' - \kappa_\alpha) \sigma'}{\sigma^2}$ ,  $R = \frac{(2\lambda' \kappa_\alpha + \lambda \kappa_\alpha' - \kappa_\alpha^2) \sigma - \lambda \kappa_\alpha \sigma'}{\sigma^2}$  ve

dolayısıyla (5.4) ve (5.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

**Sonuç 5.1:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$ 'te bir eğri olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğat vektörüne göre kongrüent eğrisi  $\beta$  ise  $\beta$ 'nin Frenet elemanları  $\alpha$  eğrisinin Frenet elemanları cinsinden



$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha \\ N_\beta &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha \end{aligned} \quad (5.6)$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\left\{ (\lambda'' - \kappa_\alpha' - \lambda \kappa_\alpha^2)^2 + (\lambda' \kappa_\alpha + (\lambda' - \kappa_\alpha) \kappa_\alpha + \lambda \kappa_\alpha')^2 \right\} - (\sigma')^2}$$

şeklindedir.

$\lambda$  'nın sabit olması durumunda,

$$\dot{\beta}(s^*) \sigma = -\kappa_\alpha T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur. Burada,

$$\sigma = |\kappa_\alpha| \sqrt{1 + \lambda^2}$$

olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-\lambda \kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

bulunur ve

$$T_\beta = \frac{-1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-1)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

$$\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 5.2:**  $\alpha$  eğrisi  $IR^3$  'te bir eğri olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin normal vektörü eğrisi ile teğet  $\alpha$  eğrisinin teğeti boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu  $\beta$  eğrisi  $\alpha$  ile aynı eğriliğe sahip bir eğridir.

Eğer  $\kappa_\alpha$  sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*) \sigma = (\lambda' - \kappa_\alpha) T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

olup, burada;

$$\sigma = \sqrt{(\lambda' - \kappa_\alpha)^2 + \lambda^2 \kappa_\alpha^2}$$

olmak üzere;  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi alınırsa,  $\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha$  olup burada,

$$P = \frac{(\lambda'' - \lambda \kappa_\alpha^2) \sigma - (\lambda' - \kappa_\alpha) \sigma'}{\sigma^2}$$

ve

$$R = \frac{(2\lambda' \kappa_\alpha - \kappa_\alpha^2) \sigma - \lambda \kappa_\alpha \sigma'}{\sigma^2}$$

şeklinde dir. Eğrilik değeri de  $\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{(\lambda'' - \lambda \kappa_\alpha^2)^2 + (\lambda' \kappa_\alpha + (\lambda' - \kappa_\alpha) \kappa_\alpha^2)^2} - (\sigma')^2$  olup, Frenet vektörleri

$$T_\beta = \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha,$$

$$N_\beta = \frac{PT_\alpha + RN_\alpha}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

şeklinde elde edilir. Eğer  $\lambda$  ve  $\kappa_\alpha$  sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\kappa_\alpha T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur. Burada,  $\sigma = |\kappa_\alpha| \sqrt{1 + \lambda^2}$  olmak üzere,  $\beta$  eğrisinin ikinci türevi;

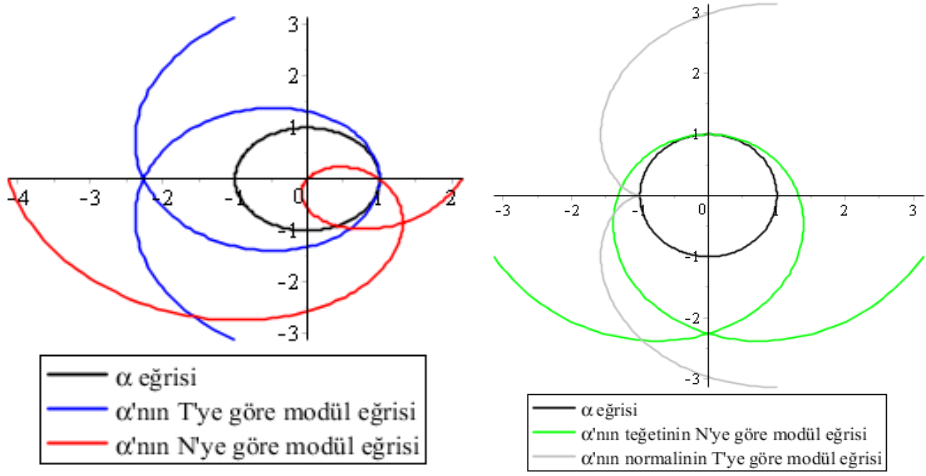
$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-\lambda \kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha$$

olur ve

$$T_\beta = \frac{(-1)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha, \quad N_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-1)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} N_\alpha \quad \text{ve} \quad \kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

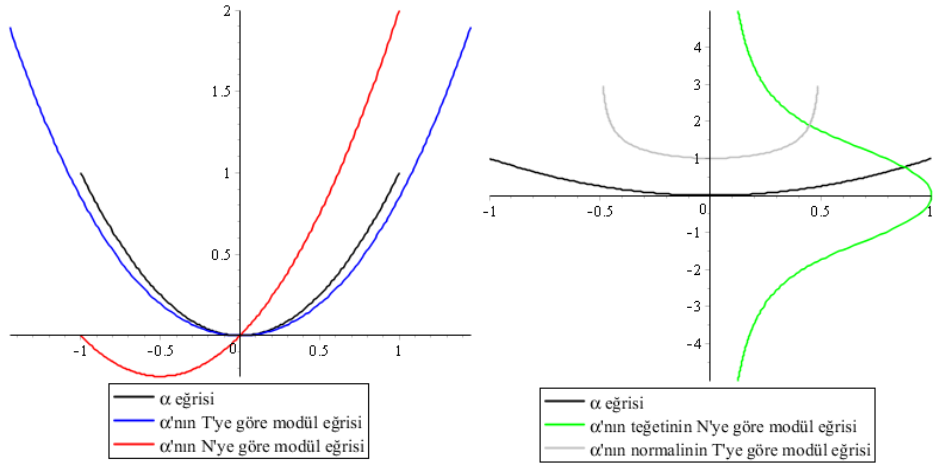
şeklinde elde edilir. Bu ise sabit eğrilikli  $\alpha$  eğrisinin normal vektörü eğrisi ile teğet  $\alpha$  eğrisinin teğeti boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu  $\beta$  eğrisi de  $\alpha$  ile aynı eğrilığe sahip sabit eğrilikli bir eğri olacağı anlamına gelir.

**Örnek 5.1 (Çember):**  $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ ,  $\lambda = t$ ,  $\alpha(t)$  eğrisi, kırmızı, mavi, yeşil ve gri eğriler için  $-\pi \leq t \leq \pi$  alınmıştır.



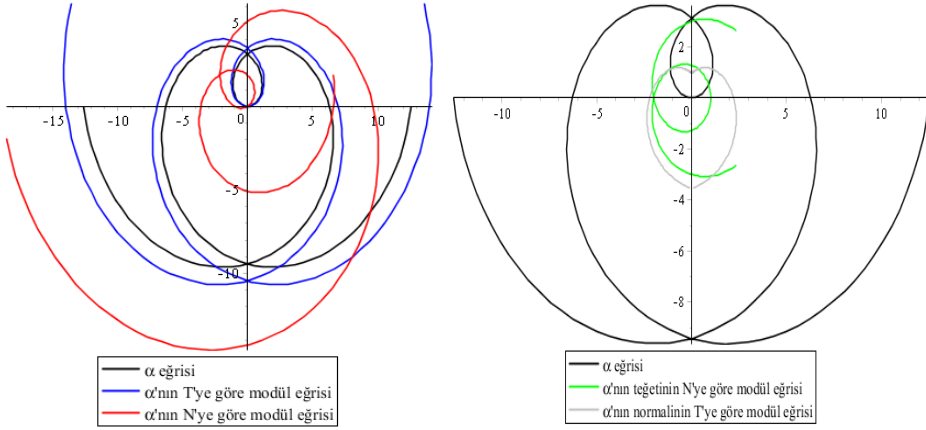
Şekil 1

**Örnek 5.2 (Parabol):**  $\alpha(t) = (t, t^2)$   $\lambda = t$ ,  $\alpha(t)$  eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için  $-1 \leq t \leq 1$ , yeşil eğri için  $-4 \leq t \leq 4$ , gri eğri için  $-2 \leq t \leq 2$  alınmıştır.



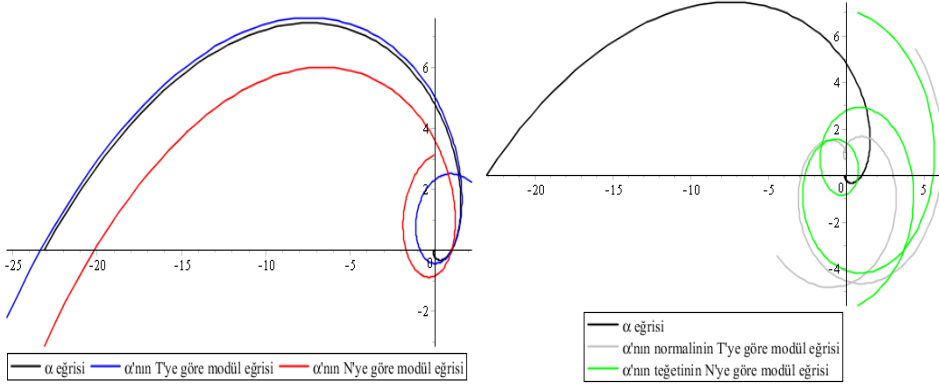
Şekil 2

**Örnek 5.3 (Archimedes spirali):**  $\alpha(t) = (at \cos(t), at \sin(t))$   $a = 1$ ,  $\lambda = t$ ,  $\alpha(t)$  eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ , yeşil ve gri eğriler için  $-\pi \leq t \leq \pi$  alınmıştır.



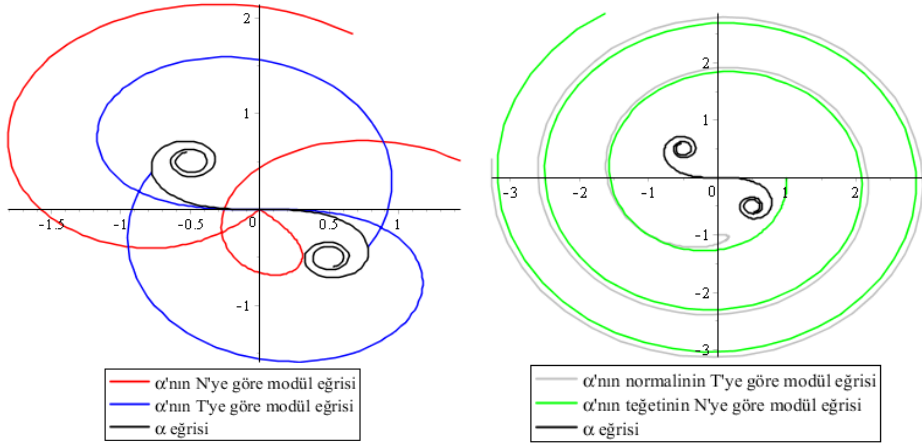
Şekil 3

**Örnek 5.4 (Bernoilli spirali):**  $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$   $\lambda = t$ ,  $\alpha(t)$  eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için  $-\pi \leq t \leq \pi$ , yeşil ve gri eğriler için  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$  alınmıştır.



Şekil 4

**Örnek 5.5 (Cornu spirali):**  $\alpha(t) = \left( \int \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt, \int \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \right)$   $\lambda = t$ ,  $\alpha(t)$  eğrisi için  $-\pi \leq t \leq \pi$ , kırmızı ve mavi eğriler için  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , yeşil ve gri eğriler için  $0 \leq t \leq \pi$  alınmıştır.



Şekil 5

## Kaynaklar

1. Blaschke W. Differential geometrie II. Verlag von Julius springer. Berlin, 1923.
2. Sabuncuoğlu A. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 4. Cilt, 2010.
3. Hacısalihoğlu H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, cilt I, Ankara, 1993.



**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa  
Bilimleri Dergisi**  
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>



*Araştırma Makalesi / Research Article*

## **Characterization of Curves Whose Tangents Intersect a Straight Line in Euclidean 3-Space**

Hatice ÇÜMEN<sup>1\*</sup>, Yılmaz TUNÇER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Uşak University, Science Institute, Department of Mathematics, TURKEY

<sup>2</sup>Uşak University, Science and Art Faculty, Department of Mathematics, TURKEY

Geliş: 21 Kasım 2019

Kabul: 9 Aralık 2019 / Received: 21 Kasım 2019

Accepted: 9 Aralık 2019

### **Abstract**

In this study, we investigated the space curves in Euclidean 3-space whose tangent lines at each point intersect a given straight line passing the origin and intersect a fixed point, and we gave some characterizations in these cases.

**Keywords:** Frenet frame, tangent vector, space curve.

©2019 Usak University all rights reserved.

### **1. Introduction**

The space curves whose principal normals intersecting a given straight line were first investigated by G. Pirondini, and further considered by E. Cesaro [1]. The corresponding question in affine space had been introduced by B. Su in 1929, He classified the curves and gave some remarkable results in affine 3-space by using equi-affine frame [3].

Let  $\alpha: I \rightarrow E^3$  be unit speed curve and  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  is the Frenet frame of  $\alpha(s)$ .  $T(s)$ ,  $N(s)$  and  $B(s)$  are called the unit tangent, principal normal and binormal vectors respectively. Frenet formulae are given by

\*Corresponding author:  
E-mail: haticecumen92@gmail.com

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

where  $\kappa(s)$  and  $\tau(s)$  are called the curvature and the torsion of the curve  $\alpha(s)$ . A space curve  $\alpha(s)$  is determined by its curvature  $\kappa(s)$  and its torsion  $\tau(s)$ , uniquely [2, 4].

## 2. The Space Curves Whose Tangents Intersect a Fixed Line

Let  $\alpha: I \rightarrow E^3$  be a curve with arclength parameter and  $l$  be the line passing the origin. We assume that the tangents lines intersect the fixed  $l$  directed constant and unit vector  $u$  at each point of the curve, then we can write the following relation

$$\alpha(s) + \lambda(s)T(s) = \beta(s)u \tag{2}$$

where  $\beta(s) = \varphi(s)u$  ve  $\varphi(s)$  are the differentiable vector depending  $s$  so since  $\beta(s)$  is a line then we guaranteed  $\beta' \wedge \beta'' = 0$ . By taking the first and the second derivatives of (2), we get

$$(1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s) = \beta'(s)u \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s)\}T(s) \\ + \{\kappa(s) + 2\lambda'(s)\kappa(s) + \lambda(s)\kappa'(s)\}N(s) \\ + \{\lambda(s)\kappa(s)\tau(s)\}B(s) \end{array} \right\} = \beta''(s)u \tag{4}$$

by using (2) and (4). If the tangents of the curve  $\alpha(s)$  intersect a fixed point on  $l$  then,  $\beta' = 0$  and also  $\kappa(s) = 0$  and  $\lambda(s) = -s + c$ . In this case,  $\beta$  is the involute of  $\alpha(s)$ . Conversely,  $\alpha(s)$  is involute of  $\beta$ , then  $\alpha(s)$  is a line intersecting a fixed point of fixed line  $l$ , so following corollary is concerned.

**Corollary 2.1:** The tangents of the curve  $\alpha(s)$  intersect a fixed point if and only if  $\beta$  is the involute of  $\alpha$  and  $\alpha(s)$  is a line.

If  $\beta' \neq 0$  and  $\beta'' = 0$  then from (4), we have

$$\lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s) = 0 \tag{5}$$

$$\kappa(s) + 2\lambda'(s)\kappa(s) + \lambda(s)\kappa'(s) = 0 \tag{6}$$

$$\lambda(s)\kappa(s)\tau(s) = 0 \tag{7}$$

Thus, we can say that there is no solution in the case  $\beta'' = 0$  for  $\kappa(s) \neq 0$  by considering (6), so there is no curve whose tangent lines intersect a fixed line.

Let  $\beta'' \neq 0$  then from (3) and (4), we have

$$(\lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s))\beta'(s) - (1 + \lambda'(s))\beta''(s) = 0 \tag{8}$$

$$(\kappa(s) + 2\lambda'(s)\kappa(s) + \lambda(s)\kappa'(s))\beta'(s) - \lambda(s)\kappa(s)\beta''(s) = 0 \tag{9}$$

$$\lambda(s)\kappa(s)\tau(s) = 0 \tag{10}$$

It is clear from (10) that  $\alpha(s)$  has to be planar, from (8), we get the solution

$$\beta(s) = c_1 + c_2 \int e^{\int \frac{\lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s) ds}{1 + \lambda'(s)}} ds. \tag{11}$$

Rewrite (11) in (9),

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 \{ \kappa(s) + 2\lambda'(s)\kappa(s) + \lambda(s)\kappa'(s) \} (1 + \lambda'(s)) \\ - \lambda(s)\kappa(s) \{ \lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s) \} \end{array} \right\} = 0 \tag{12}$$

and the solution of (12) is,

$$\lambda(s) = \frac{-c_2 \int e^{\int i\kappa(s) ds} ds - \int e^{-\int i\kappa(s) ds} ds - c_1}{c_2 e^{\int i\kappa(s) ds} + e^{-\int i\kappa(s) ds}} \tag{13}$$

Here,  $\lambda(s)$  is the real solution iff  $c_2 = 1$ , so the real solution of (12) is

$$\lambda(s) = -\frac{2 \int \cos(\theta) ds + c_1}{2 \cos(\theta)} \tag{14}$$

and from (11),  $\beta(s)$  is

$$\beta(s) = c_1 + \int e^{\int \phi ds} ds \tag{15}$$

where  $\theta = \int \kappa(s) ds$  and

$$\phi = \frac{\{ 4\kappa^2(s)\sin(\theta) + 2\kappa'(s)\cos(\theta) \} \int \cos(\theta) ds + 2c_1\kappa^2(s)\sin(\theta) + 2\kappa'(s)\cos^2(\theta) + c_1\kappa^2(s)\cos(\theta)}{\kappa(s)\cos(\theta)(2 \int \cos(\theta) ds + c_1)} \tag{16}$$

and  $c_1$  is an arbitrary constant. For any  $c_2$  and nonzero constant  $\kappa(s)$  in (13),  $\lambda(s)$  is



$$\lambda(s) = -\frac{c_2 \sin(\kappa s) + \cos(\kappa s) + c_1}{\kappa(c_2 \cos(\kappa s) - \sin(\kappa s))} . \tag{17}$$

Hence following corollary is concerned.

**Theorem 2.1:** Let  $\alpha(s)$  be a planar curve with non-constant curvature and the tangent lines at each point of  $\alpha(s)$ , intersect fixed line  $l$  then

$$\lambda(s) = -\frac{2\int \cos(\theta)ds + c_1}{2\cos(\theta)}$$

and

$$\beta(s) = c_1 + \int e^{\int \kappa ds} ds$$

where  $\theta = \int \kappa(s)ds$  and

$$\phi = \frac{\{4\kappa^2(s)\sin(\theta) + 2\kappa'(s)\cos(\theta)\} \int \cos(\theta)ds + 2c_1\kappa^2(s)\sin(\theta) + 2\kappa(s)\cos^2(\theta) + c_1\kappa^2(s)\cos(\theta)}{\kappa(s)\cos(\theta)(2\int \cos(\theta)ds + c_1)}$$

**Corollary 2.2:** If  $\alpha(s)$  is a planar curve with constant nonzero curvature and the tangent lines at each points of  $\alpha(s)$  intersect fixed line  $l$ , then

$$\lambda(s) = -\frac{c_2 \sin(\kappa s) + \cos(\kappa s) + c_1}{\kappa(c_2 \cos(\kappa s) - \sin(\kappa s))}$$

and

$$\beta(s) = c_1 + c_2 \int e^{\int \frac{\lambda''(s) - \lambda(s)\kappa^2(s)ds}{1+\lambda'(s)}} ds .$$

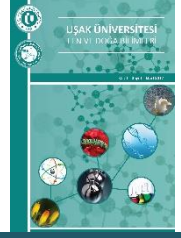
## References

1. Cesàro E. Lezioni di geometria intrinseca. Presso l'Autore-Editore. Napoli, Italy, 1896.
2. Blaschke W. Differential geometrie II. Verlag von Julius springer. Berlin, 1923.
3. Su B. Classes of curves in the affine space. Tohoku Mathematical Journal, 1929; 31: 283-291.
4. Hacısalihoğlu H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, cilt I, Ankara, 1993.



**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa  
Bilimleri Dergisi**  
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>



*Derleme Makalesi / Review Article*

## **Sağlık Çalışanlarında Ergonomik Risklerin Değerlendirilmesi**

Aysel BUZAK<sup>1</sup>, Muhammed AĞUŞ<sup>2</sup>, Gizem CELEP<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup> İş Sağlığı ve Güvenliği Anabilim Dalı, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye

<sup>2</sup> İş Sağlığı ve Güvenliği Anabilim Dalı, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye

<sup>3</sup> İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, Sağlık Yüksekokulu, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye

Geliş: 11 Kasım 2019 Kabul: 2 Aralık 2019 / Received: 11 Kasım 2019 Accepted: 2 Aralık 2019

### **Abstract**

Ergonomics is a science that provides the harmony of the working environment to the employees. Ergonomics is an important factor affecting work life. The main benefits of ergonomics are the preventive and protective approaches of employees against back and waist discomfort. Many studies have been carried out to reduce occupational diseases such as musculoskeletal disorders that are likely to be experienced by employees. Occupational health problems are common among health care professionals. Health care workers are exposed to ergonomic risks depending on the nature of their work. Factors such as standing for long periods, patient transport, and extreme strain create serious problems. Especially intensive care nurses have musculoskeletal problems due to their work such as moving patients. In addition to this, all kinds of medical devices used by healthcare professionals and their design should be evaluated ergonomically. In order to ensure an ergonomic working condition, health personnel must first be informed. All hospital staff should be provided with visual training on correct posture, sitting, getting up and moving patients. Non-ergonomic tools and equipment in the work environment should be replaced with more ergonomic and easy-to-use ones.

**Keywords:** Health care professionals, ergonomics, musculoskeletal, occupational health and safety.

### **Özet**

Ergonomi çalışma ortamının çalışanlara uyumunu sağlayan bir bilim dalıdır. Ergonomi çalışma hayatını etkileyen önemli bir faktördür. Ergonominin sağladığı yararların başında, çalışanların sırt-bel rahatsızlıklarına karşı sağladığı önleyici ve koruyucu yaklaşımlar gelmektedir. Çalışanların yaşamaları muhtemel kas ve iskelet sistemi rahatsızlıkları gibi meslek hastalıklarının azaltılmasına yönelik pek çok araştırma yapılmaktadır. Mesleki sağlık sorunları sağlık çalışanları arasında oldukça yaygın olarak görülmektedir. Sağlık çalışanları yapmış oldukları işin niteliğine bağlı olarak ergonomik risklere maruz kalmaktadır. Uzun süre ayakta çalışma, hasta taşıma, aşırı zorlanma gibi faktörler ciddi sorunlar yaratmaktadır. Özellikle yoğun bakım hemşireleri hastaları hareket ettirme gibi işlerinden dolayı kas ve

\*Corresponding author:

E-mail: [gizem.celep@usak.edu.tr](mailto:gizem.celep@usak.edu.tr)

iskelet sistemi sorunları yaşamaktadır. Bunun yanı sıra sağlık alanında çalışanların kullandıkları her türlü tıbbi araçlar ve tasarımı ergonomik açıdan değerlendirilmelidir. Ergonomik bir çalışma koşulunun sağlanabilmesi için öncelikle sağlık personelin bilgilendirilmesi gerekmektedir. Tüm hastane personeline doğru duruş, oturuş, kalkma ve hasta taşıma gibi konularda görsel eğitim verilmelidir. Çalışma ortamında bulunan ve ergonomik olmayan alet ve ekipmanlar daha ergonomik ve kullanımı kolay olanlar ile değiştirilmelidir.

**Anahtar Kelimeler:** Sağlık çalışanları, ergonomi, kas ve iskelet sistemi, iş sağlığı ve güvenliği.

©2019 Usak University all rights reserved.

## 1. Giriş

Çalışma ve yaşam alanında bulunan insan ile çevre arasındaki düzen, tertip, uyum gibi konuları düzenleyen terim, birçok ülke tarafından ergonomi olarak adlandırılır. Amerika Birleşik Devletleri başta olmak üzere birkaç ülkede ise insan faktörü olarak da bilinmektedir. Çalışma koşullarında sistemli bir düzenle birlikte bedensel ve ruhsal yönden sağladığı yarar göz önüne alındığında çalışma alanlarında ergonomi önemli bir unsur haline gelmektedir. Ergonomik çalışmaların bulunmadığı iş ve işlemlerde çalışanlar yoğun stres altında kalmaktadır [1]. Ergonomi insandan tam bir verim almak amacıyla insani özellikler temel alınarak zorlayıcı veya sınırlandırıcı çalışmalar dikkate alınarak; iş akışında, makinelerde, araç-gereç ve donanımında yapılan çalışmaların geliştirilmesi ve araştırılmasını kapsamaktadır [2].

Çalışma sahasında iş kazalarının neden olduğu yaralanmaları önlerken işten tam bir verim alınması da ergonominin başka bir tanımıdır. Ergonomi insanına maddi ve manevi kazanç sağlayan bir bilim dalı olarak adlandırılabilir [1].

Ergonomi bilim dalı, insan kapasitesinin belirlenip çevre özelliklerinin analiz edilerek performans ve verimin artırılması için yapılması gereken çalışmaları kapsamaktadır. İşyeri içerisinde yapılan ergonomik tasarım değişiklikleri, çalışanın güç ve enerji kullanımını azaltırken psikolojik durumunda olumlu rahatlamalara neden olmaktadır. Ergonominin amacı insanın iş ile tam uyumunun sağlanmasıdır. Bu amaçla insanın günlük yaşamda kullandığı bütün makine, ekipman, teçhizat ve donanımların, insan merkez alınarak şekillendirilmesi sağlanır [3].

Ergonomi disiplinler arası bir bilim dalıdır. Disiplinler arası olması birçok alandan gelişmesine ve yenilenmesine olanak sağlamaktadır. Bu alanlar altı başlıkta toplanmaktadır. Bunlar; insan vücut ölçülerinin referans alınarak sağlıklı çalışma ortamı sunmayı amaçlayan antropometri, çalışma metot ve ortamının insan faktörünün doğal yapısına uygun olmasını amaçlayan fizyoloji, çalışma alanında insana pozitif bakış açısı kazandırmak için ortamda renkler ve düzenle yapılan çalışmaları kapsayan psikoloji, çalışma alanında kolayca iletişim sağlanması amacıyla enformasyon, ara dinlenmeler ve iş akışında çalışanı korumayı amaçlayan organizasyon ve son olarak insanın canlı dokularında iş ve işlemlerin daha uygun ve stres gibi etkileri araştıran bilim dallarıyla ortak çalışır. İş güvenliği, ergonomi gibi disiplinler arası bir bilim dalıdır ve amacı işyerinde var olan veya dışarıdan gelebilecek, tehlike ve risklere karşı çalışanları korumaktır [4].

## 2. İş Sağlığı ve Güvenliği Açısından Ergonomi

Çalışma alanında ergonominin başlıca hedefleri iş kazaları ve meslek hastalıklarının önlenmesidir. Ergonomi insan ve iş arasındaki verimliliği bilimsel olarak ele alır. İşyerinde meydana gelen iş kazaların önemli bir kısmı insan davranışlarından kaynaklanarak

gerçekleşmektedir. İş kazası geçiren çalışanın işyerindeki günlük psikolojik durumu (heyecan, üzüntü, dalgınlık, uyumsuzluk), eğitim seviyesi, dikkatsizliği, tecrübesizliği, ilgisizliği ve el alışkanlığı eksikliği gibi nedenler iş kazalarının başlıca nedenleri arasında yer almaktadır. İş sağlığı ve güvenliği açısından ergonomi çalışma ortamında bir gerekliliktir [5].

### 3. Sağlık Çalışanları ve Ergonomi

Ergonomik sorunlar sağlık çalışanları için büyük bir tehlike arz etmektedir. Sağlık sektöründe çalışanların, verilen hizmetin sürekli ve uzun olması nedeniyle bel ve sırt probleminin yanı sıra kas ve iskelet sistemi rahatsızlıklarına da neden olmaktadır [6].

Sağlık çalışanlarının yaşadığı yakınmalarının çoğu hastayı kaldırma, indirme ve taşıma sırasında vücudu zorlayan ve sık olarak tekrarlanan hareketlerin etkisiyle oluşmaktadır. Bunun yanı sıra sağlık alanında kullanılan ağır ekipman, cihaz ve malzemelerin taşınması da kas ve iskelet sistemi hastalıklarına yol açmaktadır [7].

Yatan hastaların tedavi ve temizliği sırasında sağlık çalışanları sırt ve bel ağrularına maruz kalmaktadır. Ofis ortamlarında çalışan sağlık personellerinin kullandıkları masa ve sandalyelerinin ergonomik olmaması ve uzun çalışma saatleri ve iş yükü gibi faktörler ergonomik sorunlara yol açmaktadır. Sağlık sektörü içerisinde en fazla ergonomik sorunlarla karşılaşmaların başında hemşireler gelmektedir [8].

#### 3.1. Hemşirelerin Çalışma Ortamı ve Karşılaştıkları Ergonomik Riskler

Sağlık hizmeti veren kuruluşlarda çalışan hemşireler hastalarla en fazla etkileşim halinde olan personellerdir. Hemşireler sadece hastaların değil, çevre ve ekipmanın da etkisi altındadır [8]. Hemşireler hastaların taşınması sırasında dikkatli ve özenli olmamaları ciddi ergonomik sorunları beraberinde getirmektedir [9].

Hemşirelik mesleğinde genellikle kadın bireylerin çalışması, ağır hasta ve malzeme taşınmasında ciddi sorunlara neden olmaktadır [10]. Sağlık kurumlarında çalışma ortamı ergonomik gereksinimler dikkate alınarak tasarlanmalıdır [11]. Önleme çalışmalarının başında, uygun hasta taşıma ekipmanı ve ofis ortamları için uygun dizayn edilmiş mobilyaların kullanılması gelmektedir [12].

Ülkemizde hemşire başına düşen hasta sayısı Avrupa ülkelerine kıyasla oldukça fazladır. Bu durum hemşirelerin iş yükünün artmasına, psikolojik ve fizyolojik sorunlara yol açmaktadır. Bu nedenle hemşirelerin mesleklerini icra etmekten kaçındığı ve yoğun stres altında oldukları gözlenmektedir [10,13].

#### 3.2. Yoğun Bakım Personelinin Karşılaştıkları Ergonomik Riskler

Yoğun bakım üniteleri sağlık durumu ağır olan hastaların yaşam fonksiyonlarının izlendiği, özel tedavi gerektiren hastaların kaldığı, teknik donanım açısından son derece ileri teknolojiler ile donatılmış multidisipliner ünitelerdir. Bu bölümde çalışan sağlık personeli, hastaya özel ve ayrıcalıklı hizmet sunmaktadır [14].

Yoğun bakımda yatmakta olan hastaların çoğu, fiziksel hareket ve davranışlardan uzaktır. Bilinçsiz ve yatağa bağlı olan bu hastaların taşınması ve yerinin değiştirilmesi sağlam bir bireyin hareket ettirilmesinden daha güçtür. Sağlıklı bir birey taşıma sırasında hemşirelere yardımcı olacak şekilde bir duruş ve hareket uygulamaktayken, yoğun bakım ünitesindeki hastalar hareket ettirilmek istenen yönün aksine bir kuvvet oluştururlar [15].

Yoğun bakım ünitelerinde anestetik, analjezik ve kas gevşetici ilaçların kullanımı, şuur kaybı ve ventilasyon bozuklukları gibi nedenlerden dolayı, yoğun bakım personeli, hastanın iki saat aralıklarla yerinin değiştirmesi için kullandığı kuvvetten dolayı sırt ve bel sorunları buna bağlı olarak kas ve iskelet sistemi rahatsızlıkları yaşamaktadır. Yoğun bakım ünitelerinde yatmakta olan hastaların tedavileri sırasında hemşirelerin fazla fiziksel güç kullandıkları ve bu nedenle zorlanmaya bağlı kas ve iskelet sistemi rahatsızlıklarının daha fazla görüldüğü gözlenmektedir [16,17].

### 3.3. İşle İlgili Kas-İskelet Rahatsızlıkları

Çalışma ortamının fizyolojik ve biyolojik özellikleri, insan ve çevre arasındaki uyumun bütünleşmesi ile oluşması ergonomiyi güçlendirir. Çalışma ortamında duruş bozuklukları büyük ölçüde kas ve iskelet sistemi rahatsızlıklarına yol açar. Kas ve iskelet sistemi rahatsızlıklarının artması ve buna bağlı olarak tedavi maliyetindeki yükseliş, işveren ve çalışanların önlemler almasını gerektirmektedir. Alınan bu önlemler ergonomi eğitimi, ergonomik tasarlanmış ekipman ve tedavi yaklaşımları konularını içermektedir. Bu yaklaşımlar gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Çalışanların işyerinde aldıkları ergonomik önlemler başta sağlık problemleri olmak üzere iş gücü kayıplarını ve sağlık giderlerini de azaltmaktadır [18].

ABD’de bulunan Ulusal İş Sağlığı Enstitüsü (NIOSH) işle ilgili kas ve iskelet sistemi rahatsızlığı “kas iskelet sisteminde iş kaynaklı oluşan rahatsızlıklar veya hastalıklardır” olarak tanımlanmaktadır [19].

“İşe bağlı kas iskelet sistemi rahatsızlıkları”, “Tekrarlayan zorlayıcı yaralanmalar”, “Birikimsel kamulatif travma hastalıkları” aynı anlamda kullanılmaktadır. Çalışma sırasında meydana gelen zorlama, hareket kısıtlanması ve sakatlanmalar ile başlayan çoğunlukla kaslarda ligamentler, tendon ve yumuşak dokuların hasar görmesi durumuna yol açan işe bağlı hastalıklar, kas ve iskelet sistemi hastalıklarının oluşmasına yol açmaktadır. Erişkin insanlarda her beş kişiden dördü hayatlarının belli bir döneminde ve sıklıkla kırk beş yaşından sonra en az bir kez bel ağrısına maruz kalmaktadır. Çalışan nüfusun yüzde elliye yakını bel ağrısına maruz kalır. Yapılan çalışmalarda çalışanların yüzde sekseninde en az bir kez ani bel ağrısı şikâyeti bulunmaktadır. Bu ağrıların yüzde kırkının kalıcı hale geldiği gözlenmektedir [20,21,22].

Bel ağrıları iş gücü kaybına neden olup, uzun süre tedavi gerektirmektedir. Bel ağrısı çalışanlarda duysal, duygusal, fiziksel bir engelle karşılaşılması nedeniyle sosyo-kültürel bir sorun oluşturmaktadır. Sağlık çalışanlarının birçoğu sırt ve bel sorunlarıyla karşı karşıya kalmaktadır. Bu rahatsızlığın tedavisi bir multidisipliner yaklaşım gerektirmektedir [23,24,25,26].

### 3.4. Sağlık Çalışanlarının Ergonomik Risklerden Korunma Yolları

Sağlık çalışanlarının ergonomik risklerden korunma yollarından biri de çalışma esnasında uygun duruş sergilemesidir. İş Sağlığı ve Güvenliği Ajansı (OSHA) 2010 yılında yayımlanan bir çalışmada uygun duruşlarla ilgili bir rapor yayımlamıştır. Bu rapora göre;

Kol ve omuz açısından: Dirsekler vücuttan uzak tutulmayacak şekilde olmalıdır. Kollar rahat bırakılmalıdır. Çalışma alanı dirsek seviyesine eşit olup, altında veya üstünde olmamalıdır.

Boyun ve baş açısından: Tekrarlanan ve zorlayıcı boyun ve baş hareketlerinden kaçınılmalıdır. Boyun ve baş rahat bırakılmalıdır. Normal pozisyonunda olmalıdır.

Eller ve bilekler: Kol ve bilek doğal duruşunda tutulmalıdır. Kaldırma ve taşıma işlerinde bileğe yüklenmemelidir. Bilekler çevrilmemeli ve zorlayıcı hareketlerden kaçınılmalıdır. Koltuk üzerinde çalışılırken sırt mutlaka desteklenmelidir.

Ayaklar ve bacaklar: Uzun süreli ayakta çalışmaktan kaçınılmalıdır. Ayakları zorlayıcı ve sıkıştırıcı hareketler yapılmamalıdır. Ayak tabanına bir destek konulmalıdır. Uzun süreli çalışmalarda sırt ve bacadaki stresi azaltmak için yorgunluk önleyici paspas kullanılmalıdır.

### 3.4.1 Sağlık Çalışanlarında Ergonomik Riskleri Azaltmak İçin Yapılan Çalışmalar

Sağlık kurumlarında ergonomik riskleri azaltmak için alınabilecek önlemler 3 grupta incelenmektedir.

Bunlar:

1. Mühendislik kontrolleri: Çalışma ortamında bulunan ergonomik riskleri en az seviyeye indirmek ve kalıcı çözümleri bulmak amacıyla yapılan kontrollerdir. İş yerinin yapısı, tasarımı, çalışma ortamı, düzeni sağlayarak ergonomik risklere karşı önlemleri içerir.
2. İdari kontroller: Çalışanlar için iş programlarının yönetim tarafından düzenlenmesini sağlayarak uygun çalışma saatleri iş rotasyonlarını düzenleyerek stratejik yönetim kontrol araçlarının kullanılmasını sağlar. Çalışma ortamında stresi azaltıp iş veriminin artırılmasını amaçlar.
3. Davranış ya da iş uygulamaları kontrolleri: Sağlık sektöründe çalışanların davranışsal olarak eğitim, iletişim ve çalışanlar arasındaki ilişkiyi etkin düzeyde kullanarak görevleri ve yaptıkları işlerdeki davranışların kontrol edilmesidir [27].

## 4. Sonuç ve Öneriler

Sağlık çalışanları ergonomik açıdan birçok tehlike ve risklerle karşı karşıyadır. Bu tehlikeleri azaltmak için çalışanlara; ergonominin tanımı, yol açabileceği sağlık sorunları ve alınabilecek uygun kontrol önlemlerini içeren eğitimler verilmelidir. Bunun yanında çalışma alanlarının uygun antropometrik ölçüler dikkate alınarak tasarlanması ile çalışanlara uygun çalışma ortamı sağlanmalıdır. Ergonomik olmayan donanım ve cihazlar çalışma ortamından uzaklaştırılmalıdır. Sağlık personeli başına düşen hasta sayısı azaltılarak iş verimi artırılmalıdır. Böylelikle iş stresi ve iş yükünün azaltılması sağlanmalıdır.

Hasta taşıma işlemlerinin yoğun olduğu birimlerde çalışanlara kaldırma donanım ve cihazları sağlanmalıdır. Doğru kaldırma ve taşıma eğitimleri verilmelidir. Çalışma süreleri ve dinlenme zamanları düzenlenmelidir. Çalışanlar çalışma ortamında zorlanmamalı ve kendine uygun işlerde çalıştırılmalıdır. Sağlık personelinin çalışma ve oturma planlarının yapılarak yönetim tarafından düzenli aralıklarla kontrol edilmesi sağlanmalıdır.

Hastane yönetimi tarafından çalışma alanlarındaki bütün tehlike ve riskler düzenli aralıklarla kontrol edilmeli ve eksikliklere anında müdahale edilerek koruyucu ve önleyici yaklaşımlarda bulunulmalıdır. Sağlık çalışanları içerisinde ağır ve zorlu işlerde çalışanlar sportif aktivitelere yönlendirilerek kas ve iskelet sistemi rahatsızlıklarına karşı erken önlemler alınmalıdır.

Çalışanlar düzenli aralıklar ile gözlemlenerek ergonomik sorunlara yol açabilecek herhangi bir oluşuma izin verilmemelidir. Risk analizleri, anketler ve kontrol listeleri ile

sürekli olarak çalışma alanı ve çalışanlar takip edilmelidir. Çalışma ortamında bulunan ergonomik riskleri azaltmak amacıyla yönetim tarafından çalışma planı hazırlanmalıdır. Bu planda önleme politikaları ve strateji geliştirme konularına yer verilmelidir.

## Kaynaklar

1. Standers M. MicCormick E. Human Factors in Engineering and Design. England, 1987.
2. Chapanis, A., Mitchell, C., Balen, P. V., & Moe, K. Introduction to Human Factors Consideration in System Design. National Aeronautic and Space Administration. Washington: NASA Conference Publ.2246, 1983.
3. Erkan C. Ergonomi Kavramı, Tarihçesi ve Dayandığı Bilim Dalları. Ergonomi Semineri. Ankara: MPM Yayını (211), 1976, Ekim 26-27: 10-24.
4. Gülçubuk A. Türkiye'de Ergonominin Bugünü ve Geleceği. Verimlilik Dergisi, 1994; 6(61): 4.
5. Özkılıç Ö. İş Sağlığı ve Güvenliği Yönetim Sistemleri Risk Değerlendirme Metodolijileri. (T. Y. 246, Dü.), 2000.
6. Keyserling W. & Armstrong T. Ergonomics and Work-Related Musculoskeletal Disorders. MaxcyRosenau-Last Public Health and Preventive Medicine, 2008: 763-79.
7. Alçelik A., Deniz, F., Yeşildal N., Mayda A., & Şerifi, B. AİBÜ Tıp Fakültesi Hastanesinde Görev Yapan Hemşirelerin Sağlık Sorunları ve Yaşam Alışkanlıklarının Değerlendirilmesi. TSK Koruyucu Hekimlik Bülteni, 2005: 55-65.
8. Karadağ M. & Yıldırım N. Hemşirelerde Çalışma Koşullarından Kaynaklanan Bel Ağrıları ve Risk Faktörleri. Hemşirelik Forumu Dergisi, 2004: 48-54.
9. Botha W. & Bridger R. Anthropometric Variability, Equipment Usability and Musculoskeletal Pain in a Group of Nurses in the Western Cape. Applied Ergonomics, 1998: 481-490.
10. Karadağ A. Yoğun Bakım Ünitelerinin Hemşireler Tarafından Ergonomik Açıdan Değerlendirilmesi. Hacettepe Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Bilim Uzmanlığı Tezi, . Ankara: Yüksek Öğretim Kurulu Dökümantasyon Merkezi , 1994.
11. Fragala G. & Bailey L. Addressing Occupational Strain and Spreins: Muckoloskeletal İnjuries in Hospital. AAOHN Journalsi, Jun, 2003: 252-259.
12. Feuerstein M., Nicholas R., Huang H. & Dim G. Job Stress Management and Ergonomic Intervention for Work Related Upper Extremity Syntoms . Applied Ergonomi., 2004: 565-574.
13. Mollaoğlu M., Kars Fertelli T. & Özkan Tuncay F. Hastanede Çalışan Hemşirelerin Çalışma Ortamlarına İlişkin Algularının Değerlendirilmesi. Fırat Sağlık Hizmetleri Dergisi, 2010; 5(15): 17-30.
14. Arıboğan A. & Bilgen S. Reanimasyon "Kritik=Yoğun Bakım" Kavramı ve Yapılanma Özellikleri.  
Erişim:<http://lokman.cu.edu.tr/anestezi/reanimasyonnot/newpage12.htm>
15. Hedge A. Best Practices for Site-Wide Hospital Ergonomics,. Comell University, Dept Desing&Enviromental Analysis, İthaca, 2007.
16. Aras D. & Uskun E. Hemşirelerin Çalışma Ortamı Riskleri ve Yaşam Yalitesi ile İlişkisi. 2015: 62-69.
17. Yıldırım A. & Hacıhasanoğlu R. Sağlık Çalışanlarında Yaşam Kalitesi ve Etkileyen Değişkenler. Journal of Psychiatric Nursing, 2011: 61-68.
18. Özcan E. & Kesiktaş N. Mesleki Kas İskelet Hastalıklarından Korunma ve Ergonomi. İş Sağlığı ve Güvenliği Dergisi, 2007: 6-9.
19. Berk M., Önal B. & Güven R. Meslek Hastalıkları Rehberi (pp. 1132). Ankara: Çalışma ve Sosyal Güvenlik Bakanlığı, İş Sağlığı ve Güvenliği Genel Müdürlüğü. Ankara, 2011.

20. Esen H. & Fığralı N. Çalışma Duruşu Analiz Yöntemleri ve Çalışma Duruşunun Kas-İskelet Sistemi Rahatsızlıklarına Etkileri. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi , 2013: 41-51.
21. Dıraçoğlu D. Sağlık Personelinde Kas İskelet Sistemi Ağrıları. Türkiye Klinikleri, 2006: 132-139.
22. İlçe A. Study on Work-Related Musculoskeletal Disorders in Intensive Care Unit Nurses., Anatolian Journal of Clinical Investigation, 2014; 8(2).
23. Öngel K. Birinci Basamakta Bel Ağrısı Olan Hastalara Yaklaşım. Aile Hekimliği Dergisi, 2007: 54-58.
24. Simon E. The COPE Program Treatment Efficacy And Medical Utilization Outcome Of A Chronic Pain Management Program At A Major Military Hospital.. Military Medicine , 2000: 954-956.
25. Yılmaz M. Hemşirelerde Çalışma Koşullarından Kaynaklanan Sırt/Bel Ağrıları ve Korunma Önlemleri Sağlık Çalışanlarının Sağlığı. 2. Ulusal Kongresi Özet Kitabı, 2001: 172.
26. Suyabatmaz Ö. (). Kronik Bel Ağrılı Hastalarda Bel Okulunun Etkinliğinin Araştırılması, İstanbul Üniversitesi Fiziksel Tıp ve Rehabilitasyon Uzmanlık Tezi, 2008.
27. Nelson A. & Baptiste A. Evidence-based practices for safe patient handling and movement. Online journal of Issues in Nursing, 2004; 9(3): 4.





**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa  
Bilimleri Dergisi**  
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>



*Derleme Makalesi / Review Article*

## **Tekstil Sektöründe Geri Dönüşüm Olanakları ve Uşak İli'nde Güncel Durum**

Hakan MACİT<sup>1,2\*</sup>, Ayşe Ebru TAYYAR<sup>3</sup>, Ayşe ŞEVKAN MACİT<sup>3</sup>, Gonca  
ALAN<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tekstil Mühendisliği Anabilim Dalı

<sup>2</sup>Çalışma ve İş Kurumu, Uşak İl Müdürlüğü

<sup>3</sup>Uşak Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Tekstil Mühendisliği Bölümü, 64200, Uşak

*Geliş: 1 Kasım 2019*

*Kabul: 11 Aralık 2019 / Received: 1 Kasım 2019*

*Accepted: 11 Aralık 2019*

### **Abstract**

Nowadays, with the developing technology and changing consumption habits, product diversity occurs in every field of the industry. However, the phenomenon of rapid consumption triggers cycles in production processes, increasing raw material utilization and waste generated in these processes. In this study, approaches and methods related to reuse of textile wastes are examined. Information is given about the current studies in the literature about recycling methods and products obtained in different textile production technologies. At the same time, up-to-date data on the current status of recycling facilities in Uşak province were evaluated in textiles. By using textile wastes as raw materials with innovative and high value-added products to be produced, environmental and economic gains will be achieved. Uşak stands out as a pioneer in recycling. Sectoral development will be provided with the roadmaps determined for the studies to be carried out on this subject. As the evaluations made shed light on forward; as in Uşak, the development of the sector is envisaged throughout the country.

**Keywords:** Recycling, waste, textile sector, blanket, Uşak.

### **Özet**

Günümüzde gelişen teknoloji ve değişen tüketim alışkanlıkları ile endüstrinin her alanında ürün çeşitliliği meydana gelmektedir. Bununla birlikte hızlı tüketim olgusu, üretim süreçlerindeki döngüleri tetikleyerek hammadde kullanımını ve bu süreçlerde açığa çıkan atıkları artırmaktadır. Araştırmacılar atık değerlendirme yöntemlerini hem sektörel hem de teknolojik açılardan ele almaktadır. Bu çalışmada özellikle tekstil atıklarının yeniden değerlendirilmesi ile ilgili yaklaşımlar ve yöntemler incelenmiştir. Farklı

\*Corresponding author:

E-mail: hakan.macit@iskur.gov.tr

tekstil üretim teknolojilerinde uygulanan geri dönüşüm yöntemleri ve elde edilen ürünler hakkında literatürde yer alan güncel çalışmalarla ilgili bilgi sunulmuştur. Aynı zamanda Uşak ili özelinde tekstilde geri dönüşüm olanaklarının mevcut durumu hakkında güncel veriler değerlendirilmiştir. Tekstil atıklarının hammadde olarak kullanılmasıyla üretilen yenilikçi ve katma değeri yüksek ürünler sayesinde çevresel ve ekonomik anlamda kazanç sağlanacağı söylenebilmektedir. Uşak geri dönüşüm alanında öncü bir il olmasıyla dikkat çekmektedir. Bu konuda yapılacak çalışmalar için belirlenmiş yol haritaları ile sektörel kalkınma sağlanabilecektir. Yapılan değerlendirmelerin ileriye ışık tutmasıyla; Uşak ilinde olduğu gibi ülke çapında da sektörün gelişmesi öngörülmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Geri dönüşüm, atık, tekstil sektörü, battaniye, Uşak.

©2019 Usak University all rights reserved.

## 1. Giriş

Dünya nüfusunun artışıyla birlikte üretim ve tüketimde meydana gelen yükselme, sınırlı kaynakların korunması ve enerji tasarrufunun sağlanması gibi sebeplerle geri dönüşüm kavramını oldukça önemli hale getirmiştir. Geri dönüşüm, çeşitli kaynaklardan meydana gelen atıkların, tekrar değerlendirilebilmesi için farklı işlem basamaklarından geçerek üretime dahil edilmesi olarak tanımlanabilir. Atıkların depolanması için gerekli olan alanların azalması ve lojistik maliyetlerinin artması gibi sebeplerden dolayı atık bertarafı üreticiler ve tüketiciler açısından zorunlu hale gelmiştir. Bununla birlikte yalnızca çevreyle dost yaklaşımlarla yapılan geri dönüşüm uygulamaları tam anlamıyla faydalı olmaktadır.

2014 yılı verilerine göre Türkiye’de bir yılda oluşan tekstil atığı miktarı yaklaşık olarak 800 bin tondur. Bu atıkların 450 bin tonu elyaf tekstil ürünleri ve 350 bin tonu ise evsel atık kaynaklıdır. Tekstil sektörü ayrıca 2014 yılı Türkiye Tehlikeli Atık Beyan Sistemi (TABS) verilerine göre en çok tehlikeli atık meydana getiren sektörler sıralamasında 8. sıradadır. Gerek çevresel gerek finansal maliyetlerin azaltılabilmesi için tekstil sektöründe geri dönüşümün, tekstil atıklarının geri dönüşümü ile elde edilen malzemelerin ve diğer atıkların geri dönüşümüyle üretilen tekstil üretimi girdilerinin kullanımının yaygınlaştırılması önem taşımaktadır [1].

Tekstil sektörü hem geleneksel hem de teknik alanlarda kullanılacak ürünlere olan ihtiyacı karşılaması bakımından oldukça geniş bir ürün çeşitliliğine sahip olan bir sektördür. Tekstilde başlıca üretim yöntemleri, iplikçilik, örme, dokuma ve dokusuz yüzeyler olarak sayılabilir. Üretim basamaklarında ortaya çıkan veya kullanım sonrası oluşan atıkların yeniden değerlendirilebilmesi bakımından tekstil sektörü geri dönüşüm için en uygun sektörler arasındadır. Bununla birlikte gelişen teknolojik imkanlar dahilinde farklı çeşitlerde üretilen tekstil ürünlerinin geri dönüşümünün sağlanması karmaşık bir çalışma alanı olarak görülmektedir. Bu noktada üretim süreçlerinde ve tüketim sonrası oluşan atıkların, başka bir üretim sürecinin girdisi olacak şekilde yeniden değerlendirilmesi sayesinde tüm sistemin birbirini destekleyen ve atık çıkarmayacak şekilde planlanmasını öngören dögüsel ekonomi yaklaşımı gerçekleşmiş olacaktır [1].



**Şekil1.** Döngüsel ekonomi yaklaşımı [1]

Geri dönüşüm, üretim süreçlerinde (tüketici öncesi) ya da sonrasında (tüketici sonrası) tekstil atıklarının yeniden değerlendirilmesi sonucu tekrar tekstil ya da tekstil dışı ürünler elde edilmesini ifade etmektedir [2]. Geri dönüşüm yöntemiyle tekstil atıkları yeni üretim süreçlerine hammadde veya yarı mamul olarak dahil olabileceği gibi tekstil dışı üretim süreçlerinin atıkları da tekstil üretimine katkı sağlayabilir. Tekstilde geri dönüşüm, literatürde çeşitli sınıflandırmalarla açıklanmaktadır. Bu sınıflandırmalarda geri dönüşüm için kullanılan yöntem, elde edilen geri dönüşüm ürününün son hali ve değeri, elde edilen geri dönüşüm ürünün muhtemel kullanım alanları gibi kavramlar belirleyici olmaktadır. Bu sınıflandırma yöntemleri araştırmacıların çalışmalarına da yön vermiştir.

## 2. Geri Dönüşüm Yöntemleri

Tekstil sektörü açısından bakıldığında geri dönüşümü yapılacak hammaddeler öncelikle ayırma işleminden geçmektedir. Tekrar kullanıma uygun olan ürünler ayırma işleminden sonra ikinci kullanım için uygun şekillerde uygun yerlere ulaştırılmaktadır. Diğer ürünler ise ayırma işleminden sonra çeşitli yöntemlerle geri kazanılabilir hale dönüştürülmektedir. Bu yöntemler mekanik, termomekanik, kimyasal ve enerji dönüşümü yöntemleri olarak sıralanabilir [3].

Mekanik yöntemde, toplanan atıkların kesme, garnet, şifonöz vb. makinalarla parçalama, taraklama ve diğer mekanik işlemler ile tekrar liflere dönüştürülmesi sağlanabilmektedir [4]. Bu yöntemle elde edilen geri kazanılmış atıklar, iplik, dokuma, örme ve dokusuz yüzeylerin üretiminde kullanılabilen lifli bir hale getirilmektedir. Termomekanik yöntemde, atıklar eritilerek granül haline getirilir ve bu granüller plastiklerin ve liflerin üretiminde kullanılır [3]. Kimyasal yöntemde, özellikle sentetik içerikli atıklar, genel itibarıyla kimyasal depolimerizasyon yöntemleri ile hammaddeye veya ara ürüne geri dönüştürülür ve bu yolla elde edilen ürünler çeşitli alanlarda kullanılabilir [3]. Geri kazanılarak tekrar kullanıma uygun olmayan atıklar yakılarak enerji eldesinde kullanılabilir. Bu yöntemler dışında öngörülen yöntemler ise atıkların depolanması, saklanması veya temizlik bezi gibi ürünler olarak kullanılmasını kapsamaktadır [4].

### 3. Geri Dönüşüm Olanakları ve Kullanım Alanları

#### 3.1. Tekstil Dışındaki Sektörlerde Geri Dönüşüm Olanakları

Çeşitli sektörlerde geri dönüşümde ortak amaç; atıkların ayrıştırılıp gerektiği şekilde yeniden kullanımıyla atık çöp miktarının azaltılmasıdır. Farklı maddelerin tekrar kullanılması ve geri dönüşümü tabii kaynakların tükenmesini önlemektedir. Geri dönüşüm yoluyla elde edilmiş ürünlerde endüstriyel işlem sayısı daha az olduğu için bu şekilde enerji tasarrufu da sağlanmış olacaktır. Örnek verilecek olursa; **metal** içecek kutularının geri dönüşümünde metal doğrudan eritilir ve yeni ürün haline dönüştürülür. Dolayısıyla hem üretimde kullanılan maden cevherine hem de madenin saflaştırmasında uygulanan işlemlere gerek kalmaz. Bu yolla elde edilmiş bir alüminyum kutunun geri dönüşümüyle %96 oranında enerji tasarrufu sağlanabilir. Yine bir başka üretim alanından örnek verilecek olursa; katı atıklarda ayrılan kâğıdın geri kazanılması amacıyla yeniden işleme sokulması için gereken enerji normal süreçteki işlemler için gerekli olan enerjinin %50'si kadardır. Benzer şekilde cam ve plastik atıkların geri dönüşümünden de kayda değer miktarda enerji tasarrufu sağlanabilir [5].

Tekstil sektörü dışında; cam, motor yağı, kâğıt, akümülatörler, alüminyum, elektronik atıklar, demir, diğer metaller, ahşap, plastik, solvent bazlı atıklar ve pillerin yaygın bir şekilde geri dönüştürüldüğü bilinmektedir. Bu sayede hem enerji tasarrufu sağlandığı hem de bu ürünlerin yeniden kullanımıyla atık çöp miktarının azaltıldığı görülmektedir [6].

#### 3.2. Tekstil Sektöründe Geri Dönüşüm Olanakları

Geri dönüşüm yöntemleri, uygulanabilirlik ve sürdürülebilirlik açısından hem tekstil dışı sektörlerde hem de tekstil sektöründe geniş kullanım alanı bulmaktadır. Tüm çalışma alanları birlikte ele alındığında Türkiye'de tekstil atıklarının başlıca kullanım alanları aşağıdaki gibi gruplandırılabilir [3]:

- a) Tekstil atıklarından plastik malzeme üretimi.
- b) Polyester esaslı atıkların PET şişelerle beraber, yeniden eritilerek iplik üretiminde kullanılması.
- c) Tekstil atıklarının açılarak elyaf haline getirilmesi.
- d) Atıkların açılarak iplik üretiminde kullanılması (Yaygın olarak open-end iplikçilik)
- e) Atıkların açılarak dokusuz yüzeylerin üretiminde kullanılması

Dokusuz yüzeylerin üretimi kısmında yaygın olarak keçe üretiminden bahsedilebilir. Elde edilen bu dokusuz yüzeyler; keçe olarak yatak, otomotiv tekstillerinde, inşaat sektöründe, kulak pamuğu, temizlik bezleri üretiminde yer almaktadır. Open-end iplik üretiminde elde edilen iplikler ise; döşemelik kumaş üretiminde, triko ve çorap sektöründe, masa örtüsü, kilim, battaniye vb. üretiminde yerini almaktadır [3].

Bahsedilen katı atıkların geri kazanımı dışında, tekstil sektöründe boya ve terbiye işlemleri sırasında geri kazanılan atık suların yeniden kullanımı da söz konusudur. Atık suyun geri kazanımı ve kullanılması konusu tekstil endüstrisi için oldukça caziptir. Tekstil endüstrisi suyun en çok kullanıldığı endüstrilerin başında gelir ve 1 kg kumaş için yaklaşık 200-400 lt su kullanılır [7]. Dolayısıyla hem enerji tasarrufu açısından, hem de ekonomik ve çevresel açılarından bu alandaki atık suların geri kazanımı büyük öneme sahiptir.

Uşak ilinde geri dönüşüm liflerin en yoğun olarak dokusuz yüzey ve battaniye üretiminde kullanıldığı bilinmektedir. Bu noktada boyutları iplik eğirmeye elverişli olmayan geri dönüşüm elyaf, genellikle dokusuz yüzeylerin elde edilmesinde kullanılmaktadır. İplik

eğirme sürecindeki işlemlerde sorun çıkarmayacak durumda olanlar ise iplik haline getirilerek çoğunlukla dokuma battaniye üretiminde kullanılmaktadır. Türkiye’de battaniye üreten şehirler arasında öncü olan Uşak’ta yıllık ortalama 6 milyon adet battaniye üretilmektedir ve bu değer battaniye üretiminde Uşak’ın ülke genelinde %80’lik bir paya sahip olmasını sağlamaktadır [8].

Uşak ili geri kazanım sektöründe başlıca lokasyonlardan biridir. Sektörün daha yüksek karlarla çalışabilmesi, il ekonomisine daha fazla katkı yapabilmesi, ulusal ve uluslararası düzeyde rekabet gücünün artırılabilmesi için hem teknolojik hem de kentsel politikaların geliştirilmesi üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmaların etkinliğinin artırılabilmesi için; geri dönüşüm sektöründeki alım satım işlemlerinde düzenli ve sistematik kayıtların tutulması, elde edilen ürünlerin ulusal ve uluslararası piyasalarda tanınırlığının ve güvenilirliğinin sağlanması için gerekli sertifikasyon işlemlerinin yapılması, katma değeri yüksek nihai ürünlerin üretilmesinin hedeflenmesi, entegre üretim tesisi sayısının artırılması ve bu alanda çalışacak kalifiye iş gücünün sağlanması gerekmektedir [9]. Resim 1’de Uşak ilinde geri dönüşüm ipliklerden dokunan battaniye örnekleri gösterilmiştir.



**Resim 1.** Uşak ilinde geri dönüşüm ipliklerden dokuma battaniye üretimi.

#### **4. Tekstilde Geri Dönüşüm Konusunda Yapılan Çalışmalar**

Geri dönüşüm alanında yürütülen araştırmaların bir kısmı sektörün güncel durumunu çeşitli açılardan inceleyen ve sayısal veriler sunan rapor niteliğinde çalışmalardan oluşmaktadır. Diğer kısmı ise tekstil üretim teknolojilerinde elde edilmiş farklı formlardaki geri dönüşüm ürünlerin kullanım ve dayanım performanslarına yoğunlaşan çalışmalardan oluşmaktadır. Araştırmacılar bu teknik incelemelerde iplik, dokuma, örme, dokusuz yüzeyler, kompozit malzeme üretimi gibi alanlarda çalışmalarını yürütmüşlerdir.

Inoue ve Yamamoto (2004) çalışmalarında Pet şişeden termomekanik yolla geri dönüştürülmüş poliester içerikli dokuma kumaşların kullanım ve dayanım özelliklerini incelemişlerdir. Çalışmaya göre geri dönüşüm poliester içeren kumaşlar geri dönüşüm lif

oranı arttıkça kumaşların daha sıkı bir yapı gösterme eğiliminde olduğu ve bu durumun da eğilme ve kesme dayanım özelliklerini olumlu yönde etkilediğini belirtmişlerdir [10].

Üstün Çetin (2010) çalışmasında orijinal poliester ve rPet (Pet şişeden termomekanik yolla geri dönüştürülmüş poliester) kullanarak farklı karışım oranları ile farklı tülbent katsayılarında iğneleme yolu ile dokusuz yüzey kumaş üretmiştir. Kumaşların yalıtım amaçlı kullanılmasının hedeflendiğini belirten araştırmacı kumaşların mekanik dayanım özellikleri ile geçirgenlik özelliklerini incelemiştir. Dökümlülük, hava geçirgenliği gibi özelliklerde geri dönüşüm lif kullanımının etkisinin önemsiz olduğu belirtilmiştir. Araştırmacı bağıl su buharı geçirgenliğinde %100 rPet hammaddeli ürünün değerlerinin istatistiksel olarak diğer harman karışım oranlarındaki ürünlerden farklı olduğunu rapor etmiştir [11].

Tayyar ve Üstün (2010) çalışmalarında Pet şişelerden geri kazanılmış poliester lifleri hakkında bilgi vermişlerdir. Araştırmacılar plastiklerin tanımlanması ve sınıflandırılması ile ilgili detaylı literatür verisi içeren kısımlara ek olarak çalışmalarında Pet şişelerin geri kazanımını ve geri dönüşüm PET liflerinin tekstilde kullanım olanaklarını izah etmişlerdir. rPET liflerinin tekstil dışı ve tekstil sektöründeki kullanımından bahseden araştırmacılar sürdürülebilirlik açısından geri dönüşüm liflerin kullanımının önemini vurgulamışlardır [12].

Yavaşcaoğlu (2012) çalışmasında atıkların yeniden kullanılması, hammadde veya yararlı ürünler olarak geri kazanımı, geri dönüşümü ve çevre kirliliğine yol açmayacak şekilde yok edilmesi konusunda yapılan çalışmaların öneminden bahsetmiştir. Tekstil sektörünün, en fazla su, hava, kimyasal madde ve enerji tüketen endüstri dalları arasında yer aldığını belirten araştırmacı yaş terbiye işlemlerinin fazla enerji tüketimine yol açtığını, hava ve su kirliliğine sebep olduğunu belirtmiştir. Aynı zamanda iplik eğirme, dokuma, örme ve dokusuz yüzey üretimi basamaklarında oluşan tekstil katı atıklarının da üretim süreçlerine yeniden kazandırılması gerektiğine vurgu yapmıştır [13].

Altun (2012) ülkemizde tekstil ve konfeksiyon katı atıklarının resmi rakamlarla incelenmesi hakkında anketler ve fabrika görüşmeleri içeren analizler yapmıştır. Çalışmada tüketici öncesi atıklar incelendiğinde iplik üretim basamağında değerlendirilmesi mümkün olmayan kısa liflerin ağırlıkta olduğu belirtilmiştir [14].

Rajamanickam ve Vasudevan (2014) çalışmalarında farklı karışım oranlarında Lyocell ve Pet şişeden termomekanik yolla geri dönüştürülmüş elyaf kullanarak iplik elde etmişlerdir. Lyocell ve geri dönüşüm poliester karışımları ile üretilen ring iplikleri mukavemet ve uzama değerleri bakımından tatmin edici nitelikte bulunmuştur. Kitosan ile işlem görmüş tüm karışım iplik numuneleri kontrol gruplarına göre daha iyi antibakteriyel özellikte bulunmuştur [15].

Gün ve arkadaşları (2014) geri dönüşüm liflerden üretilen çorapların boyutsal ve fiziksel özelliklerini incelemiştir. Lif tipinin hava geçirgenliği üzerindeki etkisi oldukça önemli bulunurken patlama mukavemeti üzerinde geri dönüşüm ve orijinal ürünler arasında önemli bir fark gözlenmemiştir. Geri dönüşüm olanların hava geçirgenliği daha düşük ve boncuklanma eğilimi daha yüksek bulunmuştur. Aşınma dayanımında ise kütle kaybı yoluyla yapılan değerlendirmede geri dönüşümden olanlar daha düşük kütle kaybına sahip ve renk dayanımında ise daha yüksek değerlere sahip bulunmuştur [16].

Yelkovan (2015) üretim sürecinde oluşan atıkların değerlendirilmesine detaylı bir örnek teşkil eden çalışmasında, iplik eğirme sürecinden önce meydana gelen halı, şapka ve pnomofil teleflerini kullanmıştır. Bu telefleri ham pamuk ile farklı oranlarda karıştırılmış şekilde kullanarak iplik üretmiştir. Elde ettiği ipliklerin kalite özelliklerini telef cinsi ve kullanım oranını göz önünde bulundurarak incelemiştir. Çalışmanın sonucunda, telef cinsi ve oranının iplik özellikleri üzerinde etkili olduğu, pnomofil telef içeren ipliklerin diğer telef cinslerine göre daha iyi ve telefiz ipliklerle benzer kalite değerlerinde olduğunu gözlemlemiştir [17].

Awais ve arkadaşları (2015) geri dönüştürülmüş PPTA (Poli parafenil tereftal amid) liflerinden kesilmeye karşı dayanıklı eldivenler geliştirmek üzere çalışmışlardır. PPTA, mekanik ve ısıya dayanıklı özelliklere sahip yüksek performanslı bir elyaftır. Orijinal ve geri dönüşüm PPTA liflerinden üretilen kesilmeye dayanıklı örgü yapıdaki eldivenler çelik öz içerecek ve içermeyecek şekilde elde edilerek kullanım performansları incelenmiştir. Geri dönüşüm elyaftan yapılan iplikle mekanik geri dönüşüm sırasındaki fibrilasyona bağlı olarak daha yüksek sürtünme katsayısı sergilemişlerdir. %50 geri dönüşüm lif içeren eldivenler fibrillerden kaynaklı enerji dağılımına bağlı olarak önemli derecede daha iyi kesilme direnci göstermişlerdir [18].

Telli (2016) çalışmasında pamuk, iplik eğirme sürecinde meydana gelen geri dönüşüm pamuk ve geri dönüşüm PET (r-PET) kullanarak iplikler ve bu ipliklerden denim kumaşlar üretmiştir. Araştırmacı, üretilen ipliklerin kullanım performanslarının belirlenmesi için yapılan mekanik dayanım test sonuçlarında karışımlardaki r-PET miktarının artmasıyla kopma dayanımı ve kopma uzamasında artış, düzgünlük, iplik hataları ve tüylülük değerlerinde ise azalma eğilimi olduğunu belirtmiştir. Son ürün halinde bulunan denim kumaşlarda geri dönüşüm pamuk kullanımı kopma ve yırtılma mukavemetinde düşüşe neden olmuştur. Benzer bakışla; r-PET lifinin ise kopma dayanımı, kopma uzaması ve yırtılma dayanımına katkı sağlarken, yumuşaklığı ters yönde etkilediği gözlemlenmiştir [19].

Wanassi ve arkadaşları (2016) geri dönüşüm liflere katma değer sağlayarak düşük maliyetli iplik üretimi üzerinde çalışmışlardır. %50-50 oranında pamuk ve atık pamuk kullanarak farklı numaralarda iplik üretmişlerdir. Bu ipliklerin özellikleri kontrol grubu olarak üretilen %100 pamuk iplikle kıyaslandığında benzer fiziksel özellikler gösterdiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte %100 pamuk ipliği üretim maliyetinden %33,5 daha düşük maliyetle iplik üretimi sağlanmıştır [20].

Gün ve arkadaşları (2016) geri dönüşüm liflerden elde edilen örülmüş çorapların ısı özelliklerini incelemişlerdir. Çalışmada iki tipte iplikten örme kumaş elde eden araştırmacılar birinci tipte geri dönüşüm pamuk ve orijinal poliesterden %50-50 oranında karışım iplik kullanırken ikinci tipteki iplik ise %100 orijinal pamuktan oluşmaktadır. Üretimde çorapların özelliklerinin geliştirilmesi bakımından elastan ipliği de kullanılmıştır. Sonuçta geri dönüşüm liflerden üretilen çorapların ısı iletkenlik ve ısı emicilik değerleri %100 orijinal pamuktan üretilenlere göre daha düşük bulunurken ısı direnç değerleri daha yüksek gelmiştir. Buradan yola çıkarak geri dönüşüm liflerden üretilen çorapların soğuk hava koşulları için ılık hava koşullarına göre daha uyumlu olduğu belirtilmiştir [21].

Khan ve arkadaşları (2017) çalışmalarında koruyucu (kesilmeye dayanıklı) eldiven üretiminde orijinal ve geri dönüşüm kevlar ipliklerini %50 orijinal/%50 geri dönüşüm oranında kullanmışlardır. Denemeler sonucunda 3 katlı ipliklerin eldiven üretiminde sorunsuz çalışabileceğini gören araştırmacılar %50 orijinal/%50 geri dönüşüm Kevlar

hammaddeli eldivenin kesilme direncinin %100 geri dönüşüm Kevlar ile üretilmiş olana göre daha iyi olduğunu belirtmişlerdir [22].

Vadicherla ve Saravanan (2017) mekanik geri dönüşüm poliester pamuk karışımı ipliklerin karakteristik özelliklerini incelemişlerdir. 3 farklı numarada ve kontrol grupları hariç 3 farklı karışım oranında iplik üretmişlerdir. Geri dönüştürülmüş poliester içeriğinin artırılması mukavemet, kopma uzaması ve tüylülüğü artırırken düzgünlüğü, ince yerleri, kalın yerleri ve nepsleri azaltmıştır. Geri dönüşüm poliester oranı, geri dönüştürülmüş poliester / pamuk karışımı ipliğin genel kalitesi üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Geri dönüştürülmüş poliester ve pamuğun harmanlanması, çeşitli son kullanımları karşılamak için optimize edilebilir [23].

Can ve Ayvaz (2017) çalışmalarında tekstil ve moda sektöründe sürdürülebilirlik kavramını ekolojik açıdan ele almışlardır. Araştırmacılar tekstil ürünlerinin kullanım ömrünün daha uzun olmasının ve geri dönüşümünün sağlanabilmesinin sürdürülebilirlik açısından oldukça önemli olduğunu belirtmişlerdir [24].

Türker ve Dönmez (2017) tekstil atıklarının güncel durumu hakkında detaylı veri sunmuşlardır. Araştırmacılar tekstil atıklarının yalıtımla ilgili muhtemel kullanım alanları hakkında bilgi vermişler ve özellikle elektromanyetik kalkanlama hakkındaki çalışmalar üzerinde durmuşlardır. Bu noktada panel yapıda katmanlı kompozit yapıların geri dönüşüm liflerden üretilerek değerlendirilmesi gerektiğini vurgulamışlardır [25].

Rathinamoorthy (2018) konfeksiyonda giysi üretimi sırasında önlenemeyen bir şekilde atık malzeme oluştuğunu belirtmiştir. Konfeksiyonda farklı aşamalarda meydana gelen atık türlerine değinen araştırmacı özellikle kesim sırasında değerlendirilecek atıklar sayesinde sağlanacak maliyet kazancının genel üretimde sağlanacak maliyet kazancını etkileyeceğini vurgulamıştır. Son ürün olarak elde edilen paketlenmiş konfeksiyon ürünün de herhangi bir sebeple satılamaz durumda olması halinde atık olarak değerlendirilebilirliği üzerinde durulmuştur [26].

Atakan ve arkadaşları (2018) çalışmalarında orijinal ve PET şişeden geri dönüşüm rPET kullanılmışlardır. Otomotiv döşemeliği olarak kullanılmak üzere rPET ve orijinal PET liflerinin karışımlarından önceden belirlenmiş üretim ve kalıplama parametrelerinde kumaşlar üretilmiştir. Geliştirilen döşemelikler aşınma dayanımı yönünden karşılaştırıldığında lif kaybı ve görünüş bakımından rPET içeren döşemeliklerin içermeyenlere göre neredeyse aynı performans özelliğinde olduğu gözlenmiştir [27].

Sarıoğlu (2019) çalışmasında Pet şişeden termomekanik yolla geri dönüştürülmüş poliester ve orijinal poliester liflerinden süprem kumaşlar elde etmiştir. Bu kumaşların patlama, hava geçirgenliği ve ıslanma özellikleri üzerinde çalışmıştır. Optimum lif karışım oranına sahip iplikten süprem kumaş üretiminin sağlanabilmesi için ayrıca optimizasyon analizi yapılmıştır. Sonuçta karışım tipi, karışım oranı ve iplik üretim teknolojisinin patlama mukavemeti ve hava geçirgenliği üzerinde istatistiksel olarak önemli etkiye sahip olduğu gözlenmiştir. Araştırmacılar geri dönüşüm poliesterin iplik haline getirilip örme kumaşlarda kullanılmasının tavsiye edilir bir durum olduğunu belirtmişlerdir [28].

Chauhan ve arkadaşları (2019) orijinal ve rPET kullanarak iğneleme yolu ile farklı üretim parametrelerinde dokusuz yüzey kumaşlar üretmişlerdir. Ürünlerin kopma özellikleri incelendiğinde çalışma sonucunda orijinaline kıyasla geri dönüşüm liflerden elde edilen ürünün kopma mukavemeti yalnızca %8-10 daha düşük bulunmuştur [29].



El Wazna ve arkadaşları (2019) tekstil atıklarından yalıtım amaçlı kullanılacak dokusuz yüzeyler elde etmişler ve bunların ısı özelliklerini incelemişlerdir. Akrilik ve yün atıkları içeren kumaşlar iğneleme yöntemi ile üretilerek termofiziksel özellikler bakımından test edilmiştir. Sonuçlara bakıldığında araştırmacılar üretilen geri dönüşümlü dokusuz yüzeylerin geleneksel olanlarla yarışabilecek kadar mükemmel yalıtım özelliği gösterdiğini belirtmişlerdir [30].

Gün ve Öner (2019) çalışmalarında kumaş kırpıntılarında elde edilen atık elyaf yığınının karışık liflerden oluşması ve farklı uzunluklarda lifler içermesinden dolayı iplik üretim sürecinin ve elde edilen iplik kalitesinin olumsuz etkilendiğini belirtmişlerdir. Araştırmacılar bu durumda geri dönüşüm iplik özelliklerinin iyileştirilmesi adına çalışmalarında orijinal poliester ve kumaş kırpıntı liflerini farklı karışım oranlarında kullanarak open end geri dönüşüm iplikler elde etmişlerdir. İplik numarası, karışım oranı, atık elyaf cinsi, büküm katsayısı ve rotor çapı parametrelerinin elde edilecek geri dönüşüm ipliklerin kalite özelliklerine etkisini istatistiksel olarak incelemişlerdir. İstatistiksel sonuçlara göre özellikle karışım oranı, iplik numarası ve büküm katsayısının iplik kalite özelliklerini önemli ölçüde etkilediğini belirtmişlerdir. Karışımlarda orijinal poliesterin iplik kalite özelliklerini iyileştirme yönünde etki yaptığını rapor etmişlerdir [31].

Uyanık (2019) çalışmasında virjin poliester (PET), geri dönüşüm poliester (rPET) ve viskon (CV) liflerini kullanarak Ne 10, Ne 20, Ne 30, Ne 40 olmak üzere 4 farklı iplik numarasında ve %100- %65-35, %50-50, %35-65 karışım oranlarında iplikler elde etmiş ve rPET lifinin hangi iplik numarası ve karışım oranı için daha uygun olduğunu araştırmıştır. Araştırmacı, ipliklere uygulanan testler ve yapılan istatistiksel analiz sonucunda, rPET elyafının, geri kazanımı sırasında oluşan fiziksel ve kimyasal bozulma nedeniyle, özellikle ince ipliklerde iplik özellikleri üzerinde genellikle olumsuz etkileri olduğunu tespit etmiştir. Sonuç olarak rPET lifinin %100 halde ve tüm karışım oranlarında Ne 10 ve Ne 20 gibi kalın numaralı ipliklerde kullanımının uygun olduğunu belirtmiştir. İplik numarası incelendiğinde; Ne 30 için % 65'ten düşük ve Ne 40 için ise % 35'ten daha düşük oranlarda kullanılmasının uygun olduğunu rapor etmiştir [32].

Geri dönüşüm ile ilgili iplik, dokuma, örme ve dokusuz yüzeyler alanında çalışmalar yapıldığı gibi, kompozit alanında da geri dönüşüm konusunda çeşitli çalışmalar yapılmaktadır ve bu alanda da atıkların değerlendirilmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Aral (2009) çalışmasında %100 pamuklu ve %100 poliester (PET) dokuma kumaş atıklarını takviye malzemesi olarak kullanmıştır. Bu malzemelerle doymamış poliester reçine kullanarak kompozit plakalar üretmiştir. Takviye hammaddesinin, kumaşların boyut ve oryantasyonunun ve takviye ağırlık oranının kompozit performansı üzerindeki etkilerini incelediği çalışmada atık kumaş takviyeli kompozitlerin saf reçineye kıyasla kompozit ürünlerin dayanımlarında gelişmeler gözlemiştir [33].

Ahrabi ve arkadaşları (2012) çalışmalarında plastik malzemelerin yeniden kullanımının önemine değinmişlerdir. Atık PET (Polietilen tereftalat) şişelerden elde edilen parçacıkları mermer tozu ile karıştırarak levha halinde değerlendirilmesi mümkün olan kompozit malzeme üretiminde kullanmışlardır. Ürünlerin test sonuçlarında en düşük sertlik değeri katkısız PET örneğinde bulunurken mermer oranının ağırlıkça %30 olduğu örnekte bu değer yaklaşık iki katına yükselmiştir [34].

İlik (2018) çalışmasında ticari değeri düşük olan sanayi atığı şeklinde %100 kenevir, %100 tensel, %100 modal , %100 viskon ve %100 mikro modal hammaddeli beş kumaş kompozitler için takviye malzemesi olarak, epoksi reçineyi ise matris malzemesi olarak

kullanmıştır. Araştırmacı, kompozit üretiminde geleneksel olarak kullanılan kuvvetli elyaflarla kıyaslanamayacak sonuçlara karşın çekme ve basma mukavemetleri yönünden alternatif ekolojik kompozitlerle kıyaslandığında gelişmiş mekanik dayanım istenmeyen (masa sehpa süs eşyaları vb.) uygulamalarda kullanılabileceğini belirtmiştir [35].

## 5. Sonuç ve Öneriler

Günümüzde endüstriyel üretim basamaklarında oluşan ve kullanım sonrası meydana gelen atıkların yeniden değerlendirilmesi ile ilgili çalışmalar hız kazanmıştır. Bu çalışmada tekstil sektörünün farklı üretim aşamalarında oluşan hem üretici hem de tüketici sonrası açığa çıkan atıkların geri dönüşüm yöntemleri ile değerlendirilme olanakları ilgili literatürler ışığında incelenmiştir. Oluşan atıkların boyut, renk, hammadde gibi özelliklerine göre sınıflandırılarak üretim süreçlerine yeniden girdisi sağlandığında alternatif ürünler geliştirilebileceği görülmüştür. Elde edilen geri dönüşüm ürünleri için uygun kullanım alanları ve koşulları belirlenerek çevresel ve ekonomik fayda sağlamak kaçınılmazdır.

Geri dönüşümde, etkin bir tedarik zincirinin oluşturulması ve geri dönüşümü yapılacak ürünlerin sınıflandırılması oldukça önemlidir. Bu noktada geri dönüşüm elyaftan elde edilen ürünlerde kalite ve standartizasyon sağlanabilmesi açısından üretim parametrelerinin arşivlenmesi gerekmektedir. Elde edilen son ürünün fiziksel, kimyasal ve mekanik özelliklerinin tespit edilmesine yönelik araştırmalar ve uygulamalar sayesinde üretimde devamlılık sağlanabilecektir.

Uluslararası rekabet özellikleri değerlendirildiğinde ise Uşak ilinin fiyat ve telef erişim potansiyeli konusunda oldukça avantajlı olduğu ön plana çıkmaktadır. Türkiye tekstil geri dönüşümü sektöründe yaklaşık %80'lik paya sahip Uşak'ta bulunan fabrikalarda yılda 450 bin ton tekstil atığı işlenmektedir. Bu atıklardan elde edilen farklı numara ve hammadde yapısındaki iplikler battaniye üretiminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu noktada geliştirilen ürünlerin özelliklerinin standardizasyonu ve katalog niteliğinde sınıflandırılabilmesi için gerekli çalışmaların yapılması geri dönüşüm ürün sürekliliği açısından önem arz etmektedir [1].

2019 yılı başında çevresel bilincin artırılması adına Uşak'ta geri dönüşüm sektörünün durumunu ortaya koyacak ve kısa-orta-uzun vadede sektöre yol haritası oluşturacak nitelikte bilgilerin olduğu Uşak Tekstil Geri Dönüşüm Sektör Raporu hazırlanmıştır. Uşak ilinde geri dönüşüm üzerine çalışan fabrikalarda ortaya çıkan ürün çeşitliliği öncelik sırasına göre ev tekstili – döşemelik kumaş, dokusuz yüzey (keçe), otomotiv tekstilleri, jeotekstiller, yalıtım malzemeleri, medikal tekstil ürünleri ile antibakteriyel tekstiller olarak belirtilmiştir [1].

Geri dönüşüm ürünlerin elde edilmesinde Uşak ili ürün çeşitliliği ve üretim olanakları bakımından öncü olan bir durumdadır. Atıkların değerlendirilmesi yoluyla atık depolama alanlarının azaltılması çevresel bilince katkı sunmaktadır. Ayrıca geri dönüşümle daha düşük maliyetli yeni ürünlerin elde edilmesi, sektörün sunduğu istihdam olanakları ve nitelikli iş gücünün değerlendirilmesi de bu ilin ülke ekonomisine önemli katkılar sağladığını göstermektedir. Bu katkıların büyüyerek ve gelişerek ilerlemesi adına araştırma geliştirme ve ürün geliştirme (Ar-Ge ve Ür-Ge) çalışmalarının yürütülerek katma değeri yüksek geri dönüşümlü ürünlerin üretilmesi sağlanmalıdır.

## Kaynaklar

1. Zafer Kalkınma Ajansı, Uşak İli Tekstil Geri Dönüşüm Sektör Raporu, 2019.
2. Sandin G. & Peters G. M. Environmental impact of textile reuse and recycling - A review. *Journal of Cleaner Production*, 2018; 184: 353-365.
3. Altun Ş. Tekstil Üretim ve Kullanım Atıklarının, Geri Kazanımı, Çevresel ve Ekonomik Etkileri, Uşak Ticaret ve Sanayi Odası Raporu, 2016.
4. Türemen M., Demir A., Özdoğan E. Tekstil Endüstrisi İçin Geri Dönüşüm ve Önemi, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 2018.
5. Geri Dönüşüm ile Hem Para Kazanılıyor Hem Çevre!  
<http://www.endustriotomasyon.com/tr/icerik/sayfa/geri-donusum-ile-hem-para-kazaniliyor-hem-cevre>, Erişim Tarihi: 25.10.2019.
6. TÜDAM, Geri Dönüşüm Sektörü Teşvik Raporu, Değerlendirilebilir Atık Malzemeler Sanayicileri Derneği, 2016.
7. Yıldız Töre G., Kaykioğlu G., Gürkan R. Membran Teknolojisi İle Geri Kazanılmış Tekstil Atıklarının Ürün Kalitesine Olan Etkisinin Değerlendirilmesi- Mem-Tek, Namık Kemal Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi Bap Proje Kapanış Raporu, 2006.
8. T.C. Ekonomi Bakanlığı, Ekonomik Araştırmalar ve Değerlendirme Genel Müdürlüğü, Uşak İl Raporu, Nisan 2017.
9. Öztürkcan H. B. Uşak Rejenere (Yeniden Üretilmiş) Tekstil Sektörü Değer Zinciri Analizi, Zafer Kalkınma Ajansı, Abigem Uşak. 2015.
10. Inoue M. & Yamamoto S. Performance and durability of woven fabrics including recycled polyester fibers. *Journal of Textile Engineering*, 2004; 50(2): 25-30.
11. Üstün Çetin S. "İnşaat alanında Kullanılan Dokusuz yüzeylerde rPet Performansı", Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak, 2010.
12. Tayyar A. E. & Üstün S. Geri Kazanılmış Pet'in Kullanımı. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 2010; 16(1): 53-62.
13. Yavaşcaoğlu A. Tekstil Katı Atıkları, Katı Atık Oluşumunun Azaltılması ve Geri Kazanımı, *Mesleki Bilimler Dergisi (MBD)*, 1(2), 137-148.
14. Altun S. "Prediction of Textile Waste Profile and Recycling Opportunities in Turkey", *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, 20, 2012; 5 (94): 16-20.
15. Rajamanickam S. & Vasudevan K. Study of antibacterial activity of chitosan on lyocell and recycled polyester yarns. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 2014; 3(2): 9480-9486.
16. Gun A. D., Akturk H. N., Macit A. S. & Alan G. Dimensional and physical properties of socks made from reclaimed fibre. *The Journal of The Textile Institute*, 2014; 105(10): 1108-1117.
17. Yelkovan S. "Pamuk ve Geri Dönüşüm Pamuk Liflerinden Eğrilen İpliklerin Özelliklerinin İncelenmesi", Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, ISPARTA, 2015.
18. Awais M., Tausif M., Ahmad F., Jabbar, A. & Ahmad S. Inclusion of recycled PPTA fibre in development of cut-resistant gloves. *The Journal of The Textile Institute*, 2015; 106(4): 354-358.
19. Telli A. " Geri Dönüşüm Pamuk, R-Pet ve Karışımlarının Denim Kumaş Üretiminde Kullanılması", Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, ADANA, 2016.
20. Wanassi B., Azzouz B. & Hassen M. B. Value-added waste cotton yarn: Optimization of recycling process and spinning of reclaimed fibers. *Industrial crops and products*, 2016; 87: 27-32.
21. Gun A. D., Alan G., & Macit A. S. Thermal properties of socks made from reclaimed fibre. *The Journal of The Textile Institute*, 2016; 107(9): 1112-1121.

22. Khan H., Jamshaid, H., Mishra R., Militky J., & Sramek R. Development of cost effective cut resistant gloves by using virgin and recycled PPTA. *Novelties In Fibrous Material Science*, 273.
23. Vadicherla T. & Saravanan D. Effect of blend ratio on the quality characteristics of recycled polyester/cotton blended ring spun yarn. *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, 2017.
24. Can Ö. & Ayvaz K. M. *Tekstil ve Modada Sürdürülebilirlik*. *Tekstil*, 2017; 1(3): 110-119.
25. Dönmez E. T. & Türker E. *Tekstil Atıkları İçeren Yüzeylerin Sahip Olduğu Elektromanyetik Kalkanlama, Ses ve Isı İzolasyonu Özellikleriyle İlgili Literatür İncelemesi*. *Tekstil ve Mühendis*, 2017; 24(106): 124-135.
26. Rathinamoorthy R., *Sustainable apparel production from recycled fabric waste*. In *Sustainable Innovations in Recycled Textiles*. Springer, Singapore, 2018: 19-52.
27. Atakan R., Sezer S., & Karakas H. Development of nonwoven automotive carpets made of recycled PET fibers with improved abrasion resistance. *Journal of Industrial Textiles*, 1528083718798637, 2018.
28. Sarıoğlu E. An investigation on performance optimization of r-PET/cotton and v-PET/cotton knitted fabric. *International Journal of Clothing Science and Technology*, 2019; 31(3): 439-452.
29. Chauhan V. K., Singh J. P. & Debnath S. Tensile behavior of virgin and recycled polyester nonwoven filter fabrics. *Journal of Industrial Textiles*, 1528083719833976, 2019.
30. Wazna M. E., Gounni A., Bouari A. E., Alami M. E. & Cherkaoui O., Development, characterization and thermal performance of insulating nonwoven fabrics made from textile waste. *Journal of Industrial Textiles*, 2019; 48(7): 1167-1183.
31. Demiroz Gun A. & Oner E. Investigation of the quality properties of open-end spun recycled yarns made from blends of recycled fabric scrap wastes and virgin polyester fibre. *The Journal of The Textile Institute*, 2019: 1-11.
32. Uyanık S. A study on the suitability of which yarn number to use for recycle polyester fiber. *The Journal of The Textile Institute*, 2019; 110(7): 1012-1031.
33. Aral N. "Tekstil Atıklarından Oluşturulan Kompozitlerin Performans Özelliklerinin İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2009.
34. Ahrabi A., Bilici İ. & Bilgesü A. Y. Pet Atıkları Kullanılarak Kompozit Malzeme Üretiminin Araştırılması. *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 2012; 27(3).
35. İlik Z. "Bioliflerden Üretilmiş Atık Tekstil Kumaşların, Kompozit Malzemelerde Takviye Elamanı Olarak Kullanılabilirliğinin Araştırılması", Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa, 2018.