




# Geleneksel olmayan para politikası uygulamaları döneminde Dolar-TL'nin volatilité dinamiklerinin incelenmesi: Asimetrik stokastik volatilité modeline dayalı analizler

Önder Büberkökü

Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Finans Bilim Dalı, Van, Türkiye

[onderbuber@gmail.com](mailto:onderbuber@gmail.com)

 0000-0002-7140-557X

## Öz

Bu çalışmada geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Dolar-TL volatilitésinin temel dinamikleri incelenmiştir. Çalışmada Student t dağılımı varsayımı altında asimetrik stokastik volatilité (ASV) modelinden yararlanılmış ve bu modelin parametrelerinin tahmininde Bayesyen yaklaşımına dayalı MCMC (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) algoritması kullanılmıştır. Çalışma 2 Ocak 2002 ile 29 Eylül 2017 dönemini kapsamakta ve günlük verilerden oluşmaktadır. Çalışma bulguları geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde hem Dolar-TL volatilitésindeki değişkenliğin hem de Dolar-TL kaynaklı finansal riskin geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu döneme göre azaldığını göstermektedir.

**Anahtar sözcükler:** Asimetrik stokastik volatilité modeli, Döviz kuru volatilitésini, Geleneksel olmayan para politikası

## Abstract

### *Examining the volatility dynamics of the US Dollar-Turkish Lira exchange rate in the Turkish period of unconventional monetary policy: An analysis based on the asymmetric stochastic volatility model*

*This study examines the volatility dynamics of the US Dollar-Turkish Lira exchange rate return, focusing specifically on the period when unconventional monetary policies were conducted by the CBRT. ASV under a Student t distribution assumption is used, and the MCMC algorithm based on a Bayesian approach is applied to estimate the parameters of the ASV model. The study consists of daily data and covers the period between 2 January 2002 and 29 September 2017. The results show that compared with the previous period when conventional monetary policies were conducted, both the variability in the log-volatility of the US Dollar-Turkish Lira exchange rate return and the market risk arising from the US Dollar-Turkish Lira exchange rate return volatility decreased in the period when unconventional monetary policies were conducted.*

**Keywords:** Asymmetric stochastic volatility model, Exchange rate volatility, Unconventional monetary policy

## 1.Giriş

2007-2008 döneminde ABD'de başlayan ve ardından Avrupa ekonomilerine yayılan küresel finans krizi, merkez bankalarını geleneksel olmayan para politikası uygulamalarına yönelmiştir. Bu dönem öncesinde uygulanan geleneksel para politikası uygulamalarının temel mantığı kısa vadeli faiz oranları ile fiyat istikrarının sağlanmasına dayanıyordu. Fakat, özellikle küresel finans

krizi sonrasında yaşanan gelişmeler bazı yeni sorunları da gündeme getirmiştir. Birinci sorun krizle mücadele kapsamında gelişmiş ülke merkez bankalarının aşırı gevşek para politikası uygulamalarından kaynaklanıyordu. Çünkü, bu politikalara bağlı olarak oldukça artan ve gelişen piyasa ekonomilerine yönele kısa vadeli sermaye akımlarında ani ve yüksek oranlı değişimler söz konusu olabilmekteydi. İkinci sorun ise küresel finans krizinin yaşanmasının para politikası uygulamalarında sadece fiyat istikrarına odaklanılmasının makro finansal istikrarın sağlanması için yeterli olmayabileceği sonucuna işaret etmiş olmasından kaynaklanıyordu [1, 2]. Bu nedenlerle, küresel finans krizi sonrasında ortaya çıkan yeni dönemde Türkiye gibi gelişen ülkelerin merkez bankalarının hem değişen iktisadi ve finansal koşullara hızlı bir şekilde karşılık verebilen bir para politikası çerçevesi oluşturması gerekiyordu hem de fiyat istikrarının yanı sıra makro finansal istikrarı da gözetmesi bekleniyordu. Bu tür çoklu hedeflerin sadece kısa vadeli faiz oranlarına dayanan geleneksel para politikası uygulamaları ile sağlanması ise pek mümkün değildi. Bu nedenle, TCMB tek para politikası aracı ile tek politika hedefine dayanan geleneksel para politikası uygulamasından, birden çok araca ve birden çok hedefe dayanan geleneksel olmayan para politikası uygulamalarına geçmiştir. Bunun bir sonucu olarak da merkez bankası faiz koridoru, zorunlu karşılıklar (faiz ödemesi, vade farklılaştırması, rezerv opsiyonu mekanizması), haftalık repo faizi ve likidite yönetimine dayanan yeni para politikası araçları ile birer ara değişken olarak tanımladığı kredi ve döviz kuru kanallarını etkileyerek nihai hedefi olan fiyat istikrarı ile finansal istikrarı sağlamaya çalışmıştır [1, 2]. Bu yeni dönemde, döviz kurları makro finansal riski temsil eden parametrelerden biri olarak tanımlanmıştır. TCMB bu durumu döviz piyasalarındaki gelişmelerin cari işlemler dengesi ve finansal krizler ile doğrudan ilişkili olduğunu ifade ederek açıklamaya çalışmıştır [1]. Çünkü, döviz kurlarının yol açtığı yüksek volatilité iktisadi ve finansal dengesizlikleri arttırarak Türkiye gibi gelişen piyasa ekonomilerinde sistematik riskin en belirgin göstergelerinden biri haline gelebilmekteydi [3,4]. Bu nedenle, bu dönemde döviz kuru volatilitesi hem makro finansal istikrarın sağlanmasında ve hem de geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının etkinliğinin belirlenmesinde oldukça önemli göstergelerden biri haline gelmiştir.

Konunun öneminden dolayı, uluslararası yazında 2007-2008 küresel finans krizi sonrasında çeşitli finansal ve/veya iktisadi değişkenler dikkate alınarak geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının etkinliği oldukça yoğun bir şekilde incelenmiştir. [Örneğin, bakınız: 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19,20,21]. Fakat, özellikle ulusal yazında bu konuda henüz oldukça az sayıda çalışma olduğu anlaşılmaktadır [Örneğin bakınız: 22, 23,24]. Daha da önemlisi, uluslararası yazındaki çalışmalar geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının döviz kurları ve / veya döviz kuru volatilitesi üzerindeki etkisini de yoğun bir şekilde incelerken [25,26,27,28,29,30,31,32,33] henüz ulusal yazında bu konuyu dikkate alan da oldukça sınırlı sayıda çalışma olduğu gözlemlenmektedir. Bu sınırlı sayıdaki çalışmalardan birinde Kara [2] geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Türk Lirası'nın diğer gelişen ülke para birimlerine kıyasla göreceli olarak daha az volatil hale geldiğini ifade etmiştir.

Bu çalışmanın amacı geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Dolar-TL 'nin volatilitésinin temel karakteristik özelliklerinin asimetric stokastik volatilité modeli ile incelenmesidir. Böylece politika yapıcılar tarafından beklenildiği gibi ilgili dönemde döviz kuru volatilitésinin geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu döneme göre daha makul bir seyir izleyip izlemediği araştırılmıştır.

Çalışmanın literatüre üç temel katkısının olduğu düşünülmektedir. Bunlardan birincisi, ulusal yazında henüz, TCMB'nin geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde döviz kuru volatilitésinin temel dinamiklerini inceleyen yeterince çalışma olmadığı anlaşılmaktadır. Bir diğer ifade ile bu konunun ulusal yazında henüz özellikle ampirik analizlere dayalı olarak yeterince incelenmediği ifade edilebilir<sup>1</sup>. İkincisi, ulusal yazında finansal varlıkların volatilité dinamiklerini inceleyen çalışmaların baskın bir şekilde GARCH modellerini kullandıkları bilinmektedir. Dolayısıyla, ulusal yazında ASV modeline dayalı çalışma sayısının oldukça sınırlı olduğu ve bu çalışmaların da oldukça baskın bir şekilde hisse senedi piyasalarına odaklandığı ifade edilebilir [Bu konuda ulaşılabilen çalışmalar için bakınız: 34, 35, 36, 37]. Bu çalışmada ise döviz kurunun volatilité dinamikleri üzerinde durulmuş ve bu amaçla t dağılım varsayımı altında asimetrik stokastik volatilité modeli kullanılmıştır. Ayrıca, ASV Student modelinin parametrelerinin tahmininde Bayesyen yaklaşımına dayalı MCMC (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) algoritmasından yararlanılmıştır. Üçüncüsü, çalışmada döviz kuru volatilitésinin yol açabileceği finansal risk düzeyini hesaplayabilmek amacıyla ASV modeli tarafından üretilen zamanla değişen stokastik volatilité değerlerine bağlı olarak VaR (Value-at-risk, VaR) ve ES (Expected shortfall, ES) değerleri hesaplanmıştır. Ulusal yazındaki çalışmalara bakıldığında ise VaR ve ES değerlerinin hesaplanmasında baskın bir şekilde GARCH bazlı parametrik yöntemler ile Tarihi simülasyon yönteminin kullanıldığı görülmektedir.

Bu çalışmanın ASV modeli üzerine odaklanılmasının bazı önemli nedenleri bulunmaktadır. Öncelikle, literatürde ASV modellerinin genel yapısının GARCH modellerinin genel yapısına göre finansal teorilerinin ekonometrik altyapısı ile daha uyumlu olduğu ifade edilmektedir [38,39,40]. İkincisi volatilitéyi “gözlemlenebilir” bir değişken olarak modelleyen GARCH modellerinin aksine ASV modelleri volatilitéyi “gözlemlenemeyen” bir değişken olarak modellemektedir. ASV modellerinin volatilitéyi “gözlemlenemeyen” bir değişken olarak modellemesinin temel nedeni ise finansal varlık fiyatlarının piyasaya gelen “bilgi akışının” bir sonucu olarak değiştiği ilkesidir [41,40]. Bu yaklaşım da genel olarak finansal değişkenlerin piyasa fiyatlarının oluşum süreçleri ile daha uyumlu bir yaklaşımdır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde veri ve metodoloji yer almakta üçüncü bölümde bulgular değerlendirilmekte dördüncü bölümde ise sonuç kısmı bulunmaktadır.

## 2. Veri ve Metodoloji

### 2.1. Veri

Çalışma, 2 Ocak 2002 ile 29 Eylül 2017 dönemini kapsamakta ve günlük verilerden oluşmaktadır. Dolar-TL'ye ilişkin veriler TCMB veri tabanından temin edilmiştir. Çalışmanın başlangıç yılının 2002 yılı olarak seçilmesinin iki önemli nedeni bulunmaktadır. Bunlardan birincisi 2001 Şubat krizi sonrasında dalgalı kur rejimine geçilmiş olması ikinci ise geleneksel enflasyon hedeflemesine 2002 yılında başlanmış olmasıdır. Merkez bankasının geleneksel olmayan para politikası uygulamalarına geçiş tarihi olarak ise Küçük vd.'nin [42] “TCMB Ekonomi Notları” kapsamında yayımlanan çalışmalarında olduğu gibi 18 Mayıs 2010 tarihi esas alınmıştır. Bunun temel nedeni ise TCMB 'nin bu tarihte para politikası uygulamalarında yaptığı operasyonel değişiklik ile politika faizi olarak gecelik borçlanma faizi yerine bir hafta

<sup>1</sup> Bu konuda ulaşılabilen çalışmalardan biri için bakınız: Kara [2].

vadeli repo faizini kullanmaya başlaması ve böylece araç çeşitliliğine giderek faiz koridorunun üst ve alt bandı ile bir hafta vadeli repo faizini farklı politika hedefleri kapsamında kullanmaya başlamasıdır [42]. Dolayısıyla, bu çalışmada Ocak 2002 ile 18 Mayıs 2010 arası dönem geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem, 20 Mayıs 2010 ile 29 Eylül 2017 arası dönem ise geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem olarak tanımlanmıştır.

## 2.2. Metodoloji

Bu çalışmada Omori vd. [43] tarafından geliştirilen Student t dağılım varsayımına sahip ASV modelinden yararlanılmıştır. Buradaki asimetri kavramı döviz kurlarının getirisi ile volatilitesi arasındaki pozitif asimetric ilişkiyi ifade etmektedir. Bir diğer ifade ile döviz kuru getirisindeki bir artış (Doların TL karşısında değer kazanması) ilgili para biriminin volatilitesinde bir artışa yol açarken, döviz kuru getirisindeki bir azalış (Doların TL karşısında değer kaybetmesi) ilgili para biriminin volatilitesinde bir azalışa yol açmaktadır. Fakat, getirideki artışın volatilité üzerindeki etkisi getirideki aynı büyüklükteki bir düşüşün volatilité üzerindeki etkisinden daha fazla olmaktadır. Bu durumun teorik nedeni ise Türkiye gibi gelişen piyasa ekonomilerinin döviz cinsinden önemli oranda dış borcu bulunmasına dayanmaktadır. Çünkü, döviz kurlarında yaşanan yukarı yönlü hareketler ülkenin dış borcunun yerel para birimi cinsinden artmasına yol açmaktadır. İlgili ülke para birimi değer kaybettiğçe de ekonomi için risk daha da arttığından bu durum volatilitenin de artmasına yol açmaktadır. Yerel para biriminin değer kazanması ise genelde hem değer kaybetme durumuna göre daha az yaşanmakta hem de değer kazanç oranı daha düşük seviyelerde kalabilmektedir. Bu nedenle döviz kuru getirilerindeki azalışın (TL'nin değer kazanmasının) volatilité üzerindeki azaltıcı etkisinin göreceli olarak daha sınırlı kaldığı ifade edilebilir [44].

Daha önce ifade edildiği gibi bu çalışmanın amacı geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde döviz kuru volatilitésinin temel karakteristik özelliklerinin incelenmesidir. Çalışmada bu amaçla iki farklı yaklaşım sergilenmiştir. Bunlardan birincisi ASV modelinin parametrelerinin yorumudur. Çünkü, bulgular kısmında ayrıntılı bir şekilde gösterileceği gibi, ASV modelinin parametreleri döviz kurlarının volatilité dinamikleri konusunda önemli bilgiler sunmaktadır. İkinci yaklaşım ise ASV modeli tarafından sunulan zamanla değişen stokastik volatilité değerlerine bağlı olarak ilgili döviz kurundaki hareketlerin yol açabileceği finansal risk düzeyinin ölçülmesidir. Çünkü, örneğin geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde döviz kurlarının yol açtığı piyasa riskinin geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu döneme göre daha az olması, döviz kuru volatilitésinin yol açabileceği risklerin göreceli olarak azaldığı anlamına gelecektir. Bu da TCMB'nin döviz kuru volatilitésinin yol açabileceği riskleri azaltma yönündeki politika uygulamalarının başarılı olduğunun bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

Bu kapsamda, bu çalışmada ilk olarak ASV modeli tahmin edilmiş ve ASV modelinin parametrelerinin döviz kuru volatilitesi konusunda sunduğu bilgiler yorumlanmıştır. Ardından, ASV modelinden elde edilen stokastik volatilité değerine bağlı olarak döviz kurundaki hareketlerin yol açabileceği piyasa riski VaR ve ES modelleri ile hesaplanmıştır. VaR modelleri belli bir güven düzeyinde finansal piyasalarda taşınan bir pozisyonun bir gün sonraki maksimum kayıp tutarının ne olabileceğini hesaplayabilen modellerdir [45]. ES modeli ise ilgili güven düzeyinde gerçekleşen kayıp tutarlarının VaR modelince öngörülen kayıp tutarlarını aşması

durumunda piyasa riskinin yol açabileceği kayıp tutarlarının hangi seviyelere ulaşabileceğini göstermektedir [46].

### 2.2.1. Student t dağılım varsayımı altında ASV modelinin tahmin edilmesi

Konunun daha net açıklanabilmesi amacıyla öncelikle normal dağılım varsayımına sahip standart SV modelinin genel yapısı Denklem (1) ve (2)'de gösterilmiştir [43]:

$$y_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right), t = 1, \dots, n$$

(1)

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, t = 0.1, 2, \dots, n - 1$$

(2)

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Burada, Denklem (1) gözlem (observation) denklemini, Denklem (2) ise dönüşüm (translation) denklemini göstermekte ve

$y_t$ , ilgili finansal varlığın getirisini;

$h_t$ ; gözlemlenemeyen logaritmik volatilité değeri;

$\phi$ , volatilité kalıcılığı parametresini;

$\mu$ , logaritmik volatilitenin ortalama değeri;

$\varepsilon_t$  ve  $\eta_t$  ise sırasıyla gözlem ve dönüşüm denklemlerinin tesadüfi hata terimlerini göstermektedir.

Asimetrik tepkinin dikkate alınması durumunda ise ASV modeli Denklem (3) ve (4)'teki gibi ifade edilmektedir [43]:

$$y_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right), t = 1, \dots, n$$

(3)

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, t = 0.1, 2, \dots, n - 1$$

(4)

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma) \text{ ve } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Burada,  $\sigma^2$  logaritmik volatilitenin volatilitesini;  $\rho$  ise asimetri parametresini ifade etmektedir.

Literatürde finansal zaman serilerinin dağılımının standart normal dağılımdan ziyade kalın kuyruk (fat tail) özelliği sergileyen dağılım varsayımlarına daha yakın olduğu yönündeki genel bulgular dikkate alındığında, bu özelliği dikkate alan log-normal dağılım varsayımına dayalı ASV modeli Denklem (5) ve (6)'da gösterilmiştir:

$$y_t = \sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right), t = 1, \dots, n$$

(5)

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, t = 0.1, 2, \dots, n - 1$$

(6)

Burada,  $\lambda_t$ , i.i.d özelliğine sahip ölçek karışım değişkenini (scale mixture variable) göstermekte ve Denklem (7)'deki gibi tanımlanmaktadır:

$$\log \lambda_t \sim N(-0.5 \tau^2, \tau^2)$$

(7)

Böylece  $\sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t$  log-normal dağılıma sahip olmaktadır. Burada,  $\tau^2$  değişkeni  $\tau^2 \sim \text{Gamma}(1,1)$  şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tanımlamalar ile Denklem (8)'e ulaşılmaktadır:

$$y_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right), t = 1, \dots, n$$

$$h_t = h_{t+1}^* + \lambda_t$$

$$h_{t+1}^* = \mu + \phi (h_t^* - \mu) + \eta_t, t = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

(8)

Burada,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \tau^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma & 0 \\ \rho\sigma & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 \end{pmatrix} \right) \text{ olmaktadır.}$$

ASV modelinin, kalın kuyruk özelliğinin dikkate alınmasında literatürde ve uygulamada oldukça yaygın bir şekilde kullanılan Student t dağılım varsayımı altında tahmin edilmesi gerektiğinde ise  $v \sim \text{Gamma}(16, 0.8)$  şeklinde tanımlanmaktadır. Böylece  $\sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t$  de  $v$  serbestlik derecesi ile Student t dağılımına uymaktadır.

Çalışmada Student t dağılım varsayımı altında ASV modelinin parametreleri tahmin edilirken ilgili literatürün geneli ile uyumlu olacak şekilde Bayesyen yaklaşımına dayalı MCMC algoritmasından yararlanılmıştır. Fakat, ASV modelinin parametreleri tahmin edilmeden önce ASV modelinin parametreleri için başlangıç değerlerinin (prior values) ve dağılım varsayımlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada literatürle uyumlu bir şekilde [Örneğin bakınız: 47,48,43,49,50,51,44]. Tablo 1 ve 2’de gösterilen başlangıç değerlerinden ve dağılım varsayımlarından yararlanılmıştır.

**Tablo 1.** ASV model parametreleri için kullanılan başlangıç değerleri

Parametreler	Başlangıç değerleri
$\phi$	0.95
$\sigma$	0.15
$\mu$	-9
$\rho$	0.5
$v$	15

**Tablo 2.** ASV model parametreleri için kullanılan dağılım varsayımları

Parametreler	Dağılım varsayımı	Dağılım parametrelerinin tanımlanması
$(\phi + 1)/2$	Beta dağılımı	$\sim \text{Beta}(20, 1.5)$
$\sigma^2$	Ters gamma dağılımı	$\sim \text{Ters-Gamma}(2.5, 0.025)$
$\rho$	Üniform dağılım	$\sim U(-1, 1)$
$\mu$	Normal dağılım	$\sim N(-10, 1)$
$v$	Gamma dağılımı	$\sim \text{Gamma}(16, 0.8) \mid v > 4$

Tablo 2’de  $(\phi + 1)/2$  parametresine ilişkin Beta dağılımının Beta (20, 1.5) şeklinde tanımlanması,  $\phi$  parametresinin (prior ) ortalama ve varyans değerlerinin 0.86 ve 0.1074 olarak belirlendiği anlamına gelmektedir. Bu parametre için beta dağılımının seçilmesi ise  $\phi$  parametresinin 1’in altında ama 1’e yakın bir değer olarak tanımlanmasından kaynaklanmaktadır.  $\sigma^2$  parametresine ilişkin ters-Gamma dağılımının ters-Gamma (2.5, 0.025) şeklinde tanımlanması,  $\sigma^2$  parametresinin ortalama ve varyans değerlerinin 0.0167 ve 0.0236 olarak belirlendiği anlamına gelmektedir. Bu parametre için ters-Gamma dağılımının seçilmesi

logaritmik volatilitenin volatilitésinin pozitif ve göreceli olarak çok yüksek olmayan değerler alacak şekilde tanımlanmasından kaynaklanmaktadır.  $\rho$  parametresine ilişkin üniform dağılımın  $U(-1, 1)$  şeklinde tanımlanması ise  $\rho$  parametresinin  $+1$  ile  $-1$  arasında değişen değerler alabileceği anlamına gelmektedir [47,49,52].

### 2.2.2. ASV modelinden elde edilen stokastik volatilité değerleri ile finansal riskin ölçümü

ASV modeli tahmin edildiğinde zamanla değişen şartlı stokastik volatilité değerleri ( $h_{t+1}$ ) elde edilmektedir.  $h_{t+1}$  değeri kullanılarak stokastik volatilitenin yol açabileceği piyasa riski ise VaR modelleri ile Denklem (9)'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

$$ASV - VaR_{t+1} = \mu_t + z_\alpha h_{t+1}$$

(9)

Burada  $\mu_t$ , şartlı ortalama getiriyi;  $z_\alpha$ , Student t dağılımının çeşitli güven düzeylerindeki kritik tablo değerlerini;  $h_{t+1}$  ise ilgili ASV modelinden elde edilen şartlı stokastik volatilité değerini ifade etmektedir.

ASV-ES değerleri ise Denklem (9)'daki VaR değerleri dikkate alınarak Denklem (10)'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

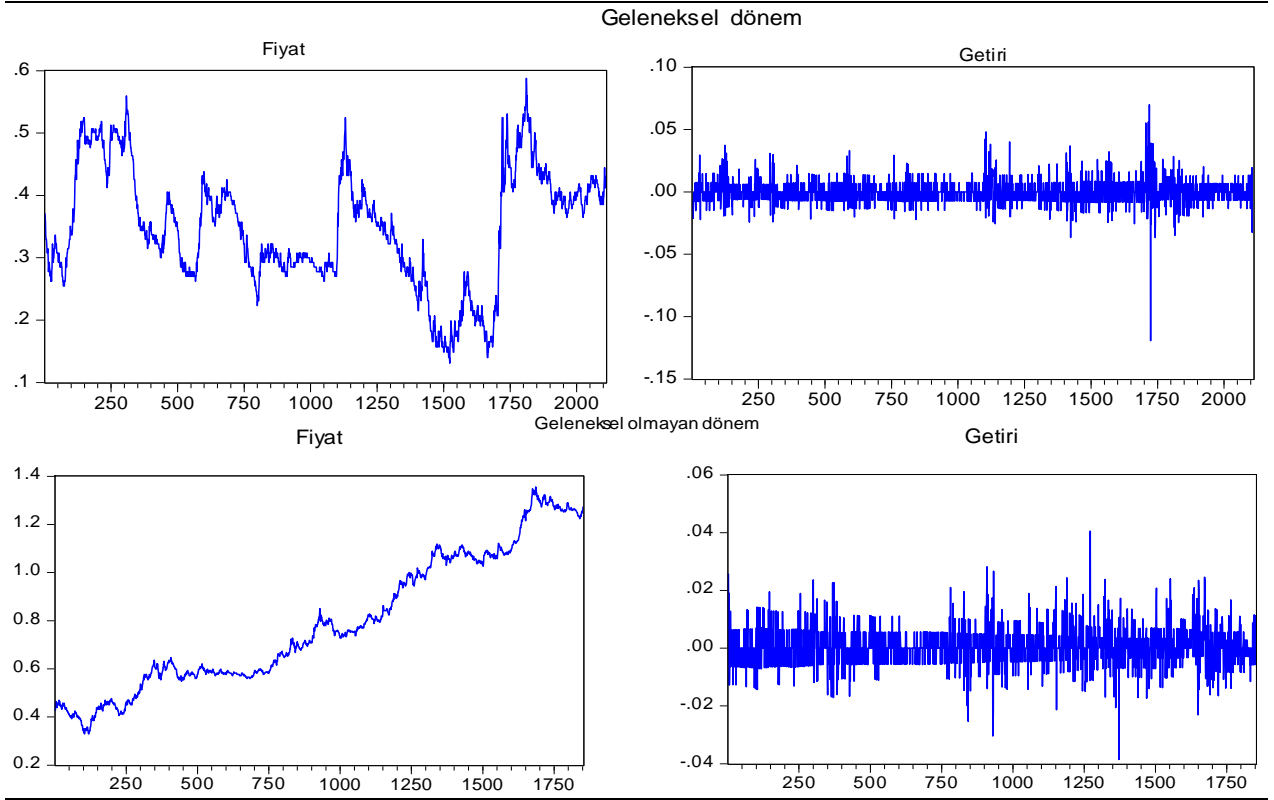
$$ASV - ES_{t,\alpha}(r) = E[r \mid r \geq ASV - VaR_{t,\alpha}]$$

(10)

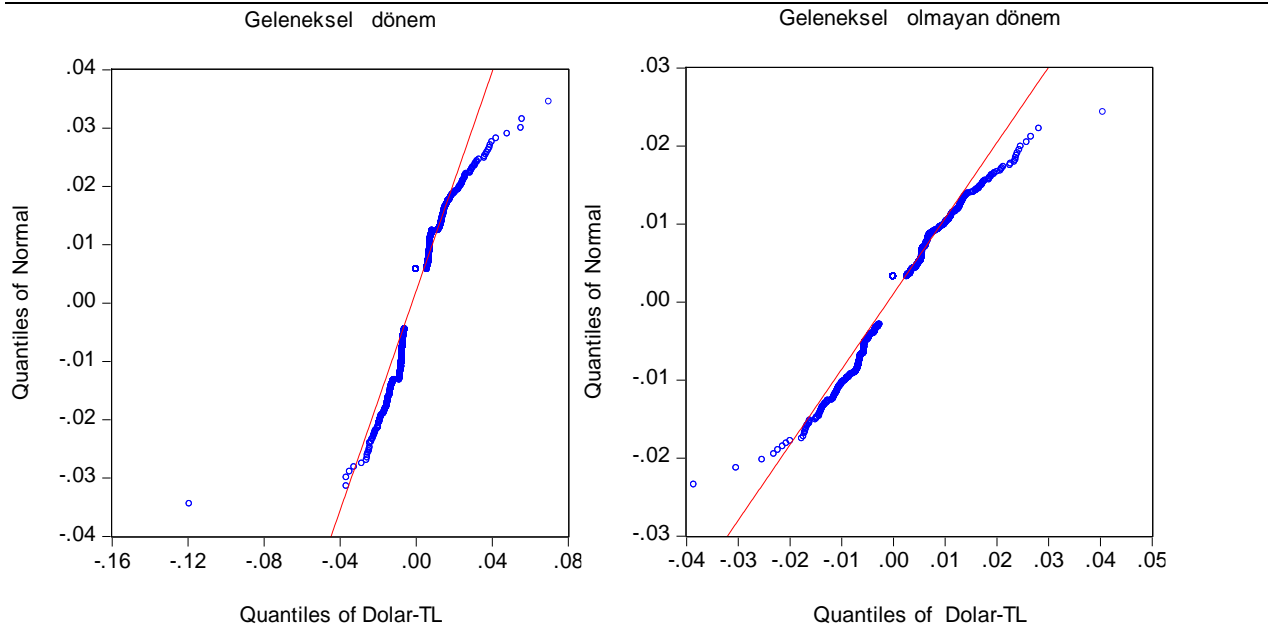
Burada  $r$ ,  $ASV - VaR_{t,\alpha}$  değerlerine eşit ve onu aşan getiri oranlarını ifade etmektedir.

## 3. Bulgular

Geleneksel ve geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem dikkate alınarak Dolar-TL için elde edilen logaritmik fiyat ve getiri serileri Şekil 1'de sunulmuştur. Logaritmik getiri serilerine ait betimleyici istatistikler, birim kök ve değişen varyans testi sonuçları ise Tablo 3'te gösterilmiştir. Birim kök testi sonuçları her iki dönemde de döviz kuru getirilerinin durağan olduğuna işaret etmektedir. Betimleyici istatistikler döviz kurunun ilgili dönemlerde pozitif ortalama getiriler sunduğunu göstermektedir. Jarque Bera testi de döviz kuru getirilerinin standart normal dağılıma uyduğu hipotezini %5 anlamlılık düzeyinde reddetmektedir. Şekil 2'de sunulan Q-Q grafikleri de döviz kuru getirilerinin dağılımının standart normal dağılıma uymadığı sonucunu desteklemektedir. Bu nedenle çalışmada ASV modeli Student t dağılımı kullanılarak tahmin edilmiştir. 12 gecikmeye kadar uygulanan Ljung-Box  $Q^2(k)$  ve ARCH testi sonuçları döviz kuru getirilerinin değişen varyans sorunu içerdiğini göstermektedir. Ayrıca, birer finansal risk göstergesi olan standart sapma ve basıklık değerlerine bakıldığında da geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde her iki göstergenin de daha düşük seviyelere gerilediği anlaşılmaktadır. Bu bulgu da basit düzeyde önsel bir analiz olarak geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının döviz kuru volatilitésini / riskini daha makul seviyelere çekmede başarılı olduğuna dair bir ön bilgi olarak değerlendirilebilir.



Şekil 1. Dolar-TL kuruna ilişkin logaritmik fiyat ve getiri serileri



Şekil 2. Dolar-TL getirilerinin Q-Q grafikleri



**Tablo 3.** Döviz kuru getirilerine ilişkin betimleyici istatistikler, birim kök ve değişen varyans testi sonuçları (%)

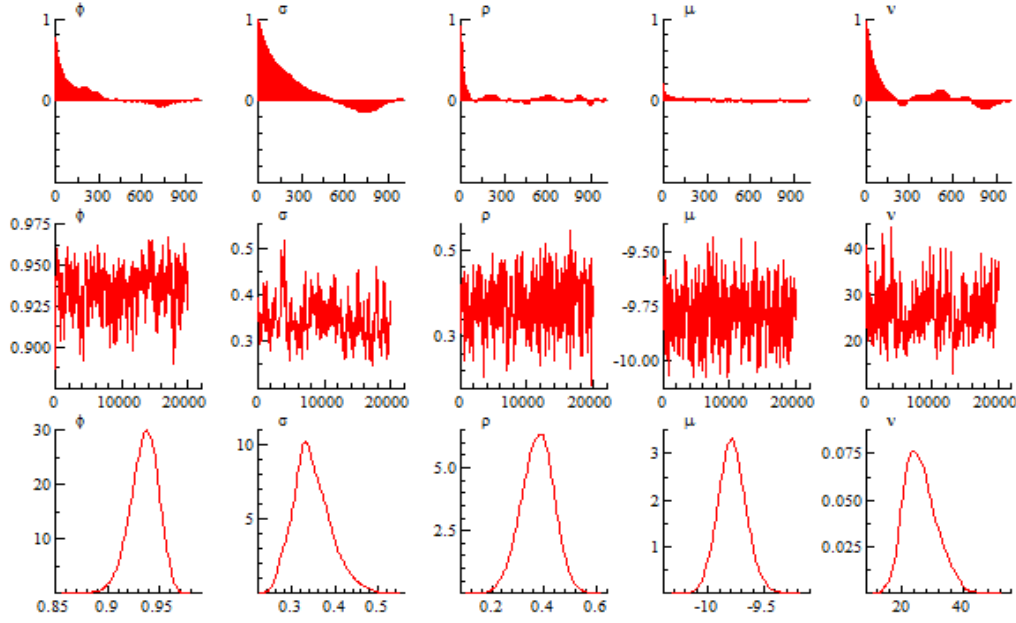
	Dolar-TL
Geleneksel dönem	
ADF	-10.6543*[0.0000]
PP	-46.3534*[0.0000]
Ortalama	0.002544
Std. Sapma	0.986242
Çarpıklık	-0.069928
Basıklık	16.32525
Jarque Bera	15619.81*[0.0000]
Q <sup>2</sup> (8)	311.98*[0.0000]
ARCH (12)	25.993*[0.0000]
Geleneksel olmayan dönem	
ADF	-42.699*[0.0000]
PP	-42.713*[0.0000]
Ortalama	0.045423
Std. Sapma	0.690191
Çarpıklık	0.246438
Basıklık	5.152214
Jarque Bera	376.3867*[0.0000]
Q <sup>2</sup> (8)	117.25*[0.0000]
ARCH (12)	7.3217*[0.0000]

\*, %5 anlamlılık düzeyini ifade etmektedir. Parantez içerisindeki değerler olasılık değerleridir. Logaritmik getiri serileri trend bileşeni içermediğinden ADF (Augmented Dickey-Fuller, ADF) ve PP (Phillips-Perron, PP) birim kök testleri trendsiz model spesifikasyonu dikkate alınarak tahmin edilmiştir.

### 3.1. ASV modelinin parametrelerinin yorumlanması

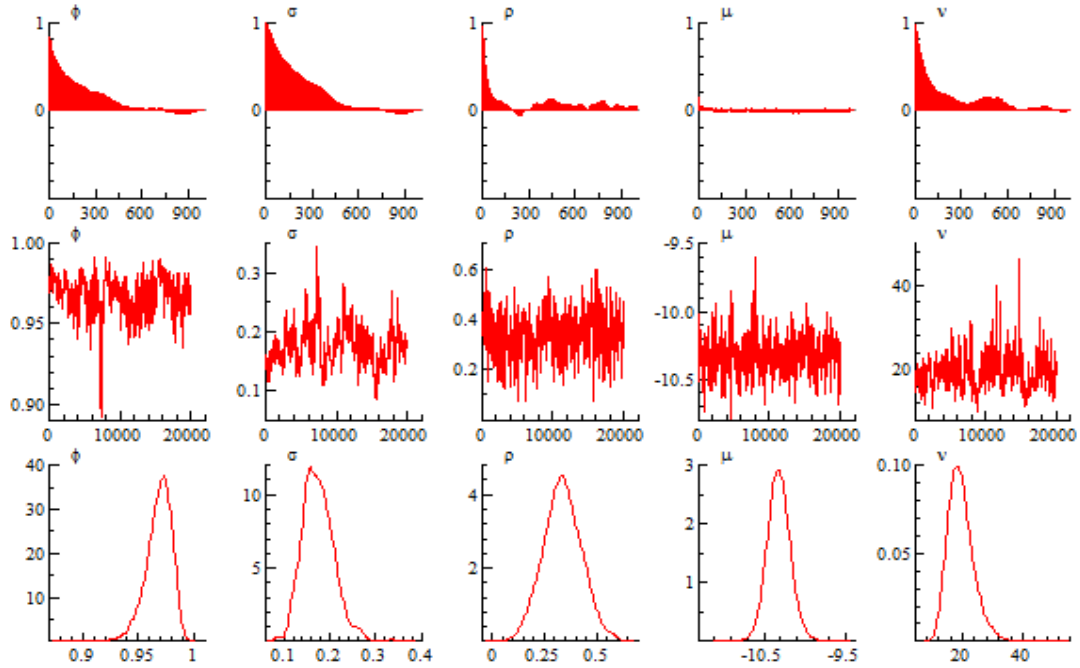
ASV modeline ait parametre tahmin sonuçları Tablo 4 ve 5'te sunulmuştur. Fakat, ASV modelinin sunduğu bulgular yorumlanmadan önce ASV modelinin tahmininde kullanılan MCMC algoritmasının etkinliğinin incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla ilgili literatürle uyumlu bir şekilde model parametrelerine ait yoğunluk dağılım (posterior densities) grafikleri ile parametrelerin aldığı değerleri gösteren örneklem patikası ve otokorelasyon fonksiyonlarının grafiklerinin incelenmesi gerekmektedir. Dolar-TL için geleneksel ve geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem dikkate alınarak elde edilen sonuçlar Şekil 3 ve 4'te sunulmuştur. Şekil 3 ve 4'ten anlaşıldığı gibi incelenen dönemde otokorelasyon fonksiyonu hızlı bir şekilde azalmakta ve parametrelerin aldığı değerler (örneklem patikası) genel olarak istikrarlı bir seyir izlemektedir. Bu bulgular da MCMC algoritmasının etkin örneklem değerleri ürettiği anlamına gelmektedir.

Parametre tahmin sonuçlarına gelince, öncelikle geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem incelendiğinde (Tablo 4) tüm parametrelerin istatistiki olarak anlamlı olduğu anlaşılmaktadır.  $\phi$  parametresinin ortalama değerinin (posterior mean) 0.9351 çıkması durağanlık koşulunun ( $\phi < 1$ ) sağlandığı ve volatilitenin ortalama değerine dönme eğilimi içerisinde olduğunu göstermektedir. Student t dağılım parametresinin ( $v$ ) istatistiki olarak anlamlı çıkması da çalışmada kullanılan dağılım varsayımını destekleyen bir sonuç olmaktadır.  $\sigma$  ve  $\mu$  parametrelerinin ortalama değerleri (posterior mean) ise sırasıyla 0.3465 ve -9.783 çıkmaktadır.



Not: 1., 2., ve 3. sıradaki grafikler sırasıyla otokorelasyon fonksiyonunu, örneklem patikası ve parametre yoğunluk dağılımlarını göstermektedir.

**Şekil 3.** Geleneksel dönem için MCMC algoritmasının etkinlik göstergeleri ( Dolar-TL)



Not: 1., 2., ve 3. sıradaki grafikler sırasıyla otokorelasyon fonksiyonunu, örneklem patikası ve parametre yoğunluk dağılımlarını göstermektedir.

**Şekil 4.** Geleneksel olmayan dönem için MCMC algoritmasının etkinlik göstergeleri ( Dolar-TL)

Asimetri parametresine ( $\rho$ ) bakıldığında ise ortalama değerinin (posterior mean) 0.3757 olduğu anlaşılmaktadır. Bu da Dolar-TL için asimetrik tepkinin geçerli olduğu anlamına gelmektedir. Bir diğer ifadeyle Dolar-TL getirisindeki artışlar (Doların TL karşısında değer kazanması) Dolar-TL'nin volatilitisini artırmakta Dolar-TL getirisindeki azalışlar (Doların TL karşısında değer kaybetmesi) ise Dolar-TL'nin volatilitisini azaltmaktadır.

Fakat, Dolar-TL getirisindeki bir artışın volatilité üzerindeki artırıcı etkisinin Dolar-TL getirisindeki aynı büyüklükteki bir azalışın volatilité üzerindeki azaltıcı etkisinden daha fazla olduğu anlaşılmaktadır.  $\rho$  parametresinin %95 güven aralığında (credible confidence interval) aldığı değerlerin tamamının pozitif olması da Dolar-TL için güçlü bir asimetrik tepkinin söz konusu olduğu anlamına gelmektedir.

**Tablo 4.** Geleneksel para politikası döneminde Dolar-TL için ASV-t tahmin sonuçları

Parametreler	Ortalama	Std. Sapma	%95....alt sınır	%95... üst sınır	Etkinsizlik faktörü
$\phi$	0.9351	0.0135	0.9059	0.9589	119.16
$\sigma$	0.3465	0.0438	0.2713	0.4463	263.57
$\rho$	0.3757	0.0620	0.2500	0.4941	47.14
$\mu$	-9.783	0.1242	-10.019	-9.5291	15.86
$\nu$	26.154	5.3377	17.263	37.844	133.04

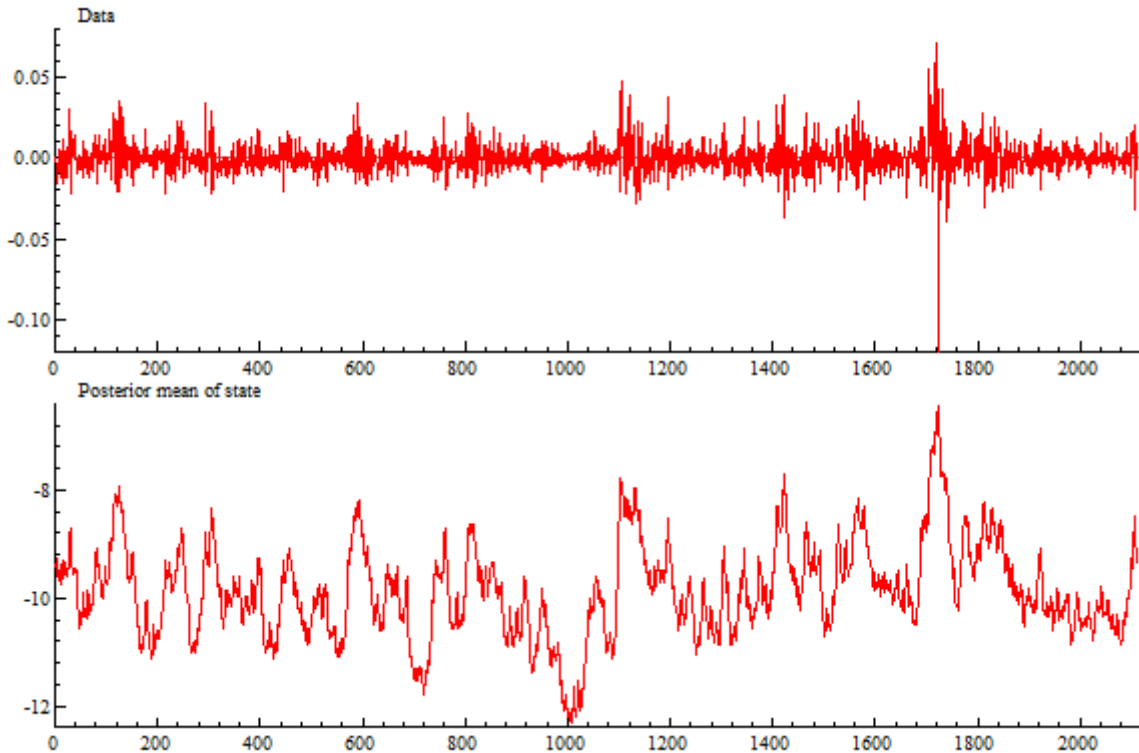
Geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem için parametre tahmin sonuçlarına bakıldığında (Tablo 5) yine tüm parametrelerin istatistiki olarak anlamlı olduğu ve  $\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  ile  $\mu$  parametrelerinin ortalama değerlerinin (posterior mean) sırasıyla 0.9683, 0.1752, 0.3373 ve - 10.319 çıktığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla, geleneksel olmayan para politikalarının uygulandığı dönemde  $\phi$  parametresinin değerinde bir artış;  $\sigma$ ,  $\rho$  ve  $\mu$  parametrelerinin değerinde ise bir azalış olduğu anlaşılmaktadır.  $\phi$  parametresinin değerindeki artış geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde bir önceki döneme göre daha yüksek bir volatilité kalıcılığının söz konusu olduğu anlamına gelmektedir. Bir diğer ifade ile bu dönemde Dolar-TL kurunda yaşanan bir volatilité şokunun cari dönem volatilitesi üzerinde diğer döneme göre daha uzun süre etkili olduğu ifade edilebilir.  $\sigma$  parametresinin değerinde gözlemlenen yüksek oranlı azalış ise geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde volatilitédeki değişkenlikte önemli bir azalma olduğu anlamına gelmektedir. Bir diğer ifade ile bu dönemde Dolar-TL volatilitesindeki değişimler göreceli olarak daha düşük seviyelerde kalmış ve Dolar-TL volatilitesi daha öngörülebilir bir seyir izlemiştir.  $\mu$  parametresinin değerindeki azalış geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde ortalama volatilité değerinin de azaldığı anlamına gelmektedir.  $\rho$  parametresinin değerindeki azalış ise geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Dolar-TL kurundaki fiyat hareketleri ile Dolar-TL volatilitesi arasındaki korelasyonun azaldığı anlamına gelmektedir.

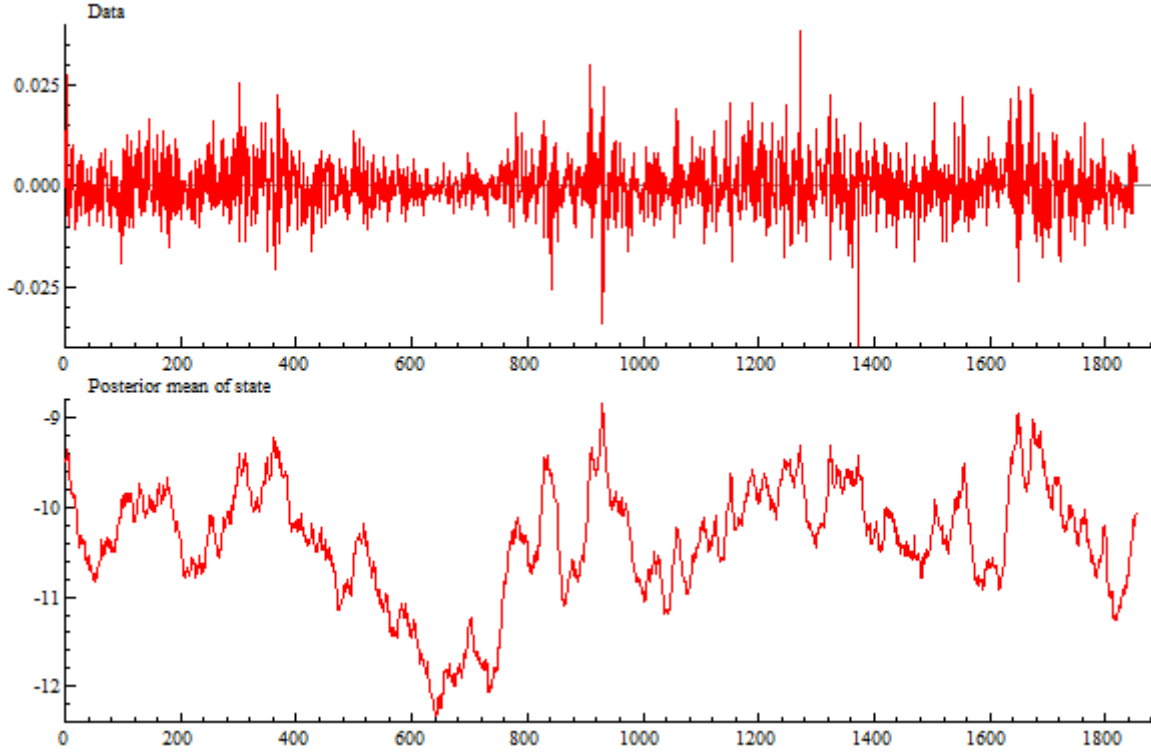
**Tablo 5.** Geleneksel olmayan para politikası döneminde Dolar-TL için ASV-t tahmin sonuçları

Parametreler	Ortalama	Std. Sapma	%95....alt sınır	%95.... üst sınır	Etkinsizlik faktörü
$\phi$	0.9683	0.0119	0.9417	0.9866	221.78
$\sigma$	0.1752	0.0354	0.1162	0.2551	327.37
$\rho$	0.3373	0.0915	0.1587	0.5180	81.95
$\mu$	-10.319	0.1413	-10.5884	-10.029	4.56
$\nu$	19.4818	4.4121	12.5189	29.4480	189.01

### 3.2. ASV modelinin sunduğu stokastik volatilité değerleri ile finansal risk düzeyinin ölçümü

Çalışmanın bu aşamasında ASV modeli kullanılarak elde edilen zamanla değişen şartlı stokastik volatilitenin yol açabileceği finansal risk düzeyi ölçülmüştür. Böylece, hem finansal ve reel sektör kuruluşları hem de yatırımcılar açısından taşınan döviz pozisyonlarının hangi para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde daha fazla risk teşkil ettiği belirlenmeye çalışılmıştır. Fakat, öncelikle, Şekil 5 ve 6'da geleneksel ve geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemlerde Dolar-TL için elde edilen logaritmik stokastik volatilité değerleri ilgili döviz kurunun logaritmik getiri serileri ile birlikte sunulmuştur.

**Şekil 5.** Geleneksel dönemde logaritmik getiri ve logaritmik stokastik volatilité (Dolar-TL)



**Şekil 6.** Geleneksel olmayan dönemde logaritmik getiri ve logaritmik stokastik volatilité (Dolar-TL)

Şekil 5 ve 6 incelendiğinde Dolar-TL volatilitésinin arttığı dönemlerde Dolar-TL getirilerindeki değişimlerin de arttığı; Dolar-TL volatilitésinin azaldığı dönemlerde ise Dolar-TL getirilerindeki değişimlerin de azaldığı anlaşılmaktadır.

ASV modeli tarafından üretilen ve Şekil 5 ve 6'da gösterilen stokastik volatilité değerleri dikkate alınarak, Dolar-TL volatilitésinin yol açabileceği finansal risk düzeyi %99.5, %99 ve %95 güven düzeyleri için hesaplanmış ve elde edilen bulgular Tablo 6'da sunulmuştur. Öncelikle, geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönem için %99 güven düzeyindeki sonuçlar incelendiğinde ASV-VaR sonuçlarına göre finansal piyasalarda Dolar-TL kurunda taşınabilecek uzun pozisyonunun bir sonucu olarak bir gün sonraki maksimum kayıp oranı %2.913 olabilecektir. Olası aşımalar dikkate alındığında ise ASV-ES sonuçlarına göre kayıp oranı %3.611 seviyesine çıkabilecektir. Geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde ise %99 güven düzeyinde ASV-VaR sonuçlarına göre maksimum kayıp oranı %1.846 olabilecektir. ASV-ES sonuçlarına göre ise olası aşımalar dikkate alındığında bu oran %2.218 seviyesine çıkabilecektir. Dolayısıyla, hem ASV-VaR hem de ASV-ES sonuçları geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Dolar-TL kaynaklı finansal riskin daha düşük seviyelere gerilediğini göstermektedir. Bu analizler %99.5 ve %95 güven düzeyleri dikkate alınarak yapıldığında da hem ASV-VaR hem de ASV-ES modellerinin benzer bulgulara işaret ettiği gözlemlenmektedir. Bu da çalışma bulgularının güvenilirliğini artırmaktadır.

Dolayısıyla, kısaca ifade etmek gerekirse, geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde hem Dolar-TL volatilitésindeki değişkenliğin azaldığı hem de

Dolar-TL volatilitésinin yol açabileceği finansal risk düzeyinin gerilediği anlaşılmaktadır. Bu bulgular da TCMB tarafından uygulanan geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının döviz piyasalarını daha az riskli hale getirmekte başarılı olduğu şeklinde yorumlanabilir.

**Tablo 6.** Dolar-TL için ASV-VaR ve ASV-ES sonuçları

Risk ölçüm yöntemi	Güven düzeyleri		
	% 99.5	% 99	% 95
Geleneksel para politikası dönemi			
ASV-VaR	-%3.38	-%2.913	-%1.828
ASV-ES	-%4.11	-%3.611	-%2.517
Geleneksel olmayan para politikası dönemi			
ASV-VaR	-%2.116	-%1.846	-%1.185
ASV-ES	-%2.475	-%2.218	-%1.587

#### 4. Değerlendirme ve Sonuç

2007-2008 küresel finans krizi sonrasında dünya merkez bankaları geleneksel olmayan para politikası uygulamalarına yönelmişlerdir. Benzer bir eğilim sergileyen TCMB de bu yeni dönemde fiyat istikrarına ilaveten makro finansal istikrarı da gözetilen bir politika bileşimi uygulamaya başlamıştır. Bu politika bileşiminin temel dinamiklerinden birini de döviz kuru volatilitési oluşturmuştur. Dolayısıyla, ilgili dönemde döviz kuru volatilitésinin öngörülebilirliği / makul seviyelerde olması ve bu volatilitenin yol açabileceği finansal risk düzeyinin azaltılabilmesi bu dönemdeki uygulamaların başarı kriterlerinden biri olarak değerlendirilmiştir [2]. Bu çalışmada da TCMB'nin geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu 2010-2017 döneminde döviz kuru volatilitésinin temel dinamikleri incelenmiştir. Bu amaçla asimetrik stokastik volatilité modelinden yararlanılmıştır.

Çalışma kapsamında tahmin edilen asimetrik stokastik volatilité modelinin parametreleri ilgili dönem için döviz kuru volatilitésinin temel dinamikleri ile ilgili önemli bilgiler sunmaktadır. Öncelikle, asimetri parametresine ( $\rho$ ) bakıldığında bulgular her iki dönemde de asimetrik tepkinin geçerli olduğuna işaret etmektedir. Bu da döviz kuru getirisindeki bir artışın (Doların TL karşısında değer kazanmasının) volatilitéyi arttırdığı döviz kuru getirisindeki bir azalışın (Doların TL karşısında değer kaybetmesinin) ise volatilitéyi azalttığı fakat getirideki artışın volatilité üzerindeki etkisinin getirideki aynı büyüklükteki bir düşüşün volatilité üzerindeki etkisinden daha fazla olduğu anlamına gelmektedir. Diğer önemli parametrelere bakıldığında ise geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde hem volatilitédeki değişkenliğin ( $\sigma$ ) hem de ortalama volatilité değerinin ( $\mu$ ) azaldığı anlaşılmaktadır. Bu bulgu da geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu döneme göre döviz kuru volatilitésinin daha öngörülebilir bir seyir izlediği anlamına gelmektedir.

Uygulama açısından çok daha önemli olan ve tüm parametrelerinin etkileri dikkate alınarak tahmin edilen stokastik döviz kuru volatilitésinin etkilerini öngörmek için kullanılan ASV-VaR ve ASV-ES modellerinin sonuçları incelendiğinde de geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu dönemde Dolar-TL kaynaklı finansal riskin geleneksel para politikası uygulamalarının söz konusu olduğu döneme göre belirgin bir şekilde azaldığı anlaşılmaktadır.

Çalışma bulgularının uygulamaya dönük önemli bilgiler içerdiği düşünülmektedir. Öncelikle, ilgili dönemde TCMB tarafından uygulanan geleneksel olmayan para politikası uygulamalarının döviz kuru volatilitelerini / riskini daha makul düzeylere çekme konusunda başarılı olduğu ifade edilebilir. Bu bulgu da Kara'nın [2] çalışmasında sunduğu bulgular ile uyumludur. Dolayısıyla, ilgili dönemde hem yatırımcılar hem de finansal ve reel sektör kuruluşları açısından döviz kuru kaynaklı finansal riskin incelenen dönem ve kullanılan modeller kapsamında bir önceki döneme göre daha makul seviyelere gerilediği ifade edilebilir. İkicisi, daha sonraki dönemlerde 2007-2008 finansal krizi gibi dönemlerin yaşanması durumunda TCMB'nin bu dönemde uyguladığı geleneksel olmayan para politikası uygulamalarına benzer bir politika bileşimini kullanarak finansal sisteme gerekli esnekliği ve etkinliği kazandırabileceği ve böylece makro finansal istikrarın sağlanmasına katkı sağlayabileceği ifade edilebilir. Son olarak da çalışma bulguları, Bayesyen yaklaşımına dayalı MCMC algoritmasına bağlı olarak tahmin edilen asimetrik stokastik volatilité modelinin Türk finans piyasalarına uygulanabileceğine işaret etmektedir. Bu nedenle Türk finans piyasalarına dönük daha sonraki çeşitli finansal analizlerde (Örneğin, volatilitenin modellenmesi, VaR ve ES değerlerinin hesaplanması gibi) stokastik volatilité modellerine dayalı analizlere daha çok yer verilmesinin uluslararası yazında oldukça ilgi gören bu tür alternatif modellerin sunduğu bilgilerden ulusal yazında da yararlanılabilmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

## Kaynaklar

- [1] E.Başçı, H. Kara, 2011, Finansal istikrara ve para politikası, *İktisat İşletme ve Finans*, 26 (302), 9-25.
- [2] A.H. Kara, 2012, Küresel kriz sonrası para politikası, *İktisat İşletme ve Finans*, 27 (315), 9-36.
- [3] M. Mühleisen, 2010, A New Index of Currency Mismatch and Systemic Risk, *IMF Working Paper* WP/10/263. <file:///C:/Users/asus/Downloads/wp10263.pdf>
- [4] M.R. King, C. Osler, D. Rime, 2011, Foreign exchange market structure, players and evolution, *Norges Bank Working Paper*, No:10.Erişim tarihi:07.02.2014. <http://www.unich.it/~vitale/Rime-2.pdf>
- [5] N. Foley-Fisher, R. Ramcharan, E. Yu, 2016, The impact of unconventional monetary policy on firm financing constraints: Evidence from the maturity extension program, *Journal of Financial Economics*, 122 (2), 409-429.
- [6] P. Puonti, 2019, Data-driven structural BVAR analysis of unconventional monetary policy, *Journal of Macroeconomics*, 61, 103-131.
- [7] L. Wang, 2019, Measuring the effects of unconventional monetary policy on MBS spreads: A comparative study, *The North American Journal of Economics and Finance*, 49, 235-251.
- [8] J.C. Wu, J. Zhang, 2019, Global effective lower bound and unconventional monetary policy, *Journal of International Economics*, 118, 200-216.
- [9] M. McMahon, M.U. Peiris, H. Polemarchakis, 2018, Perils of unconventional monetary policy, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 93, 92-114.
- [10] K. D. Sheedy, 2017, Conventional and unconventional monetary policy rules, *Journal of Macroeconomics*, 54, 127-147.
- [11] S. Ambler, F. Rumler, 2019, The effectiveness of unconventional monetary policy announcements in the euro area: An event and econometric study, *Journal of International Money and Finance*, 94, 48- 61.
- [12] D. Kenourgios, E. Drakonaki, D. Dimitriou, 2019, ECB's unconventional monetary policy and cross-financial-market correlation dynamics, *The North American Journal of Economics and Finance*, 50, 1010-45
- [13] E. Galariotis, P. Makrichoriti, S. Spyrou, 2018, The impact of conventional and unconventional monetary policy on expectations and sentiment, *Journal of Banking & Finance*, 86, 1-20.
- [14] S. Papadamou, N. A. Kyriazis, P. G. Tzeremes, 2019, Unconventional monetary policy effects on output and inflation: A meta-analysis, *International Review of Financial Analysis*, 61, 295-305.
- [15] C. Lutz, 2015, The impact of conventional and unconventional monetary policy on investor sentiment, *Journal of Banking & Finance*, 61, 89-105.
- [16] C. Dreger, J. Wolters, 2015, Unconventional monetary policy and money demand, *Journal of Macroeconomics*, 46, 40-54.

- [17] Y. Kiendrebeogo, 2016, Unconventional monetary policy and capital flows, *Economic Modelling*, 54, 412-424.
- [18] E. Mamatzakis, T. Bermpel, 2016, What is the effect of unconventional monetary policy on bank performance?, *Journal of International Money and Finance*, 67, 239-263.
- [19] L. Wang, 2016, Unconventional monetary policy and aggregate bank lending: Does financial structure matter?, *Journal of Policy Modeling*, 38 (6), 1060-1077.
- [20] F. Ferrante, 2019, Risky lending, bank leverage and unconventional monetary policy, *Journal of Monetary Economics*, 101, 100-127.
- [21] C. J. Neely, 2015, Unconventional monetary policy had large international effects, *Journal of Banking & Finance*, 52, 101-111.
- [22] M. Binici, H. Kara, P. Özlü, 2016, Faiz koridoru ve banka faizleri : Parasal aktarım mekanizmasına dair bazı bulgular, *Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Çalışma Tebliği*, No: 16/ 08. <http://www.tcmb.gov.tr/wps/wcm/connect/10f843d3-2e9a-4652-880a-54741d03a396/wp1608.pdf?> ( Erişim Tarihi, Mayıs 2017).
- [23] H.A. Küçüköde, 2016, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası'nın faiz koridoru politikasının etkinliği, *İşletme İktisadi Enstitüsü Yönetim Dergisi*, 81, 11-25.
- [24] S. Varlık, H. Berumet, 2017, Multiple policy interest rates and economic performance in a multiple monetary-policy-tool environment, *International Review of Economics and Finance*, 52, 107-126.
- [25] Inoue, B. Rossi, 2019, The effects of conventional and unconventional monetary policy on exchange rates, *Journal of International Economics*, 118, 419-447.
- [26] J. Rogers, C. Scotti, J.H. Wright, 2014, Evaluating asset-market effects of unconventional monetary policy: a multi-country review, *Economic Policy*, 29, 3-50.
- [27] J. Rogers, C. Scotti, J.H. Wright, 2016, Unconventional monetary policy and international risk premia, *Board of Governors IFD Papers*, No. 1172.
- [28] R.Glick, S. Leduc, 2015, Unconventional monetary policy and the dollar: Conventional signs, unconventional magnitudes, *Federal Reserve Bank of San Francisco W.P* (2015-18).
- [29] P. Anaya, M. Hachula, C. J. Offermanns, 2017, Spillovers of U.S. unconventional monetary policy to emerging markets: The role of capital flows, *Journal of International Money and Finance*, 73, 275-295.
- [30] A. Apostolou, J. Beirne, 2019, Volatility spillovers of unconventional monetary policy to emerging market economies, *Economic Modelling*, 79, 118-129.
- [31] E. Claus, I. Claus, L. Krippner, 2018, Asset market responses to conventional and unconventional monetary policy shocks in the United States, *Journal of Banking & Finance*, 97, 270-282.
- [32] J. Thornton, C. di Tommaso, 2018, Unconventional monetary policy and the 'currency wars', *Finance Research Letters*, 26, 250-254.
- [33] S. Bernhard, T. Ebner, 2017, Cross-border spillover effects of unconventional monetary policies on Swiss asset prices, *Journal of International Money and Finance*, 75, 109-127.
- [34] Y.Yalçın, 2007, Stokastik oynaklık modeli ile İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda kaldıraç etkisinin incelenmesi, *Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 22(2), 357- 365.
- [35] A.Özün, M. Türk, 2008, Döviz kurlarının öngörüsünde stokastik oynaklık modelleri, *İktisat İşletme ve Finans*, 23 (265), 50-67.
- [36] V.Abiyev, 2015, Time-varying beta and its modeling techniques for Turkish industry portfolio, *İktisat İşletme ve Finans*, 30(352), 79-108.
- [37] Ö.Göktaş, Hepsağ, 2016, BIST100 endeksinin volatil davranışlarının simetrik ve asimetrik stokastik volatilité modelleri ile Analizi, *Ekonomik Yaklaşım*, 27 (99), 1-15.
- [38] E.Jacquier, N.G. Polson, P.E. Rossi, 2004, Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors, *Journal of Econometrics*, 122, 185-212
- [39] J.J.J. Wang, J.S.K. Chan, S.T.B. Choy, 2011, Stochastic volatility models with leverage and heavy-tailed distributions: A Bayesian approach using scale mixtures, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(1), 852-862.
- [40] A.Assaf, 2017, The stochastic volatility model , regime switching and Value-at-Risk (VaR) in international equity markets, *Journal of Mathematical Finance*, 7, 491-512.
- [41] N.Krichene, 2003, Modeling stochastic volatility with application to stock returns, *IMF Working Paper*, No:03/125. <https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2016/12/30/>.
- [42] H.Küçük, P. Özlü, A. Takaslı, D. Ünalı, C. Yüksel, 2013, Likidite yönetimi ve BIST faiz farkı, *Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Ekonomi Notları*, Sayı: 2013-25/ 23 Ekim 2013.[http://www.academia.edu/4870421/Likidite\\_Y%C3%B6netimi\\_ve\\_BIST\\_Faiz\\_Fark%C4%B1](http://www.academia.edu/4870421/Likidite_Y%C3%B6netimi_ve_BIST_Faiz_Fark%C4%B1). ( Erişim Tarihi, Nisan 2017).
- [43] Y.Omori, S.Chib, N. Shephard, J. Nakajima, 2007, Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inferences, *Journal of Econometrics*, 140, 425-449.



- [44] F. Selçuk, (2004), Free float and stochastic volatility: The experience of a small open economy, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 342(3-4).
- [45] D.Hendricks,1996, Evaluation of value at risk modeling using historical data, *Economics Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York.
- [46] P.Giot, S. Laurent, 2003. Market risk in commodity markets: A VaR approach, *Energy Economics*, 25, 435–457.
- [47] J.Nakajima, Y. Omori, 2009, Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2335-2353.
- [48] J.Nakajima, 2008, EGARCH and stochastic volatility: Modeling jumps and heavy-tails for stock returns, *IMES Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan*, No: 2008-E-23. <https://www.imes.boj.or.jp/research/abstracts/english/08-E23.html>.
- [49] J.Nakajima, Y. Omori, 2012, Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's t-distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, 3690-3704.
- [50] S.Kim, N. Shephard, S. Chib, 1998, Stochastic Volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.
- [51] J. Yu, 2005, On leverage in a stochastic volatility model, *Journal of Econometrics*, 127, 165-178.
- [52] P.L. Lafosse, G. Rodriguez, 2018, An empirical application of a stochastic volatility model with GH skew Student's t-distribution to the volatility of Latin-American stock returns, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 69, 155-173.



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 13, 2020, 1, 18-29


Geliş/Received:02.03.2020, Kabul/Accepted: 08.06.2020

[www.istatistikciler.org](http://www.istatistikciler.org)


Araştırma Makalesi / Research Article

# A comparative study on modeling of dependence between claim severity and frequency with Archimedean copulas

Övgücan Karadağ Erdemir

Hacettepe University  
Department of Actuarial Science  
06800-Çankaya, Ankara, Turkey  
[ovgucan@hacettepe.edu.tr](mailto:ovgucan@hacettepe.edu.tr)  
 0000-0002-4725-3588

Meral Sucu

Hacettepe University  
Department of Actuarial Science  
06800-Çankaya, Ankara, Turkey  
[msucu@hacettepe.edu.tr](mailto:msucu@hacettepe.edu.tr)  
 0000-0002-7991-1792

## Abstract

In the estimation of aggregate loss, claim severity and claim frequency are generally assumed independent. Although, the independence assumption is quite basic, it may cause underestimates or overestimates in calculations. The dependence in the estimation of aggregate loss can be included with the copula-based models. The joint cumulative distribution and the joint probability density functions of mixed variables such as continuous claim severity and discrete claim frequency can be obtained using the bivariate copula functions and the mixed copula approach. In this study, aggregate loss is modeled using the bivariate Archimedean copula functions considering the dependency between claim components. It is assumed that claim severity and frequency have Gamma and zero-truncated Poisson distributions, respectively. In the application part, the aggregate loss is calculated using different Archimedean copula functions. Different copula functions and different parameters for each copula are used to analyze the effect of copula type and parameter. Furthermore, aggregate loss in the presence of dependence between claims are estimated.

**Anahtar sözcükler:** Bivariate Archimedean copula, Copula-based model, Dependence, Mixed-variable.

## Öz

### **Hasar tutarı ve sayısı arasındaki bağımlılığın Arşimet kopulalar ile modellenmesi üzerine karşılaştırmalı bir çalışma**

Toplam hasar tahmininde, hasar tutarı ile hasar sayısı genellikle bağımsız varsayılmaktadır. Bağımsızlık varsayımı oldukça temel olmasına rağmen, hesaplamalarda gerçek değerden daha düşük veya daha yüksek tahminlere neden olabilir. Toplam hasar tahminindeki bağımlılık, kopula-temelli modeller ile dikkate alınabilir. Sürekli hasar tutarı ve kesikli hasar sayısı gibi karma değişkenlerin ortak kümülatif dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu iki değişkenli kopula fonksiyonları ve karma kopula yaklaşımı kullanılarak elde edilebilir. Bu çalışmada toplam hasar, hasar bileşenleri arasındaki bağımlılık dikkate alınarak, Arşimet kopula fonksiyonları yardımıyla modellenmiştir. Hasar tutarı ve sayısının sırasıyla Gamma ve sıfır-kesilmiş Poisson dağılımlarına sahip olduğu varsayılmıştır. Uygulama bölümünde, toplam hasar farklı Arşimet kopulalar kullanılarak tahmin edilmiştir. Kopula türü ve parametresinin etkisini analiz etmek amacıyla farklı kopula fonksiyonları ve her bir kopula için farklı parametreler kullanılmıştır.

**Keywords:** İki değişkenli Arşimet kopula, Kopula-temelli model, Bağımlılık, Karma-değişken.

## 1. Introduction

Claim severity and frequency are the main components of non-life insurance mathematics. Analyses such as ratemaking, reserve calculation and credibility are generally carried out under the independence

assumption between the claim components. According to the compound risk model, claim severity and frequency are assumed independent, and aggregate loss is calculated by Lundberg [1]. The aggregate loss is termed as risk premium corresponding only the expected loss without expenses. In ratemaking studies, generally claim severity and frequency are modeled by generalized linear models separately. Thereafter, expected values of claim severity and frequency are multiplied to calculate the aggregate loss under independence assumption.

Although, the independence assumption is quite essential, it causes underestimate or overestimate of aggregate loss compared the actual aggregate loss. To eliminate the effects of the independence assumption, some approaches have been proposed to model the dependence. Copula which is the most used method for modeling dependence in financial and statistical studies is also introduced in actuarial studies by Frees and Valdez [2]. Studies about dependence modeling using copulas can be divided into two part with and without GLMs. Song [3] defined the mixed copula approach using GLMs and Gauss copula function. The mixed copula approach lays the groundwork to model dependency between mixed variables such as continuous claim severity and discrete claim frequency. Kastenmeier [4] established a joint regression model for claim severity and frequency using the mixed copula approach. Song et al. [5], Kolev and Paiva [6] and Czado et al. [7] also modeled dependency between mixed variables. Czado et al. [7] modeled dependency between claim severity and frequency using Gauss copula and marginal GLMs. Krämer et al. [8] used Clayton, Gumbel and Frank copulas besides Gauss copula and they referred the models contain GLMs and copula as the copula-based regression models. Krämer et al. [8] also modeled the dependency between claim components only using the copula and claims without GLMs and the approach is entitled as the copula-based models. Copula-based models are useful for modeling the dependence according to only the distribution of claim components without any explanatory variables.

Besides copula-based models and copula-based regression models, Gschlößl and Czado [9] introduced a new approach to model dependency between claim severity and frequency by taking the claim frequency as an explanatory variable in the GLM modeling of aggregate loss. Garrido et al. [10] also used same approach to model dependency in non-life insurance.

Except copula; markov models [11], continuous time processes [12] and multivariate distributions such as phase-type distributions [13] are also used to model dependence in actuarial sciences.

This study is important with regards to showing that the copula function, has also started to be used in non-life insurance mathematics for dependence modeling though copula-based models. It has been also shown that the dependency between claim components can be modeled flexibly with different copula functions and different parameters.

In this study, dependency between claim components is modeled via copula-based models using Archimedean copula family. This paper is organized as follows: Firstly, bivariate Archimedean copula functions are given in Section 2. The properties of aggregate loss under the dependence and independence assumptions and the relationship between copula and aggregate loss are briefly mentioned in Section 3. An application study is carried out to compare the copulas and to estimate expected loss in the presence of dependency between claim components in Section 4 and the concluding remarks are given in Section 5.

## **2. Archimedean copula functions**

Copula is introduced by Sklar [14] and allows us to model dependence among variables in many disciplines such as economy, finance, econometric, statistics and actuarial science. A copula is a function which joins a multivariate distribution function to its marginal distribution functions which have standart uniform distributions [15].

Archimedean copula family is one of the most frequently used parametric copulas. Archimedean copulas are diversified as Clayton, Gumbel, Frank, Ali Mikhail Haq and Joe copula functions. As Archimedean copulas are parametric copulas, they are expressed with a parameter. Using Sklar’s Theorem [15], where  $\theta$  is the copula parameter, a bivariate parametric copula  $C(\cdot, \cdot | \theta)$  can be defined as follows:

$$F_{XY}(x, y | \theta) = C(F_X(x), F_Y(y) | \theta) \tag{1}$$

where  $F_X(x)$  and  $F_Y(y)$  are the distribution functions of random variables X and Y.

In this study, frequently used Archimedean copulas are considered to set up copula-based models. Let  $C(\cdot, \cdot | \theta)$  be a bivariate parametric copula function and  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Archimedean copulas are defined as  $C(u, v) = \phi^{-1}(t)(\phi(u) + \phi(v))$  with generator function  $\phi(t)$ . Generator function  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  is a continuous, strictly decreasing and convex function with  $\phi(1) = 0$  and  $\phi^{-1}(t)$  shows the so called pseudo-inverse of generator function [15].

In some cases, Kendall’s  $\tau$  can be more applicative instead of the copula parameter  $\theta$  in the sense of monotone transforms of copulas [8]. The closed forms of copula functions, the generator functions and the relationships between Kendall’s  $\tau$  and copula parameter  $\theta$  for Archimedean copula family are given as follows [8], [15].

2.1. Clayton Copula

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [1, \infty) / \{0\} \tag{2}$$

$$\phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta} \tag{3}$$

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \tag{4}$$

2.2. Gumbel copula

$$C(u, v) = \exp\left[-\left((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right], \quad \theta \geq 1 \tag{5}$$

$$\phi(t) = (-\log t)^\theta \tag{6}$$

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta} \tag{7}$$

2.3. Frank copula

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right), \quad \theta \in \mathfrak{R} / \{0\} \tag{8}$$

$$\phi(t) = -\ln \frac{-e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \tag{9}$$

$$\tau = 1 + \frac{4}{\theta} (D_1(u, v|\theta) - 1) \tag{10}$$

$$D_1(u, v|\theta) = \frac{e^{\theta}(e^{\theta v} - 1)}{e^{\theta(u+1)} + e^{\theta(v+1)} - e^{\theta} - e^{\theta(u+v)}} \text{ demonstrates the first partial derivative.}$$

**3. The relationship between copula and aggregate loss**

The aggregate loss is basically defined as the sum of monetary losses of all the claims. Aggregate loss can be calculated considering or ignoring the dependence between claim components.

3.1. Aggregate loss under the independence assumption

In risk theory, there are two main models: individual risk model and collective risk model. In the individual risk model, the claim frequency is assumed fixed. Otherwise, the aggregate loss has a compound distribution with the primary distribution being the claim frequency and the second one being the claim severity in collective risk model [16]. According to the collective risk model, claim severity and claim frequency are assumed independent random variables. Let Y displays the claim frequency and  $X_i$  shows the claim severity of the ith loss for  $i=1, \dots, Y$ . Aggregate loss which is denoted by S is defined as follows:

$$S = X_1 + \dots + X_Y \tag{11}$$

$X_i$ 's are assumed independently and identically distributed positive integer-valued random variables. Using the properties of compound distribution, the expected value and the variance of aggregate loss can be calculated as  $E(S) = E(X)E(Y)$  and  $Var(S) = E(Y)Var(X) + Var(Y)[E(X)]^2$ , respectively.

In most studies expected value and the variance of aggregate loss is calculated without considering the distribution of aggregate loss due to the difficulty of obtaining closed form of the distribution function. The distribution of S can be obtained using convolution method, Panjer and De Peril recursions [16], [17]. Krämer et al. [8] proposed a new approach to define the distributions of policy loss and the aggregate loss considering dependency between claim severity and frequency using copula functions.

3.2. Estimation of aggregate loss using copula under the assumption of dependency

Aggregate loss can be estimated by copulas in the presence of dependency between claim components. The relationship between copula and aggregate loss can be explained by copula-based model relied on the distributions of claim components and the copula functions.

Let assume that claim severity and frequency have Gamma and zero-truncated Poisson distributions, respectively. Density and probability functions are given by Equation (12) and Equation (13) using mean parameterization. First moment, second moment and variance of distributions are also given by Table 1 as follows.

$$f_x(x|\mu, v^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{v^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu v^2}\right)^{\frac{1}{v^2}} y^{\left(\frac{1}{v^2}\right)-1} \exp\left(-\frac{x}{\mu v^2}\right), \quad x \geq 0 \tag{12}$$

$$f_y(y|\lambda) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!(1 - e^{-\lambda})}, \quad y = 1, 2, 3, \dots \tag{13}$$

**Table 1.** Moments of the Distributions of Claim Severity and Frequency

Variables	Distribution	First Moment	Second Moment	Variance
<b>Claim Severity</b> (X)	Gamma( $\mu, v^2$ )	$E(X) = \mu$	$E(X^2) = \mu^2(1 + v^2)$	$Var(X) = \mu^2 v^2$
<b>Claim Frequency</b> (Y)	Zero-Truncated Poisson ( $\lambda$ )	$E(Y) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$	$E(Y^2) = \frac{\lambda + \lambda^2}{1 - e^{-\lambda}}$	$Var(Y) = \frac{\lambda + \lambda^2}{1 - e^{-\lambda}} - \left(\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\right)^2$

Let  $C(.,.|\theta)$  be a bivariate Archimedean copula where  $\theta$  is the copula parameter. Joint cumulative distribution function and joint probability density function can be obtained Sklar Theorem [14] and by the mixed copula approach [3] as follows.

3.2.1. Joint cumulative distribution function of claim severity and frequency

The joint cumulative distribution function of claim severity and frequency can be written by using Sklar’s Theorem as follows.

$$F_{XY}(x, y|\mu, v^2, \lambda, \theta) = C(F_x(x), F_y(y)|\theta) \tag{14}$$

3.2.2. Joint probability density function of claim severity and frequency

The joint probability density function of claim severity and frequency can be written by the mixed copula approach which is proposed by Song [3]. The mixed copula approach, allows the usage of copula functions which are used with only the continuous random variables, also together with discrete random variables [7]. This approach uses the Radon-Nikodym Theorem to convert the discrete measurement to continuous measurement.

$$f_{XY}(x, y|\mu, v^2, \lambda, \theta) = \frac{\partial}{\partial x} P(X \leq x, Y = y) = \frac{\partial}{\partial x} P(X \leq x, Y \leq y) - \frac{\partial}{\partial x} P(X \leq x, Y \leq y - 1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} C(F_X(x), F_Y(y)|\theta) - \frac{\partial}{\partial x} C(F_X(x), F_Y(y-1)|\theta)$$

$$f_{XY}(x, y|\mu, \nu^2, \lambda, \theta) = f_X(x) [D_1(F_X(x), F_Y(y)|\theta) - D_1(F_X(x), F_Y(y-1)|\theta)] \tag{15}$$

$D_1(\cdot, \cdot|\theta)$  shows the first partial derivative and the Equation (15) can be proved by mixed copula approach. More detail information can be found in [3].

To indicate policy loss considering the dependence between the claim severity and frequency, Krämer et al. [8] define a new variable as  $L_i$  where  $X_i$  and  $Y_i$  display the  $i$ th claim severity and frequency, respectively.

$$L_i := X_i \cdot Y_i \tag{16}$$

The expected value and the variance of the  $i$ th policy loss are denoted by  $\mu_{L_i}$  and  $\sigma_{L_i}^2$ , respectively. Joint density function of loss can be written by mixed copula approach as follows [8].

$$f_L(l|\mu, \nu^2, \lambda, \theta) = \sum_{y=1}^n \frac{1}{y} f_X\left(\frac{l}{y}\right) \left[ D_1\left(F_X\left(\frac{l}{y}\right), F_Y(y)|\theta\right) - D_1\left(F_X\left(\frac{l}{y}\right), F_Y(y-1)|\theta\right) \right], l > 0 \tag{17}$$

Where there are  $n$  policies, aggregate loss  $S$  can be written as follows:

$$S := L_1 + \dots + L_n = X_1 \cdot Y_1 + \dots + X_n \cdot Y_n \tag{18}$$

Since the policy loss  $L_i$  has positive and continuous distribution, aggregate loss has also positive and continuous distribution. Furthermore, according to the central limit theorem,

$$\frac{S - \sum_{i=1}^n \mu_{L_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{L_i}^2}} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{19}$$

the asymptotic distribution of aggregate loss  $S$  is the standard normal distribution and can be displayed by  $S \xrightarrow{D} N(0,1)$  using the Equation (19) [8].

#### 4. Application

Analyses in the application part are carried out using the R packages “CopulaRegression” [18], “MASS” [19] and “VineCopula” [20]. “CopulaRegression” package works dependent on “MASS” and “VineCopula” packages. “CopulaRegression” package is established on the assumption of Gamma distributed claim severity and zero-truncated Poisson distributed claim frequency. A system is designed contained insured with Gamma-distributed claim severity and zero-truncated Poisson distributed claim frequency. For that purpose, first of all an one-year real comprehensive insurance data set taken from a non-life insurance company for year 2017 consisted of 2820 observations is analyzed to determine the parameters of distributions. Before the parameter estimation, the distributions of claim severity and the claim frequency are analyzed by Kolmogorov Simirnov Test using SPSS Statistics 23. As, Gamma distribution is formed by Exponential distribution and zero-truncated Poisson distribution is a special form of Poisson distribution, goodness of fit for severity and frequency is carried out for Exponential and Poisson. According to results of goodness of fit, claim severity and frequency of the real comprehensive insurance data fit aforementioned distributions. It is reasonable to using this data in the parameter estimation. To obtain the information of the claim severity, policies with at least one claim frequency are taken over. Parameters are estimated using the moments method. Details of the mean parametrization have been given by Table 1. Descriptive statistics are given by Table 2 for parameter estimation.

**Table 2.** Descriptive Statistics of Comprehensive Insurance Data

Variables	Minimum	Maximum	Mean	Median	Variance
Claim Severity (X)	51.24	35477.00	1759.4936	2933.58735	8605934.753
Claim Frequency (Y)	1	4	1.7034	0.4678	0.2190

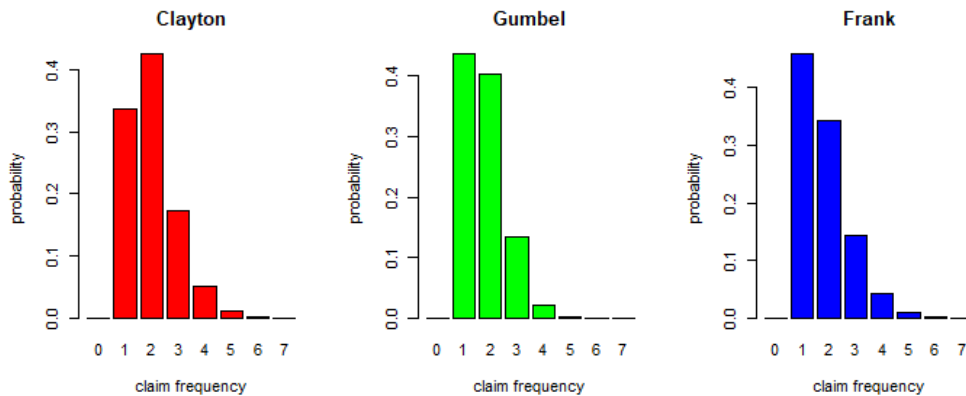
Using moments method, mean parameter and dispersion parameter of Gamma distribution are approximately obtained as 1760 and 1, respectively and for zero-truncated Poisson distribution mean parameter is assumed as 1.18.

“CopulaRegression” package firstly simulate n observations claim severity from the marginal Gamma distribution, and for each severity, the package sample an observation from the conditional distribution of claim frequency given claim severity. The conditional density function for a Gamma distributed claim severity (X) and zero-truncated claim frequency (Y) can be written as  $P(Y = y | X = x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$ . In

the second step, the package obtain the conditional distributions [18].

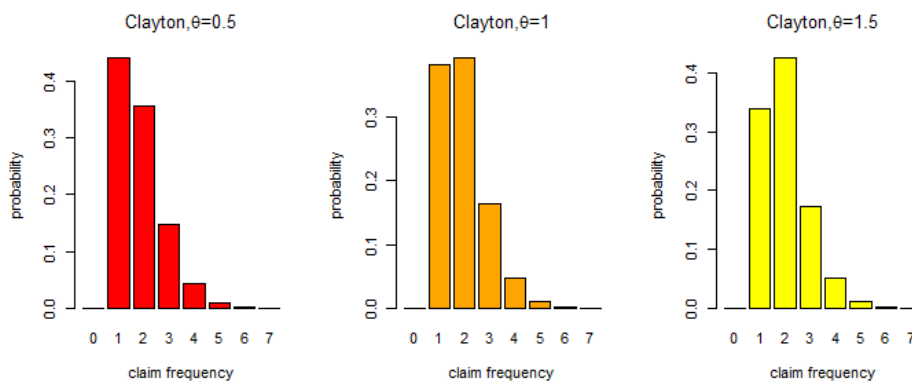
In this study, conditional probability mass function of the claim frequency is obtained as a first step to write copula-based model combining the marginal distributions and the copula function. While the effects of the copula on the conditional probability mass function of the claim frequency are demonstrated by Figure 1, the impressions of copula parameters on the conditional distribution are displayed by Figure 2. To investigate the effects of copula type, the conditional probability mass function of the claim frequency is plotted using Clayton, Gumbel and Frank copula functions with a fixed  $\theta$  parameter. It is assumed that condition on claim severity of 2000 TL.





**Figure 1.** Conditional Probability Mass Function of the Claim Frequency (Clayton, Gumbel and Frank Copula Functions with a Fixed Parameter ( $\theta=1.5$ ))

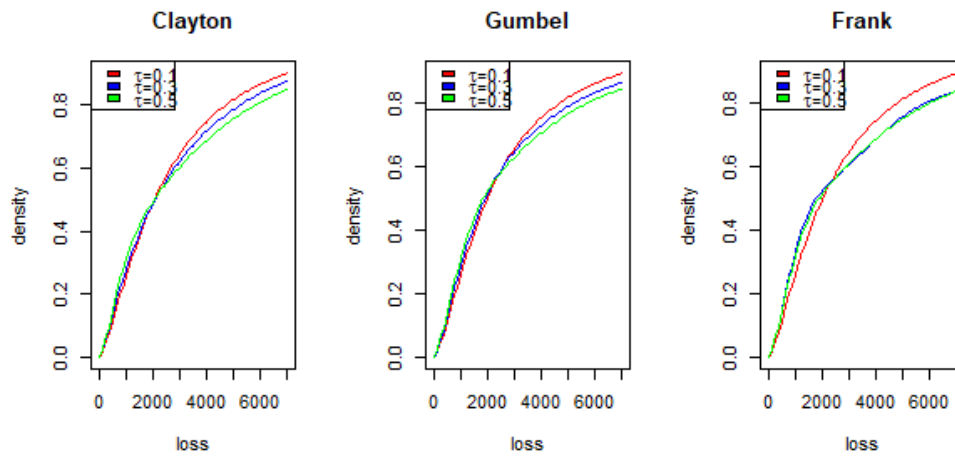
According to the Figure 1, it is explicit that copula type influences the probability of claim frequency. The probabilities are higher for small values using Gumbel copula compared with other types of copula. The probability of one claim is higher with Gumbel and Frank copulas than the probability with Clayton. To investigate the effects of copula parameter, different parameters have been tried for all copula types. Instead of giving all results, the conditional probability mass functions of the claim frequency are plotted using different copula parameters for Clayton copula where parameter effect can be observed better.



**Figure 2.** Conditional Probability Mass Function of the Claim Frequency (Clayton Copula Function with Different Parameters ( $\theta=0.5; 1; 1.5$ ))

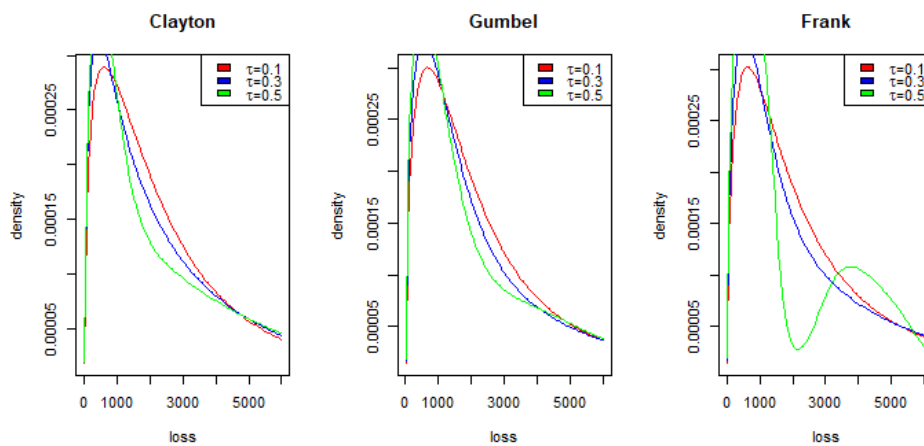
It is observed from Figure 2, the higher values of  $\theta$ , the greater conditional probability value of claim frequency, especially for smaller claims. It is deduced from Figure 1 and 2, dependence between claim frequency and severity can be modeled by Archimedean copulas flexibly.

Cumulative distribution function of claim severity and frequency given by Equation (14) are obtained with Clayton, Gumbel and Frank copulas for different parameters. Cumulative distribution functions using different copulas are plotted by Figure 3. It is noticed that the type of copula has no significant impact on the cumulative distribution function for small  $\tau$  values. However, for larger  $\tau$  values, the graph of cumulative distribution function using Frank copula is different the graphs using the other two copula types. Smaller cumulative probabilities are obtained for larger  $\tau$  values while using Frank copula. Increasing curves are obtained in accordance with the general characteristics of the distribution functions.



**Figure 3.** Cumulative Distribution Functions of Aggregate Loss for Different Copula Functions with Different Parameters

Joint probability density function of claim severity and frequency given by Equation (15) are obtained with Clayton, Gumbel and Frank copulas for different parameters. Joint density functions using different copulas are plotted by Figure 4.



**Figure 4.** Probabilities of the Aggregate Loss for Different Copula Functions with Different Parameters

As the marginal Gamma distributed claim severity has a right-skewed distribution, the aggregate loss is also inclined to be right-skewed according to the Figure 4. While the probabilities are similar for Clayton and Gumbel copulas, Frank copula is more sensitive to the large value of the copula parameter. The results of the probability density function for Frank copula also support the results found for cumulative distribution function above.

Expected aggregate loss in the presence of dependence between claim components are estimated with the copula-based model. The estimated loss using different copulas and parameters are summarized with Table 3 as follows.

**Table 3.** Expected Loss using Clayton, Gumbel and Frank Copulas for Different Parameters

Type of Copula	$\tau$	$\theta$	Expected Loss
<b>Clayton</b>	0.1	0.2222222	2285.120
	0.2	0.5000000	2336.037
	0.3	0.8571429	2389.853
	0.4	1.3333333	2447.339
	0.5	2.0000000	2509.511
	0.6	3.0000000	2577.670
<b>Gumbel</b>	0.1	1.1111110	2372.550
	0.2	1.2500000	2492.395
	0.3	1.4285710	2596.252
	0.4	1.6666670	2684.361
	0.5	2.0000000	2757.008
	0.6	2.5000000	2814.559
<b>Frank</b>	0.1	0.9073682	2309.685
	0.2	1.8608840	2384.995
	0.3	2.9174345	2461.079
	0.4	4.1610643	2536.578
	0.5	5.7362827	2610.203
	0.6	7.9296423	2680.823

For Clayton, Gumbel and Frank copulas, same values of Kendall's  $\tau$  parameter are taken and the corresponding values of  $\theta$  copula parameter are given in Table 3. The higher values of  $\tau$  and  $\theta$ , the higher expected loss for all copulas. Expected losses are higher using Gumbel copulas compared the other copulas. Furthermore, some statistical values such as quantiles of expected loss are calculated and given by Table 4.

**Table 4.** Quantiles of Aggregate Loss using Clayton, Gumbel and Frank Copulas for  $\tau=0.5$ 

Type of Copula	%	Value at the quantile is evaluated	Expected Loss( $\tau=0.5$ )
<b>Clayton</b>	25	743.7378	2509.511
	50	1534.867	
	75	3211.736	
<b>Gumbel</b>	25	742.5345	2757.008
	50	1462.432	
	75	2917.698	
<b>Frank</b>	25	740.4356	2610.203
	50	1472.067	
	75	3156.319	

Quantiles of aggregate loss given by Table 4 can be useful for interval estimation of aggregate loss under dependence assumption. The values of expected aggregate loss are ranked between the 50 % and 75 % quantiles. It confirms that the distribution of aggregate loss under dependency assumption is also right skewed.

## 5. Concluding Remarks

In non-life insurance mathematics claim severity and frequency are generally assumed independent and the aggregate loss is over or under estimated compared the actual aggregate loss under this assumption. Dependency between claim components can taken into consideration using copula-based model approach proposed by Kramer et al. [8]. Copula-based models can be created by bivariate Archimedean copula family and mixed variables such as continuous claim severity and discrete claim frequency. Mixed variables can be included in the same copula function with the mixed copula approach. In this study, joint cumulative distribution and joint probability density functions of claim severity and frequency are obtained using the copula-based model. The aggregate loss is modeled using different bivariate Archimedean copula functions and different copula parameters. The effects of the parameters and the type of copulas on dependence modeling are analysed and interpreted.

It has been noticed that copula-based models allow for flexible dependency modeling of claim severity and frequency in non-life insurance mathematics. Flexibility arises from the use of different copula functions with different parameters in these models. According to the results of the study, Frank copula is more sensitive to dependence modeling in cases where the relationship between the claim severity and frequency is high. It has been observed that aggregate loss increases as  $\tau$  value increases for all Archimedean copula functions used. However, higher aggregate loss is estimated when the dependency is modeled with Gumbel copula. Furthermore, the quantiles of aggregate loss that can be used in interval estimation of aggregate loss under dependence assumption are calculated with the help of the R packages "CopulaRegression". It has been seen that the values of expected aggregate loss are ranked between the 50 % and 75 % quartiles, which is an expected result since the distribution of aggregate loss under dependency assumption is also right skewed.

Copula-based models in this study can be developed as copula-based regression models including generalized linear models and the results of models can be compared. This study can be enhanced by using other parametric copulas such as Gauss and t-copulas or non-parametric copulas such as Bernstein copulas.

## References

- [1] F. Lundberg, 1903, *I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen: II. Aterforsakring af kollektivrisker*. Almqvist & Wiksell.
- [2] E. W. Frees, E. A. Valdez, 1998, Understanding relationships using copulas. *North American actuarial journal*, 2(1), 1-25
- [3] X. K. Song, P. X. K. Song, 2007, *Correlated data analysis: modeling, analytics, and applications*. Springer Science & Business Media.
- [4] R. Kastenmeier, 2008, Joint regression analysis of insurance claims and claim sizes, Technische Universität München, Mathematical Sciences, Diploma Thesis.
- [5] P. X. K. Song, M. Li, Y. Yuan, 2009, Joint regression analysis of correlated data using Gaussian copulas, *Biometrics*, 65(1), 60-68.
- [6] N. Kolev, D. Paiva, 2009, Copula-based regression models: A survey. *Journal of statistical planning and inference*, 139(11), 3847-3856.
- [7] C. Czado, R. Kastenmeier, E. C. Brechmann, A. Min, 2012, A mixed copula model for insurance claims and claim sizes, *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 278-305.
- [8] N. Kramer, E. C. Brechmann, D. Silvestrini, C. Czado, 2013, Total loss estimation using copula-based regression models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(3), 829-839.
- [9] S. Gschlößl, C. Czado, 2007, Spatial modelling of claim frequency and claim size in non-life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 202-225.
- [10] J. Garrido, C. Genest, J. Schulz, 2016, Generalized linear models for dependent frequency and severity of insurance claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 70, 205-215.

- [11] H. Arvidson, S. Francke, 2007, Dependence in non-life insurance, UUDM Project Report, 23.
- [12] S. Anastasiadis, S. Chukova, 2012, Multivariate insurance models: an overview. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1), 222-227.
- [13] S. Eryilmaz, S., 2017, On compound sums under dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 72, 228-234.
- [14] A. Sklar, 1959, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, Vol. 8, pp. 229-231.
- [15] R. B. Nelsen, 2006, *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.
- [16] Y. K. Tse, 2009, *Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation*, Cambridge University Press.
- [17] S. A. Klugman, H. H. Panjer, G. E. Willmot, 2008, *Loss models: from data to decisions*, John Wiley & Sons.
- [18] N. Kramer, D. Silvestrini, M. N. Kraemer, 2013, Package 'CopulaRegression'.
- [19] B. Ripley, B. Venables, D. M. Bates, K. Hornik, A. Gebhardt, D. Firth, M.B. Ripley, 2013, Package 'mass'. Cran R.
- [20] U. Schepsmeier, J. Stoeber, E. C. Brechmann, B. Graeler, T. Nagler, T. Erhardt, 2012, VineCopula: Statistical inference of vine copulas. R package version 1.



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 13, 2020, 1, 30-47

Geliş/Received:15.03.2019, Kabul/Accepted: 11.05.2020


[www.istatistikciler.org](http://www.istatistikciler.org)

Araştırma Makalesi / Research Article

## Effect of Turkish mortality development on the expected lifetime and annuity using entropy measure


Bükre Yıldırım Külekci

Middle East Technical University  
Institute of Applied Mathematics  
06800, Ankara, Turkey  
[bukre@metu.edu.tr](mailto:bukre@metu.edu.tr)

 [orcid.org/0000-0002-1246-9549](https://orcid.org/0000-0002-1246-9549)

Murat Büyükyazıcı

Hacettepe University  
Department of Actuarial Sciences  
06800, Ankara, Turkey  
[muratby@hacettepe.edu.tr](mailto:muratby@hacettepe.edu.tr)

 [orcid.org/0000-0002-8622-4659](https://orcid.org/0000-0002-8622-4659)

### Abstract

Over the past three centuries, there has been a steady and gradual decline in mortality rates due to a considerable process of eliminating hazards to survival, which have increased the life expectancy at birth remarkably. The improvements in mortality rates often been underestimated by annuity and pension providers. To measure the effect of mortality rate developments on life expectancy or annuity, many demographers use the idea of entropy. We use the entropy measure to explain the effect of any change in mortality rates on the annuity along with Gompertz's mathematical model for the force of mortality to obtain a more theoretically satisfactory conclusion. Entropy measures using the Turkish life table are calculated for different age, year, discount factor, and gender parameters.

**Keywords:** Annuity, Entropy, Expected lifetime, Mortality rate, Pension funds, Rectangularization.

### Öz

#### *Türkiye'deki ölümlülük değişimlerinin annüite fiyatları üzerindeki etkisinin entropi ölçüsü*

Geçtiğimiz üç yüzyıl boyunca yaşam olasılığını etkileyen risklerin azaltılması sonucu, mortalite hızlarında istikrarlı bir şekilde kademeli düşüşler olmuştur. Böylece doğumda beklenen yaşam süresi önemli biçimde artmıştır. Mortalite hızlarındaki bu düşüşler genellikle annüite ve emeklilik ürünleri satan kuruluşlar tarafından olduklarından az tahmin edilmişlerdir. Mortalite hızlarındaki gelişmelerin beklenen yaşam süresi ve annüite değerleri üzerindeki etkisinin ölçülebilmesi için birçok demograf entropi kavramını kullanmaktadır. Bu çalışmada, mortalite hızlarındaki değişimin annüite değerleri üzerindeki etkisinin açıklanması için entropi ölçütü kullanılmış, ayrıca mortalite hızı için Gompertz mortalite modeli benimsenerek teorik açıdan daha güvenilir sonuçlar elde edilmesi amaçlanmıştır. Entropi ölçütü Türkiye hayat tabloları kullanılarak farklı yaş, yıl, iskonto oranı, ve cinsiyet parametreleri için hesaplanmaktadır.

**Anahtar Sözcükler:** Annüite, Entropi, Beklenen yaşam süresi, Mortalite hızı, Emeklilik fonu, Dikdörtgenselleşme.

## 1. Introduction

Throughout history, there exist significant developments behind the observed reductions in mortality rates. Over the years, disease-related mortality is mostly eradicated, and the residuary volatility in the age-at-death generally stems from the genetic factors [1].

Total fertility rate of 2.1, is considered to be the replacement rate of populations. Turkish fertility rate for 2010 was 2.170, for 2015 was 2.105, and for 2020 is 2.046 and it is expected to drop more according to the United Nations's world population prospects [2]. Over the years, decrease in the mortality rates at all ages caused population mean age to increase, and decreasing fertility rates supports this increase. Due to these reasons the population ratio between old people and young people increased over time, putting pressure on the balance of pension systems.

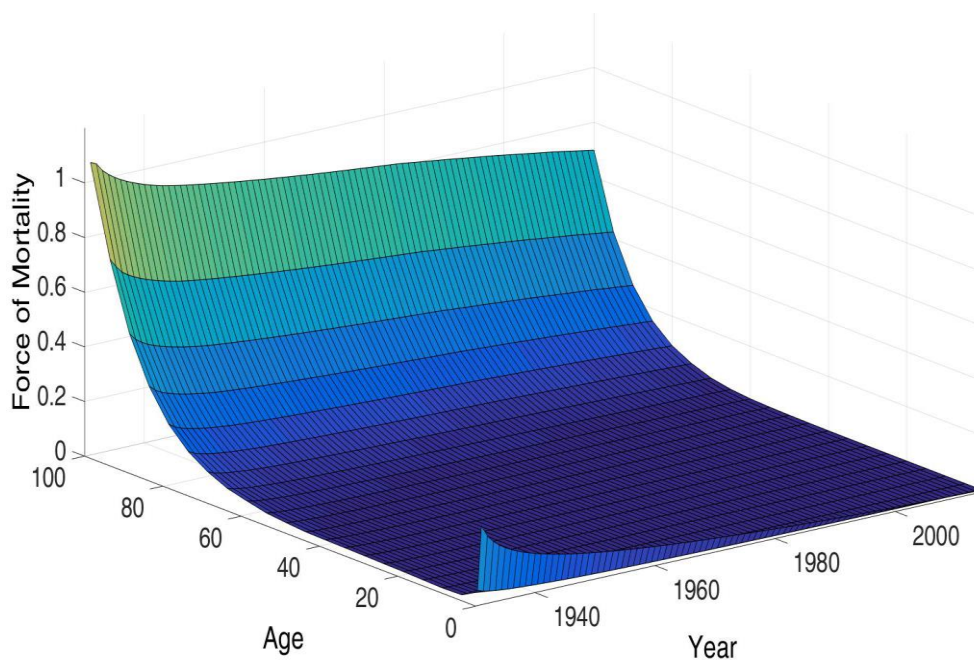
Regression levels for the Turkish Life Tables over the time interval between 1931 and 2015 is obtained from the Construction of Turkish Life, and Annuity Tables Project [3]. Although the Project aims to construct the life tables of male and female insured/non-insured population for 2010, along the study regression levels between the years 1931 and 2015 are constructed. Considering that the Turkish census data is very scarce (for example; according to the law enacted no census was carried out in 1995; the annexation of Hatay to the Turkey in 1938 also effected the census data, etc. ), the data used and taken from the Project to provide the yearly regression levels is probably based on the best and only data available for Turkish population.

The project assumes that Turkish mortality follows the Coale-Demeny West Model Life Tables [4] mortality. It uses fifteen Turkish population census registers between 1927 and 2000 provided from Turkish Statistical Institute (TUİK). Preston Bennett method is used to obtain suitable life table levels for Turkish mortality. Life table levels between 1931 and 2000 are modeled by using the exponential regression method, and finally life table levels consisting of the force of mortality rates for both genders and ages between 0 to 100 are computed using exponential extrapolation method for the years until 2015.

Figure 1 demonstrates the considerable improvements in force of mortality of Turkey for females over the years 1931 to 2015, constructed using the regression levels and the corresponding Coale-Demeny West Model Life Tables. The decline in mortality rates are often underestimated by annuity and pension providers. Developments in the mortality rates for post-retirement ages does have a substantial financial impact on the sustainability of pension plans. Due to the tax-paid structure, the deficiencies of public finance aggravated by mortality improvements.

Many researchers use entropy to measure the effect of decreasing mortality rates on life expectancy or annuity costs. Pollard [5] focused on the function of the mortality rate and its effects on life expectancy. Keyfitz and Caswell [6] introduced the concept of entropy as a measure of the interaction of the expected lifetime and the developments in mortality rates.

Higher values of entropy measure point out that the expected lifetime has a higher sensitivity to a deviation in the mortality rates. Lower values of entropy measure mean that life expectancy is relatively insensitive to future deviations in mortality rates [7]. The most critical attraction of entropy measure is that it allows to define the influence of the mortality rates on the expected lifetime by a single index number.



**Figure 1:** Mortality rates of Turkish female population over the years 1931 to 2015.

Entropy is also used as an indicator of the rectangularization of the survival function. Rectangularization showed up over the last 100 years in mostly the developed countries of the world, which the transformation from high mortality to low mortality is nearly complete [8]. It occurs as a result of increased survival rate and expectation of life. Improvements in the mortality rates have caused people to die at older ages, and it results in a reduction in the volatility of the age-at-death, and deaths to compact in the older years of life. An entirely rectangular survival function means that entropy is zero, and people live to a certain age and then die at that age.

We use entropy to measure the effect of changing Turkish mortality rates on the cost of an annuity. Then we work on the mortality parameters to see their effects on the entropy measure. First, we use period life tables to calculate entropy measure from annuity values and life expectations. Then we consider a mortality model to obtain a more theoretically satisfactory conclusion.

## 2. Entropy in actuarial science

### 2.1. Expected lifetime defined by entropy

In actuarial science, entropy is a single figure index that quantifies the effect of a same level change in the mortality rates at all ages on expected lifetime. Entropy determines the expected uncertainty on the result of an experiment and presents information about the foreseeability of the result of a random variable. The larger the entropy, the less compressed the distribution (less rectangularization in population), and observation about random variable provide fewer information [9].

As an example; if the force of mortality of a person aged  $x$  is  $\mu_x$ , and the force of mortality changes by  $100\varphi$  percent for all ages and could be a positive or a negative value depending on whether the change is beneficial to human life or not. Then, the new force of mortality of a person aged  $x$  is defined as;  $\mu_x^* = \mu_x(1 + \varphi)$ . This new force of mortality leads to a new survivorship curve, and the new probability to survive from age 0 to  $x$  becomes



$$\begin{aligned} {}_x p_0^* &= \exp\left(-\int_0^x \mu_a^* da\right) \\ &= ({}_x p_0)^{1+\varphi}. \end{aligned} \tag{1}$$

The new complete expected lifetime at birth is

$$e_0^{0*} = \int_0^w ({}_a p_0)^{1+\varphi} da, \tag{2}$$

Where,  $w$  is the limiting age of the mortality table. The derivative of Equation 2 is considered with respect to  $\varphi$ :

$$\frac{\partial e_0^{0*}}{\partial \varphi} = \int_0^w \ln({}_a p_0) ({}_a p_0)^{1+\varphi} da. \tag{3}$$

In the neighborhood of  $\varphi$  based on a Taylor expansion, we have the following approximation

$$\frac{\Delta e_0^0}{e_0^0} = \left( \frac{\int_0^w (\ln {}_a p_0) {}_a p_0 da}{\int_0^w {}_a p_0 da} \right) \varphi. \tag{4}$$

To make  $H$  a positive quantity we define it as minus the expression in brackets.

$$\frac{\Delta e_0^0}{e_0^0} = -H\varphi. \tag{5}$$

Equation 5 interprets as; the proportional change in expected lifetime can be approximated as  $H$  times  $\varphi$ . A disadvantage of this method is that; it cannot be used when mortality change,  $\varphi$ , is not proportional across all ages [10].

Therefore, the measure  $H$  can be displayed as

$$H = \frac{\int_0^w (\ln {}_a p_0) {}_a p_0 da}{\int_0^w {}_a p_0 da}. \tag{6}$$

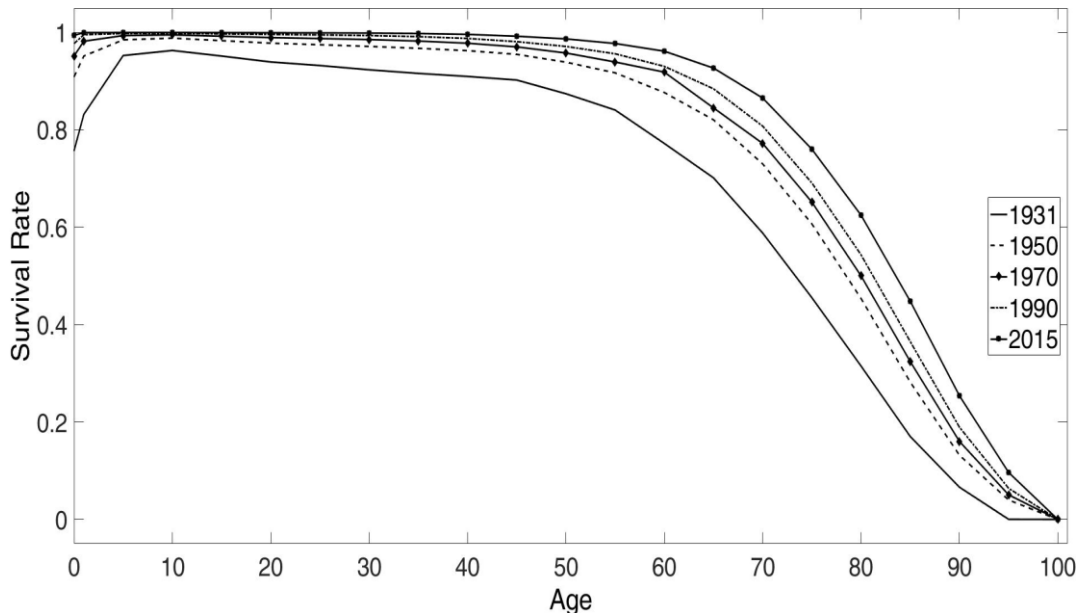
As  ${}_t p_x$  declines from one to zero over the age span,  $-\ln {}_t p_x$  increases from zero to infinitely large values. There is no apparent mathematical explanation of why  $H_x(\delta)$  should be bounded from above [11], and life tables may have entropy values above one.

Entropy measure depends directly on the concavity of the survival function (same as  ${}_t p_x$ , or  $\mu_x$ ) [12]. As mortality improves over time, or the curve of  ${}_t p_x$  turns down more sharply, which is the same as saying that  $\mu_x$  turns up more sharply, more people die in a narrow range of old ages before  $w$ . This leads to  $H$

being closer to zero. Hence, a change in  $\mu_x$  has almost no effect on life expectancy. Lower the  $H$ , greater the tendency for all of us to die at about the same age, a tendency that accompanies mortality decline. In the case of every person dying at the same age (defined as complete rectangularization),  $H$  would be 0, independent of the age at every person dies.

Analyses point out that there is an inverse relationship between life expectation and the entropy measure. The decline in  $H$ , on a large scale, is an outcome of the process of reducing deaths in infancy. Another outcome is an alteration in the ages, where additional improvements in mortality would be most effective in adding to the expected lifetime. About a century ago, a higher potential to increase life expectancy was situated in the first couple of years of childhood (age 0 to 5); today, in most of the developed countries is in old-ages. In the course of mortality developments, and life expectancy increases, there is a shift to the right in the ages where additional declines in mortality would be most effective in increasing expected lifetime. This gives rise to expected lifetime being less sensitive to additional declines in the mortality rates, and cause entropy to decline over time [13].

Rectangularization shows an increased building up near a certain old age, as the survival function takes more and more rectangular shape. It is mostly seen as a sign of expected lifetime approaching to its biological limit. Achieving a biological limit means that increases in the total expected lifetime must decelerate. Figure 2 presents an example of rectangularization of the Turkish female survival curve for selected calendar years of 1931, 1950, 1970, 1990, and 2015. Rectangularization is gradually evolving over the last 8 decades, which is a sign of decreasing entropy over the years. Figure shows that in the earlier years survival rate for the infants (ages 0 to 5) increased substantially, and in the latter years the survival curve improvements are concentrated at later years of life (ages 60 to 100). Women made more significant gains as in mortality compared to males, and remarkable improvements are registered in the probabilities of survival to an older age.



**Figure 2:** Turkish female population survival curve for selected calendar years.

## 2.2. Annuity cost defined by entropy

If the effect of changing mortality rates on the annuity is not recognized, it can cause companies to fail to meet their liabilities. In this section we define the annuity cost using the entropy measure based on the

method described in the paper of M. Khalaf-Allah [7]. The mortality-decrease-affected value of an annuity product at age  $x$  can be defined as:

$$\bar{a}_x^* = \int_0^\infty ({}_t p_x)^{1+\varphi} \exp(-\delta t) dt. \tag{7}$$

The derivative of Equation 7 with respect to  $\varphi$  is,

$$\frac{d\bar{a}_x^*}{d\varphi} = \int_0^\infty (\ln {}_t p_x) ({}_t p_x)^{1+\varphi} \exp(-\delta t) dt. \tag{8}$$

Using a Taylor expansion for the neighborhood of  $\delta = 0$ , it concludes that,

$$\frac{\Delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \left( \frac{\int_0^\infty (\ln {}_t p_x) ({}_t p_x) \exp(-\delta t) dt}{\int_0^\infty ({}_t p_x) \exp(-\delta t) dt} \right) \varphi. \tag{9}$$

To make  $H_x(\delta)$  a positive quantity again, we define it as minus the expression in brackets, as the integrals are always negative.

$$\frac{\Delta \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = -H_x(\delta) \varphi. \tag{10}$$

The measure  $H_x(\delta)$  dependent on the interest rate,  $\delta$ , can be displayed as:

$$H_x(\delta) = \frac{-\int_0^\infty (\ln {}_t p_x) ({}_t p_x) \exp(-\delta t) dt}{\int_0^\infty ({}_t p_x) \exp(-\delta t) dt}. \tag{11}$$

Over the course of mortality rate decreases, we expect a higher percentile of deaths to concentrate at older ages because of the decrease in the volatility of age-at-death distribution. Also, the value of  $H_x(\delta)$  decreases and becomes closer to 0. The rate at which this happens depends on the concavity of the survival function. As interest rates increase,  $H_x(\delta)$  decreases as the discount factor increase, because any change of the mortality rate would have a lower effect on the cost of an annuity.

Equation 11 can be written as a weighted average of  $\bar{a}_{x+s}$  as:

$$H_x(\delta) = \frac{-\int_0^\infty \mu_{x+s} {}_s p_x \exp(-\delta s) \bar{a}_{x+s} ds}{\bar{a}_x}. \tag{12}$$

$H_x(\delta)$  can be easily seen as a measure of heterogeneity, as  ${}_s p_x \mu_{x+s}$  is the probability density function of the time-of-death of a person at age  $x$ . To compute the values of entropy measures, we first need to arrange the integrals in Equation 11, with a numerical approach designed by Pollard [5]. Let

$${}_t Q_x = \int_0^t \mu_{x+u} du = -\ln\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = -\ln {}_t p_x, \tag{13}$$

and

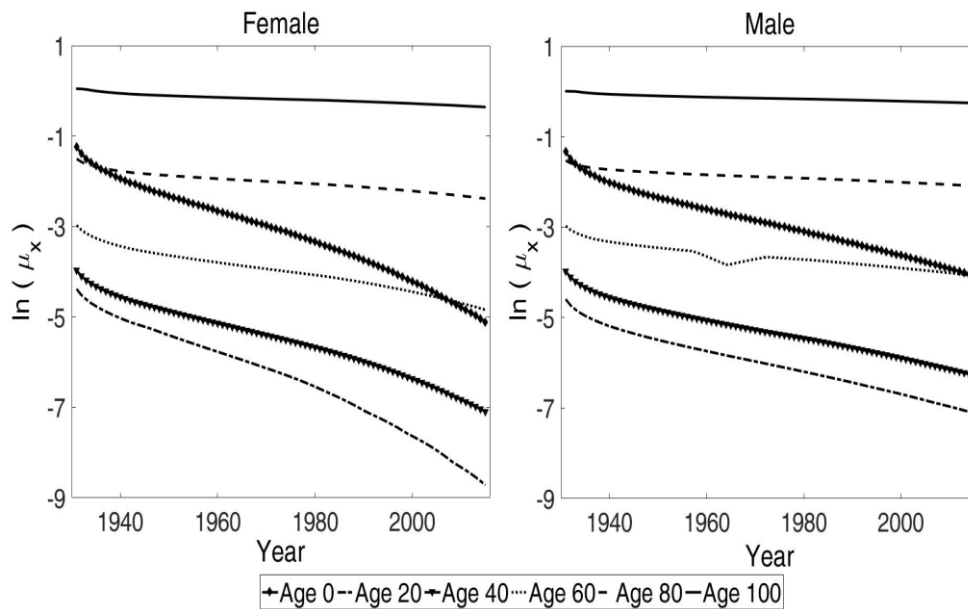
$${}_t E_x = {}_t p_x \exp(-\delta t). \tag{14}$$

Using Equation 13 and 14 and the mean value theorem; Equation 11 can be expressed as the sums of the one-year integrals. Entropy measure is calculated as:

$$H_x(\delta) \approx \frac{\sum_{t=0}^w {}_{t+\frac{1}{2}} Q_x {}_{t+\frac{1}{2}} E_x}{\sum_{t=0}^w {}_{t+\frac{1}{2}} E_x}. \tag{15}$$

### 3. Turkish mortality tables and entropy measures

Here, we calculated the entropy measure  $H_x(\delta)$  using the Turkish Life Tables over the time interval between 1931 and 2015. For the applications in this paper we are using MATLAB R2014a software. We consider the plots of mortality rates to determine the properties of population data. From Figure 3, decreasing mortality rates can be seen. To facilitate understanding these rates have been plotted on a logarithmic scale. These life tables will allow us to investigate the entropy measure changes over an almost 85 year period.

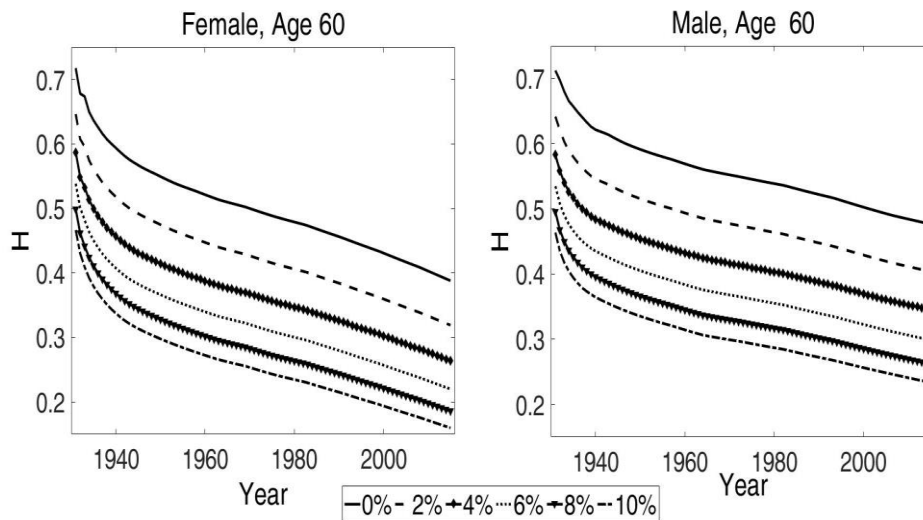


**Figure 3:** Mortality rates for females and males in log scale over the period 1931-2015.

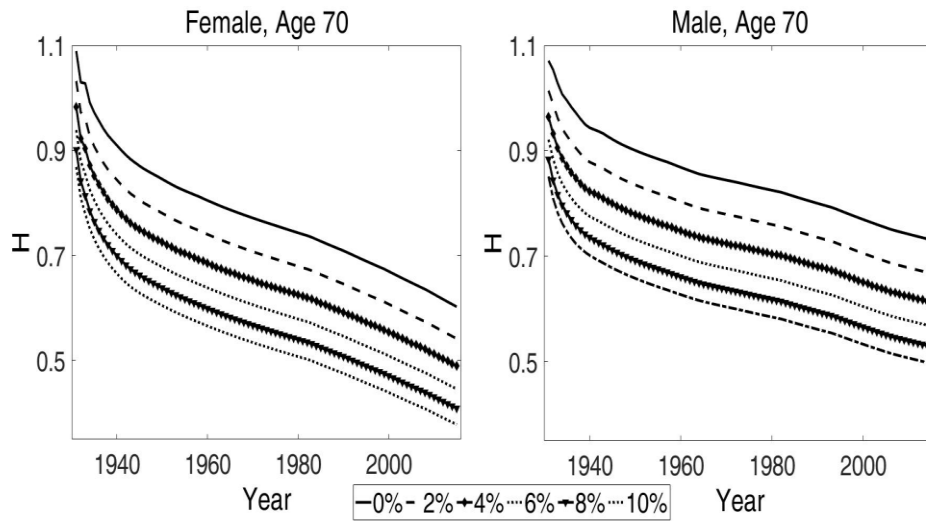
The current retirement ages in Turkey, until the year 2036, are 60 for males and 58 for females, as stated in law number 4447 [14]. The retirement age of the Social Security Institution will start to increase in 2036, one year in every two years, and reach to 65 for males in 2044, and for females in 2048 [15]. Hence the joint retirement age of two genders for this paper is selected as 65. The center of attraction of the entropy for annuities is for people who retired, mainly between the age ranges [60, 100], and [70, 100] are

considered with different rates of interest (e.g., 0%, 2%, 4%, 6%, 8%, 10%). The values for  $H_x(\delta)$  at ages 60 and 70 are computed for both genders. Figure 4 displays the entropy measure for females and males, aged 60. For all years, higher the interest rate, lower the value of  $H_{60}(\delta)$ , and the effect of changes in the mortality on the annuity. As expected, at any interest rate,  $H_{60}(\delta)$  is decreasing while levels of mortality get lower from 1931 to 2015. Hence, for the 2015 life table and  $\delta = 0.1$  the values of  $H_{60}(\delta)$  are lowest. Similar characteristics are valid in the entropy values for males. Generally, male entropy values are higher than the values for females and this interprets as male mortality has more room for development than female mortality rates. Also, higher the interest rates, lower the effect of changes in the force of mortality on the annuity. We expect  $H_{60}(\delta)$  to decrease when levels of mortality are lower so that, through 1931 to 2015, the values of  $H_{60}(\delta)$  are on the decrease at all rates of interest.

Figure 5 shows the values of  $H_{70}(\delta)$  for females and males. As expected,  $H_{70}(\delta)$  values are higher than  $H_{60}(\delta)$  values at all interest rates. It shows the greater effect of changes in the mortality on the expected lifetime and the cost of a life annuity is in the older age group (where mortality rates are much higher compared to younger ages) supporting the idea of rectangularization in Turkish mortality rates. Also, similarly to age 60, for all interest rates and for all years, entropy measure is lower for females than males at age 70. This result proves the mortality development potential of male population compared to female population, which already has a higher life expectancy than males, in various different ages like 60 and 70.



**Figure 4:** Sensitivity of entropy values to different interest rates, for Turkish life tables, females and males at age 60.



**Figure 5:** Sensitivity of entropy values to different interest rates, for Turkish life tables, females and males at age 70.

#### 4. Gompertz mortality model and entropy measures

Here, the entropy measure is calculated with an assumption that mortality is following a selected mathematical model. The data from the Construction of the Turkish Life and Annuity Tables Project is used as base mortality tables for the years 2000 and 2015. In this manner, mortality does not depend entirely on observed data, and with this, a hypothetical cohort outlook is adopted rather than a period life table outlook. By using the mathematical model assumption, it allows for a better examination of the different characteristics of entropy and how the value changes with different factors of a mathematical model [7].

Gompertz [16] suggested that a geometric progression pervades in mortality after a certain age. The mortality rates, particularly for ages over 30, suitably fit the Gompertz model. The model is often used to explain the distribution of the adult lifespan. There are other and newer models for modeling the specific features of mortality rates, but the Gompertz mortality model has advantages over them for users, such as implementation simplicities and familiarity with formula. In the recent study of Aburto et al. (2019), the threshold age of the lifetable entropy within the Gompertz mortality model is investigated [17].

The Gompertz mortality model defines the force of mortality as:

$$\mu_x = \exp(b + cx), \tag{16}$$

where,  $b$  denotes the force of mortality when the age  $x = 0$  (location parameter), and  $c$  denotes the rate of aging (shape parameter).

Considering the decreasing rates of mortality and an exponential mortality reduction factor (RF) depending only on time past after the base year, such as  $RF(t) = \exp(-\alpha t)$ , the new force of mortality is defined as

$$\mu'_{x+u} = \mu_{x+u}^0 RF(t), \tag{17}$$

where,  $\mu_{x+u}^0$  is the force of mortality in the chosen base year at age  $x+u$ , and  $\mu_{x+u}^t$  is the force of mortality in the  $t^{\text{th}}$  year after the base year at age  $x+u$ .

The behavior of the expected lifetime,  $e_x^0(t)$ , and annuity value as a function of time is studied. As mentioned in Vaupel [13], we can show that

$$\frac{\partial e_x^0(t)}{\partial t} \approx \frac{\alpha}{c} [1 - \mu_x^t e_x^0(t)]. \quad (18)$$

When considered in the long term, the following equation is achieved:

$$\frac{\partial e_x^0(t)}{\partial t} \approx \frac{\alpha}{c}. \quad (19)$$

The rate of change in the expected lifetime, over time, reaches a balanced level (the same can be applied to annuity value).

The force of mortality of the base table (time 0), at age  $x+u$ , defined as:

$$\mu_{x+u}^0 = \exp[b + c(x+u)] \quad (20)$$

Also RF is used which is depending only on time  $t$  for simplicity, in the form  $\exp(-\alpha t)$ , such that  $\mu_{x+u}^t = \mu_{x+u}^0 \exp(-\alpha t)$ . Hence, the probability of a person at age  $x$  lives to be  $x+t$  is:

$$\begin{aligned} {}_t p_x^* &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}^u du\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u}^0 RF(u) du\right) \\ &= \exp\left(-\mu_x^0 \left(\frac{\exp((c-\alpha)t)-1}{c-\alpha}\right)\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Here,  $\alpha$  is a bounded such that  $\alpha < c$ , so the probability of survival in Equation 21 will be less than 1.

Entropy is then calculated on a hypothetical cohort basis with the use of a reduction function. Hypothetical cohort life tables are preferable to period life tables at projecting a population into the future when the mortality rate is expected to change over time, and for analyzing the general trends in mortality.

Hereafter, for the notation of the entropy, computed as in [7],  $H(b, c, \alpha, \delta)$  can be used and defined as:

$$\begin{aligned}
 H(b, c, \alpha, \delta) &= \frac{\ln({}_t p_x^*) {}_t p_x^* \exp(-\delta t) dt}{\int_0^\infty {}_t p_x^* \exp(-\delta t) dt} \\
 &= \frac{\mu_x^0}{c - \alpha} \left\{ \frac{\int_0^t \exp\left[-\frac{\mu_x^0}{c - \alpha} (\exp((c - \alpha)t) - 1)\right] \exp((c - \alpha - \delta)t) dt}{\int_0^t \exp\left[-\frac{\mu_x^0}{c - \alpha} (\exp((c - \alpha)t) - 1)\right] \exp(-\delta t) dt} - 1 \right\}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

One beneficial side of using the Gompertz mortality model is that it enables us to see the effects of its parameters on  $H(b, c, \alpha, \delta)$ . It helps to grasp the behavior of the entropy. Integrals in Equation 22 can be written as the sums of one-year integrals using the same numerical approach in Equation 15.

2000 and 2015 mortality tables are selected as base mortality tables used in calculations. The parameters  $\mu_x^0$ ,  $c$ ,  $\alpha$ , and  $\delta$  are needed to calculate  $H(b, c, \alpha, \delta)$  values from the Equation 22. The Gompertz mortality model is applied to data in order to estimate  $c$ . Lower  $c$  value indicates that the mortality level of the base table is at a lower level. Table 1 shows the mortality rates and estimated  $c$  values for ages 0, 60 and 70, for the base table 2000. Table 2 shows the same features for the base table 2015.

Mortality rates of the base year 2000 and 2015 with the Gompertz models mortality rates are shown in Figure 6 and 7, which gives similar results. Gompertz mortality model is not a suitable fit for ages younger than 30. For ages 60 and 70, mortality rate estimations are consistent with the data. For this reason, age 0 is not taken into consideration in the rest of the application.

**Table 1.** 2000 base table mortality rates and estimated  $c$  values.

Age	Female		Male	
	$\mu_x^0$	$c$	$\mu_x^0$	$c$
0	0.014789	0.0741	0.026659	0.0664
60	0.011753	0.1037	0.020131	0.0924
70	0.037185	0.0996	0.052360	0.0910

The sensitivity of  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$  to  $\alpha$  and  $\delta$  parameters are tested. Various levels of improvement in mortality rates are considered by allowing  $\alpha$  to vary between  $-0.1$  and  $0.1$ . Positive values of  $\alpha$  stand for decreasing mortality rates, and negative values of  $\alpha$  stands for increasing mortality rates over time. Also, different rates of interest are considered from 0% to 10%. As can be seen from Figures 8 and 9 the value of entropy,  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$ , decreases in all four cases as the interest rate increases. When the interest rate is lower, the value of entropy is at its highest, and it is directly proportional to the mortality rate improvement level.  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$  increases with the  $\alpha$  in direct proportion up until a level (breaking point of  $H$ ) which thereafter any improvement in mortality rate decreases  $H$ . Hence mortality rate improvements start to lose their effect on the annuity value. As the interest rate increase, entropy decreases almost continuously and there is no peak point as mortality improves.

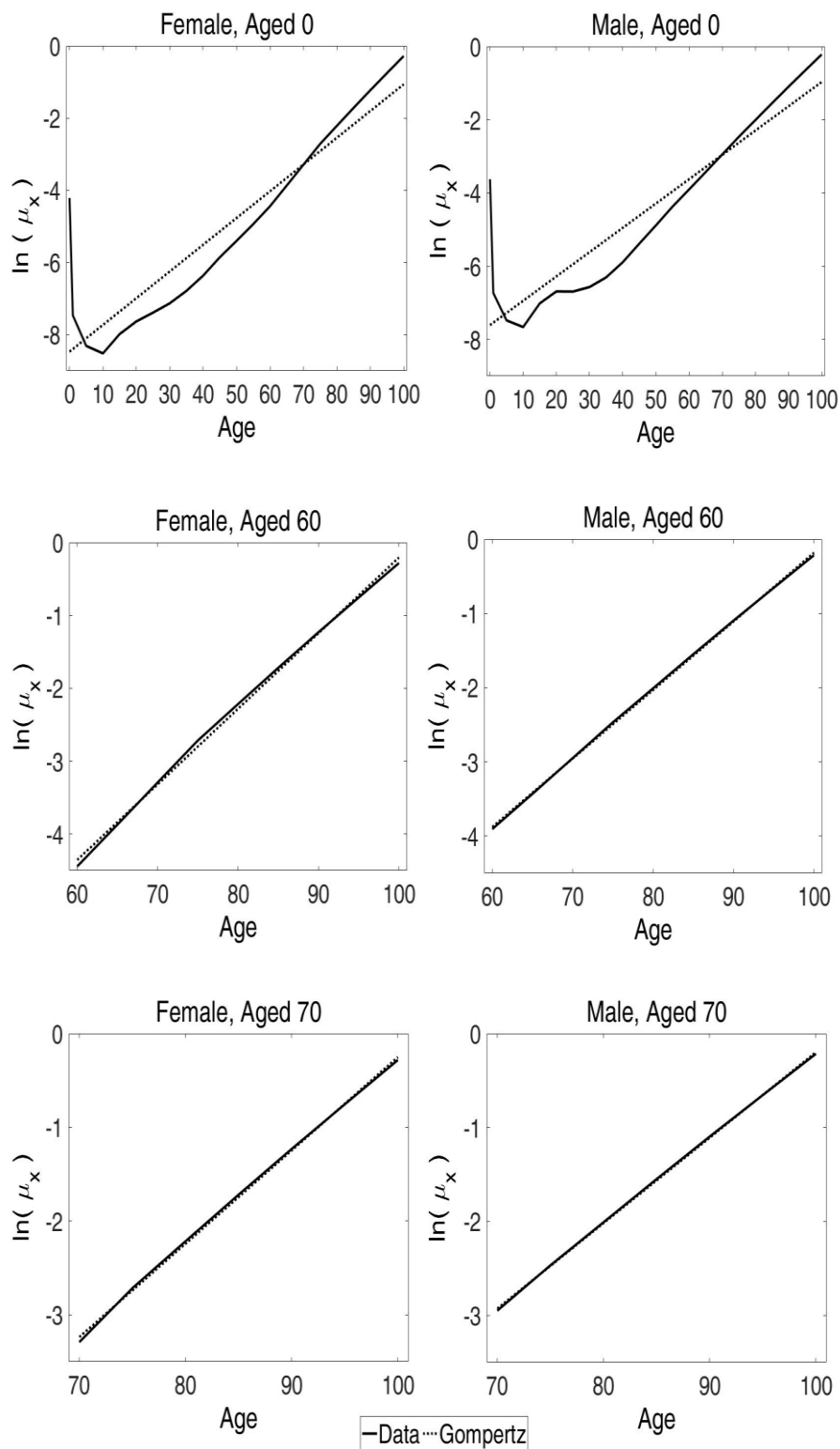


**Table 2.** 2015 base table mortality rates and estimated  $c$  values.

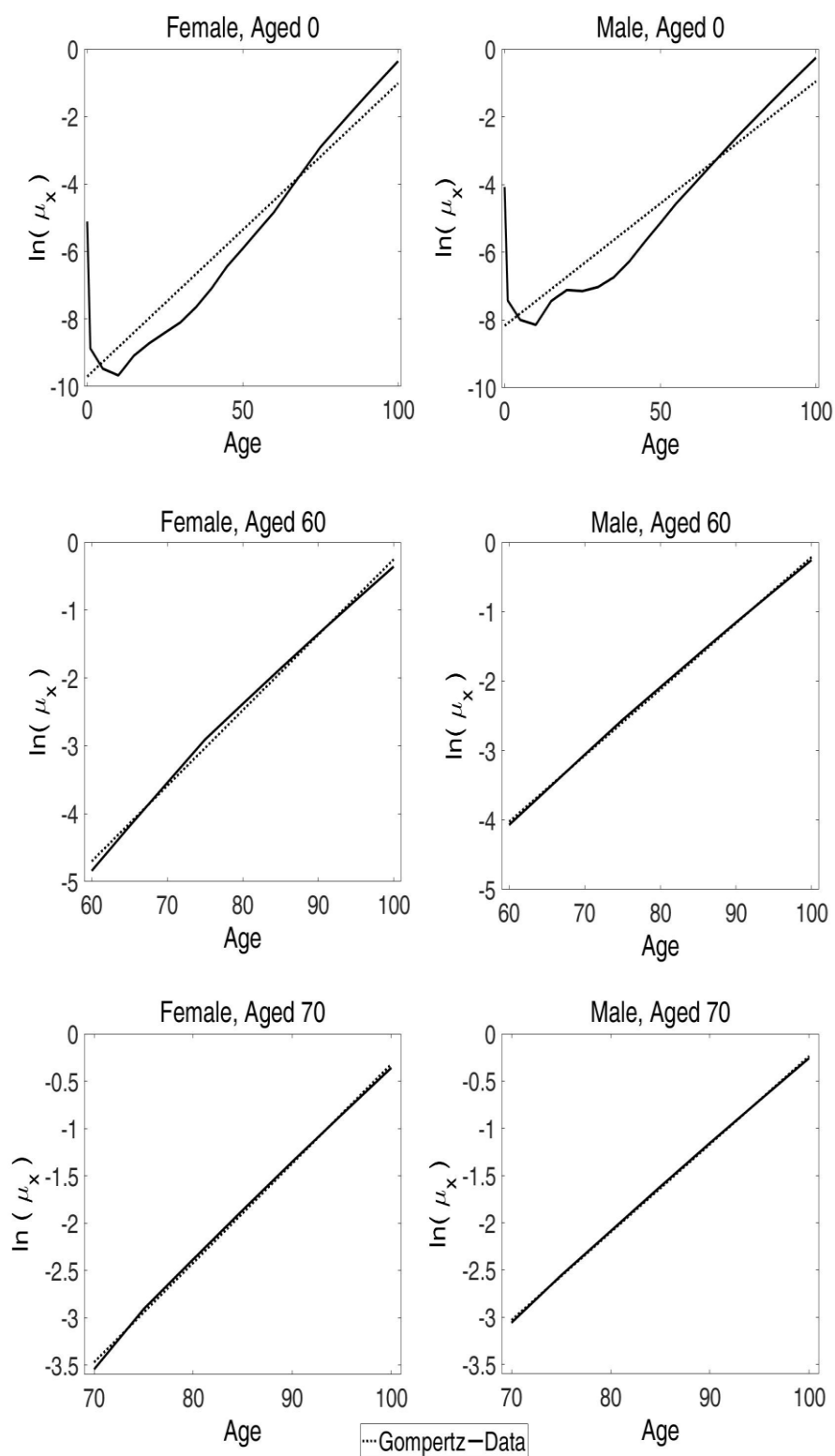
Age	Female		Male	
	$\mu_x^0$	$c$	$\mu_x^0$	$c$
0	0.006029	0.0869	0.017054	0.0722
60	0.007890	0.1112	0.017071	0.0953
70	0.028844	0.1050	0.046953	0.0932

$H$  values and the breaking points are consistently smaller for women than men; this reflects the relative difference in favor of women in the survival probabilities, annuity costs, and life expectations of various ages. Increasing age from 60 to 70 causes  $H$  values and the breaking points for both genders to increase.

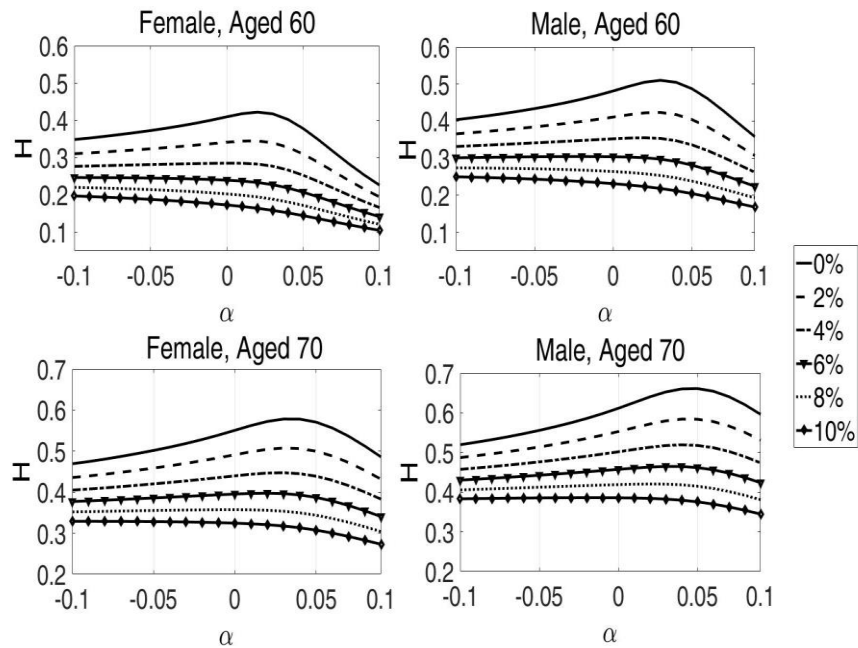
As a summary with  $\alpha = 0.05$  and  $\delta = 0.04$  changes in the annuity values are found with the Equation 10. For the base year 2000, the change in the annuity value for males; at age 60 is 1.68% , and at age 70 is 2.59% . For the base year 2015, these values change to 1.54% at age 60 and 2.46% at age 70. For the base year 2000, the change in the annuity value for females; at age 60 is 1.26% and at age 70 is 2.19% . For the base year 2015, these values change to 1.01% at age 60 and 1.93% at age 70.



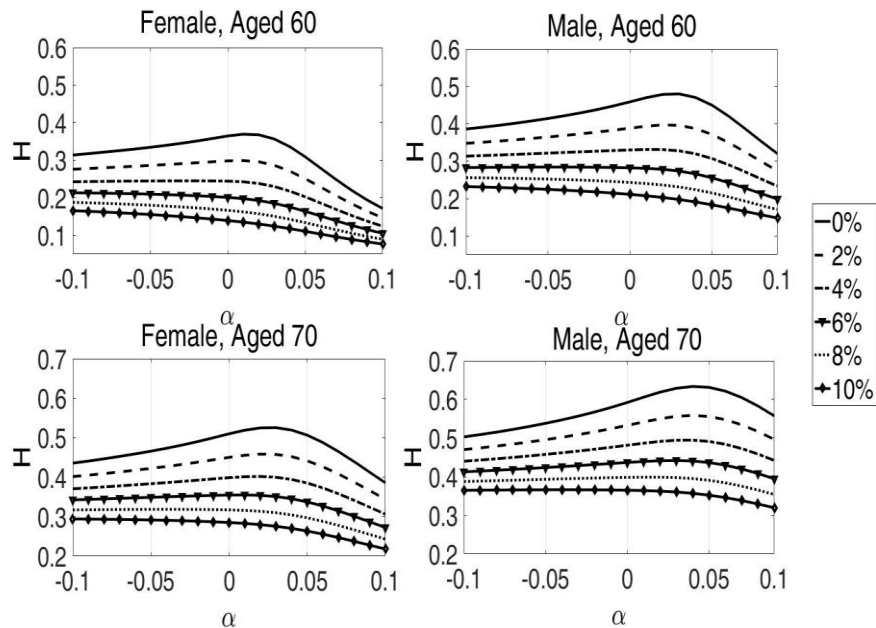
**Figure 6:** Data and Gompertz model comparisons of mortality rates of 2000, in logarithmic scale at ages 0, 60 and 70.



**Figure 7:** Data and Gompertz model comparisons of mortality rates of 2015, in logarithmic scale at ages 0, 60 and 70.



**Figure 8:** Sensitivity of  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$  in year 2000 to  $\alpha$  and  $\delta$  for ages 60 and 70.



**Figure 9:** Sensitivity of  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$  in year 2015 to  $\alpha$  and  $\delta$  for ages 60 and 70.

Effect of the base mortality table on entropy can be tested by different values of  $c$ . To exemplify, the values of  $c$  between 0.09 and 0.115 is taken into consideration. Figures 10 and 11 shows results for  $\delta = 0\%$ .  $H_x(b, c, \alpha, \delta)$ , as a function of  $\alpha$ , is peaked at one point (breaking point of  $H$ ). When the RF is greater than one (when  $\alpha$  is negative), entropy values are higher in lower mortality level ( $c = 0.09$ ) than the ones in higher mortality levels ( $c = 0.115$ ). On the contrary, when the RF is less than one (when  $\alpha$  is positive), this relationship is reversed with improving mortality.

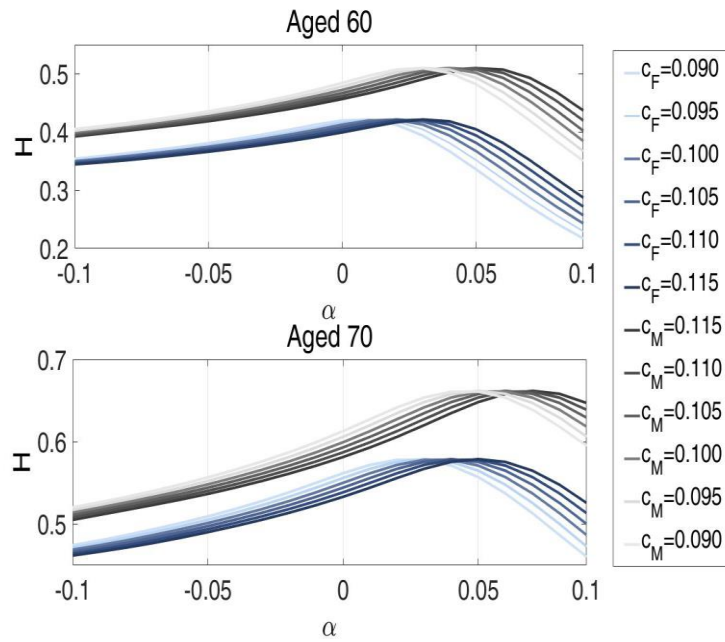


Figure 10: Entropy values for the base year 2000 with a range of  $c$  values, and  $\delta = 0\%$  .

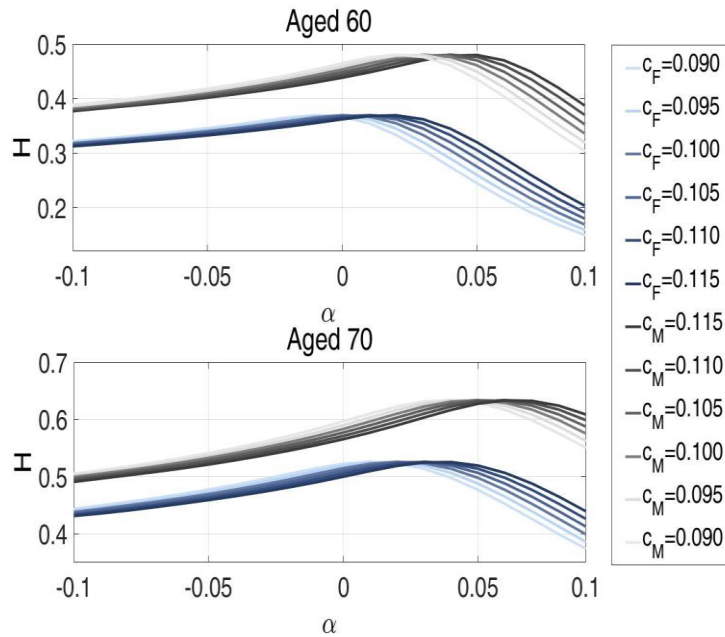


Figure 11: Entropy values for the base year 2015 with a range of  $c$  values, and  $\delta = 0\%$  .

Initially, verifying the conclusion that annuity cost with a high  $c$  value (high mortality group) is less effected from the changes in the mortality rate than with a low  $c$  value when the mortality rate is high. At decreased levels of mortality, this is reversed and the annuity cost with a high  $c$  value is more effected from the changes in the mortality rate than a low  $c$  value.

## 5. Conclusion

The decrease in mortality rates was expected globally, mostly due to elimination of disease-related factors and with better living conditions. The unexpected part of the decrease was the continuity. The persistent decrease in mortality rates is causing several new challenges and questions at multiple levels, such that is there a limit of human life expectancy? Challenges include Turkish annuity and pension providers, as they have to update the policy tariffications continuously. Mortality reduction and rising longevity for post-retirement ages have a remarkable financial effect on the annuity and pension plans. Because of the tax-paid structure of the pension system, the deficiencies of public social security system are aggravated by mortality improvements.

We examined the entropy measure under various scenarios to measure the effect of any change in the mortality on the annuity value. The entropy measure is calculated with different mortality, age, gender, and interest rate parameters. Results show that entropy values are higher for the males at different ages, suggesting that male population has more room for mortality developments rather than female population. Entropy is found to be highly sensitive to age, selected base year, interest rate, and mortality changes. As the age increase, entropy value follows this increase to the older ages in life. In most developed countries infant mortality is mostly eliminated and further increases in life expectancy and developments in mortality are concentrated in later years of life, as suggested by Fernandez and Beltrán-Sánchez [18]. We see that annuity and entropy are inverse proportion to interest rate and directly proportional to age, supporting the idea of rectangularization in the Turkish mortality rates. In all scenarios, lower the interest rate, higher the value of entropy. This highlights the importance that there is a higher effect of mortality risk on the net single premium of annuity payments; in particular with a low-interest economical environment.

At very high and low levels of mortality developments, the numerical results suggest that the effect of mortality changes on the annuity value is minimal and less likely to have a significant effect on the the annuity values. In this case, even if mortality continues to decline in the future, it will approach to a country specific level and any more future decline would not affect the annuity premiums.

## References

- [1] W.J., Nusselder, J.P., Mackenbach, 1996, Rectangularization of the survival curve in the Netherlands, 1950-1992, *The Gerontologist* 36, pp. 773–782.
- [2] United Nations, World population prospects: The 2015 revision, United Nations Econ Soc Aff 33, 2015, pp. 1–66.
- [3] Insurance Information and Monitoring Center, 2010, Construction of Turkish life and annuity tables project, Available at: <https://www.tramer.org.tr/tr/sayfa/mortalite-tablosu-17> .
- [4] A.J. Coale, P. Demeny, 1983, *Regional model life tables and stable populations*, Princeton.
- [5] J.H. Pollard, 1982, The expectation of life and its relationship to mortality, *Journal of the Institute of Actuaries*, 109, pp. 225–240.
- [6] N. Keyfitz, H. Caswell, 2005, *Applied mathematical demography*, Vol. 47, Springer.
- [7] M. Khalaf-Allah, S. Haberman, R. Verrall, 2006, Measuring the effect of mortality improvements on the cost of annuities, *Insurance: Mathematics and Economics*, 39, pp. 231–249.
- [8] D. Nagnur, 1986, Rectangularization of the survival curve and entropy: The Canadian experience, 1921-1981, *Canadian Studies in Population*, pp. 83–102.
- [9] Sachlas, T. Papaioannou, 2014, Residual and past entropy in actuarial science and survival models, *Methodology and Computing in Applied Probability* 16, pp. 79–99.
- [10] M.C. De Castro, 2001, Changes in mortality and life expectancy: some methodological issues, *Mathematical Population Studies*, 9, pp. 181–208.

- [11] N. Goldman, G. Lord, 1986, A new look at entropy and the life table, *Demography*, 23, pp. 275–282.
- [12] L. Demetrius, 1979, Relations between demographic parameters, *Demography*, 16, pp. 329–338.
- [13] J.W. Vaupel, 1986, How change in age-specific mortality affects life expectancy, *Population Studies*, 40, pp. 147–157.
- [14] Social Security Institution, SSI retirement terms, 1999, Available at <http://www.sgk.gen.tr/ssk/sgk-emeklilik-sartlari.html> .
- [15] Official Gazette 26200, Social Insurance and General Health Insurance Law No. 5510.
- [16] Gompertz, 1825, Xxiv. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. in a letter to Francis Baily, esq. frs &c, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, pp. 513–583.
- [17] Aburto J. M., Alvarez J. A., Villavicencio F., Vaupel, J. W., 2019, The threshold age of the lifetable entropy, *Demographic Research*, 41, pp. 83-102.
- [18] Fernandez O. E., Beltrán-Sánchez, H., 2015, The entropy of the life table: A reappraisal, *Theoretical population biology*, 104, pp. 26-45.