



# BEYKENT ÜNİVERSİTESİ

## FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

**Beykent Üniversitesi Yayınları, No 143**

**Cilt/Volume: 13 Sayı/Number: 1 Yıl/Year: 2020 Spring/Bahar**

ISSN: 1307 - 3818

**T.C.**  
**BEYKENT ÜNİVERSİTESİ**

**FEN VE MÜHENDİSLİK**  
**BİLİMLERİ DERGİSİ**



**BEYKENT UNIVERSITY**  
**JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING**

Sertifika No:

**46286**

Beykent Üniversitesi Yayınları , No 143

*Cilt/Volume: 13 Sayı Number: 1 Yıl Year: 2020 Spring/Bahar*



**SAHİBİ/PROPRIETOR**

Prof. Dr. Murat FERMAN

Beykent Üniversitesi adına / on behalf of Beykent University

**GENEL YAYIN YÖNETMENİ / EDITOR IN CHIEF**

Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

**GENEL YAYIN YÖNETMEN YARDIMCILARI / ASSISTANT EDITORS**

Prof. Dr. Şeyma AYDINOĞLU

Doç. Dr. Pınar ÖKTEM ERKARTAL

Dr. Öğr. Üyesi Ediz ŞAYKOL

**YAYIN SEKRETERİ / PUBLISHING SECRETARY**

Dr. Öğr. Üyesi Kemal Gökhan NALBANT

**YAYIN KURULU / PUBLISHING BOARD**

Prof. Dr. Adnan KAYPMUZ

Prof. Dr. Mehmet Bülent ÖRENCİK

Prof. Dr. Ayşe Uğur TÛTENGİL

Prof. Dr. Kazım SARI

**YAYINEVİ MÛDÛRÛ**

İlkay ERARSLAN

Her hakkı saklıdır. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi yılda iki kez yayımlanan, hakemli bir dergidir. Yayın dili Türkçe ve İngilizce dir. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi'nde yayımlanan makalelerdeki görüş ve düşünceler yazarların kişisel düşünceleri olup, hiçbir şekilde Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi'nin veya Beykent Üniversitesi'nin görüşlerini ifade etmez. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi'ne gönderilen makaleler iade edilmez.

**DANIŞMA KURULU**

Prof. Dr. Murat FERMAN (Beykent Üniversitesi Rektörü)

Prof. Dr. Hüseyin CÖMERT (Beykent Üniversitesi)

Prof. Dr. Melih GEÇKİNLİ (Beykent Üniversitesi)

Prof. Dr. Şengül ÖYMEN GÛR (Beykent Üniversitesi)



- Prof. Dr. Nihal ARIOĞLU (Beykent Üniversitesi)
- Prof. Dr. Osman PALAMUTÇUOĞULLARI (Beykent Üniversitesi)
- Prof. Dr. Ayla ANTEL (Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi)
- Prof. Dr. Salih OFLUOĞLU (Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi)
- Prof. Dr. Talha DİNİBÜTÜN (Doğuş Üniversitesi)
- Prof. Dr. Ataç SOYSAL (Doğuş Üniversitesi)
- Prof. Dr. Ömer OĞUZ (Haliç Üniversitesi)
- Prof. Dr. Filiz KARAOSMANOĞLU (İstanbul Teknik Üniversitesi)
- Prof. Dr. Ali PINAR (Boğaziçi Üniversitesi)
- Prof. Dr. Argun KOCAMAN (İstanbul Altınbaş Üniversitesi)
- Prof. Dr. Emin DEMİRBAĞ (İstanbul Teknik Üniversitesi)
- Prof. Dr. Gündüz HORASAN (Sakarya Üniversitesi)
- Prof. Dr. Ayşe Nilay EVCİL (Beykent Üniversitesi)
- Prof. Dr. Gökhan SİLAHTAROĞLU (İstanbul Medipol Üniversitesi)
- Doç. Dr. Ümit IŞIKDAĞ (Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi)
- Doç. Dr. Elif ÖZKARA CANFES (İstanbul Teknik Üniversitesi)
- Doç. Dr. Başar ÖZTAYŞI (İstanbul Teknik Üniversitesi)
- Dr. Öğr. Üyesi Bilge YILDIRIM GÖNÜL (Beykent Üniversitesi)
- Dr. Öğr. Üyesi Sebahattin Kerem AYTULUN (Beykent Üniversitesi)
- Dr. Öğr. Üyesi İhsan KARAGÖZ (Beykent Üniversitesi)
- Dr. Öğr. Üyesi Abdullah Serdar KAZANCIOĞLU (Beykent Üniversitesi)





## İÇİNDEKİLER

A HIGHER-ORDER SENSITIVE FINITE DIFFERENCES SCHEME OF THE CAUCHY PROBLEM FOR 2D LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS Öykü YENER, Bahaddin SİNSOYSAL, Mahir RASULOV .....	6 - 12
ASAL KATSAYILARLA DÜZENLENMİŞ DOĞRUSAL ÜRETEÇ Hakan GENÇOĞLU, Tarık YERLİKAYA .....	13 - 18
DEĞİŞİK KATLARDA ÇIKAN YANGIN SONUCUNDA ÇELİK YAPILARIN DAYANIMLARININ ARAŞTIRILMASI Mehmet Toyaç YAZGAN .....	19 - 33
ELECTROMAGNETIC SHIELDING PERFORMANCES OF COLEMANITE / PANI / SIO <sub>2</sub> COMPOSITES IN RADAR AND WIDER FREQUENCY RANGES Ethem İlhan ŞAHİN, Mehriban EMEK, Burcu ERTUĞ, Mesut KARTAL .....	34 - 42
SPECTRAL ANALYSIS OF ELASTIC WAVEGUIDES Mahir HASANSOY .....	43 - 54

## A HIGHER-ORDER SENSITIVE FINITE DIFFERENCES SCHEME OF THE CAUCHY PROBLEM FOR 2D LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

Öykü YENER\*, Bahaddin SİNSOYSAL\*\*, Mahir RASULOV\*\*\*

### ABSTRACT

In this study we develop a finite difference scheme for practical calculation of the Cauchy problem for the 2D scalar advection equation with a higher accuracy order constant coefficient, encountered in different fields of hydrodynamics. For this aim, to develop an auxiliary problem having some advantages over the main problem is introduced. The proposed auxiliary problem permits us to construct a higher-order sensitive finite differences scheme.

**Keywords:** *Modelling equations of hydrodynamics, Weak solution in a class of discontinuous functions, Moving network*

\*Makale Gönderim Tarihi: 12.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 05.06.2020 Makale Türü: Araştırma DOI: 10.20854/bujse.736345

\*Sorumlu yazar: Beykent University, Institute of Graduate Studies, PhD Student in Applied Mathematics Department, Taksim, Istanbul, Turkey (yeneroyku@gmail.com) (ORCID ID: 0000-0002-9583-714X)

\*\*Beykent University, Department of Management Information Systems, Sarıyer, Istanbul, Turkey (bsinsoyal@beykent.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0003-2926-2744)

\*\*\*Baku State University, Department of Numerical Methods of Mathematics, Baku, Azerbaijan (mresulov@gmail.com) (ORCID ID: 0000-0002-8393-2019)

## SABİT KATSAYILI İKİ BOYUTLU LİNEER HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN CAUCHY PROBLEMİNİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA YÜKSEK MERTEBEDEN HASSAS SONLU FARKLAR ŞEMASI

Öykü YENER\*, Bahaddin SİNSOYSAL\*\*, Mahir RASULOV\*\*\*

### ÖZ

Bu çalışmada, hidrodinamiğin çeşitli alanlarında karşılaşılan iki boyutlu skaler adveksiyon denklemi için yazılmış Cauchy probleminin pratik hesaplanması için bir sonlu fark şeması geliştirilmiştir. Bu amaçla, ana probleme göre bazı avantajları olan bir yardımcı problem sunulmuştur. Önerilen yardımcı problem, daha yüksek mertebeden hassas bir sonlu farklar şeması oluşturmaya imkan sağlar.

**Anahtar Kelimeler:** Hidrodinamiğin model denklemleri, Süreksiz fonksiyonlar sınıfında zayıf çözüm, Hareketli ağı

\*Makale Gönderim Tarihi: 12.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 05.06.2020 Makale Türü: Araştırma DOI: 10.20854/bujse.736345

\*Sorumlu yazar: Beykent University, Institute of Graduate Studies, PhD Student in Applied Mathematics Department, Taksim, Istanbul, Turkey (yeneroyku@gmail.com) (ORCID ID: 0000-0002-9583-714X)

\*\*Beykent University, Department of Management Information Systems, Sarıyer, Istanbul, Turkey (bsinsoyal@beykent.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0003-2926-2744)

\*\*\*Baku State University, Department of Numerical Methods of Mathematics, Baku, Azerbaijan (mresulov@gmail.com) (ORCID ID: 0000-0002-8393-2019)

**1. Introduction**

As usual, let  $R^3(x, y, t)$  be Euclidean space of the points  $(x, y, t)$  and  $Q = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ,  $Q_T = Q \times [0, T]$ . Here  $(x, y)$  and  $t$  are spatial and time variables respectively. In  $Q_T$  we consider the following problem

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (2)$$

Here,  $A$  and  $B$  are given constants,  $u_0(x, y)$  is a known function having in  $Q$  some lines of discontinuity of the first type. Equation of the type (1) appears in different model problems of hydrodynamics [1],[3],[4],[6],[7],[8],[15]-[18].

The problem (1), (2) later on we will call the main problem. Let  $Q_{xy}$  be the domain defined as follows, Figure 1.

$$Q_{xy} = \{(\xi, \eta), a \leq \xi \leq x, c \leq \eta \leq y\}.$$

**2. Exact Solutions of the Main and Auxiliary Problems**

Using the method of characteristics, we can show that the function

$$u(x, y, t) = u_0(x - At, y - Bt) \quad (3)$$

is the exact solution of the main problem.

Definition 1. The function  $u(x, y, t)$  satisfying the initial condition (2) is called a weak solution of the problem (1),(2) if the following integral relation

$$\int_{Q_{ab} \times [0, T]} \{u(x, y, t)[\varphi_t(x, y, t) + A\varphi_x(x, y, t) + B\varphi_y(x, y, t)] dx dy dt + \int_{Q_{ab}} \varphi(x, y, 0)u_0(x, y) dx dy = 0 \quad (4)$$

holds for every test function  $\varphi(x, y, t)$  defined and is differentiable in the upper half plane and vanishes for the large  $|x| + t$  and  $\varphi(x, T) = 0$ .

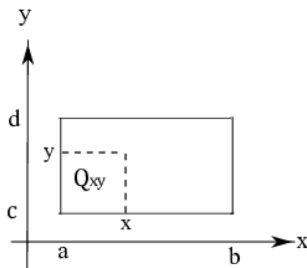


Figure 1: The  $Q_{xy}$  domain

**Theorem 1.** If the function  $u(x, y, t)$  is a continuous solution of the main problem, then the function  $u(x, y, t) = u_0(x - At, y - Bt)$  is a soft solution of the main problem too, [9].

**Proof.** According to the definition of the weak solution we have

$$\int_{Q_{ab} \times [0, T]} \{u(x, y, t)[\varphi_t(x, y, t) + A\varphi_x(x, y, t) + B\varphi_y(x, y, t)] dx dy dt + \int_{Q_{ab}} \varphi(x, y, 0)u_0(x, y) dx dy = 0. \quad (5)$$

**Theorem 2.** If the function  $u(x, y, t) = u_0(x - At, y - Bt)$  is integrable, then the function  $u(x, y, t)$  is a weak solution of the main problem, [9].

**Proof.** According to the definition of a weak solution we have

$$\int_{Q_{ab} \times [0, T]} \{u(x, y, t)[\varphi_t(x, y, t) + A\varphi_x(x, y, t) + B\varphi_y(x, y, t)] dx dy dt + \int_{Q_{ab}} \varphi(x, y, 0)u_0(x, y) dx dy = 0. \quad (6)$$

Integrated equation (1) on the domain  $Q_{xy}$  with respect to  $x$  and  $y$  we have

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Q_{xy}} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_{Q_{xy}} \left[ A \frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} + B \frac{\partial u(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = 0. \quad (7)$$

Using the Green's formula we get

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_c^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_{\partial Q_{xy}} A u dy - B u dx = 0 \quad (8)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_c^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + A \int_c^y [u(x, \eta, t) - u(a, \eta, t)] d\eta - B \int_a^x [u(\xi, y, t) - u(\xi, c, t)] d\xi = 0. \quad (9)$$

The last equation we can rewrite as,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_c^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + A \int_c^y u(x, \eta, t) d\eta - B \int_a^x u(\xi, y, t) d\xi = \varphi(a, y, t) + \psi(x, c, t). \quad (10)$$

Here,

$$\varphi(a, y, t) = A \int_c^y u(a, \eta, t) d\eta, \quad (11)$$

$$\psi(x, c, t) = B \int_a^x u(\xi, c, t) d\xi. \quad (12)$$

Using the suggested method different problems were solved. [10]-[13] The general scheme offered method is shown in Figure 2. The equation (10) together with the condition (2) is called as first auxiliary problem.

We introduce the following operator

$$\mathfrak{I}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y}. \quad (13)$$

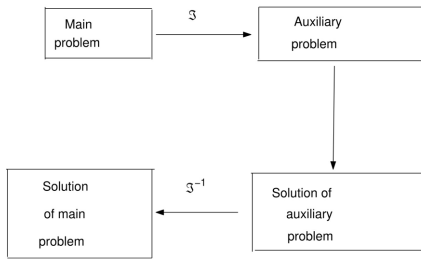
and the function is defined as

$$v(x, y, t) = \int_a^x \int_c^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \varphi(a, y, t) + \psi(x, c, t). \quad (14)$$

It is easily seen that the function  $\varphi(a, y, t) + \psi(x, b, t) \in \ker \mathfrak{I}$ . Indeed,

$$\mathfrak{I}[\varphi(a, y, t) + \psi(x, c, t)] = \mathfrak{I}[A \int_b^y u(a, \eta, t) d\eta + B \int_a^x u(\xi, c, t) d\xi] =$$

$$A \frac{\partial u(a, \eta, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, c, t)}{\partial y} = 0.$$



**Figure 2:** The general scheme of the suggested method

Sometimes happen conveniently introduce of the second type auxiliary problem defined as follows. Taking into consideration (14) the equation (10) take the form

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

From (14) we have

$$\frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} = u(x, y, t). \quad (16)$$

Indeed, if we differentiate the relation (14) at first with respect to  $x$ , then with respect to  $y$  we prove the validity of (16).

The initial condition for the equation (15) is

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (17)$$

here, the function  $v_0(x, y)$  is any continuously differentiable solution of the equation

$$\frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x \partial y} = u_0(x, y). \quad (18)$$

The problem (15),(17) is called the second type auxiliary problem. Both auxiliary problems have the following advantages:

- The differentiability property of the function  $v(x, y, t)$  with respect to  $x$  and  $y$  is one order higher than  $u(x, y, t)$
- The function  $u(x, y, t)$  may be discontinuous.
- In obtaining the solution  $u(x, y, t)$  of the problem (1), (2), we do not use the derivatives  $u_x, u_y, u_t$  which can not exist usually.

It is obvious that the solution of the auxiliary problem is not unique [7],[16]. The following theorem is valid.

**Theorem 3.** If the function  $v(x, y, t)$  is the classical solution of the auxiliary problem (15),(17), then the function  $u(x, y, t)$  defined by (16) is a weak solution of the main problem.

**Proof.** Let the function  $\varphi(x, y, t)$  be a test function and we consider the following expression

$$0 = \int_{Q_{ab \times [0, T]}} \mathfrak{Z}(\varphi(x, y, t)) \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy dt.$$

After some simple manipulation we get

$$\int_{Q_{ab \times [0, T]}} \varphi(x, y, t) \left\{ \frac{\partial \mathfrak{Z}v}{\partial t} + A \frac{\partial \mathfrak{Z}v}{\partial x} + B \frac{\partial \mathfrak{Z}v}{\partial y} \right\} dx dy dt = 0. \quad (19)$$

Integrating (15) with respect to  $t, x, y$

$$\int_{Q_{ab \times [0, T]}} \varphi(x, y, t) \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + A \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right\} dx dy dt = 0. \quad (20)$$

It proves Theorem 3.

Now we introduce a function  $v(x, y, t)$  defined by the following relation

$$v(x, y, t) = \int_a^x \int_c^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + H_1(x, y, a, c, t). \quad (21)$$

Here,  $H_1(x, y, a, c, t) = -(A \int_c^y u(a, \eta, t) d\eta + B \int_a^x u(\xi, c, t) d\xi)$ . It easily shows that  $\mathfrak{Z}\{H_1(x, y, a, c, t)\} = 0$ .

According to equation (21) we can rewrite equation (10) in the form

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} + A \int_c^y u(x, \eta, t) d\eta + B \int_a^x u(\xi, y, t) d\xi = 0. \quad (22)$$

Taking into consideration (21) we have

$$u(x, y, t) = \mathfrak{Z}\{v(x, y, t)\}. \quad (23)$$

Then equation (22) takes the form (15)

The exact solution of the problem (15), (17) is

$$v(x, y, t) = v_0(x - At, y - Bt). \quad (24)$$

### 3. Finite Differences Scheme for Cauchy Problem in a Class of Discontinuous Functions

In this section, we intend to introduce the numerical method for the problem (1), (2), and investigate some properties of it. By using the advantages of the suggested auxiliary problem, a new numerical algorithm is proposed. In [10],[11] the suggested numerical method applied to solve for nonlinear scalar equations of hydrodynamics

In further research, we will exploit the concept and theory of finite differences from the familiar books [2],[5],[14],[15]. In order to construct the method, the domain definition of the problem is covered by the following grid,

$$\omega_{h_1, h_2, \tau} = \{(x_i, y_j, t_k), x_i = ih_1, y_j = jh_2,$$

$$t_k = k\tau, i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots;$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; h_x > 0, h_y > 0, \tau > 0\}$$

where,  $h_x, h_y$  and  $\tau$  are steps of the grid with respect to  $x, y$  and  $t$ , respectively. The problem (15),(17) at any points of the grid  $\omega_{h_1, h_2, \tau}$  is approximated by the following differences scheme

$$\frac{\hat{V}_{i,j} - V_{i,j}}{\tau} + A \frac{\hat{V}_{i+1,j} - \hat{V}_{i,j}}{h_x} + B \frac{\hat{V}_{i,j+1} - \hat{V}_{i,j}}{h_y} = 0 \quad (25)$$

The initial condition for (25) is

$$V_{i,j,0} = v_0(x_i, y_j). \quad (26)$$

If we write the equation (25) in point  $(i-1, j)$  and subtract it from (25) and divide it by  $h_x$  we get.

$$\frac{1}{h_x} \left[ \frac{\hat{V}_{i,j} - V_{i,j}}{\tau} - \frac{\hat{V}_{i-1,j} - V_{i-1,j}}{\tau} \right] + \frac{A}{h_x} \left[ \frac{\hat{V}_{i+1,j} - \hat{V}_{i,j}}{h_x} - \frac{\hat{V}_{i,j} - \hat{V}_{i-1,j}}{h_x} \right] + \frac{B}{h_x} \left[ \frac{\hat{V}_{i,j+1} - \hat{V}_{i,j}}{h_y} - \frac{\hat{V}_{i-1,j} - \hat{V}_{i-1,j-1}}{h_y} \right] = 0. \quad (27)$$

It is easily seen that the function  $\hat{U}_{i,j}$  defined with the help of the equality

$$\widehat{U}_{i,j} = \frac{1}{h_x} \left[ \frac{\widehat{U}_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_y} - \frac{\widehat{U}_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}}{h_y} \right]$$

is the solution of equation (25).

To approximate of the problem (10),(2) by the finite difference, the integrals leaving into (10) are approximated as follows

$$\int_a^x u(\xi, y, t) d\xi = h_1 \sum_{v=1}^i U_{v,j,k}, \quad (28)$$

$$\int_b^y u(x, \eta, t) d\eta = h_2 \sum_{\mu=1}^j U_{i,\mu,k}, \quad (29)$$

and

$$\int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = h_1 h_2 \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U_{v,\mu,k}. \quad (30)$$

Taking this into consideration (25)-(27), the equation (9) at any point (i,j,k) of the grid  $\omega_{h_1, h_2, \tau}$  is approximated as follows

$$U_{i,j,k+1} = (1 - \tau h_1 A - \tau h_2 B) U_{i,j,k} + \tau h_1 A \sum_{\mu=1}^j U_{0,\mu,k} + \tau h_2 B \sum_{v=1}^i U_{v,0,k} - \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{j-1} (U_{v,\mu,k+1} - U_{v,\mu,k} - \tau h_1 A \sum_{\mu=1}^{j-1} U_{i,\mu,k} - \tau h_2 B \sum_{v=1}^{i-1} U_{v,j,k}), \quad (31)$$

( $i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M, k = 0, 1, 2, \dots$ ).

The initial condition for (31) is

$$U_{i,j,0} = u_0(x_i, y_j), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M). \quad (32)$$

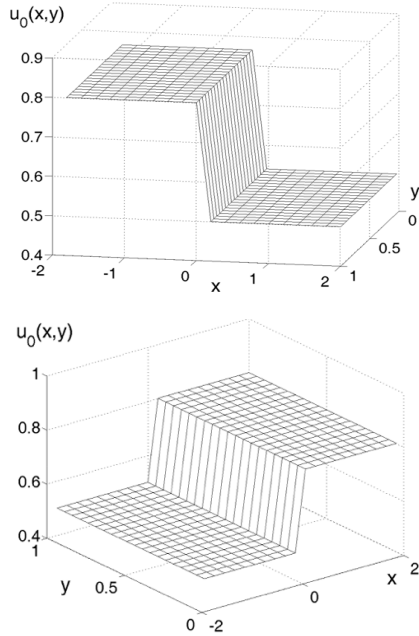
#### 4. Numerical Experiments

The basic goal of this study is to develop an algorithm for the solution of the Cauchy problem for the 2D parabolic type equation in a class of discontinuous functions. At first this algorithm is tested on a linear equation, and later this method will be developed to a nonlinear problem. Here and later on we will use the advantages of the suggested auxiliary problem. In order to convince on the validity of the suggested method at first the computer tests will be carried out for the exact solution.

For this aim as the function  $u_0(x, y)$ , we take

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

For the sake of simplicity, we assume that  $A=B=1$ . There are two cases: (i)  $u_1 > u_2$ ,  $u_1 < u_2$ . The graphs of these functions are demonstrated in Figure 3a) and 3b).

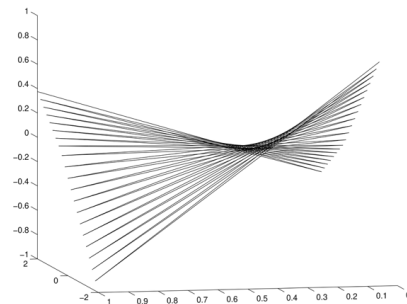


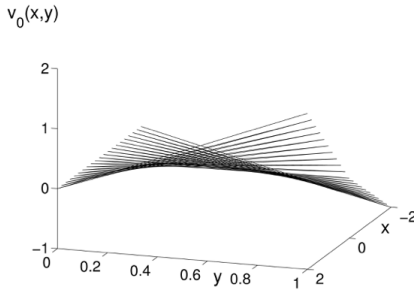
**Figure 3:**

- a) The graph of the function  $u_0(x, y)$ ,  $u_1 > u_2$ ;
- b) The graph of the function  $u_0(x, y)$ ,  $u_1 < u_2$

The initial function of  $v_0(x, y)$  obtained from equation (18)

$$v_0(x, y) = \begin{cases} u_1 xy, & x < 0, \\ u_2 xy, & x > 0, \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 1.$$





**Figure 4:**

- a) The graph of the function  $v_0(x, y)$ ,  $u_1 > u_2$ ;
- b) The graph of the function  $v_0(x, y)$ ,  $u_1 < u_2$

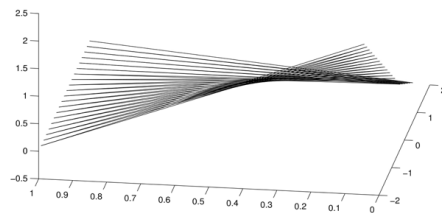
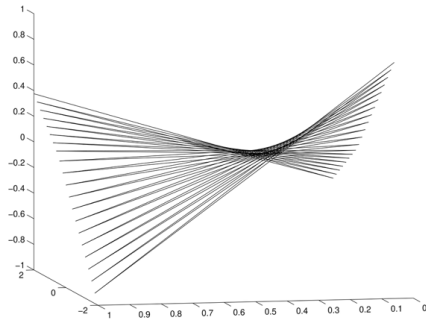
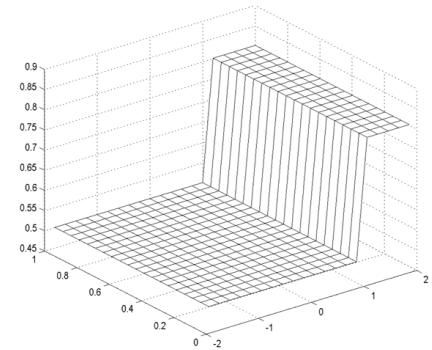
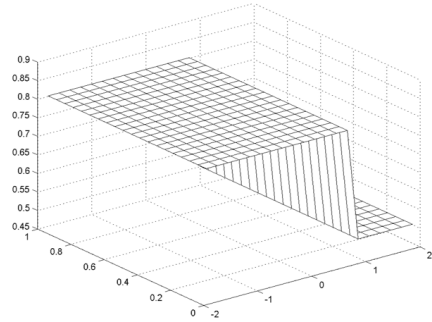
As it is seen from Figure 4a) and 4b) the order of differentiability of  $v_0(x, y)$  is greater than  $u_0(x, y)$ , that permits us to apply classical methods. In order to find the exact solution of the main problem, we will use the solution of the auxiliary problem (15),(17) which is expressed as follows:

$$v(x, y, t) = \begin{cases} u_1(x-t)(y-t), & x < 1+t, \\ u_2(x-t)(y-t), & x > 1+t, \end{cases} \quad 0 \leq y-t \leq 1.$$

The graph of the function  $v(x, y, t)$  are depicted in Figure 5a) and 5b). Applying the formula (16) we find solution of the main problem Figure 6a) and 6b).

**Figure 5:**

- a) The graph of the function  $v(x, y, t)$ ,  $u_1 > u_2$  at  $T = 1$ ;
- b) The graph of the function  $v(x, y, t)$ ,  $u_1 < u_2$  at  $T = 1$



**Figure 6:**

- a) The graph of the function  $u(x, y, t) = 3v(x, y, t)$ ,  $u_1 > u_2$  at  $T = 1$ ;
- b) The graph of the function  $u(x, y, t) = 3v(x, y, t)$ ,  $u_1 < u_2$  at  $T = 1$

### 5. Conclusion

An algorithm to calculate the exact solution of the Cauchy problem for the 2D parabolic type equation in a class of discontinuous functions is suggested.

**REFERENCES**

- [1] Ames W. F. (1965), *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, New York, London.
- [2] Ames W. F. (1977), *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, New York.
- [3] Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H. (1984), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Vol. 1,2, Hemisphere Publishing Corporation.
- [4] Fritz J. (1986), *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [5] Godunov S. K., Ryabenkii V. S. (1972), *Finite Difference Schemes*, Moskow, Nauka.
- [6] Godunov S. K. (1979), *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moskow.
- [7] Goritskii A. A., Krjukov S. N., Chechkin G. A. (1997), *A First Order Quasi-Linear Equations with Partial Differential Derivatives*, Pub. Moskow University, Moskow.
- [8] Leveque R. J. (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 558p.
- [9] Noh W. F., Protter M. N. (1963), "Difference Methods and the Equations of Hydrodynamics", *Journal of Math. and Mechanics*, 12(2).
- [10] Rasulov M. A. (1991), "On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition", *Soviet Math. Dok.*, 43 (1).
- [11] Rasulov M. A., Ragimova, T. A. (1992), "A Numerical Method of the Solution of a Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Differential Equations", *Minsk*, 28(7), 2056-2063.
- [12] Rasulov M. A. (1991), "Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a 2D Domain", *Dokl RAN*, 319(4), 943-947.
- [13] Rasulov M. A., Coskun E., Sinsoyal B. (2003), "Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions", *App. Mathematics and Computation*, vol.140, Issue 1, August, pp.279-295, USA.
- [14] Richtmyer R. D., Morton K. W. (1967), *Difference Methods for Initial Value Problems*, New York, Wiley, Int.
- [15] Samarskii A. A. (1977), *Theory of Difference Schemes*, Moskow, Nauka.
- [16] Smoller J. A. (1983), *Shock Wave and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York Inc.
- [17] Toro E. F. (1999), *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [18] Whitham G. B. (1974), *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Int., New York.



## ASAL KATSAYILARLA DÜZENLENMİŞ DOĞRUSAL ÜRETEÇ

Hakan GENÇOĞLU\*, Tarık YERLİKAYA\*\*

### ÖZ

Karıştırma algoritmaları, bir veri bütünüün parça parça düşünüp bu parçaların yerlerini rastgele seçilen parçalarla değiştirmeşi şekilde işlem yapar. Yani rastgele üretilen bir değere ait konumda bulunan bir veriyi, sıradaki konumdaki veri ile yer değiştirerek karıştırma işlemi sağlanmış olur. Burada karıştırma işleminin gerçekleşmesini sağlayan rastgele üretilen değerlerdir. Karıştırma algoritmalarının temel amacı veriyi karıştırmak olduğundan karıştırılmış veri bloklarının eski haline getirilmesi ile ilgilenmezler. Dolayısıyla ihtiyaç halinde eski veriye ulaşmak gerekirse karıştırma algoritmaları tek başlarına yeterli olmaz. Bu çalışmada geri dönüşsüz karıştırma algoritmaları ile yapılan veri bloklarının geri getirilmesi incelenmiş ve farklı bir algoritma önerilmiştir.

*Anahtar Kelimeler:* Karıştırma, Karıştırma Algoritması, Doğrusal Sayı Üreticisi, Fisher Yates, Knutt Durstenfeld

\*Makale Gönderim Tarihi: 16.01.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.666813

\*Sorumlu yazar: İstanbul Zaim Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
(hakan.gencoglu@izu.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0003-2968-1615)

\*\*Trakya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü (tarikyer@trakya.edu.tr)  
(ORCID ID: 0000-0002-9888-0151)

## PRIME COEFFICIENT LINEAR NUMBER GENERATOR FOR SHUFFLING

Hakan GENÇOĞLU\*, Tarık YERLİKAYA\*\*

### ABSTRACT

Principle of shuffle algorithms is to change the place of the data blocks by producing random numbers. A produced number means the new place of the data value. That is, shuffling process is based on to produce random numbers. Because shuffle algorithms aim is to shuffle data blocks, they do not have a function to reverse the data. Therefore if it is needed original data, shuffle algorithms are insufficient. In this study, we examined reverse methods of the shuffled data blocks that shuffled by the shuffle algorithms and suggested a new algorithm to shuffle data blocks.

**Keywords:** *Shuffle, Shuffle Algorithm, Linear Number Generator, Fisher Yates, Knutt Durstenfeld*

\*Makale Gönderim Tarihi: 16.01.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.666813

\*Sorumlu yazar: İstanbul Zaim Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
(hakan.gencoglu@izu.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0003-2968-1615)

\*\*Trakya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü (tarikyer@trakya.edu.tr)  
(ORCID ID: 0000-0002-9888-0151)

## 1.GİRİŞ

Veriyi veri blokları halinde düşündürüp bu blokların yerlerinin değiştirilmesi, karıştırma işlemidir. Bu işlem veri güvenliğinin temelini oluşturmaktadır. Aslında şifreleme algoritmaları da temel olarak veriyi başka bir veri ile değiştirerek güvenliği sağlamaktadır. Günümüzde kullanılan simetrik veya asimetrik algoritmalar çeşitli hesaplama veya yer değiştirme işlemleri ile bir karmaşıklık ortaya çıkararak veriyi anlaşılabilir hale getirmektedir.

Karıştırma işlemini iki şekilde düşünebiliriz.

- Tek yönlü karıştırma
- Geri dönüşlü karıştırma

Tek yönlü karıştırma işlemi için geliştirilen algoritmalar, karıştırılmış olan verilerden asıl veriyi elde etmeyi düşünmez. Sadece veriyi karıştırır. Fisher/Yates algoritması, Knutt/Durnstenfeld algoritmaları bu tür algoritmalarıdır.

Geri dönüşlü karıştırma işlemleri ise veri karıştırıldıktan sonra karışık halinden tekrar asıl veriyi elde edecek şekilde tasarlanırlar. Veri işlemlerden geçirilerek karıştırılır, karışık halde alıcıya iletilir ve alıcı tarafında işlemlerden geçirilerek asıl veri elde edilir. Günümüzün güçlü simetrik şifreleme algoritması AES örnek olarak verilebilir. AES şifreleme algoritması karıştırma işlemini yaparken bir anahtar kullanır ve yine aynı anahtarı kullanarak asıl veriyi elde eder.

Yapı itibarı ile tek yönlü algoritmalar, geri dönüşlü algoritmalara göre, çok daha basittirler.

Eğer tek yönlü algoritmalar geri dönüşlü algoritmalar gibi kullanılmak istenirse, uygulama sırasında algoritma içeriğinde bulunmayan ek modüller kullanılmalıdır. Örneğin veri blokları karıştırılıp karışık veri elde edilirse bu veri bloklarının karıştırılmadan önceki halleri de tutularak geri dönüş sağlanabilir. Yani asıl veriye ait bloklar bir veri dizisi olarak düşünülürse, bu dizinin karıştırıldıktan sonra yeni dizinin elemanlarının asıl yerleri başka bir dizide tutulmalıdır ki bu ikinci dizi kullanılarak karıştırılmış olan veri asıl haline geri getirilebilsin. Bu da ek işlem yükü, veri boyutunun ikiye katlanması problemlerini doğurur.

Bu çalışmamızda tek yönlü karıştırma işlemleri gibi basit, geri dönüşlü bir yapı önerilmiştir. Önce tek yönlü karıştırma algoritmaları açıklanmış, ardından bu algoritmalar kullanılarak gerçekleştirilmiş çalışmalardan bahsedilmiştir. Daha sonra önerdiğimiz yapı açıklanarak ispatı gerçekleştirilmiş ve değerlendirilmeler yapılmıştır.

## 2. Karıştırma Algoritmaları ve Sayı üreteçleri

Karıştırma algoritmaları isminden de anlaşılacağı üzere var olan bir sayı dizisine ait değerlerin, sayı dizisinde bulunduğu yeri değiştirmek amacıyla kullanılan algoritmalarıdır. Dolayısıyla, karıştırma algoritmaları, diziyi ait olan elemanların değerleri ile değil indisleri ile çalışır. İskambil oyunlarının oyuna başlamadan önce kağıtların karıştırılması böyle bir karıştırma türüdür. Bu algoritmalar bu oyunların dijital karşılıklarında başarılı bir şekilde kullanılmaktadır.

Rastgele sayı üreteçleri belirli bir denklem çerçevesinde, başlangıç değeri kullanılarak yeni sayı üretme ilkesine dayanır. Haritalama işlemleri için kullanılırlar.

## 3. Önceki Çalışmalar

Karıştırma algoritmaları sadece karıştırma işlemi için değil veri şifreleme amaçları olarak da kullanılmıştır[2,3]

“Knutt / Durstenfeld Shuffle Algoritmasının Resim Şifreleme Amacıyla Kullanılması” isimli çalışmada resim pikselleri diziyi dönüştürülmüş, dizi üzerinde karıştırma işlemi uygulanmıştır. Bununla birlikte başka bir dizide resmin orijinal sıradaki piksel değerleri ile yeni yeri bir eşleşme dizisinde tutulmuştur. Şifrelenmiş resmin geri dönüşümü işlemi de eşleşme dizisi kullanılarak piksellerin eski yerlerine gelmesi sağlanarak başarılmıştır. [2]

Benzer bir çalışma olan “File Encryption using Fisher-Yates Shuffle” isimli çalışmada dosya şifreleme işlemi gerçekleştirilmiştir. [3]

Başka bir çalışmada karıştırma algoritmaları mantığı resim şifreleme işlemi için kullanılmış fakat şifreli resmin geri getirilmesi açıklanmamıştır.[4]

Bu çalışmalarda karıştırma algoritmaları geri dönüşüm gerektiren uygulamalarda kullanılmıştır. Teorik olarak bunun önünde bir engel olmamakla birlikte uygulamada bir takım problemlerle karşılaşılır. Uygulama sırasında bu problemleri ortadan kaldırmak için çözümler üretilmelidir.

Karıştırma algoritmaları ile ilgili başka bir çalışmada, shuffle algoritmaları, tanımlayıcı sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı doğrusal sistemlerin pozitifliğini kontrol etmek için kullanılmıştır.[5]

Rastgele sayı üreteçlerinin en önemli örneklerinden biri Lehmer tarafından önerilen “Lehmer’s congruential method” tur. Belirli bir mod değerine göre  $X_i$  başlangıç değerini a katsayısı ile çarparak genişletme şeklinde tanımlanmıştır.

$$x_{i+1} = ax_i \text{ mod } (m)$$

Doğrusal bir yapıda tanımlanmış bu denklem ile istenildiği kadar değer üretilebilmesi  $m$  değerine bağlıdır. [6]

### 3.1.FISHER/YATES Algoritması

Ronald Fisher ve Frank Yates tarafından 1938 yılında yayınlanmıştır. Sonlu kümelere elemanların yerlerini değiştirerek karıştırmak için kullanılır.  $N$  elemanlı sonlu bir dizi için algoritma şu şekilde çalışır:

1. Dizinin elemanlarını 1 den  $N$  e kadar sırala
2.  $1 \leq k \leq N$  olacak şekilde rastgele  $k$  sayısı seçilir.
3.  $k$  numaralı eleman dizinin en sonundan itibaren öne doğru dizilir.
4. 2 ve 3 numaralı adımlar dizinin yeri değiştirilmeyen elemanı kalmayana dek devam eder.

Fisher/Yates Karıştırma Algoritmasının Uygulamasının bir örneği şekil 1 de gösterilmiştir.[1,2]

Orijinal Dizi	K. numaralı Eleman	Yeni Dizi
1-2-3-4-5-6-7-8-		
1-2-4-5-6-7-8-9	3	3
1-2-4-5-7-8-9	5	6-3
1-2-4-7-8-9	4	5-6-3
1-4-7-8-9	2	2-5-6-3
1-4-7-8	5	9-2-5-6-3
4-7-8	1	1-9-2-5-6-3
4-7	3	8-1-9-2-5-6-3
7	1	4-8-1-9-2-5-6-3
		7-4-8-1-9-2-5-6-3

Şekil 1. Fisher/Yates Karıştırma Algoritmasının Uygulaması

### 3.2 KNUTT/DURNSTENFELD Algoritması

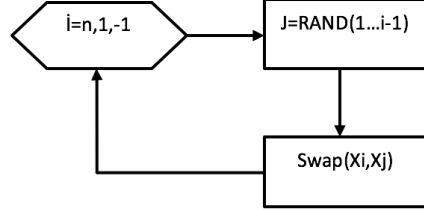
1964 yılında Richard Durstfeld tarafından yayınlanmıştır. KNUTT/DURNSTENFELD Shuffle Algorithm (K/DSA) bir dizinin elemanlarının kendi içinde yer değiştirilmesi ile karıştırılması işlemini gerçekleştirir. K/DSA şöyledir:

Bir  $A$  dizisi  $n$  elemanlı olsun.

1.  $1 \leq k \leq n$  olacak şekilde rastgele bir  $k$  numarası seçilir
2. Dizinin  $k$  numaralı elemanı ile  $n$  numaralı elemanı yer değiştirilir. ( $A_k \leftrightarrow A_n$ )
3. 1. Adım  $1 \leq k \leq n-1$  olacak şekilde tekrarlanır, 2 numaralı adım ( $A_k \leftrightarrow A_{n-1}$ ) olacak şekilde tekrarlanır.
4. 1 ve 2 numaralı adımlar 3. Numaralı adımda olduğu gibi sürekli en son işleme sokulan elemandan bir önceki eleman işleme sokularak tekrarlanır.

5. 1 ve 2 numaralı işlemler 3 ve 4 de olduğu gibi  $A_1 \leftrightarrow A_2$  olana kadar devam eder.

Şekil 2 de Algoritmanın akış şeması görülmektedir.



Şekil 2. KNUTT/DURNSTENFELD Algoritmasının akış şeması

K/DSA kullanılarak karıştırılmış bir dizinin karıştırılması işlemine ait bir kayıt tutulmadığı için geri dönüşü olmayan tek yönlü bir algoritmadır. Seçilen  $k$  değerleri rastgele olduğundan ve algoritmanın doğası gereği, algoritma her uygulandığında farklı bir sonuç elde edilecektir.

### 4. Karıştırma Amaçlı Doğrusal Üreteç Tasarımı

Geri dönüşüm gerektiren işlemlerde karıştırma algoritmaları yerine doğrusal üreteçler (Lineer kongrüans üreteçler - LKÜ) tercih edilebilir. Bu üreteçler aşağıdaki gibi tanımlanır:

( $m > 0$ ) bir doğal sayı olmak

tüzere,  $X_i \in \{1,2,\dots, m-1\}$  baslangıç değerini seçip,

$X_{i+1} = aX_i + c \text{ mod } m$  algoritmasına göre  $X_1, X_2, \dots$  sayılarını ve bu sayılar yardımıyla,

$u_1 = X_1/m, u_2 = X_2/m, u_3 = X_3/m \in (0,1)$  sayılarını üretmektedir.

Böyle bir fonksiyon eğer  $a$  ve  $c$  katsayıları biliniyorsa geri dönüşümü olan bir karıştırma işlemi sağlayabilir. Eğer geri dönüşüm olması isteniyorsa  $a$  ve  $c$  katsayıları, fonksiyon mod  $m$  e göre bijektif olacak şekilde seçilmelidir. Bu şekilde tersi alınabilir bir fonksiyon olur ki geri dönüş sağlanabilir.

Algoritmanın amacı asıl verinin indislerini değiştirmek olduğundan bijektiflik sağlanabilmeli ve geri dönüş sağlanabilmelidir. Önerilen üreteç de katsayılar mod değerinden küçük olacak şekilde göreceli olarak asal sayılar olacak şekilde seçilmiştir.

### 5. Asal Katsayılarla Düzenlenmiş Doğrusal Üreteç AKDÜ

#### 5.1 Karıştırma işlemi

$A[n]=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  ve  $1 \leq x \leq n$  olacak şekilde  $A$  dizisinin her  $x$  numaralı elemanını başka bir numara ile değiştiren algoritma şöyledir:

1.  $2 \leq p \leq n$  ve  $2 \leq q \leq n$  olacak şekilde  $p, q$  asal sayıları seçilir.

2.  $Sh: [1, n] \rightarrow [1, n]$

$Sh(x) = px + q$  karıştırma fonksiyonu oluşturulur.

3.  $(T[x] = A[Sh(x)])_{x=1}^n$  A dizisinin, karıştırma fonksiyonu ile belirlenmiş sıradaki elemanı, T dizisine sırayla yerleştirilir.

4.  $(A[x] = T[x])_{x=1}^n$  Geçici T dizisinin elemanları A dizisine aktarılacak şekilde A dizisinin elemanları yer değiştirilmiştir olur.

Buradaki asıl soru  $Sh: [1, n] \rightarrow [1, n]$ ,  $Sh(x) = px + q$  fonksiyonunun  $1 \rightarrow 1$  bir fonksiyon olup olmadığıdır. Yani farklı indislerdeki elemanları aynı indise atayıp atamayacağıdır.

**İspat:**  $x_1 \neq x_2$  olmak üzere iki farklı indis numaralarına sahip eleman seçelim.

$px_1 + q = px_2 + q \pmod n$  olsun.

$px_1 + q = px_2 + q + kn$

$px_1 = px_2 + kn$

$px_1 - px_2 = kn$

$p(x_1 - x_2) = kn$  bulunur.

i.  $k=0$  ise  $p \neq 0$  olduğundan  $x_1 - x_2 = 0$  olacağından  $x_1 = x_2$  bulunur ki bu baştaki kabulümüze aykırıdır.

ii.  $x_1 - x_2 = \frac{nk}{p}$  ise  $\text{ebob}(p, n) = 1$  olduğundan  $p|k$  dir. Yani  $p$ ,  $n$  yi bölmez.  $p|k$  olduğunu varsayalım:  $\frac{k}{p} = k'$  olsun. Bu durumda  $x_1 - x_2 = nk' \Rightarrow x_1 = nk' + x_2$  bulunur. Bu sonuç  $x_1 > n$  demektir ki bu durum  $x_1 \leq n$  olma durumu ile çelişir.

Dolayısıyla  $Sh(x) = px + q$  fonksiyonu  $\pmod n$  e göre  $1 \rightarrow 1$  bir fonksiyondur. Yani her  $x_1 \neq x_2$  için  $Sh(x_1) \neq Sh(x_2)$  olur.

## 5.2 Geri Dönüşüm İşlemi

Karıştırma işlemi sonucunda elde edilen verinin eski haline gelebilmesi için  $Sh(x) = px + q$  fonksiyonunun tersi ile işlem yapılmalıdır.

$Sh(x) = px + q \pmod n$  fonksiyonun tersi  $Sh' = \frac{x-q}{p}$  şeklindedir. Bu doğrusal fonksiyon bir LKÜ olduğundan  $p$  ve  $q$  değerlerinin  $\pmod n$  e göre tersleri alınarak işlem yapılabilir.  $p'$  ve  $q'$ ,  $p$  ve  $q$

değerlerinin  $\pmod n$  e göre tersi olmak üzere  $p' = \frac{1}{p} \pmod n$  ve  $q' = -q \pmod n$  değerleri hesaplanırsa

$Sh' = (x + q')p' \pmod n$  halini alır.

Karıştırma işlemi için, dizinin her bir elemanı  $Sh(x) = px + q \pmod n$  fonksiyonunda işleme sokulup yeni yeri belirlenir. Karışık verinin geri dönüşümü için ise

$Sh'(x) = (x + q')p' \pmod n$  fonksiyonu kullanılmalıdır. Karışık haldeki verinin tüm elemanları sırasıyla  $Sh'(x)$  fonksiyonunda işleme sokulursa orijinal dizi elde edilmiş olur.

Örnek olarak "this is a message" verisini düşünelim. Bu

verideki her bir karakterin asçii tablosundaki karşılığıyla işlem yapılacak olursa 17 elemanlı bir dizi elde edilir. Bu durumda  $n=17$  olur.  $2 \leq p \leq n$  ve  $2 \leq q \leq n$  olacak şekilde  $p=11$ ,  $q=13$  seçilsin. Karıştırma işlemi sonucunda "s hssteiem g saai" elde edilir.

this is a message

116	t	115	s
104	h	32	
105	i	104	h
115	s	115	s
32		115	s
105	i	116	t
115	s	101	e
32		105	i
97	a	101	e
32		109	m
109	m	32	
101	e	103	g
115	s	32	
115	s	115	s
97	a	97	a
103	g	97	a
101	e	105	i

s hssteiem g saai

Geride dönüşüm işlemi için  $p' = \frac{1}{p} \pmod n = 14$  ve  $q' = -q \pmod n = 4$  değerleri hesaplanıp işlem yapılırsa "this is a message" verisine ulaşılır.

s hssteiem g saai

115	s	116	t
32		104	h
104	h	105	i
115	s	115	s
115	s	32	
116	t	105	i
101	e	115	s
105	i	32	
101	e	97	a
109	m	32	
32		109	m
103	g	101	e
32		115	s
115	s	115	s
97	a	97	a
97	a	103	g
105	i	101	e

this is a message

## 6.Sonuç

Şifreleme işlemlerinin çeşitli aşamalarında veya geri dönüşlü karıştırma işlemlerinde kullanılabilecek olan AKDÜ'nün çalışabilmesi için sadece  $p, q$  ve  $n$  yeterlidir. Yer değiştirme ve geri dönüşüm işlemleri için fazladan dizinin oluşturulmasına, saklanmasına, iletilmesine gerek yoktur. Bu durum özellikle cihazlar arasında iletişim sırasında, veri boyutunu son derece azaltacağından daha hızlı bir iletişim söz konusu olacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fisher-Yates\\_shuffle](https://en.wikipedia.org/wiki/Fisher-Yates_shuffle) [Erişim tarihi 05.09.2019]
- [2] Hazra T. K., Ghosh R., Kumar S., Dutta S., Chakraborty A. K., File Encryption using Fisher-Yates Shuffle, In 2015 International Conference and Workshop on Computing and Communication (IEMCON) (pp. 1-7). IEEE.
- [3] Güvenoğlu E., Esin E. M. (2009), "Knutt / Durstenfeld Shuffle Algoritmasının Resim Şifreleme Amacıyla Kullanılması", Politeknik Dergisi, 12(3), 151-155.
- [4] Abdelfatah A. Y., Ayman M. A. (2008), "A Shuffle Image-Encryption Algorithm", Journal of Computer Science, 4(12), 999-1002.
- [5] Kaczorek T. (2011), "Checking of the positivity of descriptor linear systems by the use of the shuffle algorithm", Archives of Control Sciences, Vol: 21(LVII), No: 3, 287-298.
- [6] Fuller A. T. (1976), "The period of pseudo-random numbers generated by Lehmer's congruential method", The Computer Journal, 19(2), 173-177.

## DEĞİŞİK KATLARDA ÇIKAN YANGIN SONUCUNDA ÇELİK YAPILARIN DAYANIMLARININ ARAŞTIRILMASI

Mehmet Toyanç YAZGAN\*

### ÖZ

Bu çalışmada doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizinin temel özellikleri açıklanmış ve 9 katlı çelik bir binaya ait bir moment aktaran çerçevenin doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi ile senaryo yangın durumları altında değişik sıcaklıklardaki yanal dayanımı ve rijitliğindeki değişiklikler incelenmiştir.

Bu amaçla ilk olarak, yüksek sıcaklık etkisindeki çelik elemanların malzeme özelliklerinde (akma gerilmesi, kopma gerilmesi, elastisite modülü) meydana gelebilecek değişiklikler belirlenmiştir. Daha sonra her bir senaryo durum için doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi yapılmış ve sonuçlar karşı-laştırılmıştır.

Çelik binalarda yangından sonra çelik elemanların mekanik özelliklerinde yangının derecesine göre büyük değişiklikler meydana gelmektedir.

Sonuçları değerlendirildiğinde, çelik yapıların gerekli yangın koruma önlemleri ile binada bulunanların yangında dışarı çıkması için yeterli zamanı vermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Yangın, Çelik, Bina, Dayanım, Güvenlik, Yapı.

\*Makale Gönderim Tarihi: 19.11.2019 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma

DOI: 10.20854/bujse.648619

\*İstanbul Gedik Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, Doktora Öğrencisi

(toyanc@yenifikirler.org)

(ORCID ID: 0000-0003-3846-4399)

## INVESTIGATION OF THE STRENGTH OF STEEL STRUCTURES AS A RESULT OF FIRE IN DIFFERENT FLOORS

Mehmet Toyanç YAZGAN\*

### ABSTRACT

In this study, the basic properties of nonlinear static push-over analysis are explained and the nonlinear static push-over analysis of a 9-storey steel structure is examined by non-linear static shift (push-over) analysis and changes in lateral strength and stiffness at different temperatures under scenario fire conditions.

For this purpose, firstly, changes in material properties (yield stress, tensile stress, modulus of elasticity) of steel elements under high temperature effect were determined. Then, nonlinear static push-over analysis was performed for each scenario case and the results were compared.

In steel buildings, after the fire, major changes occur in the mechanical properties of the steel elements according to the degree of fire.

When we evaluate the results, the necessary fire protection measures of the steel structures give enough time for the occupants to go out in the fire.

**Keywords:** *Fire, Steel, Building, Strength, Security, Structure.*

\*Makale Gönderim Tarihi: 19.11.2019 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma

DOI: 10.20854/bujse.648619

\*İstanbul Gedik Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, İş Sağlığı ve Güvenliği Bölümü, Doktora Öğrencisi  
(toyanc@yenifikirler.org)

(ORCID ID: 0000-0003-3846-4399)



## 1. Giriş

Genel olarak tasarım, işlevsel tasarım ve taşıyıcı sistemin tasarımı olmak üzere iki bölümde düşünülebilir. İşlevsel tasarımda, kullanmaya elverişli alan, donanım, aydınlatma, ekipman ve estetik göz önünde tutulur; taşıyıcı sistemin tasarımında ise işletme yüklerini güvenle taşıyacak elemanların seçimi gerekir. Tasarımın adımları, Planlama (Yapının işlevinin ve optimum tasarım kriterlerinin belirlenmesi), Ön tasarım, Yüklerin saptanması, Ön boyutlama, Analiz (yüklerin ve sistemin modellenmesi, iç kuvvetlerin ve yer değiştirmelerin saptanması), Değerlendirme (Dayanım ve işletme koşullarının kontrolü; sonucun optimum tasarım kriterleriyle uyumunun belirlenmesi), Yeniden tasarım (önceki adımlardan elde edilen sonuçların yeterli olmaması halinde tasarımın yeniden gerçekleştirilmesi), Sonuç (Optimum çözüme ulaşıp ulaşılmadığının irdelenmesi) şeklinde özetlenebilir.

Günümüzde, başlıca iki tür tasarım felsefesi vardır. Bunlardan birincisi güvenlik gerilmeleri, diğeri ise yük ve dayanım faktörü tasarımı olarak adlandırılırlar. Önceleri güvenlik gerilmeleri esasına dayanan yöntemler kullanılmış olmakla beraber, son yıllarda daha rasyonel ve olasılık esaslı olan sınır değer yöntemlerinin kullanılması yaygınlaşmıştır. Tasarım için değişik sınır değer esaslı yöntemler kullanılmaktadır[1].

Yapısal tasarımda hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın, aşırı yüklenme veya dayanım azalması olasılığına karşı yeterli bir güvenliğin bulunması sağlanmış olmalıdır. Yapısal güvenliğin saptanması konusunda yapılan çalışmalar halen devam etmekte olup, bu çalışma değişik sıcaklıklarda çelik yapıların dayanımının ve rijitliğinin değerlendirilmesi üzerinde yoğunlaşmaktadır. Sınır durumlar, yapının beklenen işlevlerini yerine getiremeye koşullarıdır ve genellikle, taşıma sınır durumu ve kullanma sınır durumu olmak üzere iki sınıfa ayrılırlar. Taşıma sınır durumları denge, akma, kopma, büyük şekil değiştirmeler, mekanizma, burkulma, yerel burkulmalar, çarpılma, yorulma, devrilmedir. Yapının bu limit durumlara erişmeden büyük şekil değiştirmeler yapması yani sünek davranması beklenir. Kullanma sınır durumları ise, sehim, titreşim, kalıcı şekil değiştirmeler ve çatlaklar gibi yerleşim ile ilgili durumları içerir.

Yangın geçirmiş çelik binalarda çelik elemanların mekanik özelliklerinde yangının derecesine göre büyük değişiklikler meydana gelmektedir.

## 2.Amaç

Binanın yapı malzemesine uygun koruma önlemlerinin alınmaması durumunda bütün binalar yangında çökebilmektedir[1]. Avrupa Birliği Yapı Malzemeleri Direktifi'ne (89/106/EEC) göre, yapıların teknik özelliklerini etkileyen altı temel unsurdan birincisi mekanik dayanım, ikincisi ise yangın durumunda emniyettir[2]. Bu direktif, büyük binaların projelerinde yapının bir yangın durumunda çökmemesi için korunma esaslarını temel tasarım kriterleridir.

Yangınlarda karşılaşılan yüksek sıcaklıklar, metal yapı malzemelerinin mekanik özelliklerinde önemli değişimlere ve bu malzemelerde önemli genleşmelere yol açar. Deneyler, sıcaklık arttıkça karbon çeliğinde akma sınırının düştüğünü ve belirli bir sıcaklıktan sonra artık akma sınırı oluşmadığını göstermiştir. Bunun anlamı, normal sıcaklıklara kıyasla plastik şekil değiştirmelerin daha düşük gerilmeler altında olmaya başladığı ve aynı gerilme altında toplam şekil değiştirmenin daha büyük olduğudur.

Yangın geçirmemiş ve yangın geçirmiş çerçevenin yanal dayanımları ve rijitliklerindeki değişiklikler karşılaştırılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Yangına dayanıklı çelik yapı tasarımında, yangının meydana getirdiği olumsuz etkilerinin bilinmesi ve taşıyıcı sistemi oluşturan yapı elemanlarının bu deformasyonlara karşı dayanımlı olmalarının yanında, mimari tasarımdan başlayarak yapının taşıyıcı sisteminin oluşturulmasında, yangın dayanımını arttıracak birçok ayrıntının göz önüne alınması gerekmektedir.

Bu çalışmada yangınlar sonucunda çelik yapılarda meydana gelen değişiklikleri tespit etmek için giriş ve kolonlarda meydana gelebilecek malzeme özellikleri değiştirilerek yapısal model modifiye edilerek çok katlı binaya ait bir moment aktaran çerçevesi seçilmiştir daha sonra yanal dayanımının belirlenmesi için doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizleri yapılmıştır.

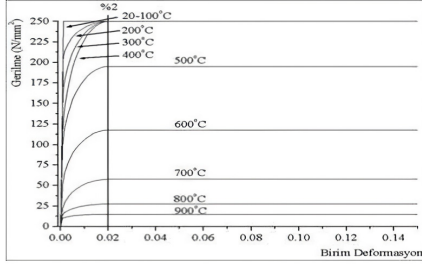
## 2.Kapsam

### 2.1. Çelik – Sıcaklık İlişkisi

#### 2.1.1.Yüksek Sıcaklıkta Çeliğin Mekanik Özelliklerinin Tespiti

Akma sınırı, nihai dayanım, elastisite modülü ve termal genleşme katsayısı, çelik yapıların yüksek sıcaklıkta performansını belirleyen temel mekanik özellikleridir.

Bina yangınlarındaki koşullara uygunluğu ve öngörülen dayanımların güvenli tarafa olması nedeniyle, “değişken sıcaklık” testleri tercih edilmektedir. Değişken sıcaklık test bulgularına ve kiriş yangın testlerinden elde edilen yüksek birim deformasyonlara (%3) dayanarak, %2 birim deformasyon seviyesini, her sıcaklık düzeyinde akma sınırının belirlenmesinde kullanılması uygun olmaktadır[2]. Değişken sıcaklık testlerine bağlı olarak belirlenen çeliğin tipik gerilme-deformasyon-sıcaklık eğrileri Şekil 1’de gösterilmektedir [3].



**Şekil 1** Yapısal çeliğin yüksek sıcaklıklardaki gerilme-birim deformasyon ilişkisi[3]

Çeliğin elastisite modülü ve akma gerilmesi ikisi sıcaklığın artmasıyla önemli bir biçimde azalan kapasite taşıma yükünü tanımlamak için çok önemlidir[4]. Yangından sonra direncini kurtarabilen yapı malzemesi yalnızca yapısal çelikler ve uygulanan yükte daha fazla destek olamayan yangın korumasız çeliğin sıcaklığı kritik sıcaklık (538°C) olarak adlandırılır. Bu sıcaklık mutlak bir değer olmayıp, kullanılan çeliğin özelliklerine ve uygulanan yük faktörüne bağlı olarak değişebilir.

### 2.1.2. Yangına Maruz Kalan Çelik Kolon, Kiriş, Döşeme ve Yapıların Davranışı

Çelik yapılar betonarme yapılara nazaran yangın açısından daha kritik durumdadır. Bunun nedeni çeliğin yüksek ısı iletkenliği ve çelik eleman boyutlarının ince olmasıdır. Çok iyi bir iletken olması nedeniyle yangın anında yüksek sıcaklığı kolaylıkla ve kısa zamanda diğer yapı elemanlarına iletteceğinden, kritik sıcaklığa ulaşılan zamanı kısaltır.

Bu sebeple çelik elemanlar betonarmeye göre yangında daha kolay ısınır. Böylece çelik taşıyıcı sistemler büyük deformasyonlara maruz kalarak dayanımlarını yitirirler.

İsi iletim katsayısı yüksek olan çelikte kalıcı şekil değişimleri meydana gelir. Çok zayıf olan ve basınç altında bulunan yapı kısımları, yüksek sıcaklıklarda taşıma özelliğini kaybeder. Isınan çelik uzar, birleştiği

noktalarda değişiklikler meydana getirir ve bazen bütün yapıyı yıkabilecek güte kuvvet oluşturur. Sıcaklıktan dolayı meydana gelen bu hacim değişiklikleri, çelik kiriş ve çelik kolonların taşıma gücünü kaybetmesine ve çökmesine neden olabilir. Kolonlar ise, genellikle her taraftan ısı geçişine açık oldukları için, çökme olasılığı çok yüksek bir yapı elemanıdır.

Çelik bağlantılar, yapıların sabit kalması için özellikle kolonların yatay olarak desteklenmesi ve burkulma olmaması için önemli bir özelliğe sahiptir[5]. Bu nedenle yangından ille meydana gelen kuvvetlere karşı yetersiz bağlantı gerilimi veya yetersiz bir süneklik durumu, çelik yapının çökmesine yol açabilir. Yüksek sıcaklıklar burkulma yapmayan kolonun burkulmasına ve daha düşük taşıma gücü göstermesine neden olabilir. Kompozit döşemenin yangın altındaki yüksek olan çökme olasılığı ancak çelik bağlantıların dönme kapasitelerinin yükseltilmesi ve daha sünek şekilde tasarlanması ile olur[6]. Ayrıca yangına karşı bulonların dayanıklılığı diğer çelik malzemelere karşı değişiklik göstermektedir ve mekanik davranışları için tespit etmek daha da zorlaşır[7].

### 2.1.3. Çelik Yapıların Yangın Yükü

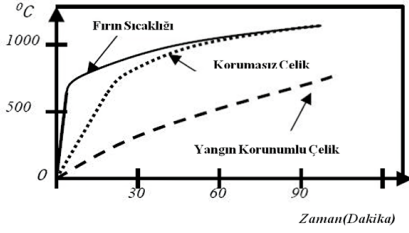
Bir yapının yangın yükü bir hacim içinde yer alan yanıcı maddelerin bir kilogramının yanması halinde açığa çıkan kilokalori cinsinden ısı değerinin o hacmin alanına bölünmesi ile bulunur. Başka bir deyişle, hacim içinde bulunan ve yanabilen maddelerin miktarlarını değiştirilmesi ya da hacmin yangın yükünün değişimine etki etmektedir. Çelik yapıların yangın yükü ise ahşabın yangın yükü ile Kg wood/ m<sup>2</sup> ( 1 Kg wood = 18 MJ) ifade edilebilir[8]. En çok karşılaşılan yangın yükleri Tablo 1’de sunulmuştur.

Çelik yapıların yangın değerlendirilmesinde zaman 1/2, 1, 2, 3, 4 saat gibi birimlerle ifade edilir. Belirtilen zaman ne gerçek yangın süresi ne de konaklayanlar için kaçış süresini temsil eder. Yangın güvenliğine uyumlu olup olmadığı yapıların standartlarla karşılaştırılması yoluyla sağlanır. Temel olarak standartlar laboratuvar koşullarında yapısal çelik elemanların dayanıklılıklarını gösterir.

**Tablo 1** Çelik Yapılarda yangın yükü [8]

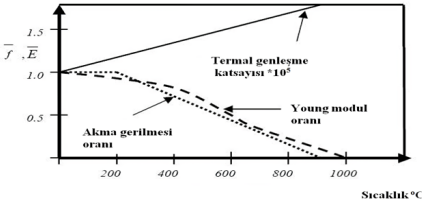
Çeşitli Yapılar için Yangın Yükü Örnekleri	
Çelik Yapı Tipi	Kg wood/ m <sup>2</sup>
Okul	15
Hastane	20
Otel	25
Ofis	35
Mağaza Deposu	35
Tekstil ürünleri gösterilen mağazalar	>200

Şekil 2 laboratuvar ortamında ateşten korunan ve korunmayan çeliğin performansını göstermektedir. Korunmamış çeliğin ısınma düzeyi yangından korunmuş çelikte karşılaştırıldığında oldukça yüksektir.



Şekil 2 Yapısal çeliğin ısınma düzeyi [8]

Şekil 3’de gösterilen çeliğin yüksek sıcaklıktaki elastikliğin boyutsal olmayan varyasyonları, akma gerilmesi ve termal genişleme katsayısı (2.1), (2.2), (2.3) kullanılarak tasarım içinde yangın yükünün bulunmasında faydalıdır.



Şekil 3 Yükselen sıcaklıklarda çeliğin mekanik özellikleri [8]

20°C değeri ile T sıcaklığında Elastisite oranının modüler varyasyonları  $\bar{E}$  denklem 2.1’de verilmiştir.

$$0^{\circ}\text{C}<T<600^{\circ}\text{C} \text{ için } \bar{E} = \frac{E(T)}{E(20^{\circ}\text{C})} = 1.0 + \frac{T}{2000 \ln \left( \frac{T}{1100} \right)}$$

$$600^{\circ}\text{C}<T<1000^{\circ}\text{C} \text{ için } = \frac{690(1.0 - \frac{T}{1000})}{T - 53.5} \quad (2.1)$$

Çeliğin akma gerilmesi yaklaşık 215°C’ye kadar kararlı kalır. Daha sonra gücünü yavaş yavaş kaybeder. Akma gerilmesi oranı  $\bar{f}$  (20°C akma gerilmesi ile ilgili) sıcaklık T ile ilişkisi verilmiştir. [8]

$$\bar{f} = \frac{f_y(T)}{f_y(20)} = 1.0 \quad 0^{\circ}\text{C}<T<215^{\circ}\text{C} \quad (2.2)$$

$$= \frac{905 - T}{690} \quad 215^{\circ}\text{C}<T<905^{\circ}\text{C}$$

Temel bir biçimde sıcaklıkla termal genişleme katsayısı  $\alpha$  denklem 2.3’te verildiği gibi ifade edilebilir. [9]

$$\alpha(T) = \left( 12.0 + \frac{T}{100} \right) \times 10^{-6} \quad (^{\circ}\text{C})^{-1} \quad (2.3)$$

Yukandaki denklem ateşe maruz kalan çelik yapıların analizi ile ilgili olduğu için oldukça faydalıdır. Yangına maruz kalan çelik yapılar için laboratuvar uygulama

kodları dayanıklılık eğrileri genellikle yüksek sıcaklıklarda olan yapısal çelik için sağlanmıştır. Bu eğrilerde dayanıklılıkla gerilme en önemli parametrelerden biri olarak değerlendirilir. Örneğin BS:5950 bölüm 8[10]’a göre yüksek sıcaklıklarda çeliğin dayanımını koruması için kesitin tüm kısmı için gerilme %1.5 kabul edilmesine karşın Eurocode 3 bölüm 10[11]’da gerilme % 2 dir. %0.5 daha düşük gerilme ince yangın koruma malzemeleriyle kolon ya da bileşenleri için kullanılabilir.

## 2.2. Yangına Dayanıklı Çelik

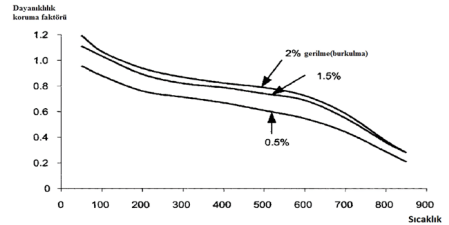
Çelik yapıların yangın güvenliğinde çelik kesit tipini açıklamak için “Yangına dayanıklı çelikler (FRS)” ismi kullanılır[12]. Temelde termo-mekanik bir biçimde işlenen çelik sıradan yapısal çeliklerden yapısal bir biçimde yangında çok daha iyi performans sağlar. Sıradan yapısal çeliğin mikro yapısı ferrit-pearlit (çeliğin fazları)’e sahiptir ama Molybdenum ( $M_o$ ) ve Chromium ( $C_r$ ) yapıya sahip çelik 600°C bile dayanımını korur. Yangına dayanıklı çeliğin birleşimi Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2 Yangına dayanıklı çeliğin kimyasal birleşimi[12]

	C	Mn	Si	S	P	Mo+Cr
FRS	≤0.20%	≤1.50%	≤0.50%	≤0.040%	≤0.040%	≤1.00%
Sıradan Çelik	≤0.23%	≤1.50%	≤0.40%	≤0.050%	≤0.050%	-

Yangına dayanıklı çelikler yaklaşık 600°C sıcaklığa ulaştığında oda sıcaklığında akma gerilmesi gücünün  $\frac{2}{3}$  ünü gösterir. Buna göre çelik yangına karşı doğal koruyucudur. Yangına dayanıklı çelikler ön-ısıtma olmadan kaynak yapılabilir ve ticari olarak kirşler, bağlantılar ve dirsekler için uygundur.

Yangına dayanıklı çelik için en iyi yollardan biri de FRS çelik paslanmaz çeliktir. Şekil 4’de gösterildiği gibi paslanmaz çelik yaklaşık 800°C gibi çok yüksek sıcaklıkta dayanıklılığının yaklaşık %40’ını korur. Paslanmaz çeliğin çok yüksek yansıtıcı yüzeyi vardır. Paslanmaz çeliğin yüzey salınımı düşüktür[12].



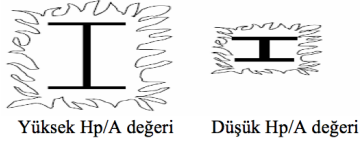
Şekil 4 Paslanmaz çeliğin koruma faktörü[12]

Yüksek dayanım ve düşük sıcaklık kombinasyonu yangın koruma olmadan paslanmaz çeliğin kullanımını sağlar.

### 2.3.Çelik Yapıların Yangın Güvenliğinde Hp/A Faktörü

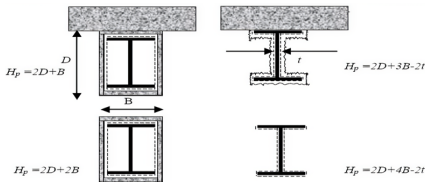
Çelik yapıların yangın sırasındaki temel sorunu binada bulunanların güvenli bir biçimde çıkması için yeterli zamanın olmaması ve erken çökmesidir[7]. İlk olarak yapı malzemesi normal sıcaklık altında tasarlanmış olabilir sonrasında yangına karşı gerekli malzemelerle izole edilebilir. Çelik yapılarda yangın izolasyonunun kalınlığının hesaplanmasında ‘Kesit Faktörü’ (Hp/A) yöntemi kullanılmaktadır. Çelik eleman kesitinde yangının etkiyebileceği yüzeyin uzunluğunun (Hp) kesit alanına (A) oranı, o profilin kesit faktörünü belirlemektedir. Bu oran büyüdükçe eleman içinde sıcak profili hızlı bir artış göstermekte ve mukavemet kaybı daha kısa sürede oluşmaktadır[13].

Şekil 5’de görüldüğü gibi düşük bir (Hp/A) değerli kesit yüksek bir (Hp/A) değerli kesitten normal bir biçimde daha düşük düzeyde ısınır ve bundan dolayı daha yüksek yangın dayanımı sağlar.



Şekil 5 Kesit faktör kesiti[13]

Düşük Hp/A sahip çelik elemanlara daha az izolasyon gerekir. Örneğin yapısal kesitte daha kalın olan çelik eleman düşük bir Hp/A değerine sahip olur ve bundan dolayı daha düşük ısına düzeylerine sahip olurlar. Kesit faktöründe çeliği yangından korumak için kullanılan koruma miktarının doğru bilinmek istenebilir. Yangından korunmuş kesitlerin tipik Hp değerleri Şekil 6’da sunulmuştur[13].



Şekil 6 Yangından korunmuş çelik kesitlerin Hp birkaç tip değeri[13]

Gerekli olan yangın yalıtım malzemesi kalınlığı, koruma biçimi kararlaştırıldıktan sonra, öngörülen

koruma süresini ve kesit faktörlerini kullanarak üretici firmanın temin ettiği kalınlık tablolarından elde edilebilir (Tablo 3).

Tablo 3 Yangın dayanımının sağlanabilmesi için ‘Hp/A’ oranına göre gerekli yalıtım kalınlığı[13].

Hp/A	Yangın dayanımı için gerekli koruma kalınlığı (mm)					
	1/2 saat	1 saat	1 1/2 saat	2 saat	3 saat	4 saat
150	10	12	23	33	54	75
170	10	13	24	35	57	79
190	10	13	25	37	60	83
210	10	14	26	38	62	86

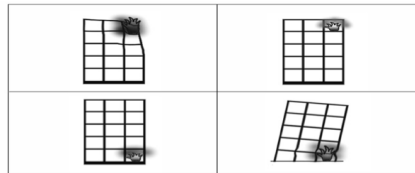
Hp/A için yük oranını tanımlarsak

$$\text{Yük Oranı} = \frac{\text{Yangın sınır koşulunda uygulanan yük}}{\text{Normal koşullar altında başarısız üyelerin neden olduğu yük}}$$

Eğer yük oranı 1’den az olursa hiçbir yangın koruması gerekmez. Kirişlerde uygulanan başka bir yol ise istenen yangın direnme zamanındaki moment kapasitesinin meydana gelen momentle karşılaştırılmasıdır. Moment kapasitesi yangına direnme momentinin altında ise yangın koruma zaruri değildir.

### 2.4.Çelik Yangın Koruma Konseptleri

Yangın esnasında yapıım elemanlarının performansını karakterize etmek için kullanılır. Özel koşullar altında işlevini devam ettiren bir parçanın zaman olarak ifade edilmesidir. Bu işlevler yangın yayılmasını sınırlama, diğer malzemelere destek olma dayanıklılık, göçmeme kabiliyeti vb. dir. Bütün malzemeler göçmesine etkili bir biçimde neden olan yanma sonucunda oluşan yük onların destekleme kabiliyetlerini kaybetmelerine neden olur. Yapının bütün davranışını kontrol eden komponentlerin nasıl değerlendirildiğine bağlı olarak bir göçmenin sonuçları çok değişkendir. Yüksek blokların ayaklarındaki kolonların başarısızlığı bütün blok olarak göçmesine neden olabilir. Bir yapıdaki tek kiriş çerçeve başarısızlığı yalnızca minimal yerel zarara neden olabilir. Yangın yükleri yapısal elementlere ve öteki komponentlere transfer edildiğinden direkt bir biçimde yangın tarafından etkilenmez. Şekil 7’ye göre yukarı kat ve göçmenin sonuçları büyük değildir ve zemin katta çok daha kritik yangın sonuçları meydana gelir[13].



Şekil 7 Farklı katlar ve sonuçlarda yangın[13]

### 3.Yöntem

#### 3.1.Doğrusal Olmayan Statik Öteleme (Push-Over) Analizi

Son dönemde yapıların performansa dayalı tasarım ve değerlendirilmesi amacıyla doğrusal olmayan statik öteleme analiz yöntemlerinin kullanımı hızla yaygınlaşmaktadır. Doğrusal olmayan statik öteleme analiz yöntemlerinin temeli, yapının yatay kuvvet taşıma kapasitesini ifade eden kapasite eğrisinin belirlenmesini, bu kapasite eğrisinden yapının elastik olmayan maksimum deplasmanının (deplasman talebinin) hesaplanmasını ve bu deplasman değerine kadar statik olarak itilmiş yapının performansının belirlenmesini içermektedir[14]. Yapıların performansının değerlendirilmesinde doğrusal olmayan statik analiz yöntemlerinden yaygın olarak kullanılanları Deplasman Katsayıları Yöntemi (DKY) ve Kapasite Spektrum Yöntemi'dir (KSY).

**Deplasman Katsayısı Yöntemi:** Bu yöntemde belirli yatay kuvvet için yapıya yüklenen deplasman talebi ile yapının yatay yük taşıma kapasitesinin birbirine bağımlı olduğu esasına dayanmaktadır.

Ancak, deplasman talebi grafiksel olarak değil direkt olarak sayısal bir yöntemle hesaplanmaktadır. Buna göre, deplasman talebi yapı sisteminin özelliklerine bağlı olarak belirlenen ve yapının periyodunu, histeristik davranışını, ikinci mertbe etkilerini temsil eden katsayılar ( $C_0, C_1, C_2, C_3$ ) kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu yöntem yapının kapasite eğrisinin belirlenmesi, maksimum deplasmanın (hedef deplasmanı) hesaplanması ve performans seviyesinin belirlenmesi aşamalarından oluşmaktadır[15].

**Kapasite Spektrumu Yöntemi:** Kapasite spektrum yöntemi, yapının genel kuvvet deplasman spektrum eğrisi ile talep spektrum eğrisinin indirgenmesi ile elde edilen indirgenmiş tasarım spektrumu eğrisinin grafiksel olarak bir arada görülmesini sağlamaktadır. Kapasite spektrumu yönteminde, yapıda meydana gelen elastik olmayan deformasyonlara bağlı olarak elastik talep spektrumu indirgenerek kapasite ve talebin eşit olduğu nokta belirlenmektedir. Performans noktası adı verilen bu noktada yapıdan istenen performans hedefinin gerçekleşip gerçekleşmediği kontrol edilmektedir.

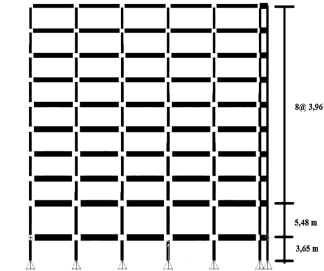
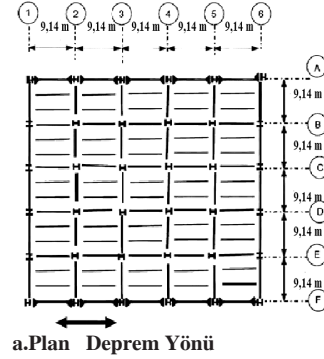
Doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizinin yapılma amacı ana hatlarıyla aşağıdaki gibi özetlenebilir[14]:

- Yapı sisteminin artan yatay yükler altında doğrusal olmayan davranışının ve göçme şeklinin belirlenmesi,

- oluşan plastik kesitlerin türleri ve yapı içindeki dağılımının belirlenmesi (hasar dağılımının belirlenmesi),
- toplam ve göreceli yer değiştirmelerin belirlenmesi,
- yapı sisteminin süneklik düzeyi hakkında bilgi edinmek,
- plastik kesitlerdeki şekil değiştirmeleri belirlemek.

#### 3.2. 9-Katlı Süneklik Düzeyi Yüksek Moment Çerçeve

Bu çalışmada kullanılan moment aktaran çerçevesi, 9 katlı süneklik düzeyi yüksek çelik moment aktaran çerçevesidir. 9 katlı çerçevelerin plan ve kesitleri Şekil 8'de verilmiştir. Kolon ek yerleri her iki katta bir düzenlenmiştir.



**b. A aksı üzerindeki moment çerçevesi**

**Şekil 8** 9 katlı çerçevenin plan ve düşey kesiti

Bina, düşey yüklere ve deprem yüklerine göre tasarlanmıştır. Bu dizaynda katlar için 4.59 kN/m<sup>2</sup> ölü yük ve 2.39 kN/m<sup>2</sup> hareketli yük, çatılar için 3.97 kN/m<sup>2</sup> ölü yük ve 0.95 kN/m<sup>2</sup> hareketli yük alınmıştır. Binanın taşıyıcı sistemi bir doğrultuda süneklik düzeyi yüksek moment çerçeveleri, diğer doğrultuda dışmerkez çaprazlı çerçevelerden ve düşey yük taşıyan iç çerçevelerden oluşmaktadır.

Binanın bodrum katındaki duvarları yapının yatay yer değiştirmesini engellediği kabul edilmiştir. Binalar Los Angeles'ın merkezinde  $S_8$  değerinin %200g ve  $S_1$  değerinin %100g olduğu bölge için tasarlanmıştır. Süneklik düzeyi yüksek moment aktaran çerçevesi için taşıyıcı sistem davranışı  $R=8$  alınmıştır.

Taban kesme kuvveti 8656.24 kN bulunmuştur. Kiriş ve kolon elemanların boyutları Tablo 4'de verilmiştir.

**Tablo 4** 9-katlı çerçeve elemanlarının boyutları

Kat	Dış Kolon	İç Kolon	Kiriş
9	W14X257	W14X311	W24X55
8	W14X257	W14X311	W27X94
7	W14X311	W14X426	W30X132
6	W14X311	W14X426	W30X132
5	W14X3 98	W14X500	W33X141
4	W14X3 98	W14X500	W33X141
3	W14X455	W14X550	W33X141
2	W14X455	W14X550	W33X141
1	W14X550	W14X730	W36X194
<b>Bodrum</b>	W14X550	W14X730	W36X194

Bütün kolonların ve kirişlerin akma gerilmesi en küçük akma dayanımı olan 34.4738 (Fe52)kN/Mm<sup>2</sup> olarak alınmıştır. Binada kat döşemeleri diyafram hareketini sağlamaktadır. Bu nedenle, binadaki her bir katın atalet (eylemsizlik) momenti binanın iki ucundaki çerçeve tarafından taşınmakta ve her bir çerçeveye gelen toplam kütle, binanın sismik kütesinin yarısı olarak alınmıştır.

Kiriş derinlikleri W36 ile sınırlandırılmıştır. Tasarım adımları dayanım, göreceli kat öteleme kontrolü ve güçlü kolon – zayıf kat kontrolünden oluşmaktadır.

### 3.3. Modellemenin Özellikleri

Moment çerçevelerin iki boyutlu modelleri SAP2000'de yapılmıştır. Elastik ötesi davranış, elemanların iki ucunda tanımlanan plastik mafsallarla ifade edilmiştir.

Pekleşme etkisi %5 olarak alınmıştır. P-M (eksenel kuvvet-eğilme momenti) etkileşim ilişkisi, AISC Şartnamesinde (2005) önerildiği gibi, kolon elemanlarının eğrilik yüzeyleri olarak kullanılmıştır. Analizlerde panel bölgesi deformasyonu ihmal edilmiştir. Sönüm oranı % 5 olarak alınmıştır ve doğrusal olmayan dinamik zaman geçmesi analizlerinde 2.ve 4. doğal frekanslarına ait rijitlik ve kütle orantılı Rayleigh sönümü kullanılmıştır.

Çerçevelerde 4.57 m genişliğindeki yük alanındaki ölü yükün % 90'ı her kattaki moment aktaran çerçevesinin kolonlarının tepesine yerleştirilmiştir. P-Δ etkisi ("P" yatay yükü etkisinde oluşan "Δ" yatay tepe deformasyonu) değerleri dikkate alınmıştır ve seçilen kolon ve kiriş elemanları kompakt kesitlere sahip olduklarından, yerel burulma etkisi ihmal edilmiştir[16].

### 3.4.Sıcaklık Etkisi

Yapıdaki taşıyıcı sistemin eğilmelere bükülmelere ve sonuçta da çökmeye neden olacak bir sıcaklığa kadar ısıtılmasına izin verilmez. Binaların Yangından Korunması Hakkında Yönetmelik[17] hükümlerine göre, çelik kolon ve kirişlerin yangın durumunda özelliklerini kaybetmemesi için yangına karşı yalıtılması gerekmektedir. Yönetmelikte, çevreye yangın yayma tehlikesi olmayan ve yangın sırasında içindeki yanıcı maddeler yüzünden yapının çelik elemanlarında 540°C'nin üzerinde bir sıcaklık artışına sebep olmayacak bütün çelik yapılar yangına karşı dayanıklı kabul edilmektedir. Bu sıcaklık mutlak olmayıp, kullanılan çeliğin özelliklerine ve uygulanan yük faktörüne bağlı olarak değişebilir. Yangından korunma sisteminin, hem mimar hem de inşaat mühendisi tarafından ön tasarım aşamalarında dikkatli bir şekilde göz önüne alınması gerekir.

Isı iletim katsayısı yüksek olan çelik, ısınma durumunda gerilim sınırını çok kolay aşabilir. Gerilim sınırı aşıldığında gerilme esnekliği kaybolur ve kalıcı şekil değişimleri meydana gelir. Çok zayıf olan ve basınç altında bulunan yapı kısımları, yüksek sıcaklıklarda taşıma özelliğini kaybeder. Isınan çelik uzar, birleştiği noktalarda değişiklikler meydana getirir ve bazen bütün konstrüksiyonu yıkabilecek güçte kuvvet oluşturur. Sıcaklıktan dolayı meydana gelen bu hacim değişiklikleri, çelik kiriş ve çelik kolonların taşıma gücünü kaybetmesine ve çökmesine neden olabilir. Kolonlar ise, genellikle her taraftan ısı geçişine açık oldukları için, çökme olasılığı çok yüksek bir yapı elemanıdır. Çok yük taşıyan kolonlardan sadece birinin kırılması bile bütün binanın çökmesi demektir. Bu yüzden yangına karşı çok dayanıklı olmalıdır.

Çeliğin uzama katsayısı, ahşabın yaklaşık üç katıdır. Örneğin, başlangıçta uzunluğu 5 m. olan 20°C sıcaklıktaki çelik taşıyıcı, yangın sebebiyle 640°C sıcaklığa ısındığında boyu yaklaşık 5 cm. artar. Toplam uzunluk arttıkça taşıyıcıların dayandığı veya uzamadan dolayı ittiği duvarlara büyük güçler uygulanır.



Bu nedenle bu tür yapılar, özellikle yangınlardan dolayı yükselen sıcaklıklar nedeniyle meydana gelen uzamalardan korumak için ulaşılabilecek sıcaklık hesaplanmalı ve gerekiyorsa yangına karşı yalıtılmalıdır.

Çeliğin çekme mukavemeti başlangıçta 150-300°C değerlerinde biraz arttıktan sonra, daha yüksek sıcaklıklarda hızla azalır ve yangınlarda kolayca erişilen 600°C sıcaklığında emniyet gerilmesinin altına düşer. Yüksek sıcaklıklarda bağ kuvvetlerinin azalması, çeliğin elastisite modülünün azalmasına neden olur. Elastisite modülünün değeri 20°C'ye dekine kıyasla, 400°C'de % 15 ve 600°C'de ise % 40 kadar azalır. Çevre sıcaklığına göre mukavemeti ise, sıcaklığı 700°C olduğunda % 23'e, 800°C'de % 11'e, 900°C'de % 6'ya düşer ve yaklaşık 1500°C sıcaklıkta erir. Uzamalar ısıl gerilmelerin oluşmasına ve normal olarak yüksek sıcaklıklarda burkulma yapmayan kolonun burkulmasına ve daha düşük taşıma gücü göstermesine neden olabilir[18].

Çelik iskeletli yapıların yangın bakımından özel önemi vardır. Bunlarda, yanmazlıktan çok ısıl şekil değiştirmelerin oluşumu göz önüne alınır. Birçok standart, çelik yapıları özel bir sınıf olarak ele almıştır. Çelik yapıların tasarımına ilişkin bilgi veren Eurocode 3 (EN 1993) standartlarının ikinci bölümü, çelik taşıyıcıların yalıtımına ayrılmıştır ve çeşitli hesap yöntemleri verilmiştir.

Alanı 5000 m<sup>2</sup>'den az olan tek katlı yapılar hariç olmak üzere, diğer çelik yapılarda, çeliğin sıcakta uygun şekilde yalıtılması gerektiği belirtilmektedir. Binanın, kullanım şekline ve yüksekliğine bağlı olarak binanın belli bir süre çokmeden korunması gerekir. Yönetmelikte EK 3/C'ye göre yapıda yağmurlama olup olmamasına, kullanım şekline ve yapı yüksekliğine bağlı olarak yangına dayanım (direnc) süreleri verilmiştir. Yangın dayanım süresi, bir yapı bölümünün belirli bir yangın yükü altında, kendisinden beklenen görevleri yerine getirmeye devam ettiği zaman süresidir. Burada sözü edilen görevler; yüke dayanım, hacim örtme ve ısıl difüzyonu sınırlama fonksiyonlarıdır. Hacim örtme yapı elemanlarında, ateşe bakmayan arka yüzlerde sıcaklık artmasının 140°C'yi aşmaması ve buralarda kendiliğinden yanabilir gazlar oluşmaması istenir. Eğilmeye çalışan elemanlarda ise sehimlerin artma hızının belirli sınırları aşmaması gerekir.

Çıplak çeliğin de belli bir derece yangına direnci olduğu unutulmamalıdır. Çelik 550°C'de oda sıcaklığındaki akma gerilmesinin %50'sine yaklaşır.

Yangın şartlarına, yüklenmeye, bağlantılara, uç baskılara, alanın geometrisine ve benzerine bağlı olarak çıplak çelik o alan için güvenilir olarak varsayılmış tasarım yangınlarına uygun direnc gösterdiği görülmüştür.

Yapılarda çıplak çeliğin kullanıldığı yaygın uygulamalar içinde az katlı binalar, açık otoparklar ve dış yapı elemanları yer alır. Çelik profillerin ısınma problemindeki en önemli faktörlerden biri de "F/V profil faktörü" adı verilen, aleve maruz kalacak alanın ısınacak kütleyle oranıdır. F/V oranı ile yangına dayanım süresi ters orantılı olarak değişir ve F/V oranı küçüldükçe yangına dayanım süresi artar.

Yangın direnci olan inşaat çeliği alaşımları, 600°C'de oda sıcaklığındaki akma gerilmesinin 2/3'ünü tutacak şekilde geliştirilmektedir. Bu çeliğe akma gerilmesi üzerine etki yapan molibden gibi elementlerin katılmasıyla sağlanır[19]. Bu malzemeyi kullanarak inşa edilmiş birkaç yapı mevcuttur. İlave yangına karşı dayanıklılık derecesi yangına dayanıklı çeliğe, klasik yangına direnci kaplamaların uygulanmasıyla elde edilebilir.

Yenilik yaratıcı araştırmalar ve gelişmiş üretim uygulamalarıyla yeni çelik formülleri geliştirilmektedir. Bu yeni çelikler halen Japonya ve diğer Asya ülkelerinde sınırlı kullanım yerleri bulunmuştur. Yangına dayanıklı çelikler olarak atıf yapılan bu malzemeler endüstri içinde yer bulmaktadır. Yangına dayanıklı çeliklerin araştırmacıları, bu malzemelerin yüksek sıcaklık seviyelerindeki özelliklerinin daha geleneksel çelik formülleriyle karşılaştırıldıklarında daha az mukavemet kaybı gösterdiklerini, ancak yangına dayanıklı çeliklerin pasif koruma önlemlerinin yerini alamayacağını belirtmektedirler. Buna karşılık bu teknolojinin, yapı çokmeden önce ilave zaman kazandıracağı ve yapıyı koruyucu malzemelerin iflas etmesinden sonra bile yapının daha uzun süre ayakta kalmasını sağlayacağı kesindir. Yangına dayanıklı çelik kullanımının örnekleri Japonya, Çin ve Almanya'da mevcuttur. Sınırlı sayıda uygulamalar arasında otopark, spor salonu, demiryolu istasyonu ve ofis binaları sayılabilir[18].

Çelik için genel bir ilişki Şekil 9' da gösterilmiştir. Sıcaklık yaklaşık 93 °C' ye ulaştığında akma gerilme ve kopma gerilme eğrileri doğrusal olmayan eğri çizmeye başlar. Elastisite modülü, akma gerilmesi, kopma gerilmesi sıcaklığın artması ile beraber azalır. 426°C - 538°C arası azalma düzeyinin an fazla olduğu sıcaklıklardır. Farklı mikro yapı ve kimyasal yapılarından dolayı her çeliğin davranışı birbirinden farklıdır.

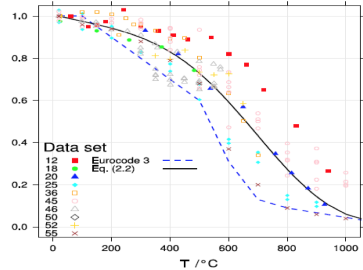
Çelik göreceli bir biçimde yüksek karbon yüzdesine sahiptir. 150 °C ile 370 °C düzeylerinde akma gerilmesi örneğin Fe37 gibi bir çelikte ortaya çıkabilir. Sıcaklık 204 °C'ye ulaştığında akma gerilmesi ve kopma gerilmesindeki azalmada süreklilik gösterir. Sıcaklık 1093°C'ye ulaştığında akma ve kopma gerilmesi en düşük seviyesine ulaşır. Elastisite modülünün azalması sıcaklığın artması ile doğrusal bir biçimde azalır. 538 °C den itibaren daha hızlı bir biçimde azalma meydana gelir. Daha da önemlisi 260°C ile 320°C yukarıdaki sıcaklıklarda çelikte ortaya çıkan sünme olarak bilinen plastik deformasyon zamanla artar.

Çoğu çelik yaklaşık 538 °C aşağısındaki uygulamalarda kullanılır. Isıya maruz kalan çelik 426 °C aşağısında tutulmalıdır. Bu uygulamada 93°C, 204°C, 325°C, 426 °C ve 538°C de çeliğin davranışı doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analiz yöntemi ile incelenmiştir.

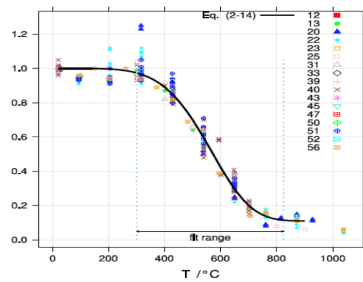
**Tablo 5** Çelik sıcaklık tablosu

Çelik Sıcaklık	200 F	400 F	600 F	800 F	1000 F	1200 F	1400 F	1600 F	1800 F	2000 F
	93°C	204°C	325°C	426°C	538°C	649°C	760°C	871°C	982°C	1093 °C
Akma gerilmesi	0.95	0.90	0.89	0.84	0.69	0.35	0.19	0.11	0.05	0.05
Kopma gerilmesi	0.96	0.99	0.95	0.82	0.57	0.26	0.17	0.09	0.04	0.03
Elastisite Modülü	0.99	0.96	0.90	0.80	0.70	0.49	0.24	0.05	0.03	0.025

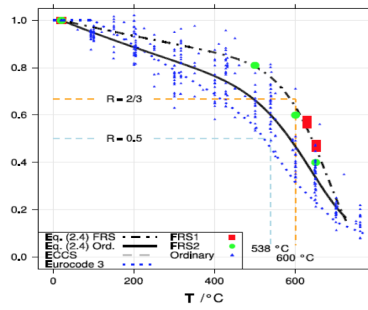
Yukarıdaki grafikten akma gerilmesi, kopma gerilmesi ve elastisite modüllerini tablo haline getirirsek aşağıdaki gibi elde edilir [Tablo 5]



a) Akma gerilmesine sıcaklığın etkisi



b) Kopma gerilmesine sıcaklığın etkisi



c) Elastisite modülün sıcaklığa etkisi

**Şekil 9** Yapısal çeliklerin akma gerilmesi, kopma gerilmesi ve elastisite modülleri eğri özelliklerinin yüksek sıcaklıklardaki değişimi[19]

Yukardaki tablonun yardımıyla çelik için SAP2000 programında kullanılan akma gerilmesi, kopma gerilmesi ve elastisite modülleri 93 °C, 204 °C, 325 °C, 426 °C ve 538 °C sıcaklıklardaki değerleri aşağıdaki gibidir[Tablo 6]. Bu tablodan elde edilen değerler grafik olarak Şekil 10'da sunulmuştur. Bu grafikler Şekil 9'daki grafiklerle uyumludur. Tablo 6'daki değerlere uygun olarak yapısal model modifiye edilerek doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizleri gerçekleştirilmiştir.

**Tablo 6** Çelik malzeme özelliklerindeki değişim

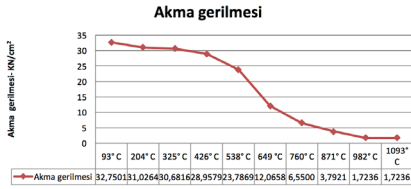
Çelik Sıcaklık	200 F	400 F	600 F	800 F	1000 F
	93° C	204° C	325° C	426° C	538° C
Akma gerilmesi	32.7501 kN/mm <sup>2</sup>	31.0264 kN/mm <sup>2</sup>	30.6816 kN/mm <sup>2</sup>	28.9579 kN/mm <sup>2</sup>	23.7869 kN/mm <sup>2</sup>
Kopma gerilmesi	43.0233 kN/mm <sup>2</sup>	44.3677 kN/mm <sup>2</sup>	42.5751 kN/mm <sup>2</sup>	36.7490 kN/mm <sup>2</sup>	25.5450 kN/mm <sup>2</sup>
Elastisite Modülü	19794.85 kN/mm <sup>2</sup>	19195.0 kN/mm <sup>2</sup>	17995.31 kN/mm <sup>2</sup>	15995.83 kN/mm <sup>2</sup>	13996.35 kN/mm <sup>2</sup>

Çelik Sıcaklık	1200 F	1400 F	1600 F	1800 F	2000 F
	649° C	760° C	871° C	982° C	1093° C
Akma gerilmesi	12.0658 kN/mm <sup>2</sup>	6.5500 kN/mm <sup>2</sup>	3.7921 kN/mm <sup>2</sup>	1.7236 kN/mm <sup>2</sup>	1.7236 kN/mm <sup>2</sup>
Kopma gerilmesi	11.6521 kN/mm <sup>2</sup>	7.6187 kN/mm <sup>2</sup>	4.0334 kN/mm <sup>2</sup>	1.7926 kN/mm <sup>2</sup>	1.3444 kN/mm <sup>2</sup>
Elastisite Modülü	9797.45 kN/mm <sup>2</sup>	4798.75 kN/mm <sup>2</sup>	999.73 kN/mm <sup>2</sup>	599.84 kN/mm <sup>2</sup>	499.86 kN/mm <sup>2</sup>

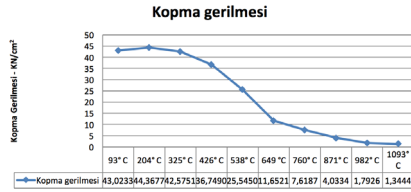
	0 F / 0 °C
Akma gerilmesi	34.4738 kN/mm <sup>2</sup>
Kopma gerilmesi	44.8159 kN/mm <sup>2</sup>
Elastisite Modülü	19994.79 kN/mm <sup>2</sup>

**Başlangıç değerleri**

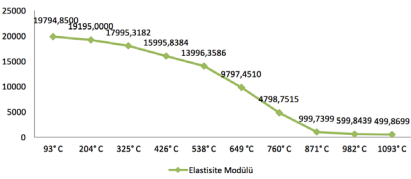




a) Akma gerilmesi



b) Kopma gerilmesi



c) Elastisite Modülü - kN/mm2

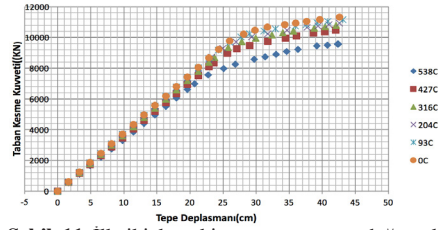
Şekil 10 Akma gerilmesi, kopma gerilmesi ve elastisite modüllerinin grafiksel gösterimi

9 katlı çerçevenin yangına maruz kalması durumunda dayanımı ve rijitliğindeki değişiklikleri incelemek için değişik senaryolar planlanmıştır. Bu amaçla üretilen senaryolar aşağıdaki gibidir.

#### 4. Bulgular

##### 4.1. Senaryo 1:

Yangının ilk iki katta çıktığı kabul edilmiştir. Şekil 10'da kullanılan grafikler doğrultusunda ilk iki kattaki çelik malzemenin akma gerilmesi, kopma gerilmesi ve elastisite modülleri değiştirilerek yapıda doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizleri yapılmıştır (Şekil 11). Bu grafikten elde edilen dayanım ve rijitlik değerleri aşağıdaki tabloda çıkmıştır (Tablo 7).



Şekil 11 İlk iki kattaki yangın sonucu doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi

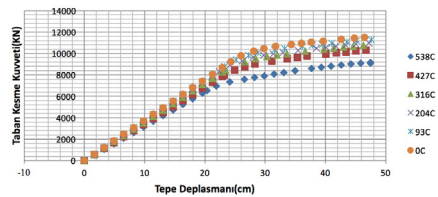
Tablo 7 İlk iki kattaki yangın sonucu dayanım-rijitlik değişimi

3 KAT	0° C	Değişim	93 °C	Değişim	204° C	Değişim	316° C	Değişim	427° C	Değişim	538° C
Dayanım (Vy)	13000 kN	-%7	12200 kN	-%5	11700 kN	-%1	11666,66 kN	-%6	11000 kN	-%12	9402,48 kN
Başlangıç Rijitliği (Ke)	389,38 kN/mm	-%8	360,57 kN/mm	-%4	348,62 kN/mm	-%1	346,49 kN/mm	-%4	335,66 kN/mm	-%4	309,23 kN/mm
Akma Sonrası Rijitliği (Ks)	60 kN/mm	-%1	59,42 kN/mm	-%1	59,63 kN/mm	-%3	57,91 kN/mm	-%2	57,32 kN/mm	-%3	55,97 kN/mm

Dayanım (Vy), başlangıç (elastik) rijitliği (Ke), akma sonrası (elastoplastik) rijitliği (Ks) sıcaklığın artmasıyla sürekli düşmektedir. Değişimler incelendiğinde dayanım (Vy)'daki değişim 427°C ile 538°C arasında oldukça artmaktadır. Genel olarak başlangıç rijitliği (Ke)'deki azalmanın çok daha fazla olmasına karşın, akma sonrası rijitliğinde (Ks) değişimin daha az olduğu görülmektedir.

##### 4.2. Senaryo 2:

Yangının ilk üç katta çıktığı kabul edilmiştir. İlk üç katta meydana gelen yangındaki doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi sonucu ortaya çıkan grafik aşağıda verilmiştir (Şekil 12).



Şekil 12 İlk üç katta çıkan yangın sonucu doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi

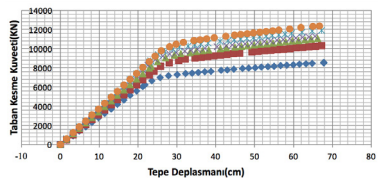
Tablo 8 İlk üç katta çıkan yangın sonucu dayanım-rijitlik değişimi

3 KAT	0° C	Değişim	93 °C	Değişim	204° C	Değişim	316° C	Değişim	427° C	Değişim	538° C
Dayanım (Vy)	13000 kN	-%7	12200 kN	-%5	11700 kN	-%1	11666,66 kN	-%6	11000 kN	-%12	9402,48 kN
Başlangıç Rijitliği (Ke)	389,38 kN/mm	-%8	360,57 kN/mm	-%4	348,62 kN/mm	-%1	346,49 kN/mm	-%4	335,66 kN/mm	-%4	309,23 kN/mm
Akma Sonrası Rijitliği (Ks)	60 kN/mm	-%1	59,42 kN/mm	-%1	59,63 kN/mm	-%3	57,91 kN/mm	-%2	57,32 kN/mm	-%3	55,97 kN/mm

Şekil 12'den elde edilen Tablo 8'deki dayanım ( $V_y$ ), başlangıç (elastik) rijitliği ( $K_e$ ), akma sonrası (elastoplastik) rijitliği ( $K_s$ ) ilk iki katta çıkan yangın sonucu ortaya çıkan tablodaki gösterilen değerlere göre bir miktar daha fazla azalma ile sonuçlanmıştır. Bunun en önemli nedeni yangının ilk 2 kattan daha yukarı doğru sıçrayarak 3. katı da etkisi altına alması sebebiyledir. Bu da yapının dayanım ve rijitliğini önemli bir miktarda etkilemeye başlamıştır. Değişimler incelendiğinde bu durum açıkça görülmektedir.

### 4.3. Senaryo 3:

Yangının ilk altı katta çıktığı kabul edilmiştir. Yangının iyice şiddetlendiği ve ilk altı kata kadar yükselmesi ile elde edilen doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi sonucu aşağıdadır (Şekil 13).

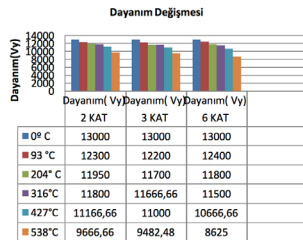


Şekil 13 İlk altı katta çıkan yangın sonucu doğrusal olmayan statik öteleme (push-over) analizi İlk 6 kattaki doğrusal olmayan statik öteleme analizi (push-over) sonucu oluşan sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 9).

**Tablo 9** ilk altı katta çıkan yangın sonucu dayanım rijitlik değişimi

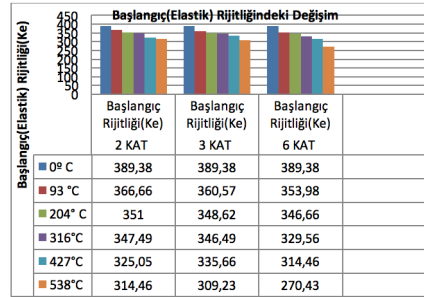
4 KAT	0°C	Değişim	93°C	Değişim	204°C	Değişim	316°C	Değişim	427°C	Değişim	538°C
Dayanım $V_y$	13000	-5,5	12400	-4,4	11800	-3,3	11500	-2,8	10666,66	-2,20	8625
Rijitlik $K_e$	13000	-5,5	12400	-4,4	11800	-3,3	11500	-2,8	10666,66	-2,20	8625
Akma Sonrası Rijitlik $K_s$	820,38	-5,0	33,98	-5,3	140,66	-5,5	322,56	-5,5	314,46	-5,15	270,43
Akma Sonrası Rijitlik $K_s$	66	-5,5	57,4	-5,2	53,36	-5,2	52,67	-5,1	52,19	-5,26	39,14

İlk 6 katta çıkan yangın sonucu oluşan dayanım ( $V_y$ ), düşüşü bilhassa 427 °C ile 538 °C arasındaki değişim oranına bakıldığında oldukça yüksektir. Aynı şekilde başlangıç (elastik) rijitliği ( $K_e$ ) ve akma sonrası (elastoplastik) rijitliği ( $K_s$ )'nde önemli bir azalma dikkati çekmektedir.



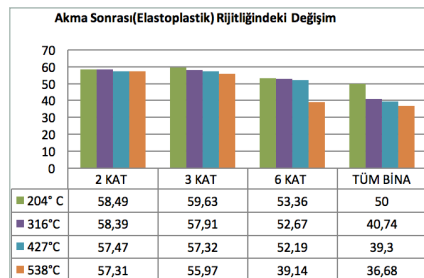
Şekil 14 2-, 3-, 6 katta çıkan binada değişik sıcaklıklarda pekleşme sonunda ulaşılan nihai yapının dayanımını- kN

Şekil 14'de 0°C, 93°C, 204°C, 316°C' de pekleşme sonunda ulaşılan nihai yapının dayanımdaki azalma 427°C ve 538°C' de meydana gelen dayanım azalmasından daha azdır. Tüm binadaki dayanım azalması diğer katlarda meydana gelen yangınlara oranla önemli bir miktarda fazladır. Bunun nedeni yapının artık kritik bir sıcaklığa ulaşmasıdır. Bina da yeterli yangından korunma önlemlerinin olması gerekir.



Şekil 15 2-, 3-, 6 katta çıkan binada değişik sıcaklıklarda yapının başlangıç (elastik) rijitliği- kN/mm Şekil 15'de başlangıç (elastik) rijitliğinin karşılaştırmalı olarak analiz sonucu gösterilmiştir. Yatay yükten kaynaklanan deformasyon rijitlik ölçüsü olarak tanımlanır. Aynı yanal yük etkisindeki elemanlardan, az deformasyon yapan bir elemanın değerine göre daha rijit olduğu belirtilebilir. Görüldüğü gibi yapıdaki sıcaklık yapıda elastik rijitliği azaltmaktadır.

Yangına dayanıklı çelik bir yapı yeterli başlangıç rijitliğine sahip olmalıdır. Bu kavram öteleme ve eğilme rijitliği olarak da düşünülebilir[20].



Şekil 16 2-, 3-, 6 katta çıkan binada değişik sıcaklıklarda akma sonrası (elastoplastik) rijitliği- kN/mm

Büyük yangınların hemen hepsinde zayıf kolonların çökmesi sonucu üst üste yığılan katlar gözlenmiştir. Akma sonrası (Elastoplastik) rijitlik yukarıda görüldüğü gibi sıcaklığın etkisi ile azalmaya devam etmektedir (Şekil 16).

Bu sebeple yapıların ve taşıyıcı sistem elemanlarının işlevlerini yerine getirebilmeleri için, işletmede kaldıkları sürede yeterli dayanım ve rijitliğe sahip olmaları ve aynı zamanda, bu süre zarfında tasarım yükünün üstüne çıkabilecek durumları örneğin yangın gibi aşırı yük için de güvenliklerinin bulunması gerekir. Taşıyıcı eleman boyutlarında kabul edilebilir sınırların dışında oluşabilecek değişiklikler ve malzeme veya birleşim araçlarının dayanımındaki farklılıklar da elemanın gerçek dayanımının tasarım değerinden daha küçük olmasına neden olabilmektedir. Dolayısıyla, yapısal tasarımda hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın, aşırı yüklenme veya dayanım azalması olasılığına karşı yeterli bir güvenliğin bulunması sağlanmış olmalıdır[21].

## 5.Sonuç ve Tartışma

Çelik yapıların çeşitli katlarına kadar çıkan yangınlar sonucundaki değişim doğrusal olmayan statik öteleme(push-over) analizi yöntemiyle Şekil 11, Şekil 12, Şekil 13’de gösterilen taban kesme kuvveti-tepe deformasyonu grafiklerle gösterilmiştir. Bu grafiklerden elde edilen sonuçlar Tablo 7, Tablo 8, Tablo 9 akma sonrası (elastoplastik) rijitlik, başlangıç (elastik) rijitliği ve dayanım olarak verilmiştir. Bu tablolardan elde edilen sonuçların karşılaştırılmalı sonuçları ise Şekil 14, Şekil 15 ve Şekil 16’da sırasıyla 0°C, 93°C, 204°C, 316°C, 427°C, 538°C’ de verilmiştir. Böylelikle yangının etkisi değerlendirilmiştir.

İlk olarak dayanım, başlangıç (elastik) rijitlikleri ve akma sonrası (elastoplastik) rijitlik fazladır ve daha fazla yangın yükü taşımaya zorlandıklarında, tasarım özelliklerine bağlı olarak ya gevrek davranış özellikleri gösterip ani olarak kırılabilirler ve yahut sünek bir davranış ile maruz kaldıkları yükü artan deformasyonlar eşliğinde karşılamaya devam ederler. Bu nedenle, artan sıcaklıklar altında aşılacak elastik sınırlar, çeliğin dayanımının azalmasına yol açar. Dayanımda ortaya çıkan başlangıç değerindeki değişime yaklaşık olarak ilk 2 katta çıkan yangın için yaklaşık %25.6, ilk 3 katta çıkan yangın için yaklaşık %27.1 ve ilk 6 katta çıkan yangın için yaklaşık %33.7’lere varan bir azalmaya yol açar. Başlangıç (elastik) rijitlikte ortaya çıkan başlangıç değerindeki değişime yaklaşık olarak ilk 2 katta çıkan yangın için yaklaşık %19.2, ilk 3 katta çıkan yangın için yaklaşık %20.6 ve ilk 6 katta çıkan yangın için yaklaşık %30.5’lere varan bir azalma ortaya çıkarır. Akma sonrası (elastoplastik) rijitlik için başlangıç değerindeki değişime yaklaşık olarak ilk 2 katta çıkan yangın için yaklaşık %4.5, ilk 3 katta çıkan yangın için yaklaşık %6.7 ve ilk 6 katta çıkan yangın için yaklaşık %34.8’lere varan bir azalmaya neden olmuştur.

Çelik yapılar yangına göre tasarlandığında sünek bir davranış ile dayanımlarında önemli ölçüde düşme meydana gelmeden plastik deformasyonlarını artırırlar.

## Teşekkür

Bana bu çalışmada desteklerini esirgemeyen Gebze Teknoloji Üniversitesi’nden Prof. Dr. Bülent AKBAŞ’a ve İstanbul Gedik Üniversitesi’nden İş Sağlığı ve Güvenliği Bölüm Başkanı Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Yağımlı’ya teşekkür ederim.

**KAYNAKLAR**

- [1] Kılıç A., “Çelik Taşıyıcı Binalar ve Yangın Dayanımı”, Mimarlık Dergisi, Sayı 394.
- [2] Beitel J. J., Iwankiw N. R. (2005), “Historical Survey of Multi-Story Building Collapses Due to Fire”, Fire Protection Engineering, 3rd Quarter.
- [3] Bailey C. G. (1998), “Development of computer software to simulate the structural behaviour of steel framed building in fire”, Computers and Structures, 67, 421- 438.
- [4] Saha J. (2004), Guide Book on Fire Protection of Steel Structures, INSDAG, 3-10.
- [5] Gann R. G. (2008), “Final report on the collapse of World Trade Center Building 7”, Federal building and fire safety investigation of the World Trade Center disaster, NCSTAR-1A, NIST.
- [6] Selamet S., Garlock M. E. (2012), “Predicting the maximum compressive beam axial force during fire considering local buckling”, Journal of Constructional Steel Research, 71, 189-201.
- [7] Version II, Corrosion, Fire Protection and Fatigue considerations of Steel Structures, 1998, 1-17.
- [8] Lawson R. M. (2001), “Fire engineering design of steel and composite buildings”, Journal of Constructional Steel Research, 57, 1233–1247.
- [9] Kirby B. R. (1995), “The behaviour of high-strength Grade 8.8 bolts in fire”, Journal of Constructional Steel Research, 33(1-2): 3-38.
- [10] BS5950 Part 8, Code of Practice for Fire Resistant Design, all of the methods of achieving fire resistance for structural steelwork, 1990.
- [11] Eurocode 3, Design of steel structures, 1993.
- [12] Bennetts I. D., Thomas I. R. (2002), “Design of steel structures under fire conditions”, Prog. Struct. Engng Mater, 4:6–17 (DOI: 10.1002/pse.100).
- [13] Seif M., Main J., Weigand J., Sadek F., Choe L., Zhang C., Gross J., Luecke W., Mccolskey D. (2016), Temperature-Dependent Material Modeling for Structural Steels: Formulation and Application, 1-145.
- [14] Kadid A., Boumrkik A. (2008), “Pushover Analysis Of Reinforced Concrete Frame Structures”, Asian Journal of Civil Engineering, 9(1), 75-83.
- [15] İrtem E. , Türker K., Hasgöl U. (2003), Türk Deprem Yönetmeliğinin Performans Hedeflerinin Lineer Olmayan Statik Analiz Yöntemleri ile Değerlendirilmesi.
- [16] Akbaş B., Shen J. J., Sutchiewcharn N., Cai W. (2007), Seismic Demands on Column Splices in Special Steel Moment Frames, 8-20.
- [17] Binaların Yangından Korunması Hakkında Yönetmelik, 2007-2015.



[18] Yardımcı N., Çelik Yapıların Tasarımı ve Tasarım Yöntemleri, TMH - Türkiye Mühendislik Haberleri, Sayı 435 - 2005/1.

[19] Marrion, C; Custer, Richard L. P.; Johann, Matt; Meacham, Brian, Temmuz 2004, "Materials, Systems and Technologies ", NIST Fire Protection of Structural Steel in High-Rise Buildings, Civil Engineering Research Foundation, NIST GCR 04-872.

[20] Öven V. A. , Parlak İ. Y. (2003), "Korumasız Çeliğin Yüksek Sıcaklıklarda Performansı", Türkiye Mühendislik Haberleri, sayı 427, 79-86.

[21] Yazgan M. T. (2010), Yangın Geçirmiş Çelik Binaların Dayanımlarının Araştırılması, Yüksek Lisans Tezi Deprem Ve Yapı Anabilim Dalı, Gebze.

## ELECTROMAGNETIC SHIELDING PERFORMANCES OF COLEMANITE / PANI / SiO<sub>2</sub> COMPOSITES IN RADAR AND WIDER FREQUENCY RANGES

Ethem İlhan ŞAHİN\*, Mehriban EMEK\*\*, Burcu ERTUĞ\*\*\*, Mesut KARTAL\*\*\*\*

### ABSTRACT

In this study, colemanite-SiO<sub>2</sub> were produced by using mixed oxide technique. The composition was formed with various proportions for the structural analysis. The results of the structural analysis indicated that second phase did not form in colemanite and SiO<sub>2</sub>. Additionally, the colemanite/polyaniline/SiO<sub>2</sub> composites were produced by hot pressing using the compositions of colemanite-SiO<sub>2</sub> in different proportions and aniline. The weight ratios of colemanite-SiO<sub>2</sub> and aniline were 1:1 respectively and epoxy resin was used to produce microwave shielding composites. The microwave shielding performances of colemanite/polyaniline/SiO<sub>2</sub> composites were investigated by shielding effectiveness in 8 –18 GHz using two-port vector network analyzer. A minimum of – 41.1 dB shielding effectiveness performance was obtained in 16.09 GHz at the thickness of 1.5 mm. This shielding performance can be modulated simply by controlling the content of polyaniline and content of colemanite-SiO<sub>2</sub> in the samples for the required frequency bands.

**Keywords:** *Elektromagnetic shielding effectiveness, polyaniline, colemanite, polymer-matrix composites.*

\*Makale Gönderim Tarihi: 26.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 08.06.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.742821

\*Sorumlu yazar: İstanbul Technical University, Department of Satellite Communications and Remote Sensing, Maslak, İstanbul (shnethem@gmail.com ) (ORCID ID: 0000-0001-7859-9066)

\*\*Adıyaman University, Gölbaşı Vocational School, Gölbaşı, Adıyaman (memek@adiyaman.edu.tr).  
(ORCID ID: 0000-0001-7322-9808)

\*\*\* Nisantasi University, Faculty of Engineering and Architecture, Department of Architecture, Sarıyer, İstanbul (burcu.ertug@nisantasi.edu.tr ) (ORCID ID: 0000-0002-0100-2724)

\*\*\*\*Department of Electronics and Communication Engineering, İstanbul Technical University, Maslak, İstanbul (kartalme@itu.edu.tr ) (ORCID ID: 0000-0001-8475-5352)

## RADAR VE DAHA GENİŞ FREKANS ARALIĞINDA KOLEMANİT/PANI/ SiO<sub>2</sub> KOMPOZİTLERİN ELEKTROMANYETİK KALKANLAMA PERFORMANSLARI

Ethem İlhan ŞAHİN\*, Mehriban EMEK\*\*, Burcu ERTÜĞ\*\*\*, Mesut KARTAL\*\*\*\*

### ÖZ

Bu çalışmada, kolemanit-SiO<sub>2</sub> oksitlerin karışımı tekniği kullanılarak üretilmiştir. Kompozisyon, yapısal analiz için çeşitli oranlarda oluşturuldu. Yapısal analizin sonuçları, kolemanit ve SiO<sub>2</sub>'de ikinci fazın oluşmadığını göstermiştir. Buna ek olarak, kolemanit /polianilin/SiO<sub>2</sub> kompozitleri, farklı oranlarda kolemanit-SiO<sub>2</sub> bileşimleri ve anilin kullanılarak sıcak presleme yoluyla üretildi. Kolemanit-SiO<sub>2</sub> ve anilin ağırlık oranları sırasıyla 1: 1 idi ve mikrodalga koruyucu kompozitler üretmek için epoksi reçine kullanıldı. Kolemanit/polianilin/SiO<sub>2</sub> kompozitlerinin mikrodalga kalkanlama performansları, iki portlu vektör network analizörü kullanılarak 8-18 GHz'de ekranlama etkinliği ile araştırılmıştır. Minimum -41.1 dB ekranlama etkinliği performansı 1.5 mm kalınlığında 16.09 GHz'de elde edilmiştir. Bu ekranlama performansı, gerekli frekans bantları için numunelerde polianilin içeriği ve kolemanit-SiO<sub>2</sub> içeriği kontrol edilerek modüle edilebilir.

**Anahtar Kelimeler:** Elektromanyetik kalkanlama etkisi , polianilin , kolemanit, polimer-matrix kompozitler.

\*Makale Gönderim Tarihi: 26.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 08.06.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.742821

\*Sorumlu yazar: İstanbul Technical University, Department of Satellite Communications and Remote Sensing, Maslak, İstanbul (shnethem@gmail.com ) (ORCID ID: 0000-0001-7859-9066)

\*\*Adıyaman University, Gölbaşı Vocational School, Gölbaşı, Adıyaman (memek@adiyaman.edu.tr).  
(ORCID ID: 0000-0001-7322-9808)

\*\*\* Nisantasi University, Faculty of Engineering and Architecture, Department of Architecture, Sarıyer, İstanbul (burcu.ertug@nisantasi.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0002-0100-2724)

\*\*\*\*Department of Electronics and Communication Engineering, İstanbul Technical University, Maslak, İstanbul (kartalme@itu.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0001-8475-5352)

## 1. Introduction

Due to the extensive use of modern communication gadgets, Electromagnetic Interference (EMI) has received worldwide social and scientific attention. In general, critical EMI problems are encountered in satellite communication, digital devices, radar management systems, wireless technology and other electronic equipment [1-3]. Due to the intense generation of high frequency electronic industry, electromagnetic pollution and electromagnetic interference (EMI) have emerged as a major issue in today's world. Electromagnetic radiation not only impedes electrical power system efficiency and output but also has a damaging influence on human health. Using EMI shielding materials is an useful strategy to reduce the above mentioned problems efficiently. In just this regard, new and more effective EMI shielding materials have attracted significant attention [4-8]. Shielding of EM waves leads to reduction of interferences by converting EM energy into thermal energy via reflection or absorption of radiation power [9]. For instance, Metals and carbon materials are fine EMI shielding materials [10-13].

Polymer-based electrical conductor composites offer additional benefits over conventional metallic composites, including cost-effective, lightweight and corrosion-resistant [14].

Among the intrinsically conductive polymers, the extraordinary electrical property of polyaniline (PANI) coupled with its low density and process-efficiency attracted great interest as a new functional component to produce multifunctional composites [15-17].

Under controlled environments, PANI can be produced by aniline's chemical oxidative polymerization. PANI can also be doped easily and shows sufficient stability [18-20]. Recent work it has been shown that by implementing heterostructure, the shielding capability of PANI-based composites can be noticeably improved [21].

Colemanite is a large variety of boron mineral types in the earth;  $\text{CaO} \cdot 3\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  (colemanite) is the most widely used as commercial boron minerals in the world [22]. They are also very effective material as boron is commonly used in many fields, which include glass, agriculture, detergent, wood beauty products, clothing, cloth, rubber, paint. Besides, boron is innovative application areas for both the nuclear, energy storage, ceramic and materials science industries [23]. For two principal reasons,  $\text{SiO}_2$  is the most commonly used inorganic support. Firstly, in the literature the formation of monodispersed silica particles is really quite easy to execute and well recorded [24]. Second, different potential applications of silica-based systems

are associated: gas-liquid chromatography, supports to catalysts, etc. [25]. Single polymer membrane separators, however, can not fulfill the standard for better mechanical properties and electrochemical properties at about the same time, so compounding various polymers [26-28] or connecting other compounds such as  $\text{CuO}$  [29] and  $\text{SiO}_2$  [30-32] to the polymer matrix is the most effective means of improving the separator effectiveness.

In previous studies in the literature, the microwave EMI shielding properties of polyaniline composite with Ag decorated (5.0 wt. % loading) graphene was reported to be 29.33 dB [33]. In addition, Shuang et al. recorded required parameters with an EMI shielding of ~30 dB in Cu / Ni coated fiber, developed by electrodeless technique [34].

The magnitude of the shielding effect is connected to how far the incoming electromagnetic wave is going through. For the shielding value of -10 dB, it is understood that the incoming electromagnetic wave is reduced by 90 per cent and that the opposite side is passed by 10 per cent. [35-36].

In this study the single phases colemanite- $\text{SiO}_2$  were prepared for the first time by means of mixing oxides as solid solution in different ratios. Then new colemanite- $\text{SiO}_2$ : PANI were produced using this composition.

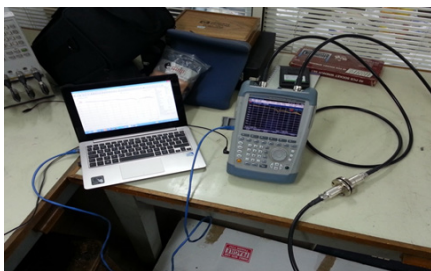
## 2. EXPERIMENTAL SECTION

### 2.1 Preparation of colemanite- $\text{SiO}_2$

Colemanite- $\text{SiO}_2$  powders were produced using mixed oxide technique. Ground colemanite mineral (GC) obtainable as a commercial product is made and offered for sale by the Company (Eti Mining Company, Turkey) in some of these compositions with particulate matter of -75  $\mu\text{m}$  and 10 nm silicon dioxide ( $\text{SiO}_2$ ) (Sigma-Aldrich: 99 %) powders were mixed in stoichiometric amounts, according to the colemanite- $\text{SiO}_2$  compositions in the ethanol medium, it was mixed for 20 hours in ethanol medium in a plastic container at 25-75 wt. %, 50-50 wt. % and 75-25 wt. %, respectively. After the slurries were dried at 100  $^\circ\text{C}$  for 24 h, they were calcined at 600  $^\circ\text{C}$  for 4 h in a tightly closed alumina crucible to prevent losses of evaporation, which were tested by weighing the samples before and after calcination. They were pressed into pellets with a diameter of 10 mm and a thickness of 1 – 2 mm using uniaxial press with 2 MPa pressure, after the calcined powders were ground in an agate mortar. The pellets were sintered between the 900  $^\circ\text{C}$  for 4 h with a heating and cooling rate of 250  $^\circ\text{C}/\text{h}$  after having buried them in the colemanite- $\text{SiO}_2$  powders to minimize the loss of volatile species. The single-phases colemanite- $\text{SiO}_2$  reactant powders were sintered at 900  $^\circ\text{C}$  after being calcined at 600  $^\circ\text{C}$ .



The phases in sintered samples were characterized by X-ray diffractometry (XRD- D2 Phaser Bruker AXS) with Cu- K $\alpha$  radiation ( $\lambda = 1.5406 \text{ \AA}$ ) in the range 2 $\theta$ :10 – 70° at a scan rate of 10/min. The solubility limit, which is defined as the amount that can be doped without disturbing the structure of the main structure (colemantite-SiO<sub>2</sub>), was determined using X-ray powder diffractometry. The microwave shielding effectiveness performances of the colemantite/PANI/SiO<sub>2</sub> composites were measured with the two-port vector network analyzer (R & S FSH-K42) device (Fig. 1) in the range of 8 – 18 GHz.



**Figure 1.** Two-port vector network analyzer (R & S FSH-K42) device ( 8-18 GHz)

## 2.2. Preparation of polyaniline/colemantite-SiO<sub>2</sub> composites

The single-phases colemantite-SiO<sub>2</sub> ( at 25-75 wt. %, 50-50 wt. % and 75-25 wt. %, res  $\text{CaO} \cdot 3\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  which have the compositions of  $\text{CaO} \cdot 3\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  and SiO<sub>2</sub> (account for 100 wt.% of aniline quantity), and 1 ml aniline monomer were added in 35 ml hydrochloric acid solution (0.1 mol L<sup>-1</sup>) and dispersed by mechanical stirring for 30 min. 2.49 g of ammonium persulfate (APS) was dissolved in a 15 ml hydrochloric acid solution (1 mol L<sup>-1</sup>). The APS solution was then carefully added by stirring vigorously dropwise to the preceding mixture solution. Polymerization was done at 0°C for 12 h in an ice-water bath. The composites were produced by filtering and washing the reaction mixture with deionized water and ethanol, which was then vacuum-dried for 24 hours at 60 °C. The PANI/colemantite-SiO<sub>2</sub> composites with different molar ratios [(Aniline/ colemantite-SiO<sub>2</sub> ( at 25-75 wt.%), Aniline/ colemantite-SiO<sub>2</sub> ( at 50-50 wt. %), and Aniline/ colemantite-SiO<sub>2</sub> ( at 75-25 wt. %) = (1:1) ] were obtained to investigate the influence of the PANI content on the electromagnetic shielding effect properties. The colemantite-SiO<sub>2</sub> compositions were produced as composite with a PANI base. PANI- colemantite: SiO<sub>2</sub> was produced by hot pressing at different ratios.

## 2.3. Preparation of epoxy-polyaniline/ colemantite : SiO<sub>2</sub> composites

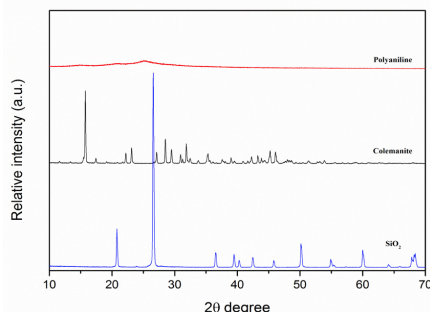
The composite materials were made ready by molding and curing the mixture of PANI / colemantite: SiO<sub>2</sub> compositions powders and epoxy. The specimen powder to epoxy mixing ratio was 2:1 by weight. At 5 MPa pressure and 100 °C for 1 h, the molding was carried out in a hydraulic press. They were pressed into pellets with a 20 mm diameter and 2 mm thickness for shielding measurements. Composites of microwave shielding Effectiveness were produced using epoxy at different ratios of aniline / colemantite: SiO<sub>2</sub> such as 1/1.

## 3. RESULTS AND DISCUSSION

### 3.1. XRD analysis of colemantite-SiO<sub>2</sub> composites

To define the mineralogical characterization of ground colemantite, XRD device diffracted its X-ray pattern. The XRD analysis of the samples (colemantite, SiO<sub>2</sub>) sintered at 900 °C for 4 h revealed that single phase structure was formed, additionally PANI was analyzed using XRD device (Fig. 2). As could be seen on the detecting of colemantite, SiO<sub>2</sub> and PANI XRD patterns (Fig. 2), main phases are determined as Colemanite (PDF Card No: 01-082-1825), SiO<sub>2</sub>(PDF Card No :01-077-1060), Polyaniline (PDF Card No :00-053-1717). The single phase structure of the powders was achieved while using the mixed oxide synthesis with a suitable calcination temperature and elimination of the possible intermediate phases. The more well homogenization of the powders during heating improved the diffusion process.

The XRD tests showed that there was no secondary phase in the powders for colemantite, polyaniline and SiO<sub>2</sub>. Furthermore, colemantite-SiO<sub>2</sub> formation largely depends on temperature and high temperatures are sometimes required to form single phases.



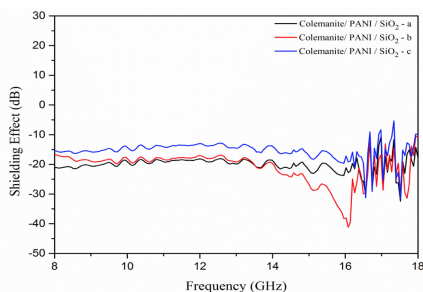
**Figure 2.** XRD patterns of SiO<sub>2</sub>, Colemanite (for 4 h at 900°C), PANI compositions

### 3.1. EMI Shielding Measurements of colemanite/PANI/SiO<sub>2</sub> composites

Figure 3 shows the frequency dependence of the shielding effect of the Epoxy- PANI/colemanite: SiO<sub>2</sub> composites in the frequency range of 8-18 GHz. Among the PANI- colemanite: SiO<sub>2</sub> composites, It can be seen that epoxy- colemanite: SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) composites /Aniline: 1/1 has more observable effect on microwave shielding effectiveness properties than other composites. The epoxy-PANI/colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (25-75 wt. %) /Aniline: 1/1) powders and epoxy showed only one band with -32.32 dB at 17.52 GHz. In addition, this composite material achieves a shielding effect less than -10 dB in the frequency band between 8 GHz and 18 GHz. Moreover, it achieved a shielding effect less than -15 dB in the frequency bands between 8 GHz and 16.65 GHz. Besides, it achieved a shielding effect less than -20 dB in the frequency bands between 8 GHz and 9.32 GHz, 15.53 GHz and 16.17 GHz (Fig3.a). When powder content is equal, the epoxy-PANI/ colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) /Aniline: 1/1) reach to -41.10 dB and -31.24 dB, at 16.09 GHz and 17.70 GHz, respectively (Fig3.b). Moreover, it achieved a shielding effect less than -10 dB in the frequency bands between 8 GHz and 18 GHz. Moreover, it achieved a shielding effect less than -15 dB in the frequency bands between 8 GHz and 16.65 GHz. Besides, it achieved a shielding effect less than -20 dB in the frequency bands between 14.04 GHz and 16.61 GHz. The compositions reach to a shielding effectiveness of -31.62 dB at 17.52 GHz for epoxy-PANI/ colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (75-25 wt. %) /Aniline: 1/1) (Fig3.c). Moreover, it achieved a shielding effect less than -10 dB in the frequency bands between 8 and 16.65 GHz, 17.37 GHz and 18 GHz, respectively. Moreover, it achieved a shielding effect less than -15 dB in the frequency bands between 8 GHz and 9.37 GHz, 14.82 GHz and 16.61.

Impedance matching was achieved through the use of PANI. PANI has effected the shielding effectiveness. Additionally, PANI and composites play a great role in the efficacy of the electromagnetic shielding material. The efficacy of micro-wave shielding also depends on matching the impedance of irradiation to the material surface. PANI enhances the matching impedance of connections between the composite components. New epoxy-PANI/colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions were produced, colemanite:SiO<sub>2</sub>/ PANI composite has a high shielding effect ratio for electromagnetic waves in a broadwidth range, Microwave shielding effect of new composites are adjusted by regulating the content of colemanite:SiO<sub>2</sub> and PANI in this process. Studies

indicate that the content of colemanite:SiO<sub>2</sub> and PANI affect structure.



**Figure 3.** Microwave shielding effectiveness of the epoxy- PANI/colemanite:SiO<sub>2</sub> composites: a – colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (25-75 wt. %) /Aniline: 1/1, b – colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) /Aniline: 1/1 c–colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (75-25 wt. %) /Aniline: 1/1.

### 4. Conclusion

Colemanite-SiO<sub>2</sub> powders ( at 25-75 wt. %, 50-50 wt. % and 75-25 wt. %, respectively) were produced by using solid state technique and PANI/colemanite:SiO<sub>2</sub> composites were produced for the first time in literature, to our knowledge.

The microwave shielding effectiveness property was obtained as 16.09 GHz and 1.5 mm in thickness with the minimum SE of -41.10 dB by the epoxy-PANI/ colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions (colemanite:SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) /Aniline: 1/1). Microwave shielding properties can be modulated simply by regulating the content of PANI and the effect of colemanite:SiO<sub>2</sub> content on the samples for the required frequency bands. Due to the easy and low cost preparation methods and better shielding effectiveness performance, the PANI / colemanite:SiO<sub>2</sub> composites have a promising potential as microwave shielding effectiveness. Content of colemanite:SiO<sub>2</sub> and Polyaniline were used to improve the microwave shielding effectiveness.

Microwave shielding properties of PANI / colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions show a strong variability with high concentrations of colemanite:SiO<sub>2</sub> content. The best shielding effect performance is obtained from colemanite:SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) / Aniline: 1/1 composition at the value of less than -20 dB and between 14.04 GHz and 16.61 GHz.

1/1 composition at the value of less than -20 dB and between 14.04 GHz and 16.61 GHz. The second shielding effect performances are obtained from colemanite:SiO<sub>2</sub> (50-50 wt. %) /Aniline: 1/1 and colemanite:SiO<sub>2</sub> (25-75 wt. %) /Aniline: 1/1 compositions at the value of less than -10 dB and between 8 GHz and 18 GHz.

The polyaniline content plays an significant role in variation of the shielding effectiveness. The microwave shielding effect properties of the PANI / colemanite:SiO<sub>2</sub> compositions can be investigated for a broader concentration range in this study. PANI / colemanite:SiO<sub>2</sub> can be considered as a candidate for microwave shielding effectiveness in a broadwidth range. The formation of colemanite:SiO<sub>2</sub> content is another area. Colemanite:SiO<sub>2</sub> and PANI content have been used to improve the microwave shielding properties. The microwave shielding effectiveness properties of PANI - colemanite:SiO<sub>2</sub> at low frequencies may also be determined.

#### **Acknowledgment**

This study was supported by Istanbul Technical University. This study is attributed to Salim Şahin who passed away in 2015 and Prof. Dr. Ayhan Mergen who passed away in 2018. The authors would like to express their gratitude to their for his friendship, comments and faithful collaboration.

## REFERENCES

- [1] Yang S., Lozano K., Lomeli A., Foltz H. D., Jones R. (2005), "Electromagnetic interference shielding effectiveness of carbon nanofiber/LCP composites", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 36(5), 691-697.
- [2] Li N., Huang Y., Du F., He X., Lin X., Gao H., Ma Y., Li F., Chen Y., Eklund P. C. (2006), "Electromagnetic interference (EMI) shielding of single-walled carbon nanotube epoxy composites", *Nano Letters*, 6(6), 1141-1145.
- [3] Al-Saleh M. H., Sundararaj U. (2009), "Electromagnetic interference shielding mechanisms of CNT/polymer composites", *Carbon*, 47(7), 1738-1746.
- [4] Shahzad F., Alhabeab M., Hatter C. B., Anasori B., Hong S.M., Koo C. M., Gogotsi Y. (2016), "Electromagnetic interference shielding with 2D transition metal carbides (MXenes)", *Science*, 353(6304) 1137-1140.
- [5] Yousefi N., Sun X., Lin X., Shen X., Jia J., Zhang B., Tang B., Chan M., Kim J. K. (2014), "Highly aligned graphene/polymer nanocomposites with excellent dielectric properties for high-performance electromagnetic interference shielding", *Adv. Mater.*, 26(31), 5480-5487.
- [6] Liu J., Zhang H. B., Sun R., Liu Y., Liu Z., Zhou A., Yu Z. Z. (2017), "Hydrophobic, flexible, and lightweight MXene foams for high-performance electromagnetic-interference shielding", *Adv. Mater.*, 29(38), 1702367.
- [7] Kargar F., Barani Z., Balinskiy M., Magana A. S., Lewis J. S., Balandin A. A. (2019), "Dual-functional graphene composites for electromagnetic shielding and thermal management", *Adv. Electron. Mater.*, 5(1), 1800558.
- [8] Jia X., Shen B., Chen Z., Zhang L., Zheng W. (2019), "High-performance carbonized waste corrugated boards reinforced with epoxy coating as lightweight structured electromagnetic shields", *ACS Sustainable Chem. Eng.*, 7(22), 18718-18725.
- [9] Zhang X., Rao Y., Guo J., Qin G. (2016), "Multiple-phase carbon-coated FeSn<sub>2</sub>/Sn nanocomposites for high-frequency microwave absorption", *Carbon*, 96, 972-979.
- [10] Zhang C. S., Ni Q.-Q., Fu S.Y., Kurashiki K. (2007), "Electromagnetic interference shielding effect of nanocomposites with carbon nanotube and shape memory polymer", *Compos. Sci. Technol.*, 67(14), 2973-2980.
- [11] Lee S. H., Yu S., Shahzad F., Hong J. P., Kim W. N., Park C., Hong S. M., Koo C. M. (2017), "Highly anisotropic Cu oblate ellipsoids incorporated polymer composites with excellent performance for broadband electromagnetic interference shielding", *Compos. Sci. Technol.*, 144, 57-62.
- [12] Song W. L., P. Wang, L. Cao, A. Anderson, M. J. Meziani, Farr A. J., Sun Y. P. (2012), "Polymer/boron nitride nanocomposite materials for superior thermal transport performance", *Angew. Chem. Int. Ed.*, 51(26), 6498-6501.
- [13] Meziani M. J., Song W. L., Wang P., Lu F., Hou Z., Anderson A., Maimaiti H., Sun Y.-P. (2015), "Boron nitride nanomaterials for thermal management applications", *Chemphyschem*, 16(7), 1339-1346.
- [14] Chen Z., Yi D., Shen B., Zhang L., Ma X., Pang Y., Liu L., Wei X., Zheng W. (2018), "Semi-transparent biomass-derived macroscopic carbon grids for efficient and tunable electromagnetic shielding", *Carbon*, 139, 271-278.

- [15] Li P., Jin Z., Peng L., Zhao F., Xiao D., Jin Y., Yu G. (2018), "Stretchable all-gel-state fiber-shaped supercapacitors enabled by macromolecularly interconnected 3D graphene/nanostructured conductive polymer hydrogels", *Adv. Mater.*, 30(18), 1800124.
- [16] Gopalan A. I., Komathi S., Muthuchamy N., Lee K. P., Whitcombe M. J., Dhana L., Sai-Anand G. (2019), "Functionalized conjugated polymers for sensing and molecular imprinting applications", *Prog. Polym. Sci.*, 88, 1-129.
- [17] Zhang W., Zhang X., Wu Z., Abdurahman K., Cao Y., Duan H., Jia D. (2020), "Mechanical, electromagnetic shielding and gas sensing properties of flexible cotton fiber/polyaniline composites", *Compos. Sci. Technol.*, 188, 107966.
- [18] Schnitzler D. C., Meruvia M. S., Hümmelgen I., Aldo J., Zarbin G. (2003), "Preparation and Characterization of Novel Hybrid Materials Formed from (Ti,Sn)O<sub>2</sub> Nanoparticles and Polyaniline", *Chemistry of Materials*, 15 (24), 4658 – 4665, <https://doi.org/10.1021/cm034292p>.
- [19] Ma X., Zhang X., Li Y., Li G., Wang M., Chen H., Mi Y. (2006), "Preparation of Nano-Structured Polyaniline Composite Film Via 'Carbon Nanotubes Seeding' Approach and its Gas-Response Studies", *Macromolecular Materials and Engineering*, 291(1), 75 – 82, <https://doi.org/10.1002/mame.200500296>.
- [20] Sahin E. İ., Paker S., Kartal M. (2019), "Characterization, Production and Microwave Absorbing Properties of Polyaniline-NiFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>: Tb Composites", *Materials Science (Medziagotyra)*, 25(3), 322-327.
- [21] Zhang Y., Yang Z., Yu Y., Wen B., Liu Y., Qiu M. (2019), "Tunable electromagnetic interference shielding ability in a one-dimensional bagasse fiber/polyaniline heterostructure", *ACS Appl. Polym. Mater.*, 1(4), 737-745.
- [22] Celik M. S., Suner F. (1995), "A Thermodynamic Analysis of the Decrepitation Process", *Thermochimica Acta*, 254, 167-174.
- [23] Frost R. L., Xi Y., Scholz R., Belotti F. M., Cândido Filho M. (2013), "Infrared and Raman Spectroscopic Characterization of the Borate Mineral Colemanite-CaB<sub>3</sub>O<sub>4</sub>(OH)<sub>3</sub>·H<sub>2</sub>O-Implications for the Molecular Structure", *J. Mol. Struct.*, 1037, 23-28, doi:10.1016/j.molstruc.2012.11.047.
- [24] Stöber W., Fink A., Bohn E. (1968), "Controlled growth of monodisperse silica spheres in the micron size range", *J. Colloid Interface Sci.*, 26(1), 62-69.
- [25] Xia Y. N., Gates B., Yin Y. D., Lu Y. (2000), "Monodispersed colloidal spheres: old materials with new applications." *Adv. Mater.*, 12(10), 693-713.
- [26] Nunes-Pereira, J., Costa, C. M., Lancers-Méndez, S. (2015), "Polymer composites and blends for battery separators: state of the art, challenges and future trends", *J. Power Sources*, 281, 378–398, <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2015.02.010>.
- [27] Costa C. M., Ribelles J. L. G., Lancers-Méndez S., Appetecchi G. B., Scrosati B. (2014), "Poly (vinylidene fluoride)-based, co-polymer separator electrolyte membranes for lithium-ion battery systems", *J. Power Sources*, 245, 779–786, <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2013.06.151>.
- [28] Angulakshmi N., Stephan A. M. (2014), "Electrospun trilayer polymeric membranes as separator for lithium-ion batteries", *Electrochim. Acta*, 127, 167–172, <https://doi.org/10.1007/s10570-017-1225-x>.
- [29] Chen D. J., Zhou Z. Q., Feng C., Lv W. Q., Wei Z. H., Zhang K. H. L., Lin B., Wu S.H., Lei T. Y., Guo X. Y., Zhu G. L., Jian X., Xiong J., Traversa E., Dou S. X., He W. D. (2019), "An upgraded lithium ion battery based on a polymeric separator incorporated with anode active materials", *Adv. Energy. Mater.*, 9(15), 1803627, <https://doi.org/10.1002/aenm.201803627>.

- [30] Feng Z., Ma X. L., Cao C. B., Li J. L., Zhu Y. Q. (2014), "Poly(vinylidene fluoride)/SiO<sub>2</sub> composite membranes prepared by electrospinning and their excellent properties for nonwoven separators for lithium-ion batteries", *J. Power Sources*, 251, 423–431, <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2013.11.079>.
- [31] Choi E. S., Lee S. Y. (2011), "Particle size-dependent, tunable porous structure of a SiO<sub>2</sub>/poly(vinylidene fluoride-hexafluoropropylene)-coated poly(ethylene terephthalate) nonwoven composite separator for a lithium-ion battery", *J. Mater. Chem.*, 21(38), 14747–14754, <https://doi.org/10.1039/c1jm12246k>.
- [32] Costa C. M., Kundu M., Cardoso V. F., Machado A. V., Silva M. M., Lanceros- Mendez S. (2018), "Silica/poly(vinylidene fluoride) porous composite membranes for lithiumion battery separators", *J. Membr. Sci.*, 564, 842–851, <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2018.07.092>.
- [33] Chen Y., Li Y., Yip M., Tai N. (2013), "Electromagnetic interference shielding efficiency of polyaniline composites filled with graphene decorated with metallic nanoparticles", *Composites Science and Technology*, 80, 80-86.
- [34] Tzeng S.-S., Chang F.-Y. (2001), "EMI shielding effectiveness of metal-coated carbon fiber-reinforced ABS composites", *Materials Science and Engineering: A*, 302(2), 258-267.
- [35] Chung D. D. L. (2000), "Materials for electromagnetic interference shielding", *Journal of Materials Engineering and Performance*, 9(3), 350-354.
- [36] Ting T. H., Yu R. P., Jau, Y. N. (2011), "Synthesis and microwave absorption characteristics of polyaniline/NiZn ferrite composites in 2–40 GHz", *Materials Chemistry and Physics*, 126(1-2), 364-368.

## SPECTRAL ANALYSIS OF ELASTIC WAVEGUIDES

Mahir HASANSOY \*

### ABSTRACT

This paper deals with the spectral analysis of elastic waveguides shaped like an infinite cylinder with a bounded or unbounded cross section. Note that waveguides with bounded cross sections were studied in the framework of the operator and operator pencil theory. In this paper we extend this theory on elastic waveguides with a unbounded cross section. The problem reduces to the spectral theory of a one-parameter family of unbounded operators. The spectral structure, the asymptotics of the eigenvalues, comparisons between the solutions of different problems and the existence of special guided modes for these operators are the main questions that we study in this paper. We use an operator approach to solve these problems, and on the basis of this approach, we suggest alternative methods to solve spectral problems arising in the theory of both closed elastic waveguides and elastic waveguides with unbounded cross sections.

**Keywords:** *Eigenvalue, spectrum, operator, wave solution, elastic waveguide, perturbation.*

\*Makale Gönderim Tarihi: 15.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.738083

\*Beykent University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Ayazağa Mahallesi, Hadım Koryolu  
Cd. No:19, Sariyer İstanbul, Turkey (mahirhasansoy@beykent.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0002-9080-4242)  
AMS subject Classifications: Primary: 47A56, 47A10, 49R50; Secondary: 34L15.

## ELASTİK DALGA KILAVUZLARININ SPEKTRAL ANALİZİ

Mahir HASANSOY \*

### ÖZ

Bu makalede, sınırlı veya sınırsız kesite sahip sonsuz bir silindir biçiminde şekillendirilmiş elastik dalga kılavuzlarının spektral analizi ele alınmıştır. Sınırlı kesitli dalga kılavuzları operatör ve operatör demet teorisi çerçevesinde çalışılmıştır. Bu çalışmada, bu teori sınırsız kesite sahip elastik dalga kılavuzları üzerine genişletilmiştir. Problem, sınırsız operatörlerden oluşan tek parametrelili bir operatör sınıfının spektral teorisine indirgenmiştir. Spektral yapı, özdeğerlerin asimptotik davranışları, farklı problemlerin çözümleri arasındaki karşılaştırmalar ve bu operatörler için özel dalga çözümünün varlığı burada çalışılan ana konulardır. Bu problemleri çözmek için bir operatör yaklaşımı kullanılmış ve bu yaklaşıma dayanılarak, hem kapalı elastik dalga kılavuzlarının hem de sınırsız kesitli elastik dalga kılavuzlarının teorisinde ortaya çıkan spektral problemleri çözmek için alternatif yöntemler önerilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Özdeğer, spektrum, operatör, dalga çözümü, elastik dalga kılavuzu, pertürbasyon.

\*Makale Gönderim Tarihi: 15.05.2020 ; Makale Kabul Tarihi : 30.05.2020 Makale Türü: Araştırma  
DOI: 10.20854/bujse.738083

\*Beykent University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Ayazağa Mahallesi, Hadım Koruyolu  
Cd. No:19, Sariyer Istanbul, Turkey (mahirhasansoy@beykent.edu.tr) (ORCID ID: 0000-0002-9080-4242)  
AMS subject Classifications: Primary: 47A56, 47A10, 49R50; Secondary: 34L15.



**1 Introduction and Preliminary Facts**

The main subject of this paper is the wave solutions of the elastodynamic equation in the following form, and the related spectral problems (here, we follow the notation of [6]):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(U) = \tilde{\rho} \partial^2 U / \partial t^2 & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \sigma(U) \tilde{\nu} = 0 & \text{on } \partial \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\nu}$  is the normal vector,

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix},$$

$U := U(x_1, x_2, x_3, t)$  and  $(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{\Omega} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2) \in \Omega\}$ . Throughout this paper,  $\Omega = \Omega_0 \cup \mathcal{O}$ , where  $\mathcal{O}$  is a bounded connected open set with a smooth boundary such that  $\mathcal{O} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$  and  $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$  (see Figure 1).  $\sigma(U)$  is the stress tensor, defined by

$$\sigma_{ij}(U) = \tilde{\lambda} \operatorname{div}(U) \delta_{ij} + \tilde{\mu}(U_{i,j} + U_{j,i}),$$

where  $\delta_{ij}$  denotes the Kronecker symbol and  $U_{i,j} = \partial U_i / \partial x_j$  (see [6, 8]). In what follows we will consider unbounded waveguides described in the following figure.

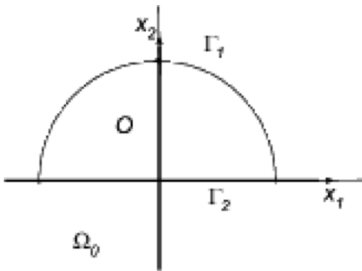


Fig 1. A bounded deformation of the half space

We are looking for wave solutions to (1.1) in the form

$$U = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ \frac{u_3(x_1, x_2)}{i} \end{pmatrix} e^{i(kx_3 - wt)},$$

$k \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$  and  $u \in H^1(\Omega)^3$ , which denotes the Sobolev space of three-dimensional vector fields (see [1]). We are particularly interested in solutions with real and positive  $k$  and  $w$ . By inserting this particular solution into (1.1) and following the notation of [6], we obtain the following system of equations in vector form:

$$\begin{pmatrix} (\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{1,1})_1 + 2\mu \left(\frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2}\right)_2 + k2\mu \left(\frac{u_{3,1} - ku_1}{2}\right) \\ 2\mu \left(\frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2}\right)_1 + (\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{2,2})_2 + k2\mu \left(\frac{u_{3,2} - ku_2}{2}\right) \\ 2\mu \left(\frac{u_{3,1} - ku_1}{2}\right)_1 + 2\mu \left(\frac{u_{3,2} - ku_2}{2}\right)_2 - k(\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu ku_3) \end{pmatrix} = -w^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

where

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{div}_k u = u_{1,1} + u_{2,2} + ku_3$ ,  $\lambda = \tilde{\lambda} / \tilde{\rho}$  and  $\mu = \tilde{\mu} / \tilde{\rho}$ . This system allows us to rewrite (1.1) in

the form

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u) = w^2 u & \text{in } \Omega, \\ \sigma^k(u) \tilde{\nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

where

$$\sigma^k(u) = \begin{pmatrix} \lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{1,1} & 2\mu \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} & 2\mu \frac{u_{3,1} - ku_1}{2} \\ 2\mu \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} & \lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{2,2} & 2\mu \frac{u_{3,2} - ku_2}{2} \\ 2\mu \frac{u_{3,1} - ku_1}{2} & 2\mu \frac{u_{3,2} - ku_2}{2} & \lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu ku_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

is the normal vector,  $\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u)$  is equal to the left-hand side of (1.2), and the asterisk indicates a minus sign in front of  $\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu ku_3$  in the third line of (1.2). The entries of the matrix  $\sigma^k(u)$  can be written in the following form:

$$\sigma_{ij}^k(u) = \lambda(\operatorname{div}_k u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^k(u),$$

where  $\varepsilon_{ij}^k(u)$  are the entries of the matrix

$$\varepsilon^k(u) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} & \frac{u_{3,1} - ku_1}{2} \\ \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} & u_{2,2} & \frac{u_{3,2} - ku_2}{2} \\ \frac{u_{3,1} - ku_1}{2} & \frac{u_{3,2} - ku_2}{2} & ku_3 \end{pmatrix}.$$

Note that problem (1.3) is a two-parameter eigenvalue problem. Throughout this paper, we fix  $k$  and study the eigenvalue problem (1.3) with respect to  $w^2$ . The main question studied in this paper is this: for what values of the parameter  $w^2$  do there exist nontrivial solutions to problem (1.3) for a fixed  $k \in \mathbb{R}$ ?

In addition to problem (1.3), the following Dirichlet and Neumann-type boundary value problems will be considered as auxiliary problems:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u) = w^2 u & \text{in } \mathcal{O}, \\ u|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

and

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u) = w^2 u & \text{in } \mathcal{O}, \\ \sigma^k(u) \tilde{\nu} = 0 & \text{on } \partial \mathcal{O} \text{ (free boundary)}. \end{cases} \quad (1.5)$$

These problems are useful for studying problem (1.3) via comparison. The solutions to problems (1.3), (1.4) and (1.5) have to be understood in the weak sense. Below, we give exact definitions of these solutions.

In what follows, the main space for all the problems that we study will be  $L^2(\Omega)^3$ , and  $(\cdot, \cdot)$  denotes the scalar product in this space. We shall also use energetic spaces, which are specifically defined for given problems. For example, the energetic spaces for problems (1.3), (1.4) and (1.5) are  $H^1(\Omega)^3$ ,  $H_0^1(\mathcal{O})^3$  and  $H_0^1(\mathcal{O})^3$  respectively.

Let us first consider problem (1.3). By applying Green's formula to (1.3) and using the boundary condition  $\sigma^k(u)\bar{v} = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ , we obtain

$$\begin{aligned} & -(\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u), v) = \\ & = \int_{\Omega} [\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{1,1} \bar{v}_{1,1} dx + 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} \bar{v}_{1,2} dx - 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{3,1} - k u_1}{2} k \bar{v}_1 dx \\ & + 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} \bar{v}_{2,1} dx + \int_{\Omega} [\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu u_{2,2} \bar{v}_{2,2} dx - 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{3,2} - k u_2}{2} k \bar{v}_2 dx \\ & + 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{3,1} - k u_1}{2} \bar{v}_{3,1} dx + 2\mu \int_{\Omega} \frac{u_{3,2} - k u_2}{2} \bar{v}_{3,2} dx + \int_{\Omega} [\lambda(\operatorname{div}_k u) + 2\mu k u_3 k \bar{v}_3 dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \sigma^k(u) \bar{v} \cdot \bar{v} dx = \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}_k u \operatorname{div}_k \bar{v} dx + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{ij}^k(\bar{v}) dx. \end{aligned}$$

This formula allows us to define the Friedrichs extension of the symmetric (for real  $k$ ) operator  $-\operatorname{div}_k^* \sigma^k(u)$  from the initial domain  $\mathcal{D} = \{u | u \in C^2(\Omega)^3, \sigma^k(u)\bar{v} = 0, x \in \partial\Omega\}$  to  $H^1(\Omega)^3$  in the following way: the Friedrichs extension of the operator given in problem (1.3) is the operator (more precisely, the operator pencil)  $L(\Omega; k)$  defined on  $H_0^1(\Omega)^3 \subset L_2(\Omega)^3$  and associated with the bilinear form

$$(L(\Omega; k)u, v) := \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}_k u \operatorname{div}_k \bar{v} dx + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{ij}^k(\bar{v}) dx, \tag{1.6}$$

where  $u, v \in H^1(\Omega)^3$ . In what follows, we shall use the notation  $L(k) := L(\Omega; k)$ . We note that  $L^*(k) = L(\bar{k})$ , i.e.,  $L(k)$  is a self - adjoint operator pencil (see [19]). In particular, it is self-adjoint when considered as an operator for each fixed real  $k$ .

We can define the Friedrichs extension of the operator given in problem (1.4) in the same way. This extension is the operator (or operator pencil)

$L_0(\mathcal{O}; k)$  defined on  $H_0^1(\mathcal{O})^3 \subset L_2(\Omega)^3$  and associated with the bilinear form

$$(L_0(\mathcal{O}; k)u, v) := \lambda \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}_k u \operatorname{div}_k \bar{v} dx + 2\mu \int_{\mathcal{O}} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{ij}^k(\bar{v}) dx, \tag{1.7}$$

where  $u, v \in H_0^1(\mathcal{O})^3$ .

Finally, the operator  $L(\mathcal{O}; k)$  associated with problem (1.5) is defined by the bilinear form

$$(L(\mathcal{O}; k)u, v) := \lambda \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}_k u \operatorname{div}_k \bar{v} dx + 2\mu \int_{\mathcal{O}} \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{ij}^k(\bar{v}) dx, \tag{1.8}$$

where  $u, v \in H^1(\mathcal{O})^3$ . The two operators  $L_0(\mathcal{O}; k)$  and  $L(\mathcal{O}; k)$  are also self-adjoint for real  $k$ .

Throughout this paper, the solutions to problems (1.3), (1.4) and (1.5) are defined as the weak solutions (i.e., solutions for extended operators) given by the following definitions.

**Definition 1.1** A function  $u \neq 0$  is a solution to problem (1.3) if  $u \in H^1(\Omega)^3$  and  $L(k)u = w^2 u$ . (1.9)

**Definition 1.2** A function  $u \neq 0$  is a solution to problem (1.4) if  $u \in H_0^1(\mathcal{O})^3$  and  $L_0(\mathcal{O}; k)u = w^2 u$ . (1.10)

**Definition 1.3** A function  $u \neq 0$  is a solution to problem (1.5) if  $u \in H^1(\mathcal{O})^3$  and  $L(\mathcal{O}; k)u = w^2 u$ . (1.11)

Thus problem (1.1) leads us to spectral problems for the operators  $L(k)$ ,  $L_0(\mathcal{O}; k)$  and  $L(\mathcal{O}; k)$ . Next, we define some spectral sets that we need for further investigation.

Let  $T$  be a closed operator defined on a dense subspace of a Hilbert space  $H$ . We define the following spectral sets:

- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)\}$  (the resolvent set), where  $\mathcal{B}(H)$  denotes the space of all bounded operators in  $H$ ;
- $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$  the spectrum);
- $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$  (the point spectrum);
- $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \overline{R(T - \lambda I)} \neq R(T - \lambda I)\}$  (the continuous spectrum).

Note that we have used the definition of the continuous spectrum  $\sigma_c(T)$  given in Birman and Solomyak's book ([3]), which is slightly different from that given in almost all of the literature on functional analysis. However, it is more convenient for studying perturbation problems. In particular, with this definition, some eigenvalues may belong to  $\sigma_c(T)$ . Moreover, for normal operators,  $\sigma_c(T)$  consists of the nonisolated points in  $\sigma_c(T)$  (see [3], Chapters 3 and 9).

At this point we should note that the problem of the existence of nonisolated eigenvalues in  $\sigma_c(L(k))$  for a fixed  $k$  is an open problem in elasticity theory (see [6, 8]).

The essential spectrum (of a self-adjoint operator) is another subclass of  $\sigma(T)$ , which is defined as

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_c(T) \cup \sigma_p^\infty(T),$$

where  $\sigma_p^\infty(T)$  denotes the set of eigenvalues of infinite multiplicity.

The following fact is often used as an alternative definition of the essential spectrum: a point  $\lambda$  belongs to  $\sigma_{ess}(T)$  if and only if there exists a singular sequence for  $T$  at  $\lambda$  ([3], p. 207, Theorem 2). We recall the following definition.

**Definition 1.4** A sequence  $u_n \in H$  is said to be singular for a self-adjoint operator  $T$  at a point  $\lambda$  if the following conditions are satisfied:

- (a)  $\|u_n\| = 1, n = 1, 2, 3, \dots;$
- (b)  $u_n \in \mathcal{D}(T);$
- (c)  $u_n \rightarrow 0$  weakly in  $H;$
- (d)  $(T - \lambda)u_n \rightarrow 0.$

This paper consists of the present introduction and three further sections. In Section 2, we study closed waveguides (waveguides with bounded cross sections) and their eigenvalues in detail. Section 3 is devoted to waveguides with an unbounded cross section  $\Omega_0 \cup \mathcal{O}$ . A triangular deformation of the half-plane  $\Omega_0$  is considered separately in this section. An inverse eigenvalue problem and some methods for its solution are considered in Section 4.

**Note.** In this paper, we use operator theory to present some general results in the framework of elastic waveguides with an arbitrary unbounded cross section  $\Omega_0 \cup \mathcal{O}$ . However, by choosing special forms of  $\mathcal{O}$ , such as rectangular, cylindrical and triangular deformations, and special vector fields, one can obtain more specific and concrete results (see [2, 6, 8, 15, 14] and references therein.)

## 2 Eigenvalue Problems in Bounded Domains

The main concern of this section is problems (1.10) and (1.11) in a bounded domain  $\mathcal{O}$ . Actually, the central problem is problem (1.9) in an unbounded domain  $\Omega$ , where  $\Omega = \Omega_0 \cup \mathcal{O}$ . However, to study this problem we need the structure of the eigenvalues of problems (1.10) and (1.11) in bounded domains. By using (1.8), we can write

$$L(\mathcal{O}; k)u = Au + kBu + k^2Cu, \quad u \in H^1(\mathcal{O})^3,$$

where the operators  $A, B$  and  $C$  are defined by their bilinear forms as follows:

$$(Au, v) = \lambda \int_{\mathcal{O}} (u_{1,1} + u_{2,2})(\bar{v}_{1,1} + \bar{v}_{2,2}) \, dx + 2\mu \int_{\mathcal{O}} (u_{1,1}\bar{v}_{1,1} + u_{2,2}\bar{v}_{2,2}) \, dx + \mu \int_{\mathcal{O}} [(u_{1,2} + u_{2,1})(\bar{v}_{1,2} + \bar{v}_{2,1}) + u_{3,1}\bar{v}_{3,1} + u_{3,2}\bar{v}_{3,2}] \, dx, \quad (2.1)$$

$$(Bu, v) = \lambda \int_{\mathcal{O}} [(u_{1,1} + u_{2,2})\bar{v}_3 + u_3(\bar{v}_{1,1} + \bar{v}_{2,2})] \, dx - \mu \int_{\mathcal{O}} [u_{3,1}\bar{v}_1 + u_3\bar{v}_{3,1}] \, dx - \mu \int_{\mathcal{O}} [u_{3,2}\bar{v}_2 + u_2\bar{v}_{3,2}] \, dx \quad (2.2)$$

and

$$(Cu, v) = (\lambda + 2\mu) \int_{\mathcal{O}} u_3\bar{v}_3 \, dx + \mu \int_{\mathcal{O}} (u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2) \, dx, \quad (2.3)$$

for all  $u, v \in H^1(\mathcal{O})$ .

In the same way, we may rewrite the operator  $L_0(\mathcal{O}; k)$  in the form

$$L_0(\mathcal{O}; k)u = Au + kBu + k^2Cu, \quad u \in H_0^1(\mathcal{O})^3.$$

Our further study is based on some properties of the operators  $A, B$  and  $C$ , which are given in the following theorem (see [21], Section 35, and [17]).

**Theorem 2.1** The operators  $A, B$  and  $C$  have the following properties in the space  $L^2(\mathcal{O})^3$ :

- (I)  $A$  is a self-adjoint, nonnegative operator such that  $(A + I)^{-1} \in S_{\infty}$  and  $H^1(\mathcal{O}) = \mathcal{D}((A + I)^{1/2})$ , where  $S_{\infty}$  is the set of all compact operators in  $L^2(\mathcal{O})^3$ .
- (II)  $C$  is a bounded and positive definite operator.
- (III) The operator  $B$  is symmetric, and  $(A + I)^{-1/2}B(A + I)^{-1/2} \in S_{\infty}$ . In particular, this condition means that  $\mathcal{D}((A + I)^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ .
- (IV)  $(A + I)^{-1}B \in S_{\infty}$ .

Additionally, the operator  $A$  is positive definite in  $H_0^1(\mathcal{O})$ , i.e.,  $(Au, u) \geq \delta(u, u)$  for some  $\delta > 0$  and for all  $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ .

Theorem 2.1 means that all of the operators  $A, B$  and  $C$  are well defined on the energetic space  $\mathcal{H} = \mathcal{D}((A + I)^{1/2})$ . In particular, the operator  $A$  is extended on  $\mathcal{D}((A + I)^{1/2})$  in the following way:

$$(Au, v) = ((A + I)u, v) - (u, v) = ((A + I)^{1/2}u, (A + I)^{1/2}v) - (u, v),$$

where  $u, v \in \mathcal{D}((A + I)^{1/2})$ .

**Theorem 2.2** For all  $k \in \mathbb{C}$ , the spectrum of the operator  $L(\mathcal{O}; k)$  is discrete, i.e.,  $\sigma(L(\mathcal{O}; k))$  consists of isolated eigenvalues of finite multiplicity with a possible concentration point at infinity.

**Proof.** It follows from Theorem 2.1 that the operator  $L(\mathcal{O}; k) - w^2I$  is invertible if and only if  $(A + I)^{-1/2}(L(\mathcal{O}; k) - w^2I)(A + I)^{-1/2}$  is invertible. On the other hand,

$$\begin{aligned} & (A + I)^{-1/2}(L(\mathcal{O}; k) - w^2I)(A + I)^{-1/2} \\ &= I - ((A + I)^{-1} - k(A + I)^{-1/2}B(A + I)^{-1/2} \\ & \quad + k^2(A + I)^{-1/2}C(A + I)^{-1/2} - w^2(A + I)^{-1}) \\ &= I - T(k) - w^2(A + I)^{-1}, \end{aligned}$$

where the operators  $T(k)$  and  $(A + I)^{-1}$  are compact. It follows from this equality that the spectrum of the operator  $L(\mathcal{O}; k)$  is discrete (see [19], Theorem 17.3).

Now we establish a relation between the asymptotic behaviors of the eigenvalues of the operators  $A$  and  $L(\mathcal{O}; k)$  for a fixed real  $k$ . By Theorem 2.2, the spectrum of the operator  $L(\mathcal{O}; k)$  is discrete, i.e., it consists of a sequence

$$w_1^2(k) \leq w_2^2(k) \leq \dots \leq w_n^2(k) \leq \dots$$

First we give the following fact, due to M. G. Krein (see [9], Theorem 11.4).

**Lemma 2.1** Let a self-adjoint operator  $T$  be given in the form  $T = H(I + S)$ , where  $H, S \in S_{\infty}$ .

If either (i)  $(I + S)^{-1} \in B(H)$  or  
(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}(H)/\lambda_n(H)) = 1$ , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(T)}{\lambda_n(H)} = 1.$$

The proof of the following theorem, which is basic to our further study, is based on Lemma 2.1.

**Theorem 2.3** Let  $k \in \mathbb{R}$  be fixed and let  $\{w_n^2(k)\}_1^\infty$  be the eigenvalues of the operator  $L(O; k) = A + kB + k^2C$ . Then

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n^2(k)/\lambda_n(A)) = 1$ ;
- (ii)  $w_n^2(k) \sim cn^{2/3}$ , for some  $c > 0$ ;
- (iii) ) the same results hold for the operator  $L_0(O; k)$  too.

**Proof.** We can rewrite  $L(O;k)$  in the following form:  
 $L(O; k) = (A + I)[I - (A + I)^{-1} + k(A + I)^{-1}B + k^2(A + I)^{-1}C]$ .  
Suppose that  $0 \notin \text{Ker}(L(O; k))$ . Then, by using the fact that  $L(O;k)$  is self-adjoint, we obtain  
 $L^{-1}(O; k) = (A + I)^{-1}[I - (A + I)^{-1} + k(A + I)^{-1}B + k^2(A + I)^{-1}C]^{-1}$ .  
By using the notation  $T = L^{-1}(O; k)$ ,  $H := (A + I)^{-1}$  and  $I + S := [I - (A + I)^{-1} + k(A + I)^{-1}B + k^2(A + I)^{-1}C]^{-1}$ , we get  $T = H(I + S)$ , where, by Theorem 2.1, the operators  $T$ ,  $H$  and  $S$  satisfy the conditions of Lemma 2.1. Hence, by Lemma 2.1 we obtain the result that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^2(k)}{\lambda_n(A)} = 1.$$

Finally, let  $0 \in \text{Ker}(L(O; k))$ . By Theorem 2.2, the spectrum of the operator  $L(O;k)$  is discrete and, consequently, there exists  $\lambda_0$  such that  $L(O; k) - \lambda_0 I$  is invertible. Therefore, by repeating the argument that we applied in the case of  $0 \notin \text{Ker}(L(O; k))$ , we get the same asymptotic relation.

(ii) The formula  $w_n^2(k) \sim cn^{2/3}$  as  $n \rightarrow \infty$  for some  $c > 0$  follows from (i) and the fact that  $\lambda_n(A) \sim cn^{2/3}$  (see [4] for details).

(iii) We can establish this statement by repeating the arguments that we applied in the proof of (i) and (ii). Next we give two inequalities that are useful for the localization of spectra.

**Proposition 2.1 (I)** The positivity of the energy: There exists  $\mu \geq 0$  such that  
 $(L(O; k)u, u) \geq \mu(u, u)$  for all  $u \in H^1(O)^3$  and  $k \in \mathbb{R}$ .  
(2.4)

(II) The energetic stability principle: There exist real numbers  $\zeta \geq 0$  and  $c_0 > 0$  such that for all  $k \in \mathbb{R}$  and all  $u \in H_0^1(O)^3$ ,  
 $(L_0(O; k)u, u) \geq (c_0^2 k^2 + \zeta)(u, u)$ . (2.5)

**Proof.** We note that (2.4) follows immediately from (1.8). Moreover, since  $\text{Ker}(A) \neq 0$  (actually,  $\dim \text{Ker}(A) = 4$ ) in the space  $H^1(O)$ , we obtain the result that  $\mu = 0$  in (2.4).

The inequality (2.5) follows from (2.1), (2.2) and (2.3) by using Korn's first inequality (see [12]) in the following form:

$$\|u\|_{H^1(O)^3}^2 \leq C \int_O \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{ij}(u)(x)|^2 dx \quad \text{for all } u \in H_0^1(O),$$

where  $\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ .

In particular, the following corollary about the real pairs  $(k, w)$  in  $\sigma_p(L_0(O; k))$  follows from (2.5).

**Corollary 2.1**

Let  $\sigma_{\mathbb{R}}(L_0(O; k)) := \{(k, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists u \neq 0, L_0(O; k)u = w^2 u\}$ .

Then:

- (i) The set  $\sigma_{\mathbb{R}}(L_0(O; k))$  lies inside the hyperbola  $w^2 - c_0^2 k^2 \geq \zeta$ .
- (ii)  $\sigma_p(L_0(O; k)) \subset \{\zeta + c_0^2 k^2, +\infty\}$  for each  $k \in \mathbb{R}$ , i.e.,  $\sigma_p(L_0(O; k))$  lies inside the hyperbola and on the vertical line passing through the point  $(k, 0)$ .

Corollary 2.1 yields the localization for eigenvalues of  $L_0(O; k)$  as in Figure 2.

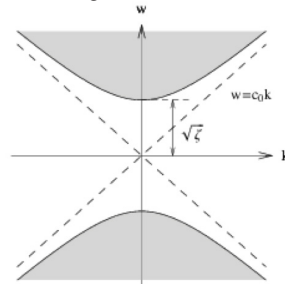


Fig 2. The domain containing the eigenvalues of operator  $L_0(O; k)$ .

By Corollary 2.1,  $0 \notin \sigma_p(L_0(O; k))$  for all  $k \in \mathbb{R}$ . Now our question is: for what values of  $k$  do we have  $0 \in \sigma_p(L(O; k))$ ? The answer is given in the following proposition.

**Proposition 2.2**  $0 \in \sigma_p(L(O; k))$  if and only if  $k = 0$ .

**Proof.** Evidently,

$$\text{Ker}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Consequently, if  $k = 0$ , then  $L(O; 0) = A$  and  $0 \in \sigma_p(L(O; 0))$ . We shall now show that  $0 \notin \sigma_p(L(O; k)) \Rightarrow k = 0$ . We consider two cases: (a)  $u \notin \text{Ker}(A)$  and (b)  $u \in \text{Ker}(A)$ . In the case of (a), it follows from (2.4) that

$$|(Bu, u)| < 2\sqrt{(Au, u)(Cu, u)} \quad \text{for all } u \in H^1(O)^3 \setminus \text{Ker}(A). \quad (2.6)$$

On the other hand, this inequality implies that  $(L(O; k)u, u) > 0$  for all  $u \in H^1(O)^3 \setminus \text{Ker}(A)$  and  $k \in \mathbb{R}$ .

Therefore, for any  $k \in \mathbb{R}$ , a vector  $u \notin \text{Ker}(A)$  is not an eigenvector of the operator  $L(\mathcal{O};k)$  corresponding to the eigenvalue  $w=0$ . Now, let  $u \in \text{Ker}(A)$ . First, we obtain from (2.4) that

$$|(Bu, u)| \leq \sqrt{(Au, u)(Cu, u)} \text{ for all } u \in H^1(\mathcal{O})^3.$$

Since  $u \in \text{Ker}(A)$ , then  $(Bu, u) = 0$ . Hence,

$$(L(\mathcal{O};k)u, u) = (Au, u) + k(Bu, u) + k^2(Cu, u) = k^2(Cu, u) > 0, k \neq 0.$$

Thus  $0 \in \sigma_p(L(\mathcal{O};k))$  is possible only for  $k = 0$ .

### 3 The Spectrum of an Elastic Waveguide in a Domain with an Unbounded Cross Section

#### 3.1 Bounded Deformations of the Half-plane and Related Perturbations for the Operator $L(\Omega_0; k)$

The main subject of this section is the structure of the spectrum of the operator  $L(k)$  that is obtained from  $L(\Omega_0; k)$  by a bounded deformation of the half-plane  $\Omega_0$ , i.e.,  $\Omega = \Omega_0 \cup \mathcal{O}$ .

We also need the quantities  $c_p = \sqrt{\lambda + 2\mu}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu}$  and  $c_R$ , which are called the speeds of the primary wave, the secondary wave and the Rayleigh wave, respectively. The speed of the Rayleigh wave is defined as the single root in  $(0, c_s)$  of the Rayleigh equation (see [20]),

$$4\left(1 - \frac{z^2}{c_p^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{z^2}{c_s^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{z^2}{c_s^2}\right)^{1/2} = 0.$$

The following proposition follows immediately from Definition 1.4 and the related properties of semibounded self-adjoint operators.

**Proposition 3.1**  $\sigma_{ess}(L(k)) \subset [k^2 c_R^2, +\infty)$  for all  $k \in \mathbb{R}$ .

**Proof.** By definition,  $L(k)$  is the operator defined on  $H^1(\Omega)^3 \subset L_2(\Omega)^3$  and associated with the bilinear form  $(L(k)u, v) = \lambda \int_{\Omega} \text{div}_k u \overline{\text{div}_k v} dx + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^k(u) \overline{\varepsilon_{ij}^k(v)} dx,$

where  $u, v \in H^1(\Omega)^3$ . Hence, we can write  $L(k) = L(\Omega_0; k) + L(\mathcal{O}; k)$ . By (3.1) and (1.8), all of the operators  $L(k)$ ,  $L(\Omega_0; k)$  and  $L(\mathcal{O}; k)$  are positive and self-adjoint. Moreover,  $L(\Omega_0; k) \geq k^2 c_R^2 I$  in  $H^1(\Omega_0)$  (see [6], Lemma 3), which implies that  $L(k) \geq L(\Omega_0; k) \geq k^2 c_R^2 I$ . This inequality yields  $\sigma_{ess}(L(k)) \subset [k^2 c_R^2, +\infty)$ .

Next we give a stronger result established in [6].

**Proposition 3.2** ([6], Theorem 1) For every  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_{ess}(L(k)) = [k^2 c_R^2, +\infty)$ .

A proof of this proposition was given in [6], and for this reason we shall not give an alternative proof. We note also that throughout this paper we use operator and operator pencil techniques, which are quite different from the methods that were used

in [6] and related papers. Particularly, Proposition 3.2 may be proved by using the generalized Weyl criterion (see [3], p. 207, Theorem 4 and [16]) and some known facts from perturbation theory.

The generalized Weyl criterion. Let  $T, S$  be self-adjoint operators. Suppose that for some point  $\lambda_0 \in \rho(T) \cap \rho(S)$  the difference of the resolvents is compact, i.e.,

$$(T - \lambda)^{-1} - (S - \lambda)^{-1} \in \sigma_{\infty};$$

then  $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(S)$ .

As one can see from Proposition 3.2, the problem of the existence of the eigenvalues and (if there are any) their dependence on  $k$  and on the shape of the deformation is one of the main questions in the spectral theory of unbounded elastic waveguides. There may be two kinds of eigenvalues: (i) nonisolated eigenvalues in  $[k^2 c_R^2, +\infty)$ , as pointed out in the introduction; and (ii) isolated eigenvalues located strictly below  $k^2 c_R^2$ .

We set

$$\lambda_n(k) = \inf_{L \subset H^1(\Omega)} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{(L(k)u, u)}{(u, u)}, n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

and

$$N_\lambda(k) := N_\lambda(L(k)) = \max\{n | \lambda_n(k) < \lambda\}. \quad (3.3)$$

Evidently, all eigenvalues (if any) located strictly below  $k^2 c_R^2$  are among the numbers  $\lambda_n(k)$ . Our first observation is given in the following proposition.

**Proposition 3.3** For any  $k \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $\lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \dots \leq \lambda_n(k) \leq \dots \leq k^2 c_R^2$ , i.e.,  $\lambda_n(k)$  either is an eigenvalue located strictly below  $k^2 c_R^2$  or is equal to  $k^2 c_R^2$ , which belongs to  $\sigma_{ess}(L(k))$ .
- (b)  $\lambda_n(k)$  is an eigenvalue if and only if the infimum in (3.2) is attained.
- (c)  $N_\lambda(k) = +\infty$  for  $\lambda > k^2 c_R^2$ .

(d)  $N_\lambda(k) = \max\{\dim\{E(\lambda)u, u\} < \lambda \|u\|^2, u \in E \setminus \{0\}\}$  for  $\lambda \leq k^2 c_R^2$ . In particular,  $N_{k^2 c_R^2}(k) = \max\{\dim\{E(L(k)u, u) < k^2 c_R^2 \|u\|^2, u \in E \setminus \{0\}\}$ .

**Proof.**

(a) This statement follows from (3.2) and Proposition 3.2.

(b) The proof is based on the spectral expansion

$$L(k) = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda(k),$$

where  $E_\lambda(k)$  is the spectral measure for the operator  $L(k)$ , and on the fact that  $L(k)$  is a semibounded self-adjoint operator.

(c) This follows from (3.3) and Proposition 3.2.

(d) This fact is known from the spectral theory of self-adjoint operators (see [3]), which is also based on the spectral expansion given above.

Now, in addition to problems (1.4) and (1.5), we consider the following Zaremba-type boundary value problem (see [13] for similar problems).

$$\text{The Zaremba problem: } \begin{cases} L(k)u = w^2u & \text{in } \mathcal{O}, \\ \sigma^k(u)\bar{\nu} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ u|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases}$$

where  $\partial\mathcal{O} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (see Figure 1). The operator associated with the Zaremba problem will be denoted by  $L_Z(\mathcal{O}; k)$ . We denote the energetic spaces of problem (1.4), the Zaremba problem and problem (1.5) by  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_3$ , respectively. As mentioned in the introduction,  $\mathcal{H}_1 = H_0^1(\mathcal{O})$  and  $\mathcal{H}_3 = H^1(\mathcal{O})$ . Hower  $\mathcal{H}_2 = \{u \in H^1(\mathcal{O}) | u|_{\Gamma_2} = 0\}$ .

By Theorem 2.2, for all  $k \in \mathbb{R}$ , the spectra of all these problems are discrete, i.e., they consist of isolated eigenvalues of finite multiplicity with a concentration point at infinity. We denote by  $\lambda_n^D(\mathcal{O}, k)$ ,  $\lambda_n^Z(\mathcal{O}, k)$  and  $\lambda_n^F(\mathcal{O}, k)$  the eigenvalues of the operators  $L_0(\mathcal{O}; k)$ ,  $L_Z(\mathcal{O}; k)$  and  $L(\mathcal{O}; k)$ , respectively. Then we have

$$\lambda_n^D(\mathcal{O}, k) = \inf_{L \subset H_0^1(\mathcal{O})} \max_{\dim L = n} \max_{u \in L, u \neq 0} \frac{(L_0(\mathcal{O}; k)u, u)}{(u, u)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

$$\lambda_n^Z(\mathcal{O}, k) = \inf_{L \subset \mathcal{H}_2} \max_{\dim L = n} \max_{u \in L, u \neq 0} \frac{(L_Z(\mathcal{O}; k)u, u)}{(u, u)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$\lambda_n^F(\mathcal{O}, k) = \inf_{L \subset H^1(\mathcal{O})} \max_{\dim L = n} \max_{u \in L, u \neq 0} \frac{(L(\mathcal{O}; k)u, u)}{(u, u)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Thus, the inclusion  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3$  and (3.4), (3.5) and (3.6) yield  $\lambda_n^F(\mathcal{O}, k) \leq \lambda_n^Z(\mathcal{O}, k) \leq \lambda_n^D(\mathcal{O}, k)$ . (3.7)

Finally, the following corollary follows from (3.7), Theorem 2.3 and the fact that  $\mathcal{H}_2 \hookrightarrow H^1(\Omega)$ .

**Corollary 3.1** (a) For each  $k \in \mathbb{R}$ ,

$\lambda_n(k) \leq \lambda_n^Z(\mathcal{O}, k)$  and  $\lambda_n^Z(\mathcal{O}, k) \sim cn^{2/3}$ , where the constant  $c$  does not depend on  $k$ ;

(b) for all  $\lambda \leq k^2 c_{\mathbb{R}}^2$  and  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$N_\lambda^Z(\mathcal{O}, k) \leq N_\lambda(k) \leq N_\lambda^F(\mathcal{O}, k),$$

where  $N_\lambda^Z(\mathcal{O}, k)$  and  $N_\lambda^F(\mathcal{O}, k)$  denote the spectral distribution functions of the operators  $L_Z(\mathcal{O}; k)$  and  $L(\mathcal{O}; k)$ , respectively.

We recall that one of the main problems in the spectral theory of elastic waveguides is that of the nonemptiness of the set

$$N_{k^2 c_{\mathbb{R}}^2}(k) := \max\{n | \lambda_n(k) < k^2 c_{\mathbb{R}}^2\},$$

which is the set of all eigenvalues (if any) of the operator  $L(k)$  located strictly below  $k^2 c_{\mathbb{R}}^2$ . This is equivalent to the existence of a guided mode with a speed lower than the speed of the Rayleigh wave. The obvious result is that  $N_{k^2 c_{\mathbb{R}}^2}^D(\mathcal{O}, k) = 0$  for all  $k \in \mathbb{R}$ , where  $N_\lambda^D(\mathcal{O}, k)$  is the spectral distribution function for operator  $L_0(\mathcal{O}, k)$ . The following theorem contains such a non-trivial result for  $N_\lambda^Z(\mathcal{O}, k)$ .

**Theorem 3.1** There exists  $k^* > 0$  such that

$$N_{k^2 c_{\mathbb{R}}^2}^Z(\mathcal{O}, k) = 0 \quad \text{for } k < k^*.$$

**Proof.** By the definition  $N_\lambda^Z(\mathcal{O}, k)$  is the spectral distribution function for the operator  $L_Z(\mathcal{O}, k)$ .

Then

$$N_\lambda^Z(\mathcal{O}, k) = \max \dim \{E \subset \mathcal{H}_2 | (Au, u) + k(Bu, u) + k^2(Cu, u) < \lambda\}.$$

Hence,

$$N_{k^2 c_{\mathbb{R}}^2}^Z(\mathcal{O}, k) = \max \dim \{E \subset \mathcal{H}_2 | (Au, u) + k(Bu, u) + k^2((C - c_{\mathbb{R}}^2)u, u) < 0\},$$

i.e.,  $N_{k^2 c_{\mathbb{R}}^2}^Z(\mathcal{O}, k)$  is the number of the negative eigenvalues of the operator

$$M_Z(k) := M_Z(\mathcal{O}, k) = A + kB + k^2((C - c_{\mathbb{R}}^2)I), \quad \mathcal{D}(M_Z(k)) = \mathcal{H}_2.$$

Thus the set of all eigenvalues (if any) of operator  $L_Z(\mathcal{O}, k)$  located strictly below  $k^2 c_{\mathbb{R}}^2$  is the same as the number of the negative eigenvalues of the operator  $(M_Z(k))$ . Now, we show that there exists  $k^* > 0$  such that if  $k < k^*$  then  $N_0(M_Z(k)) = 0$ . Suppose that this is not true. Then we obtain a sequence  $k_n \rightarrow 0$ ,  $k_n > 0$  such that

$$\min_{\mathcal{H}_2 \setminus \{0\}} \frac{(M_Z(k_n)u, u)}{\|u\|_{H^1(\mathcal{O})}} < 0.$$

Therefore there exists  $u_n \in \mathcal{H}_2$ ,  $\|u_n\|_{H^1(\mathcal{O})} = 1$  satisfying

$$(M_Z(k_n)u_n, u_n) = \tau_n < 0.$$

By using the compact embedding (see [1])

$$\mathcal{H}_2 \hookrightarrow L_2(\mathcal{O}) \quad \text{we get } u_n \rightarrow u_0 \neq 0 \text{ in } L_2(\mathcal{O}).$$

Consequently,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_Z(k_n)u_n, u_n) = (M_Z(0)u_0, u_0) = (Au_0, u_0) \leq 0.$$

This is a contradiction to the fact that  $A$  is a positive operator in  $\mathcal{H}_2$ .

#### 4 On the inverse dispersion relation $k(w)$ and a linearization method for its solution

The main target of this section is the following inverse problem: for what values of  $k$  will the given  $w^2$  be an eigenvalue of the eigenvalue problem  $L(k)u = w^2u$ ? So far, we fixed  $k$  and studied the eigenvalues of the operator  $L(k)$ . Actually, this inverse problem is also the main concern of elastic waveguides. As we have seen in the previous sections there are may be two kind of eigenvalues for operator  $L(k)$ : i) non-isolated eigenvalues in  $[k^2 c_{\mathbb{R}}^2, +\infty)$ , ii) isolated eigenvalues located strictly below  $k^2 c_{\mathbb{R}}^2$ . Although, we were mainly concentrated on the second case, however the existence or non-existence of non-isolated eigenvalues in  $[k^2 c_{\mathbb{R}}^2, +\infty)$  is another open problem for many cylindrically-perturbed elastic waveguides. Thus, if we have an eigen-pair  $(k, w^2)$  for the problem  $L(k)u = w^2u$  then  $w^2$  (for the fixed  $k$ ) is either a non-isolated eigenvalues in  $[k^2 c_{\mathbb{R}}^2, +\infty)$  or an isolated eigenvalues located strictly below  $k^2 c_{\mathbb{R}}^2$ . Clearly, this question is a typical eigenvalue problem for the operator pencil:  $L_w(k) := L(k) - w^2I$ .



The quantitative analysis of this problem via the comparison principles, as before leads to the eigenvalue problems for operator pencils

$$L_w(\mathcal{O}, k) = L(\mathcal{O}, k) - w^2 I, \text{ and } L_w^0(\mathcal{O}, k) = L_0(\mathcal{O}, k) - w^2 I.$$

There are various methods to investigate the spectrum of operator pencils (see [7], [10], [11], [17], [19] and [21]). But in this paper we are trying to stay within the framework of the operator theory. The best way to do this is to apply a linearization method. The most suitable linearization in this context is that of given by M. Krein and H. Langer in their well-known paper [18]. This linearization allows us to establish a desirable connection between the root functionals of the pencils studied in this paper and the numerical ranges of their linearizations, which is very important in the variational theory.

We start with  $L_w(\mathcal{O}, k) = A + kB + k^2 C - w^2 I$  and fix  $w$ .

By Proposition 2.1 we have

*The principle of positivity of the energy:*

There exists  $\mu \geq 0$  such that

$$(L(\mathcal{O}; k)u, u) \geq \mu(u, u) \text{ for all } u \in H^1(\mathcal{O})^3 \text{ and } k \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

*The energetic stability principle:*

There exist real numbers  $\zeta \geq 0$  and  $c_0 > 0$  such that for all  $k \in \mathbb{R}$  and all  $u \in H_0^1(\mathcal{O})^3$ ,

$$(L_0(\mathcal{O}; k)u, u) \geq (c_0^2 k^2 + \zeta)(u, u). \tag{4.2}$$

We repeat a result from our paper [7].

**Theorem 4.1** Let  $L_w(\mathcal{O}, k)$  be an operator pencil of w.g.t. satisfying the energetic stability condition then for all  $w \in \mathbb{C}$  the spectrum

$\sigma(L_w(\mathcal{O}, k)) := \{k \in \mathbb{C} | L_w(\mathcal{O}, k) \text{ is not invertible}\}$  is discrete, i.e.  $\sigma(L_w(\mathcal{O}, k))$  consists of isolated eigenvalues of finite multiplicity.

The following properties of  $\sigma(L_w(\mathcal{O}, k))$  follow from the inequalities (4.1) and (4.2).

**Corollary 4.1**

- If  $\text{Im } w \neq 0$  then  $\text{Im } k \neq 0$ .
- If  $\text{Im } w = 0$  and  $|w| < \mu$  then  $\text{Im } k \neq 0$ .

Consequently, real wavenumbers exist only at real frequencies satisfying the inequality  $|w| \geq \mu$ .

Finally, we study real eigenvalues in  $\sigma(L_w(\mathcal{O}, k))$ . According to Theorem 2.1, applying the operator  $(A + I)^{-\frac{1}{2}}$  to both the sides of  $L_w(\mathcal{O}, k)$  reduces it to the bounded operator pencil of the form (see our the previous paper [11]):

$$T_w(\mathcal{O}, \lambda) = \lambda^2 M(w) + 2\lambda N(w) + I,$$

where  $M(w), N(w) \in S_\omega$ ,  $M(w) > 0$ ,  $N(w) = N(w)^*$  and  $\lambda = k + k^*$  for some  $k \in \mathbb{R}$ . We fix  $w$  and rewrite  $T_w(\mathcal{O}, \lambda)$  in the form

$$T(\mathcal{O}, \lambda) = \lambda^2 M + 2\lambda N + I$$

Notice that many properties of this pencil were studied in the paper of M. Krein and H. Langer [18].

A simple connection between the eigenvalues of  $T(\mathcal{O}, \lambda)$  and  $L_w(\mathcal{O}, k)$  is that  $\lambda_0$  is an eigenvalue for  $T(\mathcal{O}, \lambda)$  if and only if  $\lambda_0 + k^*$  is an eigenvalue for  $L_w(\mathcal{O}, k)$ .

In the following discussion, our starting point is the pencil

$$T(\mathcal{O}, \lambda) = \lambda^2 M + 2\lambda N + I.$$

and its linearization:  $L(\lambda) = I - \lambda T$  in the space  $H^2 = H \oplus H$ , where

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & M^{\frac{1}{2}} \\ -M^{\frac{1}{2}} & -2N \end{pmatrix}.$$

A proof of the following proposition is based on the definitions of eigenvectors and associated vectors (see [19] for the definitions) by using the above given linearization.

**Proposition 4.1**  $\sigma(T) = \sigma(L)$ . Moreover, if the vectors  $u_0, u_1, \dots, u_n$  form a chain of eigenvectors and associated vectors (e.a.v.) corresponding to the eigenvalue  $\lambda_0$  of the pencil  $T(\lambda)$ , then the vectors

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 M^{\frac{1}{2}} u_0 \\ u_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_0 M^{\frac{1}{2}} (\lambda_0 u_1 + u_0) \\ u_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} M^{\frac{1}{2}} (\lambda_0 u_n + u_{n-1}) \\ u_n \end{bmatrix}$$

form a chain of e.a.v. corresponding to the same eigenvalue  $\lambda_0$  of the linear pencil  $L(\lambda) = I - \lambda T$ . Conversely, if

$$\begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix}$$

form a chain of e.a.v. corresponding to the eigenvalue  $\lambda_0$  of  $L(\lambda) = I - \lambda T$  then the vectors  $u_0^2, u_1^2, \dots, u_n^2$  form a chain of e.a.v. corresponding to same eigenvalue  $\lambda_0$  of the pencil  $T(\lambda)$ .

Evidently, the eigenvalues of the linear pencil  $L(\lambda) = I - \lambda T$ , and the characteristic values of the operator  $\mathbb{T}$  are the same. The operator  $\mathbb{T}$  is not self-adjoint in the Hilbert space  $H \oplus H$ . But if we define

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \text{ then } (J\mathbb{T})^* = J\mathbb{T}. \text{ This relationship}$$

means that the operator  $\mathbb{T}$  is a self-adjoint operator in the Krein space  $K := H \oplus H$  with the inner product  $[\tilde{u}, \tilde{v}]_J := (J\tilde{u}, \tilde{v})$  (see [5]). According to Proposition 4.1,  $u_0$  is an eigenvector corresponding to the eigenvalue  $\lambda_0$  of the pencil  $T(\lambda)$  if and only if the vector

$$\tilde{u}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 M^{\frac{1}{2}} u_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

is an eigenvector corresponding to the characteristic value  $\lambda_0$  of the operator  $\mathbb{T}$ .

We note that all the results, presented in this paper are based on the variational principles like (3.2) and (3.3).

These are variational principles for operator  $L(k)$ . However, the characterization of the eigenvalues of problem  $T(\lambda)u = 0$  is much more complicated, because this is an eigenvalue problem for the operator pencil  $T(\lambda)$ . In this case one can use the characteristic values of the self-adjoint operator  $\mathbb{T}$  in the Krein space  $K$ . Let us write  $[u, v]$  for  $[u, v]_J$  in the Krein space  $K$ . Variational principles for real eigenvalues (positive or negative type) of a self-adjoint operator  $\mathbb{T}$  in a Krein space  $K$  are given by the following formula:

If  $C^\pm = \{u \in K \mid \pm [u, u] > 0\}$  then

$$\lambda_n^\pm(\mathbb{T}) = \inf_{L, \dim L = n} \sup_{L \subset C^\pm} \frac{[\mathbb{T}u, u]}{[u, u]},$$

$$\lambda_n^\pm(\mathbb{T}) = \sup_{L, \text{codim } L = k-1} \inf_{L \cap C^\pm} \frac{[\mathbb{T}u, u]}{[u, u]}.$$

### CONCLUSION

We use an operator approach and suggest alternative methods to solve spectral problems arising in the theory of both closed elastic waveguides and elastic waveguides with unbounded cross sections. By using operator methods we give full description of the spectral sets studied in this paper. We study the inverse dispersion relation  $k(w)$  and suggest a linearization method for its solution.



## REFERENCES

- [1] Adams R. A., Fournier J. J. F. (2002), Sobolev spaces, Academic Press.
- [2] Babich V. M. (2010), "On a class of topographic waveguides", *Algebra i Analiz*, 22(1), 98-107.
- [3] Birman M. S., Solomyak M. Z. (1997), Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space, D.Reidel Publishing Company.
- [4] Birman M. S., Solomyak M. Z. (1980), "Quantitive analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory", *Translations of Mathematical Monographs*, series 2, vol.114, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [5] Bognár J. (1974), "Indefinite inner product spaces", Springer-Verlag, New York.
- [6] Bonnet-Ben Dhia A. S, Duterte J., Joly P. (1999), "Mathematical Analysis of elastic surface waves in topographic waveguides", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(5), 755-798.
- [7] Colakoğlu N., Hasanov M., Uzun B. U. (2006), "Eigenvalues of two parameter Polynomial operator pencils of waveguide type", *Integral Equations Operator Theory*, 56, 381- 400.
- [8] Duterte J., Joly P. (1999), "A numerical method for surface waves in a cylindrically perturbed elastic half-space. Part 1: Construction and analysis", *SIAM J. Appl. Math.*, 59(5), 1599-1635.
- [9] Gohberg I., Krein M. (1969), "Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space", American Mathematical Society, Providence, R.I..
- [10] Hasanov M. (2006), "On the spectrum of a weak class of operator pencils of waveguide type", *Mathematische Nachrichten*, 279, 843-853.
- [11] Hasanov M. (2011), "The spectra of two-parameter quadratic operator pencils", *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 742-755.
- [12] Horgan C. O. (1995), "Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics", *SIAM Review*, 37(4), 491-511.
- [13] Jakobson D., Levitin M., Nadirashvili N., Polterovich I. (2006), "Spectral problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions: Isospectrality and beyond", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 194(1), 141-155.
- [14] Kamotskii I. V., Kiselev A. P. (2009), "An energy approach to the proof of the existence of Rayleigh waves in an anisotropic elastic half-space", *J. Appl. Math. Mech.*, 73(4), 464-470.
- [15] Kamotskii I. V. (2009), "On a surface wave traveling along the edge of an elastic wedge", *St. Petersburg Math. J.*, 20(1), 59-63.
- [16] Kato T. (1995), "Perturbation theory for linear operators", Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Kostyuchenko A. G., Orazov M. B. (1986), "The problem of oscillations of an elastic half cylinder and related selfadjoint quadratic pencils", *Journal of Soviet Mathematics*, 33, 1025-1065.



[18] Krein M. G., Langer H. (1978), "On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua. I, II", *Integral Equations Operator Theory*, 1(3), 364–399, (4), 539–566.

[19] Markus A. S. (1988), *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Translations of Mathematical Monographs, vol.71, American Mathematical Society, Providence, RI.

[20] Miklowitz J. (1978), *The theory of elastic waves and waveguides*, North-Holland.

[21] Zilbergleit A., Kopilevich Y. (1996), *Spectral theory of guided waves*, Institute of Physics Publishing, Bristol.

## YAYIN KURALLARI

Yazarlara Not: TÜBİTAK-ULAKBİM Fen Bilimler Veri Tabanı Komitesi, bu yayın kurallarına %100 uyulmasını istemektedir. Lütfen makaleleri bu kurallara uygun olarak hazırlayıp gönderiniz.

1. Beypkent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, yılda İKİ kez (altı ayda bir) yayınlanır.
2. Hakemli ve özgün çalışmaları amaçlayan bir dergidir. Makalelerin, hakem değerlendirilmesine girmek üzere, yayın kurulu sekreterliğine yazar adı, e-postası, cep /telefonu ile gönderilmesi gerekmektedir. Yazarlar makalelerinde hakemlerin de değerlendirmelerinde dikkate alacağı aşağıdaki kriterleri de gözden uzak tutmamalıdır:
  - a. Makalelerindeki ekseni, dayandığı temel fikri, ikincil kaynak incelemesi ve bunlara göre yeniliği, Fen ve Mühendislik Bilimleri ve uygulama alanına katkısını,
  - b. Araştırmalarının makalenin ana eksenine katkısını, hipotez ve metodolojisi, istatistiksel analiz tekniğinin yeterliliğini,
  - c. Makalenin mantıksal bütünlüğü ve kendilerini tatmin edip etmediğini,
  - d. Makalenin başlığa uygunluğu ve anahtar kelimelerin makaleyi yansıtabilmesini,
  - e. İyi kalitede bir model, şekil, tablo vb. ile öğretime katkı seviyesini değerlendirmelidirler. Ampirik çalışmalara öncelik tanınacağı makalelerin yayınlanabilmesi için, yazarlar:
    - 3.1. Metin, çift aralıklı ve 12 puntoyla Microsoft Word (6.0 ve üstü) yazım programında Times New Roman karakterinde yazılacak ve internet/Web ortamında veya CD olarak ve 3 kopya “hard copy”/ çoğaltılmış olarak gönderilecektir.
    - 3.2. Makalelerin 20 sayfa (A4 boyutlu ve 2 aralıklı) geçmemesi gerekmektedir. Yazılar ve şekiller sayfaya soldan 3,5 cm, alt/üst ve sağdan 2,5 cm boşluk bırakacak şekilde konumlandırılmalıdır.
    - 3.3. Atıflar, dip notlarda değil, metin içinde ve parantezle (soyad, yıl: sayfa) verilecektir.
    - 3.4. Açıklama notları numaralandırılarak ilgili sayfa altında yazılacaktır.
    - 3.5. Tablolar numaralandırılıp tablo üstünde, şekiller şekil altında (atf varsa, tablo ve şekil altında, kullanım izni referansı ile birlikte), denklemler yaygın bilinirlikte ve açıklamalı olarak gösterilecektir.
    - 3.6. Makale sonunda atıflarla gönderme yapılan kaynakçaya ( soyad, ad, eser “makaleler tırnak içinde”, yayın yeri, yayınlayan, yıl, -dergiler: sayı, ay, yıl ve sayfa baş ve sonu-) yer verilecektir. Sanal ortam atıfları, güncel olarak tarih ve saati ile verilecektir.
    - 3.7. Makalelerin başlık ve yazar isminin altında, 200 kelimeyi geçmeyen hem Türkçe hem İngilizce özetlerle (katkı ve sonuç içerikli) 3-5 anahtar kelimeye yer verilecektir.
    - 3.8. Makalelerin Özet, Giriş, Yöntem/Yaklaşım, Gelişme, Bulgular, Sonuç, Uygulamaya Katkısı ve Kaynakça bölümlerinden oluşmasına özen gösterilmesi beklenir.
    - 3.9. Yazar/ların ismi makalenin altında yer almalı, unvanı ve çalıştığı kurum, birinci sayfada yıldızlı dipnot olarak gösterilmelidir.



- 3.10. Yayın, danışma ve hakem kurullarında görev alanlar, kendi makalelerinin görüşmelerine ve hakem görevlendirmelerine katılamazlar.
- 3.11. Yayını uygun görülen makaleler yayın sırasına konur. Gönderilen makaleler ve düzeltme talepleri sonrasında da yayını uygun görülmeyen yazılar iade edilmez ve yazarına gerekçesiyle bildirilir.
- 3.12. Makalelerin bilimsel ve diğer hususlara ilişkin sorumluluğu yazar/larına aittir. Bir başkasından yararlanılan şekil, resim ve tablo alıntılarında, ilgili yazar/yayıncıdan izin yazısı alınmalı ve makale ekinde sunulmalıdır.
- 3.13. Her sayıdaki hakem isimleri ve raporları beş yıl süreyle arşivlenecektir.
- 3.14. Yazar/lar, yayınlanması halinde, tüm telif haklarını Beykent Üniversitesine devrettiklerini belirten aşağıdaki belgeyi de makaleleriyle birlikte göndermelidir: Bu belgenin imzalanıp gönderilmemesi halinde, bu haklarını, Beykent Üniversitesi'ne otomatik olarak devrettikleri anlamına gelir.



## İLETİŞİM

Beykent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, Sıraselviler Cd, 34437 Beyoğlu-İstanbul

Tel: 0212 444 1997 dahili; 5056 - 5187 - 5188

Faks: 0212 867 51 72

bahaddins@beykent.edu.tr

## İÇİNDEKİLER

A HIGHER-ORDER SENSITIVE FINITE DIFFERENCES SCHEME OF THE CAUCHY PROBLEM FOR 2D LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS Öykü YENER, Bahaddin SİNSOYSAL, Mahir RASULOV .....	6 - 12
ASAL KATSAYILARLA DÜZENLENMİŞ DOĞRUSAL ÜRETEÇ Hakan GENÇOĞLU, Tank YERLİKAYA .....	13 - 18
DEĞİŞİK KATLARDA ÇIKAN YANGIN SONUCUNDA ÇELİK YAPILARIN DAYANIMLARININ ARAŞTIRILMASI Mehmet Toyanç YAZGAN .....	19 - 33
ELECTROMAGNETIC SHIELDING PERFORMANCES OF COLEMANITE / PANI / SIO <sub>2</sub> COMPOSITES IN RADAR AND WIDER FREQUENCY RANGES Ethem İlhan ŞAHİN, Mehriban EMEK, Burcu ERTUĞ, Mesut KARTAL .....	34 - 42
SPECTRAL ANALYSIS OF ELASTIC WAVEGUIDES Mahir HASANSOY .....	43 - 54



# BEYKENT ÜNİVERSİTESİ

### Ayazağa - Maslak Yerleşkesi

Ayazağa - Sarıyer / İST. Faks: 0212 289 64 90

### Beylikdüzü Yerleşkesi

Beykent - Büyükçekmece / İST. Faks: 0212 872 28 30

### Hadımköy Yerleşkesi

Akçaburgaz Mevkii - Esenyurt / İST

### Taksim Yerleşkesi

Siraselviler - Beyoğlu / İST. Faks: 0212 243 02 78

### Beykent Üniversitesi Çağrı Merkezi

beykent.edu.tr - info@beykent.edu.tr

**444 1997**