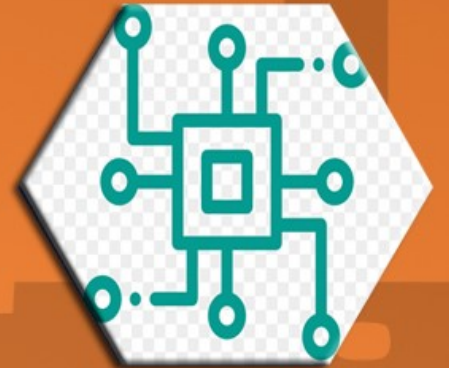




# *Bingöl Üniversitesi Teknik Bilimler Dergisi*

*Bingol University Journal of Technical Science*



*Cilt 2, Sayı 1, Temmuz 2021*

*Volume 2, Number 1, July 2021*

*Bingöl Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu  
tarafından yayımlanmaktadır*

## EDİTÖRÜN NOTU

Ülkemizde bilimsel yayıncılık hızla gelişmekte ve bu bağlamda süreli yayınların sayısı önemli ölçüde artmaktadır. Akademik süreli yayıncılık da bu artışın doğal sonuçlarından. 8 Eylül 2020 tarihinde yayınlanan ilk sayısı ile yayın hayatına başlayan dergimizle (**Bingöl Üniversitesi Teknik Bilimler Dergisi**) çok değerli araştırmacıların, bilim insanlarının ve okurların karşısına çıkmanın heyecanını ve mutluluğunu yaşamaktayız. Yayın hayatına başladığı bu tarihten itibaren bilimsel bir disiplin içerisinde hareket eden dergimiz, uluslararası indekslerde taranmak için azami gayret göstermektedir.

Türkiye’de yayın yapan birçok üniversite akademik dergileri gibi dergimiz de çok-disiplinli ve disiplinlerarası anlayışla hareket etmektedir. Bu anlayışla dergimizin yayın kurulu, bilimin bütün sahalarından ve alt disiplinlerinden bilimsel nitelikli yazıları İngilizce veya Türkçe olarak yayınlamak üzere her iki dilde de kabul etmektedir.

Dergimizde makalelerin kalitesi; yazarlık, editörlük, hakemlik ve baskı süreçlerinin doğru ve etkin bir biçimde yürütülmesi ve karşılıklı etkileşimiyle mümkün olduğu gerçeği göz önünde tutularak bir yayın politikası izlenmektedir. Bu bağlamda dergimiz hakemlik sürecini titizlikle yürütmekte, çift taraflı körleme sistemiyle makaleler değerlendirilmekte, etik ve bilimsel ölçütlere sonuna kadar bağlı kalınmaya çalışılmaktadır.

İlk sayıdan itibaren dergimizin internet üzerinden erişimi sağlanmış (<http://tbmyo.bingol.edu.tr/dergi/>) ve yayınlanan makalelerin tamamı okuyucuların ve araştırmacıların hizmetine sunulmuştur. Dergimizin bu sayısında 1 adet derleme ve 4 adet bilimsel araştırma makalesine yer verilmiştir.

Dergimize bilimsel araştırmaları ve yazılarıyla destek veren değerli bilim insanlarına, bu çalışmalarını titizlikle değerlendiren hakemlere ve yayın sürecini yöneten ve yürüten yayın kurulu ve sekreteryaya teşekkür ederim.

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

Dergi Editörü

# *Bingöl Üniversitesi Teknik Bilimler Dergisi*

*e-ISSN: 2757-6884*

## **EDİTÖR KURULLARI**

### **Baş Editör**

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Müdürü

### **Editör Yardımcıları**

Dr. Öğr. Üyesi Müslüm EROL  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Tekstil, Giyim, Ayakkabı  
ve Deri Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Ünal Değirmenci  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Makine ve Metal  
Teknolojileri Bölümü

### **Dergi Sekreterleri**

Öğretim Görevlisi Ebubekir BOZKURT  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Makine ve Metal  
Teknolojileri Bölümü

Öğretim Görevlisi Müge YURTCAN  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Park ve Bahçe Bitkileri  
Bölümü

### **Bölüm Editörleri**

Prof. Dr. Victor Nedzvetsky  
Dniepropetrovsk National University, Department of Biophysics and Biochemistry, Dnipro,  
Ukraine.

Prof. Dr. Mykola Mikhailovich Dron  
Oles Honchar Dnipro National University, Physics-Technics Faculty, Department of Design  
and Construction of Aircraft, Dnipro, Ukraine.

Prof. Dr. Hasan KURTARAN  
Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü

Doç. Dr. İhsan KIRIK  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Makine Ve Metal  
Teknolojileri Bölümü

Doç. Dr. Ayşegül UÇAR  
Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Müslüm EROL  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Tekstil, Giyim, Ayakkabı  
ve Deri Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet POLAT  
Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü

Dr. Öğr. Üyesi Erdiñ İKİNCİOĞULLARI  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, İnşaat Bölümü

Dr. Burak YILDIRIM  
Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Elektronik Ve Otomasyon  
Bölümü

### **Teknik Editör**

Bingöl Üniversitesi, Bingöl Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri  
Bölümü

### **İngilizce Editörü**

Öğr. Gör. Ahmet KESMEZ  
Bingöl Üniversitesi, Yabancı Diller Yüksekokulu, İngilizce Bölümü

### **İLETİŞİM**

#### **Başeditör**

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL  
E-posta: [mehmetakifakyol@bingol.edu.tr](mailto:mehmetakifakyol@bingol.edu.tr)  
Telefon: 0426 216 00 12-4065

#### **Editör Yardımcısı**

Dr. Öğr. Üyesi Ünal Değirmenci  
E-posta: [udegirmenci@bingol.edu.tr](mailto:udegirmenci@bingol.edu.tr)  
Telefon: 0426 216 00 12-4040

#### **Dergi Sekreteri:**

Öğretim Görevlisi Ebubekir BOZKURT  
E-posta: [ebozkurt@bingol.edu.tr](mailto:ebozkurt@bingol.edu.tr)  
Telefon: 0426 216 00 12-4009

Öğretim Görevlisi Müge YURTCAN

E-posta: [mpektas@bingol.edu.tr](mailto:mpektas@bingol.edu.tr)  
Telefon: 0426 216 00 12-4114



## İÇİNDEKİLER/CONTENTS

### **Boundary Layer Flow of Viscous Incompressible Fluid Over a General Exponential Stretching Plate with Suction and Heat Transfer with Convective Surface Boundary Condition Risks and Prevention Studies in the Food Sector**

**Kamran Ahmad<sup>1\*</sup>, Aliya Naaz Siddiqui<sup>2</sup>**

1

<sup>1\*</sup>Department of Mathematics, Maharishi Markandeshwar Deemed to be University, Mullana, 133207, Ambala-Haryana, India, *Email: kamran.ahmad@mmumullana.org*

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Maharishi Markandeshwar Deemed to be University, Mullana, 133207, Ambala-Haryana, India, *Email: [aliyanaazsiddiqui9@gmail.com](mailto:aliyanaazsiddiqui9@gmail.com)*

(Arrival: 20.05.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### **\* Ricci Solitons and Symmetries of Type *D* Gravitational Fields in Spacetime Manifolds**

**Mohd. Danish Siddiqi\***

8

\*Jazan University Faculty of Science Department of Mathematics. Jazan, Kingdom of Saudi Arabia. *e-mails: [msiddiqi@jazanu.edu.sa](mailto:msiddiqi@jazanu.edu.sa)*

(Arrival: 02.06.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### **Non-invariant Hypersurfaces of Hyperbolic Sasakian Manifolds**

**Toukeer Khan\***

16

\*Assistant Professor, Computing & Informatics Department, Mazoon College, P. O. Box. 101, P.C. 133 Airport Heights, Al-Seeb Muscat, Sultanate of Oman. *E-mail: [toukeerkhan@gmail.com](mailto:toukeerkhan@gmail.com)*

(Arrival: 01.06.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### **Literatürdeki Basamaklı Dolusavak Tasarımlının Derlenmesi**

### **Review of Stepped Spillway Designs in the Literature**

**Erdinç İKİNCİOĞULLARI\***

25

\*Bingöl Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bingöl,  
ORCID No: 0000-0003-2518-980X, e-mail: [erdincikinciogullari@gmail.com](mailto:erdincikinciogullari@gmail.com)

(Alınış: 13.01.2021, Kabul: 02.07.2021, Yayınlanma: 09.07.2021)



---

## **Semi-Invariant Submanifolds A Lorentzian Kenmotsu Manifold With Semi-Symmetric Metric Connection**

**Ramazan SARI<sup>1\*</sup>, İnan ÜNAL<sup>2</sup>**

36

<sup>1\*</sup>Gümüşhacıköy Hasan Duman Vocational Schools., Amasya University, Amasya, Turkey

<sup>2</sup>Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Munzur University, Tunceli,  
Turkey

(Arrival: 21.05.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

---



# **Boundary Layer Flow of Viscous Incompressible Fluid Over a General Exponential Stretching Plate with Suction and Heat Transfer with Convective Surface Boundary Condition**

**Kamran Ahmad<sup>1\*</sup>, Aliya Naaz Siddiqui<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Maharishi Markandeshwar Deemed to be University, Mullana, 133207, Ambala-Haryana, India, *Email: kamran.ahmad@mmumullana.org*

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Maharishi Markandeshwar Deemed to be University, Mullana, 133207, Ambala-Haryana, India, *Email: aliyanaazsiddiqui9@gmail.com*

(Arrival: 20.05.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

## **Abstract**

The purpose of this article is to generalize the laminar boundary layer flow past an exponential stretching sheet, studied by Swati Mukhopadhyay [16], to general exponential stretching sheet. Thus, we study the heat transfer with convective surface boundary condition.

**Keywords:** Exponential stretching; Heat transfer; Boundary layer equations; Viscous incompressible fluid.

## **1. INTRODUCTION**

Fluid dynamics is one of the important branches of science which deals with the study of fluid in motion and subsequent effect of fluid motion on the boundaries, which may be either solid surface or the interface of two immiscible fluids. The main beliefs of fluid dynamics are based on Newton's law of motion, conservation of momentum and conservation of energy. The base of fluid mechanics or fluid dynamics is fluid, so we define the fluid as substance which tends to flow due to the action of some force(s).

Many authors such as Gupta and Gupta [10], Dutta et al. [9], Chen and Char [5], extended the work of Crane [8], that is, investigated the boundary layer flow caused by the stretching sheet with heat transfer and mass transfer under different physical situations. Most of the literature deals with the study of boundary layer flow over a stretching surface where the velocity of the stretching surface is assumed to be linear and proportional to the distance from the origin. Kumaran and Romaniyah [14] very beautifully dealt with boundary layer flow over a general quadratic stretching sheet. There after many authors such as Cortell [6, 7], Hayat and Sajid [11], Ali [2] investigated the thermal boundary layer flow by considering the non-linear stretching surface.

In all these above studies, the stretching character of plate is governed by linear function, nonlinear function or exponential function  $ex$ . In this chapter, we generalize the exponentially stretching sheet to general exponential stretching sheet. We also discuss the thermal boundary layer flow for nano-fluids Cu-water and Ag-water, Sanjayanand and Khan [21], studied the visco-elastic boundary layer flow and heat transfer to an exponentially stretching sheet. The problem of boundary layer flow and heat transfer of an incompressible viscous fluid with thermal radiation due to an exponential stretching sheet is investigated numerically by Bidin and Nazar. The influence of thermal radiation on the boundary layer flow in case of an

exponential stretching sheet investigated by Hayat and Sajid [11]. Recently, numerical solution of flow and heat transfer of Powell-Eyring fluid over an exponential stretching sheet with variable conductivity studied by Khader and Megahed [13] and MHD stagnation point flow towards an exponential stretching sheet with prescribed wall temperature and heat flux have been studied by S.Q. Alvi.

## 1.1 Boundary Layer Theory

The boundary layer theory began with Ludwig Prandtl's paper on the motion of a fluid with very small viscosity, which was presented at the Third International Congress of Mathematicians in August, 1904 at {Heidelberg} and published in the Proceedings of the Congress in the following year.

## 1.2 Stretching Plate

A plate or sheet immersed in a fluid at rest. When the plate starts moving such that its velocity in a direction is directly proportional to the distance from a reference point or orifice, then the plate is called stretching plate. Every stretching plate is equivalent to the moving plate.

## 2. BOUNDARY LAYER FLOW PROBLEM

The governing equations for steady boundary layer flow of viscous incompressible fluid past a stretching plate are:

$$\text{Continuity equation} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\text{Momentum equation} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

where  $u$  and  $v$  are the velocity components along  $x$  and  $y$  axes, respectively, and  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid.

The appropriate boundary conditions for flow problem are:

$$y = 0, \quad u = U(x), \quad v = -V(x) \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{as} \quad y \rightarrow \infty.$$

Here we have  $U(x) = U_0 a^{x/L}$  is the stretching velocity, where  $U_0$  is the reference velocity,  $V(x) > 0$  is suction velocity and we assume a special type of velocity at the wall as  $V(x) = V_0 a^{x/L}$ , where  $V_0$  is the initial strength of suction.

### 2.1 Method of Solution

Introducing the suitable dimensionless transformation as

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0}{2L\nu}} a^{x/L} y, \quad u = U_0 a^{\frac{x}{L}} f'(\eta) \quad \text{and} \quad v = -\sqrt{\frac{U_0 \nu}{2L}} a^{\frac{x}{2L}} \log a \{f(\eta) + \eta f'(\eta)\}. \quad (4)$$

Substituting (4) in equation (2), the momentum equation transforms to

$$f''' - \log a (2f'^2 - ff'') = 0 \quad (5)$$



and the boundary conditions becomes:

$$f'(0) = 1, \quad f(0) = S/\log a, \quad f' \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (6)$$

where prime (') denotes the derivative with respect to the  $\eta$  and the suction is given by

$$S = \frac{V_0}{\sqrt{U_0 \nu / 2L}} > 0.$$

### 3. HEAT TRANSFER PROBLEM

The energy equation with convective surface boundary condition is

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (7)$$

with relevant boundary conditions

$$T(x, 0) = T_w = T_\infty + T_0 \alpha^{x/2L} \quad (8a)$$

$$T \rightarrow T_\infty \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (8b)$$

where  $\alpha$  is the thermal diffusivity of the fluid,  $T_w$  is temperature of the wall and  $T_\infty$  is the ambient fluid temperature, that is, the temperature of the fluid far away from the plate,  $T_0$  is the reference temperature.

Referring Rosseland, S. [20] and Siegel R., Howell J. R. [22], the radiative heat flux may be considered as

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y}, \quad (9a)$$

where  $\sigma^*$  and  $k^*$  are the Stefan-Bltzmann constant and the mean absorption coefficient, respectively. Here we use the approximation as it is being used by Battler [3], [4], Pal [18], Pal and Mondal [19], Mukhopadhyay and Layek [17], Ishak [12] and N. Ahmad and Ravins [1], as

$$T^4 \approx 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4. \quad (9b)$$

Using (9a) and (9b) in equation (7), we get

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\alpha}{K_0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (10)$$

where  $K_0 = \frac{3N}{3N+4}$  with  $N = \frac{Kk^*}{4\sigma^*T_\infty^3}$  is the radiation parameter.

Defining the dimensionless temperature as

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_0 \alpha^{2L}}, \quad (11)$$

which further implies that

$$T(\eta) = T_\infty + T_0 a^{\frac{x}{2L}} \theta(\eta) \quad \text{and} \quad \eta = \sqrt{\frac{U_0}{2Lv}} a^{x/L} y. \quad (12)$$

Substituting the value of  $u, v$  and the similarity transformation (12) into equation (10), this equation reduces to

$$\theta'' = Pr K_0 \log a (f' \theta - f \theta'), \quad (13)$$

where  $Pr = \nu/\alpha$ , is the Prandtl number and boundary conditions (8a) and (8b) take the following form:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{and} \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (14)$$

The equations (5) and (13) along with the boundary conditions (6) and (14), respectively, are solved by converting them to the initial value problem.

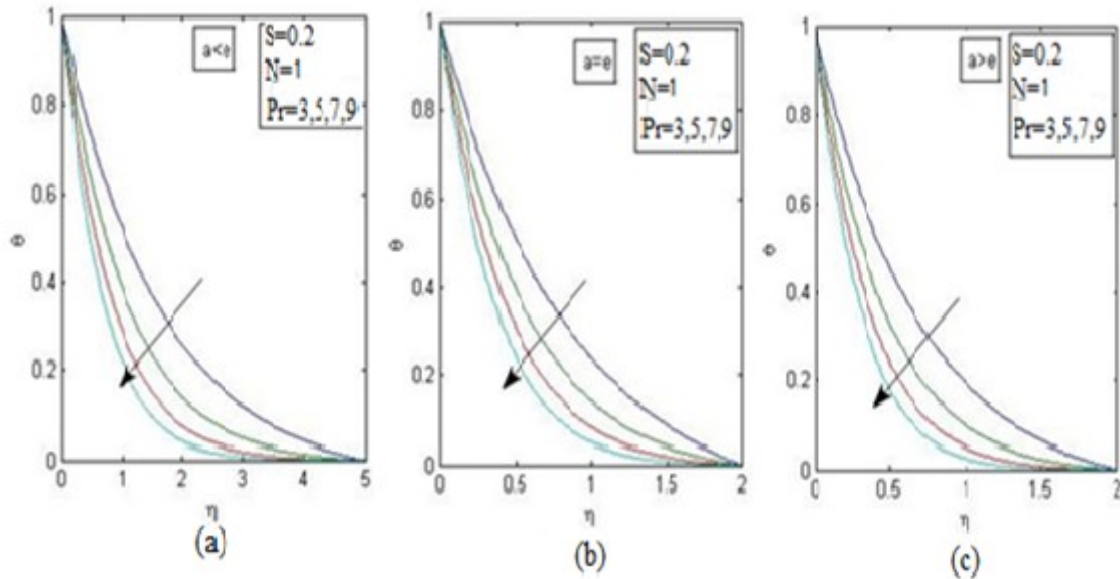
The boundary value problem (5) with (6) is non-linear two-point boundary value problem in an infinite domain. To solve numerically we apply the shooting method to convert the boundary value problem into initial value problem. By shooting method we get  $f''(0) = -0.9811$  correct to  $10^{-6}$ . Similarly, by shooting technique, we get  $\theta'(0) = -4.2902$  correct to  $10^{-6}$ . Finally, we apply Runge-Kutta method of order four using MATLAB R2009a, we get the different graphs and by reading these graphs, we reach to the conclusions.

#### 4. DISCUSSION AND RESULTS

Generalization of boundary layer flow problem and heat transfer over an exponential stretching sheet to a general exponential stretching sheet were solved numerically by applying shooting technique and Runge-Kutta fourth order method.

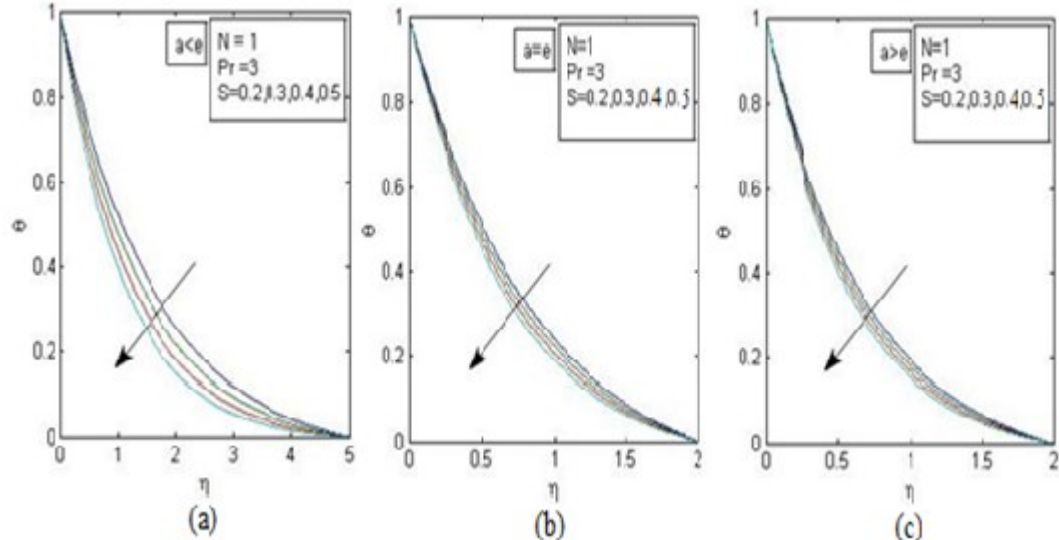
The present flow and heat transfer problem becomes a three-parameter boundary value problem. Here we discuss three cases in a general exponential stretching sheet  $a = e, a < e$ , and  $a > e$ .

In this section, our concentration for the variation of parameters on the temperature only because of all these parameters is free from the velocity components in all three cases. We summarize the results in the following paragraphs:



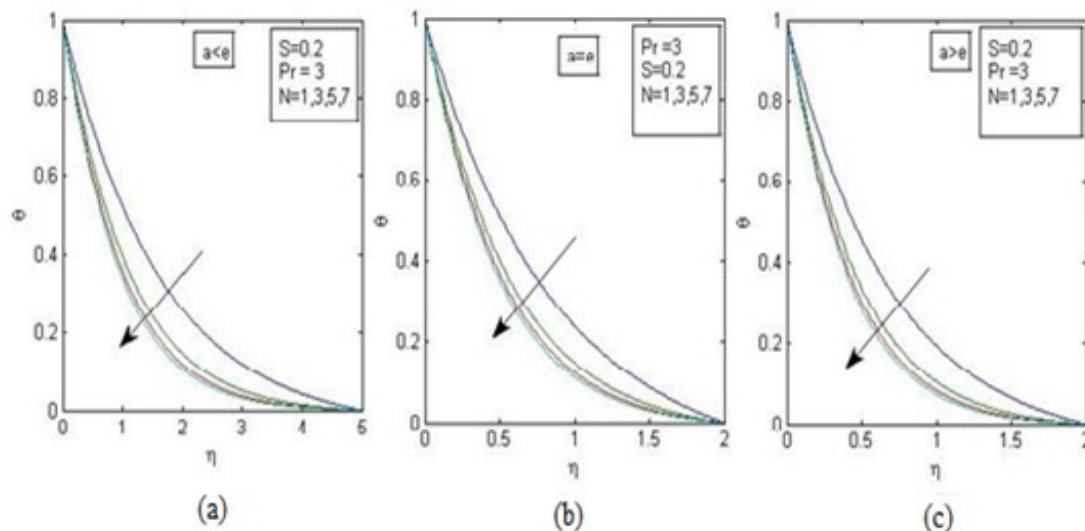
**Figure 1.** Temperature profile for different values of Prandtl numbers, keeping radiation parameter  $N = 1$  and parameter  $S = 0.2$  fixed in all three cases  $a = e$ ,  $a < e$ , and  $a > e$ .

General exponential function  $a^x$  where  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  and  $x$  is any real number. To maintain the stretching, we take  $a > 1$ , so that the physically boundary condition  $u = U_0 a^{\frac{x}{L}}$  represents the stretching character of the plate. To see the effect of Prandtl number  $Pr$  on temperature field, we take suction parameter  $S = 0.2$  and radiation parameter  $N = 1$ , that is, suction and radiation become fixed. We vary the Prandtl number,  $Pr$ , randomly. In all three cases  $a = e$ ,  $a < e$ , and  $a > e$ , the temperature field decreases as Prandtl number increases. Since,  $Pr$  increases, if the thermal conductivity  $K$  decreases. Therefore, the temperature field decreases. This trend is agreed with the work done by Swati Mukhopadhyay [16].



**Figure 2.** Temperature profile for different values of suction parameter  $S = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ , keeping radiation parameter  $N = 1$  and Prandtl numbers  $Pr = 3$  fixed in all three cases  $a = e$ ,  $a < e$ , and  $a > e$ .

The effect of suction parameter  $S$  has been shown on temperature. As suction parameter  $S$  increases, the temperature field decreases in all the three cases (a), (b) and (c) of Figure 2. It is well known fact that as  $S$  increases, the temperature decreases because the suction has the cooling effect.



**Figure 3.** Temperature profile for different values of radiation parameter  $N = 1, 3, 5, 7$ , keeping suction parameter  $S = 0.2$  and Prandtl numbers  $Pr = 3$  fixed in all three cases  $a = e$ ,  $a < e$ , and  $a > e$ .

From all the graphs given in Figure 3, we see that the temperature field is maximum when  $N = 1$ . Thus, the radiation of unit magnitude contributes well to increase the temperature field. As the magnitude of radiation increases, the process of heat transfer from fluid to atmosphere starts, hence temperature field decreases as radiation increases.

## 5. CONCLUSION

This paper is the generalization of the work done on boundary layer flow over an exponentially stretching sheet. The pattern of heat transfer is almost same as considered for the stretching governed by  $e^x$ .

## REFERENCES

- [1] Ahmad N, Ravins. Unsteady viscoelastic boundary layer flow past a stretching plate and heat transfer. *Russian Journal of Mathematical Research. Series A*. 2016, Vol. (4), Is. 2.
- [2] Ali ME. On thermal boundary layer on a power-law stretched surface with suction or injection. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1995. 16(4): 280-290.
- [3] Batller RC. Similarity solutions for boundary layer flow and heat transfer of a FENE fluid with thermal radiation. *Physics Letters A*. 2008. 372(14): 2431-2439.
- [4] Batller RC. Similarity solutions for flow and heat transfer of a quiescent Fluid over a nonlinearly stretching surface. *Journal of materials processing technology*. 2008. 203(1): 176-183.
- [5] Chen CK, Char MI. Heat transfer of a continuous, stretching surface with suction or blowing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1988.135(2 ): 568-580.
- [6] Cortell R. Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet. *Applied Mathematics and Computation*. 2007. 184(2): 864-873.
- [7] Cortell R. Effects of viscous dissipation and radiation on the thermal boundary layer over a nonlinearly stretching sheet. *Physics Letters A*. 2008. 372(5): 631-636.
- [8] Crane LJ. Flow past a stretching plate. *Zeitschrift fur angewandte Mathe-matik und Physik ZAMP*. 1970. 21(4): 645-647.
- [9] Dutta BK, Roy P, Gupta AS. Temperature field in flow over a stretching Sheet with uniform heat ux. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 1985. 12(1): 89-94.

- [10] Gupta PS, Gupta VG. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 1977. 55(6): 744-746.
- [11] Hayat T. and Sajid M. Analytic solution for axisymmetric flow and heat transfer of a second-grade fluid past a stretching sheet. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2007. 50(1): 75-84.
- [12] Ishak A. Thermal boundary layer flow over a stretching sheet in a micropolar fluid with radiation effect, *Meccanica*. 2010. 45(3): 367-373.
- [13] Khader MM, Megahed AM. Numerical treatment for flow and heat transfer of Powell Eyring fluid over an exponential stretching sheet with variable thermal conductivity. *Meccanica*. 2016. 51(8): 1763-1770.
- [14] Kumaran V, Ramanaiah G. A note on the flow over a stretching sheet. *Acta Mechanica*. 1996. 116(1): 229-233.
- [15] Magyari E, Keller B. Heat and mass transfer in the boundary layers on an exponentially stretching continuous surface. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1999. 32: 577-585.
- [16] Mukhopadhyay S. Slip effects on MHD boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with suction/blowing and thermal radiation. *Ain Shams Engineering Journal*. 2013. 4(3): 485-491.
- [17] Mukhopadhyay S, Layek GC. Radiation effect on forced convective flow and heat transfer over a porous plate in a porous medium. *Meccanica*. 2009. 44(5): 587-597.
- [18] Pal D. Heat and mass transfer in stagnation-point flow towards a stretching surface in the presence of buoyancy force and thermal radiation. *Meccanica*. 2009. 44(2): 145-158.
- [19] Pal D, Mondal H. Radiation effects on combined convection over a vertical flat plate embedded in a porous medium of variable porosity. *Meccanica*. 2009. 44(2): 133-144.
- [20] Rosseland S. *Theoretical astrophysics*. Oxford, Clarendon press; 1936.
- [21] Sanjayanand E, Khan SK. On heat and mass transfer in a visco-elastic boundary layer flow over an exponentially stretching sheet. *Int. J. Therm. Sci.* 2006.45: 819-828.
- [22] Siegel R, Howell JR. *Thermal radiation: heat transfer*. 3rd ed. Hemisphere: Washington; 1936.



## \* Ricci Solitons and Symmetries of Type $D$ Gravitational Fields in Spacetime Manifolds

Mohd. Danish Siddiqi\*

\*Jazan University Faculty of Science Department of Mathematics. Jazan, Kingdom of Saudi Arabia.  
e-mails: msiddiqi@jazanu.edu.sa

(Arrival: 02.06.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### Abstract

In the present research paper we study \* Ricci solitons with a physical interpretation of the notion of the vector field associated with \* Ricci solitons. We investigate the geometrical symmetries of Petrov type  $D$  gravitational fields along the vector field also associated with \* Ricci solitons.

**Keywords:** \*Ricci solitons, Petrov type,  $D$  gravitational field, Weyl curvature tensor.

### 1. INTRODUCTION

In general theory of relativity, the curvature tensor describing the gravitational field mainly consists of two parts viz, the matter part and the free gravitational part. The interaction between these two parts is described through Bianchi identities. For a given distribution of matter, the construction of gravitational potential satisfying Einstein's field equations is the principal goal of all studies in gravitational physics and this has often been achieved by imposing symmetries on the geometry compatible with the dynamics of the chosen distribution of matter. The geometrical symmetries of the space time are expressible through the vanishing of the Lie derivative of certain tensors with respect to a vector.

In differential geometry and theoretical physics, the **Petrov classification** (also known as Petrov–Pirani–Penrose classification) describes the possible algebraic symmetries of the Weyl tensor at each event in a Lorentzian manifold.

It is most often applied in studying exact solutions of Einstein's field equations, but strictly speaking the classification is a theorem in pure mathematics applying to any Lorentzian manifold, independent of any physical interpretation. The classification was found in 1954 by A. Z. Petrov and independently by Felix Pirani in 1957.

The following Figure 1 show the Penrose diagram of the possible degeneration of the Petrov type of the Weyl tenosr.

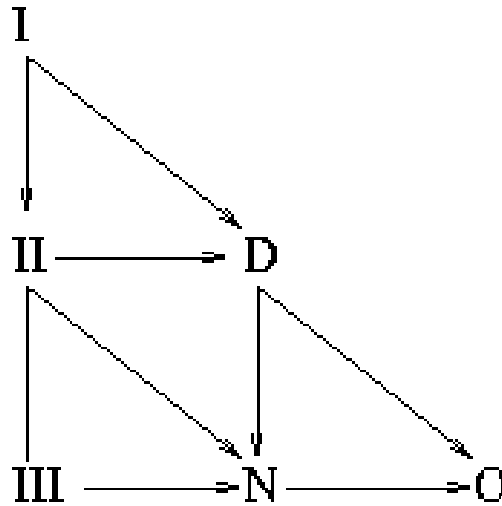


Figure: 1. Penrose Diagram

The nature of the gravitational radiation from a bounded source is an important physical problem. Even reasonably far from the source, however, twisting type  $D$  solutions of the vacuum field equations are required for an exact description of that gravitation. It is well known fact that Petrov type  $D$  solutions of the Einstein vacuum equations are among the most interesting of all empty spacetime metrics [15]. The physical importance, they represent spacetime with gravitational radiation while mathematically they form a class of solution of Einstein equations which should be possible to be determined explicitly.

Recently geometric flows have become important tools in Riemannian geometry and general relativity. In [8] B. List has studied a geometric flow whose fixed points corresponds to static Ricci flat spacetime which is nothing but Ricci flow pullback by a certain diffeomorphism. The association of each Ricci flat spacetime gives notion of local Ricci soliton in one higher dimension. The importance of geometric flow in Riemannian geometry is due to Hamilton who has given the flow equation and B. List generalized Hamilton's equation and extend it to spacetime for static metric [8]. He has given system of flow equations whose fixed points solve the Einstein free-scalar field system [8]. This observation is useful for the correspondence of solutions of system i.e., Ricci soliton and symmetry property of spacetime, that how Riemannian space (or spacetime) with Ricci Soliton deals different kind of symmetry properties.

Ricci solitons generate self-similar solutions to Ricci flow. Ricci solitons is the generalization of Einstein metrics

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \tag{1.1}$$

In 1959, S. Tachibana [17] introduced the notion of \* Ricci tensor

$$R_{ij}^* = \text{trace}(\phi \circ \quad )) \tag{1.2}$$

Definition. A pseudo Riemannian metric  $g$  on  $M$  is called \* Ricci solitons if

$$L_{\nu} g + 2R_{ij}^* + 2\lambda g_{ij} = 0 \tag{1.3}$$

Now, we have following lemma[18]

**Lemma.** [18] In a pseudo Riemannian manifold  $(M^n, g)$ ,  $(n > 2)$  a  $(0, 2)$  symmetric tensor is a generalized  $*R$  tensor [18]

$$R_{ij}^* = R_{ij} + \varphi g_{ij} \quad (1.4)$$

where  $R$  and  $*R$  are Ricci and  $*Ricci$  tensor of type  $(0,2)$  respectively and  $\varphi$  is an arbitrary scalar function.

The role of symmetries in general theory of relativity has been introduced by Katzin, Levine and Davis in a series of papers [10,12]. These symmetries, also known as collineations, were further studied by Ahsan [1-4], Ahsan and Ali [5,6]. The perfect fluid spacetime including electromagnetic field which admit symmetry mapping belonging to the family of contracted Ricci colloneation, have been studied by Norris et al. [13]. The role of geometrical symmetries in the study of fluid spacetime, with an empphasis on conformal collineation has been studied by Duggal [11] and others. The different types of symmetries of Petrov type  $D$  gravitational fields has been subject of interest since last few decades (cf,[4]).

Motivated by the role of symmetries and Einstein solitons, a study of vector field involved in the definition of Einstein solitons and symmetries of spacetime is made. The main results on the relation between the symmetries of Petrov type  $D$  gravitational fields and  $* Ricci$  solitons has been studied.

## 2. PRELIMINARIES

**(a)  $*Ricci$  Solitons.** A family  $g_\lambda = (\lambda - \varphi, x)$  of the Riemannian metrics on a  $n$ -dimensional  $(n \geq 3)$  smooth manifold  $M$  with parameter  $\lambda$  ranging in the time interval  $I \subset \mathbb{R}$  including zero Equation (1.3) of Ricci flow for  $g_0 = g(0)$  and the  $* Ricci$  tensor  $R_{ij}^*$  and curvature tensor  $R$  of the  $g_0$  satisfied. Corresponding to self similar solution of equation (1.3) is the notion of the local  $* Ricci$  soliton, defined as a metric  $g_0$  satisfying equation

$$-2R_{ij}^* = L_\xi g_0 + 2(\lambda - \varphi)g_0 \quad (2.1)$$

For vector field  $\xi$  on  $V_n$  and a constant  $\lambda$ . The  $* Ricci$  solitons is said to be steady (static) if  $\lambda = 0$ , shrinking  $\lambda < 0$  and expanding if  $\lambda > 0$ . The metric  $g_0$  is called a gradient  $* Ricci$  solitons if  $\xi = \nabla \phi$  i.e., gradient of some function  $\phi$ . Schwarzschild metric, Akbar and Woolger [7] have derived the expressions around this notion; while Ali and Ahsan [6] have studied this concept for obtaining the Gaussian curvature of Schwarzschild solitons ad we have.

For  $n$ -dimensional Riemannian manifold equation (2.1) a can be written in general as

$$R_{ij}^* - \frac{1}{2} L_\xi g_{ij} = (\lambda - \varphi) g_{ij} \quad (2.2)$$

So far more than twentyseven different types of collineations have been studied and the literature on such collineations is very large abd still with results of elegance (see [4]). However,



here we shall mention only those symmetry assumptions that are required for subsequent investigation and we have

**(b) Motion.** A spacetime is said to admit motion if there exist a vector field  $\xi^t$  such that

$$L_{\xi}g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0 \quad (2.3)$$

equation (2.3) is known as Killing equation and vector  $\xi^t$  is called a Killing vector field [16].

**(c) Conformal Motion.** If

$$L_{\xi}g_{ij} = \sigma g_{ij} \quad (2.4)$$

Where  $\sigma$  is a scalar, then the spacetime is said to admit conformal motion and vector field  $\xi$  is called a conformally Killing vector field.

**(d) Special Conformal Motion.** A spacetime admits if special conformal motion

$$L_{\xi}g_{ij} = \sigma g_{ij}, \quad \sigma_{;i} = 0 \quad (2.5)$$

**(e) Curvature Collineation.** A spacetime admits curvature collineation if there is a vector field  $\xi^i$  such that

$$L_{\xi}R^i{}_{jkl} = 0 \quad (2.6)$$

Where  $R^i{}_{jkl}$  is the Riemannian curvature tensor.

**(f) Ricci Collineation.** A spacetime is said to admit Ricci collineation if there is a vector field  $\xi^i$  such that

$$L_{\xi}R_{ij} = 0 \quad (2.7)$$

Where  $R_{ij}$  is the Ricci tensor.

**(g) Affine Collineation.** If

$$L_{\xi}\Gamma^i{}_{jk} = \xi^i{}_{;jk} + R^i{}_{jmk}\xi^m = 0 \quad (2.8)$$

Then spacetime is said to admit an affine collineation.

**(h) Weyl Projective Collineation.** A symmetry property of a spacetime is called Weyl projective collineation if and only if

$$L_{\xi}W^i{}_{jkl} = 0 \quad (n > 2) \quad (2.9)$$

Where  $W^i{}_{jkl}$  is Weyl tensor.

### 3. MAIN RESULTS

In this section, we shall discuss the role of \* Ricci solitons in the study of Einstein spaces and Petrov type  $D$  gravitational fields. In 4-dimensionanl spacetime, the Weyl tensor is related to the Riemannian and Ricci tensors through the equation

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) + \frac{1}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R \quad (3.1)$$

In NP-formalism (cf. [15]), the components of Weyl tensor are expressed by five complex scalars  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  and  $\Psi_4$ . Through these components the gravitational field has been classified into six categories type  $I, II, D, III$  and  $O$  (cf [15]). The Weyl scalar along with Goldberg-Sachs theorem declares type  $N$  pure radiation field follow the conditions

$$\Psi_4 = \Psi \neq 0, \quad \Psi_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

$$\kappa = \sigma = \varepsilon = 0 \quad (3.3)$$

where  $\kappa, \sigma, \varepsilon$  are the spin-coefficients [15]. Ali and Ahsan [6] have obtained symmetries for Weyl conformal tensor. Using equations (3.1) to (3.3) and the definitions (b)-(c), we can write the following:

**Lemma 3.1.** In type  $D$  pure gravitational fields every conformal motion, special conformal motion and homothetic motion, all degenerate to motion.

From equations (1.3), (1.4) (2.1) and (2.2), we have

$$2R_{ij} = L_{\xi}g_{ij} + 2(\lambda - \varphi)g_{ij} \quad (3.4)$$

$$= \xi_{i;j} + \xi_{j;i} + (\lambda - \varphi)g_{ij} \quad (3.5)$$

Contracting this equation with  $g^{ij}$ , we get

$$R = \xi^i_{;j} + (\lambda - \varphi)n \quad (3.6)$$

Which can be expressed as

$$\text{div } \xi = \nabla_i \xi^i = [R - (\lambda - \varphi)n] \quad (3.7)$$

where  $R = g^{ij}R_{ij}$  is the scalar curvature. From equations (3.3) and (3.7), we get

$$\left( \frac{1}{n} R g_{ij} - R_{ij} \right) = -\frac{1}{2} L_{\xi} g_{ij} + \frac{1}{n} (\text{div } \xi) g_{ij} - \varphi g_{ij} \quad (3.8)$$

Now for  $g_{ij}$  to be Einstein metric i.e.,  $R^*_{ij} = \sigma g_{ij}$  where  $\sigma$  can be chosen as  $\frac{R}{n}$ , equation (3.3) together with the definition of conformal motion gives the following results:

**Lemma 3.2.** [14] The vector field  $\xi$  associated with \* Ricci solitons  $(M, g)$  is conformally Killing if and only if  $(M, g)$  is an Einstein manifold of dimension  $(n \geq 3)$ .

Now, using Lemmas 3.1 and 3.2, we can state the following theorem:

**Theorem 3.3.** Type  $D$  pure gravitational field admit motion along a vector field  $\xi$  associated to \* Ricci solitons  $(M, g)$  if and only if  $M$  is an Einstein space.

For Killing vector field  $\xi$ , equation (1.4) reduces to

$$R^*_{ij} = (\lambda - \varphi) g_{ij} \quad (3.9)$$

Taking Lie derivative with respect to vector field  $\xi$

$$L_{\xi} R_{ij} = \left( \lambda - \frac{R}{2} \right) L_{\xi} g_{ij} = 0 \quad (3.10)$$

Thus, we have the following theorem:

**Theorem 3.4.** A vector field  $\xi$  associated to Einstein solitons  $(M, g)$  is Ricci collineation vector field in Type  $N$  pure radiation field if  $g$  is Einstein metric.

Taking the Lie derivative of Christoffel symbol  $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right)$

along the vector field  $\xi$ , after the calculation we get

$$L_{\xi} \Gamma^i_{jk} = \xi^i_{;jk} + R^i_{jmk} \xi^m \quad (3.11)$$

Now if  $\xi$  is Killing vector field, then

$$\xi^i_{;jk} + R^i_{jmk} \xi^m = 0 \quad (3.12)$$

Where

$$R^h_{ijk} = -\frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^a_{ij} \Gamma^h_{ak} + \Gamma^b_{ik} \Gamma^h_{bj} \quad (3.13)$$

is the Riemannian curvature tensor.

Using (3.11) and (3.12) along with the definition of affine collineation, we can have the following result:

**Theorem 3.5.** Type  $N$  pure radiation field admit affine collineation along a Killing vector field  $\xi$  associated to Einstein solitons  $(M, g)$  if and only if  $M$  is an Einstein space.

By the definition of Lie derivative

$$L_{\xi} R^i_{jkl} = \xi^h R^i_{jkl;h} - R^h_{jkl} \xi^i_{;h} + R^i_{hkl} \xi^h_{;j} + R^i_{jhl} \xi^h_{;k} + R^i_{jkh} \xi^h_{;l} \quad (3.14)$$

Using the definition of Christoffel symbol and Killing vector  $\xi$ , we have

$$L_{\xi} R^i_{jkl} = 0$$

which establishes the curvature collineation, so we have.

**Theorem 3.6.** A killing vector field  $\xi$  associated to Einstein solitons  $(M, g)$  is Curvature collineation vector field in type N pure radiation field if  $g$  is Einstein metric.

The Weyl projective tensor is given by

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{3}(R_{jk} \delta^i_j - R_{jl} \delta^i_k) \text{ for } R_{ij} = 0, \quad W^i_{jkl} = R^i_{jkl} \text{ or } W_{ijkl} = R_{ijkl} \quad (3.15)$$

From equation (1.8) and (3.15), we can easily write.

**Lemma 3.7. [12]** In a Riemannian manifold curvature collineation implies the Weyl projective collineation but converse is true for empty spacetimes.

So, the theorem 3.6 and Lemma 3.7 constitute the following:

**Corollary 3.8.** A Killing vector field  $\xi$  associated to Einstein solitons  $(M, g)$  is Weyl Projective collineation vector field in type N pure radiation if  $g$  is Einstein metric.

## CONCLUSIONS

For Einstein space different kind of symmetry properties for  $N$  pure radiation fields are established with the help of vector field associated with Einstein solitons. There are other symmetries for type  $N$  which can be obtained through the existence of Killing vectors corresponding to Einstein solitons.

## REFERENCES

- [1] Ahsan Z. Symmetries of the Electromagnetic fields in General Relativity. *Acta Phys. Sincia*. 1995. 337 (4).
- [2] Ahsan Z. A Symmetry properties of the spacetime of general relativity in terms of the space matter tensor. *Brazilin Journal of Phys.* 1996. 26(3): 572-576.
- [3] Ahsan Z. Interacting radiation field. *Indian J. Pure App. Maths.* 2000. 31(2): 215-225.
- [4] Ahsan Z. On a geometrical symmetry of the spacetime of general relativity. *Bull. Cal. Math. Soc.* 2005.97 (3): 191-200.
- [5] Ali M, Ahsan, Z. Ricci Solitons and Symmetries of spacetime manifold of General relativity. *Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom.* 2013. 1(2): 75-84.
- [6] Ali M, Ahsan Z. Gravitational field of Schwarzschild soliton. *Arab J. Math. SCI*. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ajmsc.2013.10.003>.
- [7] Akbar MM, Woolger E. Ricci soliton and Einstein scalar field theory. *Class. Quantum Grav.* 2009. 26, 55015.
- [8] B List. Evolution of an extended Ricci flow system, Phd thesis 2005.
- [9] Catino G, Mazzieri L. Gradient Einstein solitons. *Nonlinear Analysis.* 2016. 132: 66-74.

- [10] Davis WR, Green LH., Norris LK. Relativistic matter fields admitting Ricci collineation and elated conservation laws. II *Nuovo Cimento*. 1976. 34(B): 256-280.
- [11] Duggal KL. Relativistic fluids with shear and timelike conformal collineation. *J. Math. Phys.* 1987. 28: 2700-2705.
- [12] Katzin GH, Levine J. Application of Lie derivatives to the symmetries Geodesic mappings and first integrals in Riemannian spaces. *J. Colloq. Math.* 1972. 26: 21-38.
- [13] Norris LK, Green LH, Davis WR. Fluid space time including electromagnetic fields admitting symmetry mappings belonging to the family of contracted Ricci collineations. *J. Math. Phys.* 1977. 18: 1305-1312.
- [14] Stepanov SE, Shelepova VN. A note on Ricci solitons. *Mathmaticheskije Zametici*. 2009. 86(3): 474-477.
- [15] Stephani H, Kramer, D, McCallum M, Herlt, E. Exact solutions of Einstein field equations. Cambridge Univ. Press, Cambridge; 2003.
- [16] Yano K. The theory of Lie derivative and its Application, Vol III, North Holand publishing co. Amsterdam p. Noordhoff L.T.D. Groningen; 1957.
- [17] Tachibana S. On almost-analytic vectors in almost-Kahlerian manifolds. *Tohoku Math. J.* 1959. 11(2): 247-265.
- [18] Kaimakamis G, Panagiotidou K. \*Ricci solitons of real hypersurfaces in non-at complex space forms. *J. Geom. Phys.* 2014. 86: 408-413.



## Non-invariant Hypersurfaces of Hyperbolic Sasakian Manifolds

Toukeer Khan

Mazoon College, P. O. Box. 101, P.C. 133, Airport Heights, Al-Seeb Muscat, Sultanate of Oman.  
E-mail: toukeerkhan@gmail.com

(Arrival: 01.06.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### Abstract

The object of this paper is to study non-invariant hypersurfaces of hyperbolic Sasakian manifolds equipped with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure. Some properties obeyed by this structure are obtained. The necessary and sufficient conditions also have been obtained for totally umbilical non -invariant hypersurfaces with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifolds to be totally geodesic. The second fundamental form of a non-invariant hypersurface of hyperbolic Sasakian manifolds with  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure has been traced under the condition when  $f$  is parallel.

**Keywords and Phrases:** Hyperbolic Sasakian manifold, totally geodesic, totally umbilical.  
*2000 Mathematics Subject Classification:* 53D05, 53D25, 53D12.

### 1. INTRODUCTION

*Blair and Ludden* [4] studied the hypersurfaces in an almost contact manifolds in 1969. They also proved that there does not exist invariant hypersurface of a contact manifold. In 1970, *S. I. Goldberg et. al* [2] introduced the notion of a non-invariant hypersurfaces of an almost contact manifold in which the transform of a tangent vector of the hypersurface by the  $(1, 1)$  structure tensor field  $f$  defining the almost contact structure is never tangent to the hypersurface and also proved that there always exists a  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure on a non-invariant hypersurface of an almost contact metric manifold. The notion of  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure was given by *Yano and Okumura* [3]. *Sinha and Sharma* [8] studied the hypersurfaces of an almost paracontact metric manifold with para  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure.

The notion of geodesic plays an important role in the theory of relativity [5]. *Upadhyay and Dubey* [14] studied an almost hypersurfaces contact  $(f, \xi, \eta, g)$  –structure. *R. Prasad* [12] studied the non-invariant hypersurfaces of trans-Sasakian manifolds. *T. Khan* [11] studied the non-invariant hypersurfaces of Nearly Kenmotsu manifold. *Ahmed et. el.* [13] studied the non-invariant hypersurfaces of nearly hyperbolic Sasakian manifold. In the present paper, we study the non-invariant hypersurfaces of hyperbolic Sasakian manifolds.

This paper is organized as follows. In section 2, we give a brief description of hyperbolic Sasakian manifolds. In section 3, introduce the non-invariant hypersurfaces and induced  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure on non-invariant hypersurface  $M$  getting some equation. Some results of non-invariant hypersurfaces with  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure of hyperbolic Sasakian manifolds. The necessary and sufficient conditions also have been obtained for totally umbilical non-invariant hypersurfaces with  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure of hyperbolic Sasakian manifolds to be totally geodesic.

### 2. PRELIMINARIES

Let  $\widehat{M}$  be a complete real differentiable manifold of dimension  $(2n + 1)$ . Let there exist a tensor field  $\phi$  of type  $(1,1)$ , a vector field  $\xi$  and a 1 – form  $\eta$  satisfying

$$\phi^2 X = X + \eta(X)\xi \quad (2.1)$$

$$\eta(\phi X) = 0 \quad (2.2)$$

for arbitrary vector fields  $X, Y \in TM$ . Then  $\widehat{M}$  is called a hyperbolic contact manifold ([8], [14]). From the above equation we can easily prove that

$$\phi\xi = 0 \quad (2.3)$$

$$\eta(\xi) = -1 \quad (2.4)$$

Let the hyperbolic contact manifold  $\widehat{M}$  be an endowed with a Riemannian metric  $g$  such that

$$\Phi(X, Y) = g(\phi X, Y) \quad (2.5)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.6)$$

$$g(X, \xi) = \eta(X) \quad (2.7)$$

A hypersurfaces contact structure satisfying the equations (2.1) to (2.6) is said to be a hyperbolic contact metric manifold [14].

A hyperbolic contact metric manifold is said to be a hyperbolic cosymplectic metric manifold if the structure tensor  $\phi$  and the 1–form  $\eta$  are parallel with respect to a symmetric affine connection  $\widehat{\nabla}$  on  $\widehat{M}$ . Since  $\phi^2 = I + \eta \otimes \xi$ , the vector field  $\xi$  is also parallel with respect to  $\xi$ , i.e.

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)Y = 0 \quad (2.5)$$

$$(\widehat{\nabla}_X \eta)Y = 0 \quad (2.6)$$

$$\widehat{\nabla}_X \xi = 0 \quad (2.7)$$

A hyperbolic contact metric manifold  $\widehat{M}$  in which

$$-2\Phi = d\eta \quad (2.11)$$

is satisfied, called an almost hyperbolic Sasakian manifold.

An almost hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , for which  $\xi$  is Killing vector, i.e.

$$(\widehat{\nabla}_X \eta)Y + (\widehat{\nabla}_Y \eta)X = 0 \quad (2.12)$$

where  $\widehat{\nabla}$  is the Riemannian connection, is called a hyperbolic K-contact Riemannian manifold.

In a hyperbolic K-contact Riemannian manifold, the following relation hold

$$\phi(X, Y) = -(\widehat{\nabla}_X \eta)Y = (\widehat{\nabla}_Y \eta)X \quad (2.13)$$

A hyperbolic K-contact Riemannian manifold  $\widehat{M}$  is called a hyperbolic Sasakian manifold [7], if

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.14)$$

$$\widehat{\nabla}_X \xi = -\phi X \quad (2.15)$$

A hypersurfaces of an almost contact metric manifold  $\widehat{M}$  is called a non-invariant hypersurfaces, if the transform of a tangent vector of the hypersurfaces under the action of (1,1) tensor field  $\phi$  defining the contact structure is never tangent to the hypersurfaces. Let  $X$  be tangent vector on non-invariant hypersurfaces of an almost contact metric manifold  $\widehat{M}$ , then  $\phi X$  is never to tangent of the hypersurfaces.

Let  $\widehat{M}$  be a non-invariant hypersurface of an almost contact metric manifold, Now, we define the following:

$$\phi X = fX + u(X)\widehat{N} \quad (2.16)$$

$$\phi \widehat{N} = -U \quad (2.17)$$

$$\xi = V + \lambda \widehat{N}, \quad \lambda = \eta(\widehat{N}) \quad (2.18)$$

$$\eta(X) = v(X) \quad (2.19)$$

where  $f$  is (1,1) tensor field,  $u$  and  $v$  are 1-form,  $\widehat{N}$  is a unit normal to the hypersurface,  $X \in TM$  and  $u(X) \neq 0$ , then we get an induced  $(f, g, u, v, \lambda)$  - structure on  $\widehat{M}$  satisfying the conditions

$$\begin{cases} f^2 = I + u \otimes U + v \otimes V, \\ u \circ f = \lambda v, v \circ f = -\lambda u, \\ v(V) = -1 - \lambda^2, u(V) = 0 = v(U), u(U) = -1 - \lambda^2, \\ fV = \lambda U, fU = \lambda V, \\ u(X) = g(X, U), v(X) = g(X, V), \\ g(fX, fY) = -g(X, Y) - u(X)u(Y) - v(X)v(Y) \end{cases} \quad (2.20)$$



Using equation (2.5) and (2.6), we have

$$\Phi(X, fY) - \Phi(fX, Y) = 2g(fX, fY) + v(X)v(Y) \quad (2.21)$$

for all  $X, Y \in TM$  &  $\lambda = \eta(\widehat{N})$ .

The Gauss and Weingarten formulae are given by

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y)\widehat{N} \quad (2.22)$$

$$\widehat{\nabla}_X \widehat{N} = -A_{\widehat{N}}X \quad (2.23)$$

for all  $X, Y \in TM$ , where  $\widehat{\nabla}$  and  $\nabla$  are the Riemannian and induced connection on  $\widehat{M}$  and  $M$  respectively and  $\widehat{N}$  is the unit normal vector in the normal bundle  $T^\perp M$ . In this formula  $\sigma$  is the second fundamental form on  $M$  related to  $A_{\widehat{N}}$  by

$$\sigma(X, Y) = g(A_{\widehat{N}}X, Y) \quad (2.24)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

### 3. NON-INVARIANT HYPERSURFACES

**Lemma 3.1.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , then

$$(\widehat{\nabla}_X \eta)Y + (\widehat{\nabla}_Y \eta)X = (\nabla_X v)Y + (\nabla_Y v)X - 2\lambda\sigma(X, Y) \quad (3.1)$$

$$\widehat{\nabla}_X \xi = \nabla_X V - \lambda A_{\widehat{N}}X + (\sigma(X, V) + X\lambda)\widehat{N}. \quad (3.2)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof.** After computations similar to Lemma 3.1[4], lemma follows.

**Theorem 3.2.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , then

$$(\nabla_X f)Y = g(X, Y)V + u(Y)A_{\widehat{N}}X - v(Y)X - \sigma(X, Y)U \quad (3.3)$$

$$(\nabla_X u)Y = \lambda g(X, Y) - \sigma(X, fY) \quad (3.4)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof:** By covariant differentiation, we know that

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)Y = \widehat{\nabla}_X \phi Y - \phi(\widehat{\nabla}_X Y)$$

Using equation (2.16) in (2.22), we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) Y = \widehat{\nabla}_X (fY + u(Y)\widehat{N}) - \phi(\nabla_X Y + \sigma(X, Y)\widehat{N})$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) Y = \widehat{\nabla}_X fY + \widehat{\nabla}_X (u(Y)\widehat{N}) - \phi \nabla_X Y - \sigma(X, Y)\phi \widehat{N}$$

Using (2.16) and (2.17), we have

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_X \phi) Y &= \nabla_X fY + \sigma(X, fY)\widehat{N} + u(Y)(\widehat{\nabla}_X \widehat{N}) + (\widehat{\nabla}_X u(Y))\widehat{N} - f\nabla_X Y - u(\nabla_X Y)\widehat{N} \\ &\quad + \sigma(X, Y)U \end{aligned}$$

Using (2.23), we have

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_X \phi) Y &= \nabla_X fY - f\nabla_X Y + \sigma(X, fY)\widehat{N} - u(Y)A_{\widehat{N}} X + \sigma(X, Y)U \\ &\quad + (\nabla_X u(Y) + \sigma(X, u(Y))\widehat{N})\widehat{N} - u(\nabla_X Y)\widehat{N} \end{aligned}$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) Y = (\nabla_X f)Y - u(Y)A_{\widehat{N}} X + \sigma(X, Y)U + \sigma(X, fY)\widehat{N} + (\nabla_X u(Y) - u(\nabla_X Y))\widehat{N}$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) Y = (\nabla_X f)Y - u(Y)A_{\widehat{N}} X + \sigma(X, Y)U + \sigma(X, fY)\widehat{N} + (\nabla_X u)Y\widehat{N}$$

$$(\nabla_X f)Y = g(X, Y)V + u(Y)A_{\widehat{N}} X - v(Y)X - \sigma(X, Y)U \quad (3.5)$$

Now, using (2.18) and (2.19) in (2.14), we have

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_X \phi)Y &= g(X, Y)(V + \lambda\widehat{N}) - v(Y)X \\ (\widehat{\nabla}_X \phi)Y &= g(X, Y)V + \lambda g(X, Y)\widehat{N} - v(Y)X \end{aligned} \quad (3.6)$$

Comparing (3.5) and (3.6), we have

$$\begin{aligned} (\nabla_X f)Y - u(Y)A_{\widehat{N}} X + \sigma(X, Y)U + ((\nabla_X u)Y + \sigma(X, fY))\widehat{N} \\ = g(X, Y)V + \lambda g(X, Y)\widehat{N} - v(Y)X \end{aligned}$$

Equating tangential and normal part, we have the required results.

**Theorem 3.3.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , then

$$\sigma(X, \xi)U = f^2 X + f(\nabla_X \xi) - u(X)U \quad (3.7)$$

$$u(\nabla_X \xi) = -u(fX) \quad (3.8)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof:** By covariant differentiation, we know that

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)\xi = \widehat{\nabla}_X \phi\xi - \phi(\widehat{\nabla}_X \xi)$$

Using (2.3), we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = -\phi(\widehat{\nabla}_X \xi) \quad (3.9)$$

Using equation (2.15) in above, we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = -\phi(-\phi X)$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = \phi(\phi X)$$

Using (2.16) in above, we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = \phi(fX + u(X)\widehat{N})$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = \phi(fX) + u(X)\phi\widehat{N}$$

Using (2.16) and (2.17), we get

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_X \phi) \xi &= f(fX) + u(fX)\widehat{N} - u(X)U \\ (\widehat{\nabla}_X \phi) \xi &= f^2X + u(fX)\widehat{N} - u(X)U \end{aligned} \quad (3.10)$$

Using (2.22) in (3.9), we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = -\phi(\nabla_X \xi) + \sigma(X, \xi)\widehat{N}$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = -\phi(\nabla_X \xi) - \sigma(X, \xi)\phi\widehat{N}$$

Using (2.16) and (2.17), we get

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \xi = -f(\nabla_X \xi) - u(\nabla_X \xi)\widehat{N} + \sigma(X, \xi)U \quad (3.11)$$

Comparing (3.10) and (3.11), we have

$$f^2X + u(fX)\widehat{N} - u(X)U = -f(\nabla_X \xi) - u(\nabla_X \xi)\widehat{N} + \sigma(X, \xi)U$$

Equating tangential and normal part, we have required results.

**Theorem 3.4.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , then

$$\nabla_X V = \lambda A_{\widehat{N}} X - fX, \quad (3.12)$$

$$\sigma(X, V) = -u(X) - X\lambda. \quad (3.13)$$

If  $M$  be a totally umbilical non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$ , then it is totally geodesic if and only if,

$$u(X) + X\lambda = 0 \quad (3.14)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof:** Using (2.16) in (2.15), we get

$$\widehat{\nabla}_X \xi = -fX - u(X)\widehat{N} \quad (3.15)$$

Comparing (3.2) and (3.15), we get

$$\nabla_X V - \lambda A_{\widehat{N}}X + (\sigma(X, V) + X\lambda)\widehat{N} = -fX - u(X)\widehat{N}$$

Equating tangential and normal part, we get desired results.

Now, if  $M$  is totally umbilical, then  $A_{\widehat{N}} = \zeta I$ , where  $\zeta$  is Kahlerian metric, then (2.24) reduces as

$$\sigma(X, Y) = g(A_{\widehat{N}}X, Y) = g(\zeta X, Y) = \zeta g(X, Y)$$

therefore,

$$\sigma(X, V) = \zeta g(X, V) = \zeta v(X)$$

Using (2.18) and above equation in (3.14), we have

$$\zeta v(X) = -X\lambda - u(X)$$

If  $M$  is totally geodesic, i.e.  $\zeta = 0$ , then from above equation, we have

$$u(X) + X\lambda = 0.$$

**Theorem 3.5.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$  and  $U$  is parallel, then

$$\lambda X + f(A_{\widehat{N}}X) = 0 \quad (3.16)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof:** Consider covariant differentiation, we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \widehat{N} = \widehat{\nabla}_X \phi \widehat{N} - \phi(\widehat{\nabla}_X \widehat{N}) \quad (3.17)$$

Using equation (2.16), (2.17), (2.22) and (2.23) in above, we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \widehat{N} = \nabla_X \phi \widehat{N} + h(X, \phi \widehat{N})\widehat{N} - f(\widehat{\nabla}_X \widehat{N}) - u(\widehat{\nabla}_X \widehat{N})\widehat{N}$$

$$(\widehat{\nabla}_X \phi) \widehat{N} = -\nabla_X U + f(A_{\widehat{N}}X) \quad (3.18)$$

Putting  $Y = \widehat{N}$  in (2.14), we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)\widehat{N} = g(X, \widehat{N})\xi - \eta(\widehat{N})X$$

Using (2.18), we have

$$(\widehat{\nabla}_X \phi)\widehat{N} = -\lambda X \quad (3.19)$$

From (3.18) and (3.19), we have

$$-\nabla_X U + f(A_{\widehat{N}}X) = -\lambda X$$

$$\nabla_X U = \lambda X + f(A_{\widehat{N}}X)$$

If  $U$  is parallel then,  $\nabla_X U = 0$ , so from above equation, we have

$$\lambda X + f(A_{\widehat{N}}X) = 0.$$

**Theorem 3.6.** If  $M$  be a non-invariant hypersurface with  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structure of hyperbolic Sasakian manifold  $\widehat{M}$  and  $f$  is parallel, then

$$\sigma(X, U) = u(A_{\widehat{N}}X) \quad (3.19)$$

$$X\lambda = 0 \quad (3.20)$$

for all  $X, Y \in TM$ .

**Proof.** As  $f$  is parallel, then from (3.3), we have

$$\sigma(X, Y)U = g(X, Y)V + u(Y)A_{\widehat{N}}X - v(Y)X$$

Applying  $u$  both sides, we get

$$\sigma(X, Y)u(U) = g(X, Y)u(V) + u(Y)u(A_{\widehat{N}}X) - v(Y)u(X)$$

Using (2.20), we have

$$\begin{aligned} (-1 - \lambda^2)\sigma(X, Y) &= 0 + u(Y)u(A_{\widehat{N}}X) - v(Y)u(X) \\ -(1 + \lambda^2)\sigma(X, Y) &= u(Y)u(A_{\widehat{N}}X) - v(Y)u(X) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Replacing  $Y = U$ , we have

$$\begin{aligned} (1 + \lambda^2)\sigma(X, U) &= u(U)u(A_{\widehat{N}}X) - v(U)u(X) \\ -(1 + \lambda^2)\sigma(X, U) &= -(1 + \lambda^2)u(A_{\widehat{N}}X) \\ \sigma(X, U) &= u(A_{\widehat{N}}X) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Now, putting  $Y = V$  in (3.21), we get

$$-(1 + \lambda^2)\sigma(X, V) = u(V)u(A_{\mathcal{N}} X) - v(V)u(X)$$

Using (2.20), we have

$$\begin{aligned} -(1 + \lambda^2)\sigma(X, V) &= (1 + \lambda^2)u(X) \\ \sigma(X, V) &= -u(X) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comparing (3.13) and (3.23), we get desired result.

## REFERENCES

- [1] Goldberg SI. Conformal transformation of Kaehler manifolds. *Bulletin of American Mathematical Society*. 1960. 66: 54-58.
- [2] Goldberg SI, Yano K. Non-invariant hypersurfaces of almost contact manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*. 1970. 22(1): 25-34.
- [3] Yano K, Okumura M. On  $(f, g, u, v, \lambda)$  – structures. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 1970. 22: 401-423.
- [4] Blair DE, Ludden GD. Hypersurfaces in Almost Contact Manifold, *Tohoku Math. J.* 1969. 22: 354-362.
- [5] Matsumoto K, Mihai I, Rosaca R.  $\xi$  –null geodesic vector fields on a LP-Sasakian manifold. *J. Korean Math. Soc.* 1995. 32: 17-31
- [6] Blair DE. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics vol. 509.* Springer-Verlag: Berlin; 1976.
- [7] Chen BY. *Geometry of submanifolds.* Marcel Dekker: New York; 1973.
- [8] Sinha BB, Sharma R. Hypersurfaces in an almost paracontact manifold. *Indian J. Pure App. Math.* 1978. 9: 1083-1090.
- [9] Sarkar A, Sen M. On invariant submanifolds of trans-Sasakian manifolds. *Pro. Estonian Acad. Sci.* 2012. 61(1): 29-37.
- [10] Sular S, Ozgur C. On submanifolds of Kenmotsu manifolds. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2009. 42: 1990-1995.
- [11] Khan T. On Non-invariant Hypersurfaces of a Nearly Kenmotsu Manifold. *IOSR-JM*. 2019. 15(6): 30-34. DOI: 10.9790/5728-1506013034.
- [12] Prasad R. On non-invariant hypersurfaces of trans-Sasakian manifolds. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*. 2007. 99(5): 501-510.
- [13] Ahmed M, Khan SA, Khan T. On Non-invariant Hypersurfaces of a Nearly Hyperbolic Sasakian Manifold. *International Journal of Mathematics*. 2017.28(8): 1- 8. DOI: 10.1142/S0129167X17500641.
- [14] Upadhyay MD, Dubey KK. Almost hypersurfaces contact  $(f, \xi, \eta, g)$  –structure. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus*. 28 H-1053, 13.15.

## **Literatürdeki Basamaklı Dolusavak Tasarımlarının Derlenmesi**

**Erdoğan İKİNCİOĞULLARI<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Bingöl Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bingöl,  
ORCID No: 0000-0003-2518-980X, e-mail: erdincikinciogullari@gmail.com

(Alınış: 13.01.2021, Kabul: 02.07.2021, Yayınlanma: 09.07.2021)

### **Özet**

Yüzeysel sular, barajlar sayesinde tekrar tekrar kullanabildiğimiz mükemmel bir enerji kaynağıdır. Baraj rezervuarlarında biriken taşkın suları, savaklar yardımıyla mambadan mansaba aktarılmaktadır. Baraj gövdesinin mambasındaki akımın potansiyel enerjisi boşaltım kanalı üzerinde kinetik enerjiye dönüşerek kaviteasyona (oyulmaya) ve dolusavak mansabında tahribata neden olabilmektedir. Bu sebeple basamaklı dolusavaklar, olası muhtemel tahribatların önüne geçmek ve düşüm havuzunun boyutlarını küçültmek amacıyla kullanılan yapı elemanlarıdır. Bu tip savaklardaki basamaklara çarpan akımın enerjisi büyük oranda sönlendiğinden düşüm havuzu için gerekli olan boyutlar da küçülmektedir. Bu sebepten ötürü, araştırmacılar, basamaklı dolusavakların geliştirilmesi amacıyla farklı tasarımlar oluşturmuştur. Bu çalışmada, basamaklı dolusavakların basamak geometrileri üzerine yapılmış bir kısım çalışmalar derlenerek bu konuda çalışmayı planlayan araştırmacılara küçük bir katkı sunulması amaçlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Basamaklı dolusavak, Basamak tasarımı, Basamaklı savaklarda eşik geometrisi

### **Review of Stepped Spillway Designs in the Literature**

#### **Abstract**

Water is an excellent source of energy that we can use over again, thanks to dams. Excess water accumulated in the dam reservoir is transferred from upstream to downstream via spillways. The potential energy of flow at the upstream of the dam transforms into kinetic energy on the chute channel, causing cavitation and destruction. For this reason, stepped spillways are structural elements used to prevent damage and reduce the size of the downstream pool. For this reason, researchers have created different designs for the development of stepped spillways. In this study, it is aimed to review some studies about stepped spillways for the researchers who will work on this subject.

**Keywords:** Stepped spillway, Design of step, Threshold geometry in stepped weirs

#### **1. GİRİŞ**

Baraj mambasında bulunan akımın mevcut bir potansiyel enerjisi vardır. Savaklanma sırasında şüt kanalına giren akım, sahip olduğu potansiyel enerjisinin kinetik enerjiye dönüşmesi ile git gide hızlanarak savak mansabına düşmektedir. Klasik bir söylemle, dolusavak mambasındaki potansiyel enerji, dolusavak mansabında kinetik enerjiye dönüşerek hem şüt kanalı üzerinde hem de mansap havuzunda tahribata sebebiyet vermektedir. Bu nedenle araştırmacılar, akımın şüt kanalı üzerindeki enerjisini düşürecek yöntemler geliştirmeye çalışmışlardır. Basamaklı

dolusavaklar da bu yöntemlerden birisi olup ilk örneğinin MÖ 1300'lü yıllarda inşa edilen Yunanistan'daki Akarnania basamaklı dolusavağı olduğu tahmin edilmektedir [1]. İnşa kolaylığı açısından, günümüzde özellikle silindire sıkıştırılmış beton barajlarda (SSB) ve dolgu barajlarda taşkın dolusavağı olarak kullanılmaktadır. SSB barajlar klasik beton ile inşa edildiğinden bu barajların mansabına basamaklı dolusavakların inşa edilmesi oldukça ekonomik ve pratiktir [2]. Ayrıca, basamaklar üzerindeki akımın içerisindeki çözünmüş hava miktarının artmasıyla hem akarsuyun ekolojisine hem de kavitasyon riskine karşı olumlu bir katkı sağlamaktadır. Ayrıca, basamaklı dolusavaklar, arıtma tesislerinde su içerisindeki oksijen miktarını arttırmak amacı ile de kullanılabilir [3].

Basamaklı dolusavaklar, sahip oldukları geometri sayesinde, üzerinden savaklanan akımın her bir basamağa çarpması nedeniyle akım enerjisini büyük oranda sönmüleyebilmektedir. Sönümlenen enerji miktarı, klasik dolusavaklara oranla, yaklaşık %70-80 civarında daha fazladır [4]. Böylelikle, boşaltım kanalı boyunca sönümlenen enerji nedeniyle, enerji kırıcı havuzda oluşan hidrolik sıçramanın da boyu kısalmaktadır. Dolayısı ile enerji kırıcı havuzun boyutları, klasik savaklara oranla, küçüldüğünden maliyet açısından da olumlu bir durumdur [2,3,5-8]. Bahsedilen sebeplerden ötürü, basamaklı dolusavaklar, düşüm havuzlarının yeterli uzunlukta tasarlanmadığı arazi şartlarında alternatif bir çözüm sunmaktadır. Buna ek olarak, basamaklı dolusavak boyunca akımın enerjisi azaldığından hızı da azalmakta ve dolayısıyla kavitasyon riski de azalmaktadır [9].

Basamaklı dolusavaklarda, savaklanan akımın debisi arttıkça sıçramalı akım rejimine, debisi azaldıkça nap akımı rejimine geçmektedir. İlk kez Ohtsu ve Yasuda [10] tarafından bu iki akım rejimi arasında bir geçiş rejimi olduğundan bahsedilmiştir. Geçiş akım rejiminde akım henüz nap akım rejimi özelliklerini kaybetmemiş, sıçramalı akım rejimine tamamen geçmemiştir. Bu sebeple akım içerisinde çok fazla titreşim oluştuğundan geçiş akım rejimi tasarımcıların tarafından tavsiye edilmemektedir [11].

Chanson [12], sıçramalı akım rejimi için başlangıç sınırı için Eşitlik (1)'i önerirken bir başka çalışmada [13], nap rejiminin üst limiti için Eşitlik 2'yi ve geçiş akım rejimi ile sıçramalı akım rejimi arasındaki sınır için Eşitlik 3'ü önermiştir. Boes ve Hager [7] ise geçiş akım rejimi ile sıçramalı akım rejimi arasındaki sınır için Eşitlik (4)'ü önermişlerdir.

$$\frac{d_c}{h} > 1,057 - 0,465 \left(\frac{h}{l}\right), \quad (1)$$

$$\frac{d_c}{h} = 0,89 - 0,40 \tan(\alpha) \quad (2)$$

$$\frac{y_c}{h} = 1,20 - 0,325 \left(\frac{h}{l}\right) \quad (3)$$

$$\frac{y_c}{h} = 0,91 - 0,14 \tan(\alpha) \quad (4)$$

Burada,  $d_c$ =kritik derinlik (m),  $\alpha$  = şüt açısı,  $h$ = basamak yüksekliği (m) ve  $l$ =basamak uzunluğudur (m).

## 2. KONU İLE ALAKALI ÇALIŞMALARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Basamaklı dolusavakların profesyonel uygulamalarının başlaması ile araştırmacıların bir kısmı tasarım kriterleri oluşturmaya başlamıştır [7,13-15]. Bazı araştırmacılar [16-18], inşa kolaylığı sebebiyle basamak üzerlerine yerleştirdikleri kutu gabyonlar ile basamaklı dolusavak akım



karakteristiklerini incelemişlerdir. Gelişen yazılım teknolojisi ile bir kısım araştırmacılar da [19–27], son yıllarda popüleritesi artan hesaplamalı akışkanlar dinamiği yöntemini (HAD) kullanarak basamaklı dolusavaklar üzerindeki akımı sayısal olarak incelemişlerdir.

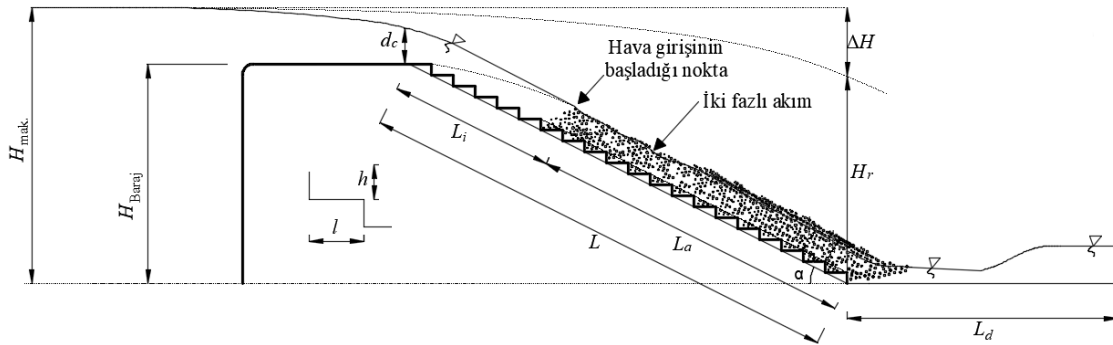
Son yıllarda araştırmacılar, basamaklı dolusavaklarda farklı basamak geometrileri kullanarak savaklanan akımın enerji sönümlenme oranlarını arttırmaya yönelik deneysel ve sayısal çalışmalar yürütmüşlerdir. Bu çalışmada, literatürdeki farklı basamak geometrisi ile alakalı çalışmalar derlenerek bir araya getirilmiş ve bu konuda yapılacak yeni çalışmalar için literatüre küçük bir katkı sağlanması amaçlanmıştır.

Rice ve Kadavy [5], Salado Creek Site barajının 1:20 ölçekte iki boyutlu modelini oluşturarak 10 basamaklı dolusavak üzerindeki akımı, basamaklar nedeniyle sönümlenen enerji miktarını ve tasarlanan düşüm havuzunun performansını incelemişlerdir. Araştırmacılar, model ile prototip arasındaki ölçek ilişkisi için Froude benzerlik şartlarını kullanmışlardır. Birim debisi  $14,5-5,81 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  arasında değişen deneysel çalışmada, mansap havuzunun sonuna eşik eklenmesi sonucunda eşiksiz modellere göre daha az çalkantı olduğunu belirtmişlerdir. Bu sebeple düşüm havuzunun mansabına eşik konmaması durumunun, bölgede erozyon riskinin artırması nedeniyle dolusavağın güvenliği açısından endişe verici olduğunu vurgulamışlardır. Araştırmacılar, eklenecek eşiğin dolusavak topuğundan 12,19 m ileriye yerleştirilmesinin uygun olduğunu ifade etmişlerdir. Ayrıca, son dönemde yapılan çalışmaların aksine, debinin azalması ile akım derinliği azaldığından basamaklı ve klasik şütlerdeki enerji sönümlenme oranlarının azaldığını belirtmişlerdir. Araştırmacılar sonuç olarak, verilen birim debilerde basamaklı dolusavakların enerji sönümlenme oranlarının klasik şütlere oranla 2,4-2,9 kat daha yüksek olduğunu, basamaklı dolusavaklarda şüt açısının enerji sönümlenme miktarında önemli bir etken olduğunu, basamaklı dolusavak kullanımının mansap havuzu ihtiyacını önemli ölçüde azalttığını belirtmişlerdir.

Boes ve Hager [7], 0,50 m genişliğinde, 5,70 m uzunluğunda ve üç farklı şüt açısı ( $30-40-50^\circ$ ) için bir dizi deney çalışmaları yürütmüşlerdir. Araştırmacılar,  $30^\circ$  şüt açısı için üç (23,1, 46,2 ve 92,4 mm),  $40^\circ$  şüt açısı için iki (31,1 ve 93,3 mm) ve  $50^\circ$  şüt açısı için ise 26,1 mm yüksekliğinde tek çeşit basamak yüksekliği kullanmışlardır (Şekil 1). Araştırmacılar, üniform olmayan akım durumunda enerji sönümlenme oranı için aşağıdaki eşitlikleri (Eşitlik 5 ve 6) kullanmayı önermişlerdir.

$$\frac{H_r}{H_{max}} = \exp \left[ \left( -0.045 \left( \frac{h \cdot \cos \alpha}{D_{h,w}} \right)^{0.1} (\sin \alpha)^{-0.8} \frac{H_{baraj}}{d_c} \right) \right] \quad H_{baraj}/d_c < 15 - 20 \quad \text{ için} \quad (5)$$

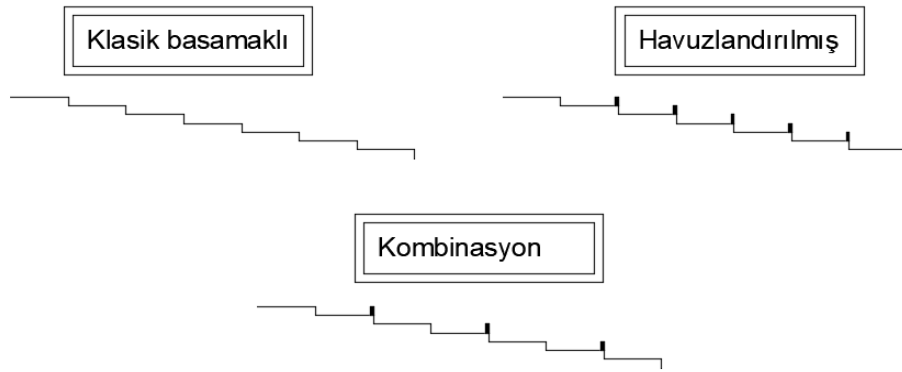
$$H_{max} = H_{baraj} + 1.5d_c \quad (6)$$



Şekil 1. Basamaklı dolusavak kesiti üzerindeki notasyonlar [7]

Burada;  $H_r$ =şütün mansap ucunda kalan enerjiyi (m),  $H_{mak.}$ =maksimum enerjiyi,  $h$ =basamak yüksekliğini,  $l$ =basamak genişliğini,  $\alpha$ =şüt açısını,  $D_{h,w}$ = hidrolik çapı,  $H_{baraj}$ =tabandan dolusavak kretine olan mesafeyi,  $d_c$ =kritik akım yüksekliğini,  $L_r$ =havalanmayan bölge (kara bölge) uzunluğunu,  $L$ = şüt kanalının uzunluğunu ve  $L_a$ = havalanmış bölge uzunluğunu ifade etmektedir.

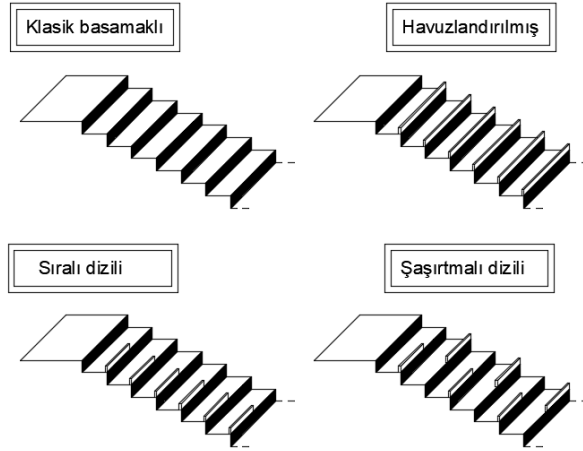
Felder vd. [28], klasik ve havuzlandırılmış basamaklı dolusavakların yanı sıra, iki tip savağın kombinasyonu ile oluşturulan üç farklı savak tipi kullanarak basamaklı dolusavaklar üzerindeki akımın havalanma miktarını ve enerji sönümlenme miktarlarını incelemiştir. Araştırmacılar, kanal genişliği 0,50 m, basamak yüksekliği 0,05 m, basamak genişliği 0,319 m ve kanal açısı  $8.9^\circ$  olan deney setini 21 adet basamak kullanarak PVC malzemesinden üretmişlerdir (Şekil 2). Debi değerlerinin  $0,002-0,117 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  arasında değiştiği deneysel çalışmalarda, en yüksek enerji sönümlenme oranına klasik ve havuzlandırılmış basamaklı savakların kombinasyonu ulaşılmıştır. En düşük enerji sönümlenme oranını ise klasik basamaklı dolusavaklarda gözlemlemişlerdir. Araştırmacılar, kombine edilmiş basamaklı savaklarda en yüksek enerji sönümlenme oranı elde edilmesine rağmen, savak üzerindeki akış dengesizlikleri ve kararlı olmayan akış süreçlerinin gözlemlenmesi sebebiyle bu savak geometrisinin, yapının güvenli bir şekilde çalışması için uygun şartları sağlayamayacağını vurgulamışlardır.



Şekil 2. Felder vd. [28] çalışmalarında kullandıkları modeller

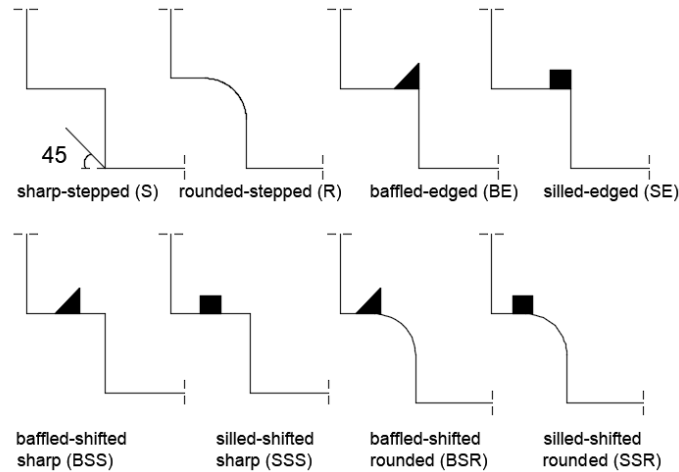
Felder vd. [29], dört farklı basamaklı dolusavak modelinin enerji sönümleme ve havalandırma oranlarını deneysel olarak incelemişlerdir (Şekil 3). Araştırmacılar deneylerini kanal genişliği 0,52 m, basamak yüksekliği 0,10 m, basamak genişliği 0,20 m olan  $26,6^\circ$  açılı boşaltım kanalında  $0,002-0,155 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  arasında değişen debi değerleri için gerçekleştirmişlerdir. Havuzlu basamaklı dolusavakların tasarımı için basamak uçlarına 0,031 m kalınlığında, 0,10 m yüksekliğinde eşikler yerleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, havuzlandırılmış basamaklı dolusavakların enerji sönümlenme oranının klasik basamaklı dolusavaklara oranla daha düşük çıktığını belirlemişlerdir. Araştırmacılar, havuzlandırılmış basamaklı dolusavaklar ile sıralı ve şaşırtmalı kombine modellerden elde edilen sonuçlarda kanal enine doğru büyük akım farklılıkları gözlemlediklerini belirtmişlerdir. Yapılan tasarımların enerji sönümlenme ve akım havalandırması açısından avantajlı bir performans sağlamadığını vurgulamışlardır. Felder vd. [28,29] çalışmaları incelendiğinde, basamak genişliğinin küçülmesi ile basamak uçlarına eklenen eşiklerin sönümlenmede çok etkili olmadığı ancak, basamak genişliğinin artırılarak, dolayısı ile, şüt açısının azaltılarak yürütüldüğü deneylerde, eşik kullanılarak tasarlanan basamaklı dolusavakların enerji sönümlenmede daha başarılı olduğu görülmektedir. Şüt açısı arttıkça basamak genişliği ile basamak yüksekliği arasındaki fark azaldığından, savaklanan akım, belirli bir debi değerinden sonra eşikleri makro pürüzlülük olarak algıladığından, enerji sönümlenmedeki etkisini azaltıyor olabilir. Ancak, şüt kanalının açısı azaldıkça, dolayısı ile

basamak genişliği arttıkça, savaklanan akım, basamak üzerinde daha fazla yol kat ettiğinden eşiklere çarparak enerjisini sönmülemiş olabilir.



Şekil 3. Felder vd. [29] çalışmalarında kullandıkları modeller

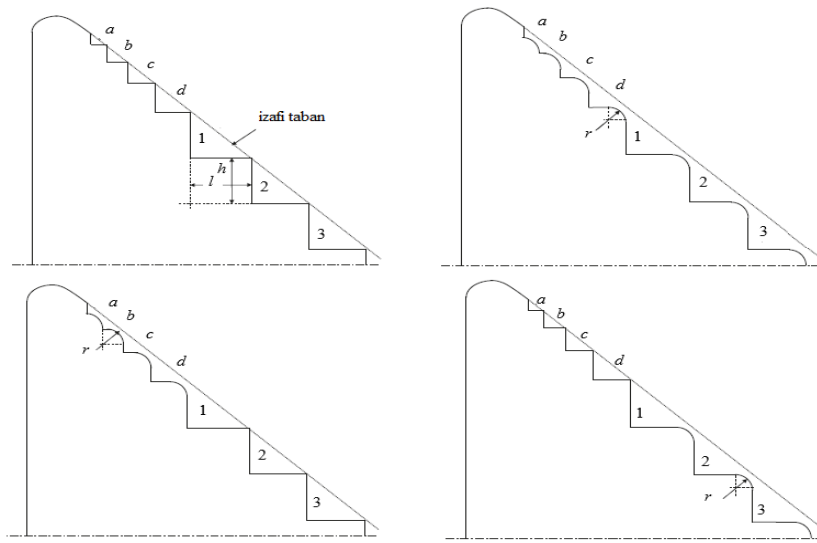
Zare ve Doering [30], basamaklı dolusavaklar üzerine yerleştirdikleri farklı geometrilerdeki eşikler ve engeller ile akım üzerinde havalanmaya başlama noktasını incelemişlerdir. Toplamda 8 farklı model oluşturan araştırmacılar, deneylerini sabit  $45^\circ$  açılı şüt kanalı üzerinde gerçekleştirmişlerdir. Araştırmacılar, geniş Froude sayısı aralığında yürüttükleri deneyler neticesinde havalanmayan bölge uzunluğu en kısa olan dolayısı ile kavitasyon riski en az olan savak modelinin “Silled-shifted rounded” (SSR) (Şekil 4) olduğunu, “baffled-edged” (BE) modeli kullanılarak yürütülen deneylerde ise en uzun havalanmayan bölge uzunluğunu elde ettiklerini vurgulamışlardır. Yan duvar yüksekliğinin en kısa olduğu savak çeşidinin ise “baffled-shifted sharp” (BSS) olduğunu dolayısı ile maliyet açısından bu savak çeşidinin daha uygun olduğunu vurgulamışlardır.



Şekil 4. Zare ve Doering [30] çalışmalarında kullandıkları modeller

Zare ve Doering [31], basamak uçları yuvarlatılmış basamaklı dolusavaklar ile klasik basamaklı dolusavakları; enerji sönmüleme, yan duvar yüksekliği ve havalanmaya başlama noktaları üzerinden kıyaslamışlardır. Araştırmacılar, yuvarlatılmış basamak kullanımının klasik basamaklara nazaran %3 oranında daha fazla enerji sönmülediğini, yan duvar yüksekliğine ihtiyacın %20 daha az olduğunu vurgulamışlardır. Toplamda 26 adet deneyin yürütüldüğü çalışmada kanal genişliği 57 cm, savak yüksekliği 82,26 cm ve basamak yüksekliği ile genişliği 7,50 cm olmakla beraber debi değerleri  $0,012281-0,225965 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  arasında değişmektedir

(Şekil 5). Araştırmacılar ayrıca, ilk birkaç basamak ucunun yuvarlatılmasıyla enerji sönümlemede kayda değer bir sonuca erişilmediğini de vurgulamışlardır. Araştırmacıların yürüttüğü ilk çalışmada [30], havalanmayan bölge uzunluğunun tespit edilmesi tasarımcılar için önemli bir kriterdir çünkü şüt üzerindeki havalanmayan bölge (kara bölge) uzunluğu ne kadar az olursa kavitasyon riski de o denli azalmaktadır. Bilindiği üzere, basamaklı dolusavaklar kullanılarak bu risk oldukça azaltılmaktadır. Yapılan çalışmada araştırmacılar, her bir basamak üzerine ekledikleri engellerin kara bölgeye olan etkisini araştırmışlardır. En düşük kara bölge uzunluğuna SSR modelinde, en yüksek kara bölge uzunluğuna ise BE modelinde ulaşmaları, basamak uçlarına eklenen eşiklerdense basamak ortasına eklenen eşiklerin daha etkili olduğunu göstermektedir. Şüt açısı nedeniyle basamak uçlarının farklı geometrilerini akım, makro pürüzlülük olarak algılamış olabilir. Araştırmacılar, ikinci çalışmaları [31] ile yuvarlatılmış basamak uçlarının klasik basamaklara nazaran daha fazla enerji sönümleyebildiğini vurgulamışlardır.

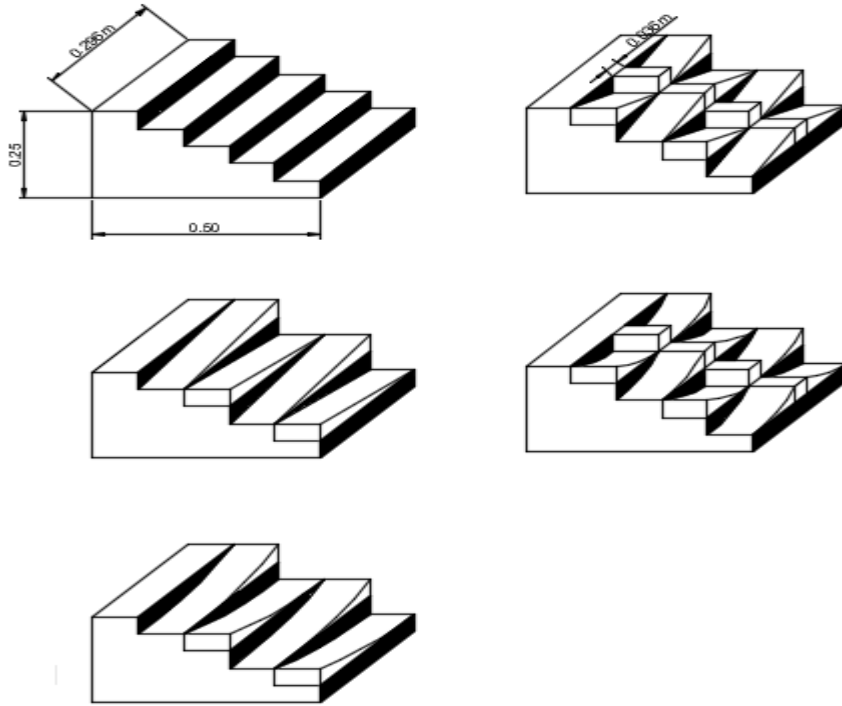


Şekil 5. Zare ve Doering [31] çalışmalarında kullandıkları modeller

Felder ve Chanson [32], basamaklı dolusavakların basamak uçlarına yerleştirdikleri farklı boşluk oranlarındaki 3,10 cm yüksekliğinde ve 1,50 cm genişliğindeki eşiklerin enerji sönümleme miktarlarını karşılaştırmışlardır. Araştırmacılar, 4 farklı model kullanarak yaptıkları deneysel çalışmaları 52 cm genişliğinde bir kanala yerleştirdikleri 10 cm yüksekliğinde ve 20 cm genişliğindeki 10 adet basamak ile yürütmüşlerdir. Elde edilen sonuçlara göre, boşluklu eşikli basamaklı dolusavakların enerji sönümleme oranları açısından klasik basamaklı savaklara göre dezavantajlı olduğu vurgulanmıştır.

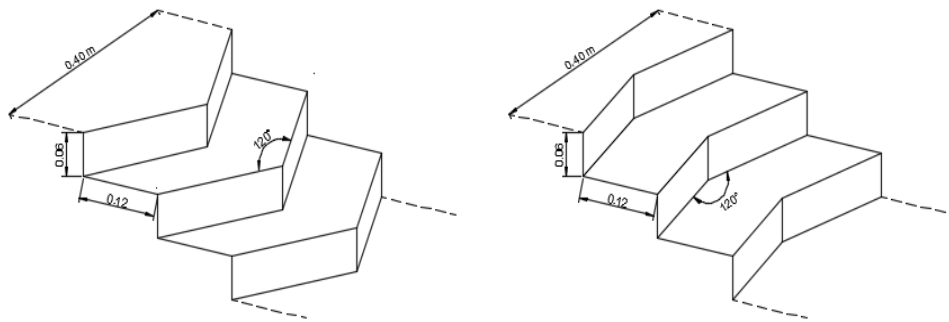
Mero ve Mitchell [33], 5 farklı model oluşturarak basamak şekillerinin enerji sönümleme oranlarına etkisini deneysel olarak incelemişlerdir. Araştırmacılar, 4,00 m uzunluğunda, 0,296 m genişliğinde ve 0,320 m derinliğindeki kanal içerisine yerleştirdikleri basamaklı savakların basamak yüksekliğini 0,05 m ve basamak yüksekliğini 0,10 m olacak şekilde tasarlamıştır (Şekil 6). Debi değerlerinin 0,00213-0,0121  $m^3 \cdot s^{-1}$  arasında değiştiği çalışmanın neticesinde reflektör kullanılarak oluşturulan basamaklı savakların enerji sönümleme oranları klasik basamaklı savaklardan oldukça yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte bütün modeller için debi arttıkça enerji sönümleme oranının azaldığı ve ayrıca reflektör kullanılmayan modellerin enerji sönümlemede çok avantajlı olmadığı sonucuna varılmıştır. Araştırmacılar, basamaklar üzerine reflektörler yerleştirerek farklı bir basamak geometrisi oluşturmuşlardır. Reflektörler sayesinde şüt üzerindeki akım içerisine dahil olan hava miktarı arttığından

mansaptaki enerji miktarının azaldığı düşünülmektedir. Enerji sönümlenme için faydalı olan bu çalışmanın uygulamada kullanılması işçilik maliyetlerini arttırabilir.



Şekil 6. Mero ve Mitchell [33] çalışmalarında kullandıkları modeller

Bai vd. [34], 5,40 m yüksekliğinde ve 0,40 m genişliğindeki deney seti için ve toplamda 56 adet basamak kullanarak iki farklı model oluşturmuşlardır (Şekil 7). Araştırmacılar, oluşturdukları modellerde ilk 28 basamağı geçiş basamağı olarak tasarlamışlardır. Her bir model için basamak genişliği 12 cm, basamak yüksekliği 6 cm ve birim debi 0,313, 0,425 ve 0,489  $m^2 \cdot s^{-1}$ 'dir. Elde edilen sonuçlara göre oluşturdukları her iki modelin enerji sönümlenme oranının klasik basamaklı savaklardan daha yüksek olduğunu vurgulamışlardır. Araştırmacıların oluşturduğu ilk tasarımda şüt üzerindeki akımın bölünerek savaklandığı, ikinci tasarımda ise bölünmeyle birlikte her iki taraftaki akımın birbirine çarparak enerji sönümlenmesini artırdığı düşünülmektedir. Basamak sayısının fazla olması, gerçeği daha çok yansıtırken böyle bir tasarımın uygulanabilmesi için ekstra işçilik maliyetlerinin göz ardı edilmemesi gerektiği düşünülmektedir.



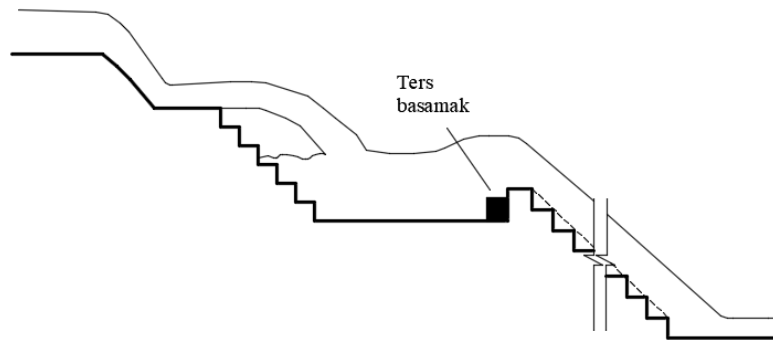
Şekil 7. Bai vd. [34] çalışmalarında kullandıkları modeller

Torabi vd. [35], 0,30 m genişliğinde ve 0,55 m derinliğindeki kanala yerleştirdikleri 2 farklı basamaklı dolusavağın üzerine düzenli ve düzensiz formda enerji kırıcı bloklar yerleştirilerek enerji sönümlenme oranlarını deneysel olarak incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçlara göre, nap akımı rejiminde düzenli ve düzensiz olarak yerleştirilerek pürüzlü hale getirilen basamaklı savakların enerji sönümlenme oranları klasik basamaklı savaklardan yaklaşık %15-20 daha fazla olmakla birlikte düzenli olarak dizilen bloklardan alınan sonuçların dağınık olarak dizilen bloklardan alınan sonuçlardan daha verimli olduğunu vurgulamışlardır.

Zhang ve Chanson [36], 1,00 m genişlikli ve 45° şüt açılı kanala yerleştirdikleri, basamak yüksekliği ve genişliği 10 cm olan, basamaklı savakların basamaklarına yaptıkları pah ile akım üzerindeki hava miktarını ve enerji sönümlenme oranlarını kıyaslamışlardır. Araştırmacılar, toplamda 12 basamaklı savak kullanarak sürdürdükleri deneylerde debi değerini 0,083-0,216 m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup> arasında almışlardır. Elde edilen sonuçlara göre, pah yapılarak oluşturulan modellerde havalanma başlangıç noktasında mansaba doğru bir kaymadan bahsederken enerji sönümlenme oranının daha düşük değerlerde olduğu sonucuna varmışlardır.

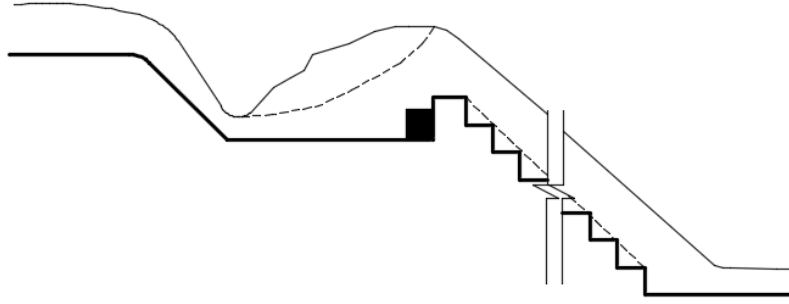
Ashoor ve Riazi [37], basamaklı dolusavaklarda üniform olmayan basamak geometrileri kullanarak basamaklı dolusavakların enerji sönümlenme oranlarını InterFOAM yazılımı ile sayısal olarak modellemişlerdir. Araştırmacılar; konveks, konkav ve karışık yarı üniform şüt kanalları üzerinde yapılan araştırmaların etkisini görebilmek amacıyla bütün modellerde basamak yüksekliği 0,10 m olacak şekilde 12 basamaklı dolusavak modeli kullanmışlardır. Araştırmacıların elde ettikleri sonuçlara göre, basamak uzunluğu arttıkça akım içerisine dahil olan hava miktarının arttığını, konkav model üzerinden savaklanan akım içerisindeki hava miktarının konveks modeldekinden daha fazla, bundan dolayı konkav modeldeki kavitasyon riskinin daha az olduğu, basamak geometrisinin 1V:2.2H oranında tasarlandığı modelin enerji sönümlenmede en etkili model olduğu sonuçlarına varmışlardır. Konkav modelde savaklanan akımın katı cisim üzerinde bulunma süresi daha fazla olduğundan hem akımın bu modeldeki basamakları daha iyi algılamasına hem de basamaklardan ötürü akım içerisine katılan hava miktarında artış olmasına, dolayısı ile daha fazla enerji sönümlenmesine sebep olduğu düşünülmektedir. Konveks modelden savaklanan akımda belirli bir mesafeden sonra şüt kanalının açısı arttığından akımın hızı artarak mansap havuzuna daha yüksek enerji ile çarparak daha fazla enerji sönümlenebilir.

Wu vd. [38], basamaklı dolusavak kanalı üzerinde havalandırma alanı oluşturarak akım içerisine daha fazla hava karıştırıp akım enerjisini sönümlenmeyi amaçlamışlardır (Şekil 8). Araştırmacılar, buna ek olarak, eğimli basamak uçlarına ekledikleri eşikler ile 8 farklı geometri tasarlamışlardır. Elde edilen sonuçlara göre, havalandırma alanının kullanıldığı deney setlerinde kullanılan eşikler sayesinde daha fazla enerji sönümlendiğini vurgulamışlardır.



Şekil 8. Wu vd. [38] çalışmalarında kullandıkları modeller

Zhou vd. [39], klasik basamaklı dolusavaklar ardına dinlenme alanı oluşturarak akımın hidrolik sıçrama ile enerjisini kısmen sönümledikten sonra basamaklı dolusavak kanalına geçmesini sağlamışlardır (Şekil 9). Araştırmacılar, yürüttükleri deneysel çalışmalar neticesinde klasik basamaklı dolusavak ile enerji sönümlenme oranlarını kıyaslamışlardır. Elde edilen sonuçlara göre, havalandırma alanı kullanılan basamaklı savaklarda hidrolik sıçrama nedeniyle akım derinliğinin daha kısa sürede uniform derinliğe ulaştığı savunulmuştur. Dolayısıyla, hidrolik sıçramalı basamaklı dolusavaklarda enerji sönümlenme miktarının klasik basamaklı savaklardan daha fazla olduğu belirtilmiştir.



Şekil 9. Zhou vd. [39] çalışmalarında kullandıkları modeller

### 3. SONUÇ

Çalışma kapsamında, literatürde yoğun bir yere sahip olan ve gün geçtikçe yapılan çalışmaların sayısında artış gözlenen basamaklı dolusavakların tasarımları ile alakalı bir kısım araştırmalar derlenmiştir. Genel manada araştırmacılar şüt açısı, basamak ve eşik geometrisi üzerine araştırmalar yaparak literatüre katkıda bulunmuşlardır. Araştırmacılar, enerji sönümlenmeye ek olarak havalanmayan bölge uzunluğu, kavitasyon gibi etkenleri de göz önünde bulundurmuşlardır. Sonuç olarak; debi ile enerji sönümlenme oranının ters orantılı olduğu, basamak üzerine eklenen farklı geometrideki eşiklerin enerji sönümlenme oranını genellikle arttırdığı, havalanmayan bölge (kara bölge) uzunluğunun kavitasyon üzerinde etkili olduğu, kara bölge uzunluğu ile enerji sönümlenme oranının ters orantılı olduğu yapılan literatür çalışmalarında gözlenmiştir. Ayrıca birçok çalışmada, maliyet açısından oldukça ekonomik olan klasik basamaklı dolusavakların, farklı geometrideki eşik ve model tasarımlarında; ekstra beton, donatı ve işçilik maliyetlerinin de göz önünde bulundurulması gerektiği vurgulanmıştır.

### KAYNAKLAR

- [1] Chanson, Forum article. Hydraulics of Stepped Spillways: Current Status, JI Hyd. Engrg., ASCE. 126 (2000).
- [2] K.H. Frizell, B.W. Mefford, Designing Spillways to Prevent Cavitation Damage, Concr. Int. 13 (1991) 58–64.
- [3] Chanson, Review of studies on stepped channel flows, Work. Flow Charact. around Hydraul. Struct. River Environ. (1998) 25.
- [4] R.M. Boes, H. Chanson, J. Matos, I. Ohtsu, Y. Yasuda, M. Takahasi, S.P. Tatewar, R.N. Ingle, P.D. Porey, M.R. Chamani, N. Rajaratnam, Characteristics of Skimming Flow over Stepped Spillways, J. Hydraul. Eng. 126 (2000) 860–873. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(2000\)126:11\(860\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(2000)126:11(860)).
- [5] C.E. Rice, K.C. Kadavy, Model Study of a Roller Compacted Concrete Stepped Spillway, J. Hydraul. Eng. 122 (1996) 292–297. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1996\)122:6\(292\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1996)122:6(292)).

- [6] H. Chanson, L. Toombes, Experimental investigations of air entrainment in transition and skimming flows down a stepped chute, *Can. J. Civ. Eng.* 29 (2002) 145–156. <https://doi.org/10.1139/101-084>.
- [7] R.M. Boes, W.H. Hager, Hydraulic Design of Stepped Spillways, *J. Hydraul. Eng.* 129 (2003) 671–679. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(2003\)129:9\(671\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(2003)129:9(671)).
- [8] M. Berkün, *Su Yapıları*, Birsen Yayınevi. (2007).
- [9] Chanson, Stepped spillway flows and air entrainment, *Can. J. Civ. Eng.* 20 (1993) 422–435. <https://doi.org/10.1139/193-057>.
- [10] I. Ohtsu, Y. Yasuda, Transition from supercritical to subcritical flow at an abrupt drop, *J. Hydraul. Res.* 29 (1991) 309–328. <https://doi.org/10.1080/00221689109498436>.
- [11] Chanson, Prediction of the transition nappe/skimming flow on a stepped channel, *J. Hydraul. Res.* 34 (1996) 421–429. <https://doi.org/10.1080/00221689609498490>.
- [12] H. Chanson, State of the art of the hydraulic design of stepped chute spillways, *Hydropower Dams J.* (1994) 33–42.
- [13] Chanson, Hydraulic Design of Stepped Spillways and Downstream Energy Dissipators, *Dam Eng.* (2001) 205–242.
- [14] M.W. Essery, I. T. S., & Horner, *The Hydraulic Design of Stepped Spillways*, Constr. Ind. Res. Inf. Assoc. (1971).
- [15] R.M. Sorensen, Stepped Spillway Hydraulic Model Investigation, *J. Hydraul. Eng.* 111 (1985) 1461–1472. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1985\)111:12\(1461\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1985)111:12(1461)).
- [16] L. Peyras, P. Royet, G. Degoutte, Flow and Energy Dissipation over Stepped Gabion Weirs, *J. Hydraul. Eng.* 118 (1992) 707–717. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1992\)118:5\(707\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1992)118:5(707)).
- [17] D. Wuthrich, H. Chanson, Aeration performances of a gabion stepped weir with and without capping, *Environ. Fluid Mech.* 15 (2015) 711–730. <https://doi.org/10.1007/s10652-014-9377-9>.
- [18] A.A. Zuhaira, J.M. Horrillo-Caraballo, H. Karunarathna, D.E. Reeve, Investigating skimming flow conditions over stepped spillways using particle image velocimetry, in: *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, Institute of Physics Publishing, 2020: p. 012023. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/888/1/012023>.
- [19] M. Tabbara, J. Chatila, R. Awwad, Computational simulation of flow over stepped spillways, *Comput. Struct.* 83 (2005) 2215–2224. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.04.005>.
- [20] H. Shahheydari, J. Nodoshan, R. Barati, M.A. Moghadam, Discharge Coefficient and Energy Dissipation over Stepped Spillway under Skimming Flow Regime, *KSCE J. Civ. Eng.* 19 (2015) 1174–1182. <https://doi.org/10.1007/s12205-013-0749-3>.
- [21] M. Mohammad, R. Tabari, S. Tavakoli, Effects of Stepped Spillway Geometry on Flow Pattern and Energy Dissipation, *Arab J Sci Eng.* 41 (2016) 1215–1224. <https://doi.org/10.1007/s13369-015-1874-8>.
- [22] S. Li, J. Zhang, W. Xu, Numerical investigation of air–water flow properties over steep flat and pooled stepped spillways, *J. Hydraul. Res.* 56 (2018) 1–14. <https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1286393>.
- [23] A.A. Hekmatzadeh, S. Papari, S.M. Amiri, Investigation of Energy Dissipation on Various Configurations of Stepped Spillways Considering Several RANS Turbulence Models, *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Civ. Eng.* 42 (2018) 97–109. <https://doi.org/10.1007/s40996-017-0085-9>.
- [24] D.E. Reeve, A.A. Zuhaira, H. Karunarathna, Computational investigation of hydraulic performance variation with geometry in gabion stepped spillways, *Water Sci. Eng.* 12 (2019) 62–72. <https://doi.org/10.1016/j.wse.2019.04.002>.
- [25] M.O. Arjenaki, · Hamed, R.Z. Sanayei, Numerical investigation of energy dissipation



- rate in stepped spillways with lateral slopes using experimental model development approach, *Model. Earth Syst. Environ.* 6 (2020) 605–616. <https://doi.org/10.1007/s40808-020-00714-z>.
- [26] A. Ghaderi, S. Abbasi, J. Abraham, H.M. Azamathulla, Efficiency of Trapezoidal Labyrinth Shaped stepped spillways, *Flow Meas. Instrum.* 72 (2020) 101711. <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2020.101711>.
- [27] S. Li, J. Yang, Q. Li, Numerical Modelling of Air-Water Flows over a Stepped Spillway with Chamfers and Cavity Blockages, *KSCE J. Civ. Eng.* 24 (2020) 99–109. <https://doi.org/10.1007/s12205-020-1115-x>.
- [28] S. Felder, C. Fromm, H. Chanson, The University Of Queensland Report Ch86/12 Air Entrainment And Energy Dissipation On A 8.9° Slope Stepped Spillway With Flat And Pooled Steps School Of Civil Engineering, 2012.
- [29] S. Felder, P. Guenther, H. Chanson, Air-water flow properties and energy dissipation on stepped spillways: a physical study of several pooled stepped configurations. 2012.
- [30] H.K. Zare, J.C. Doering, Inception Point of Air Entrainment and Training Wall Characteristics of Baffles and Sills on Stepped Spillways, *J. Hydraul. Eng.* 138 (2012) 1119–1124. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0000630](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0000630).
- [31] H.K. Zare, J.C. Doering, Effect of rounding edges of stepped spillways on the flow characteristics, *Can. J. Civ. Eng.* 39 (2012) 140–153. <https://doi.org/10.1139/L11-121>.
- [32] S. Felder, H. Chanson, Effects of Step Pool Porosity upon Flow Aeration and Energy Dissipation on Pooled Stepped Spillways, *J. Hydraul. Eng.* 140 (2014) 04014002. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0000858](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0000858).
- [33] S. Mero, S. Mitchell, Investigation of energy dissipation and flow regime over various forms of stepped spillways, *Water Environ. J.* 31 (2017) 127–137. <https://doi.org/10.1111/wej.12224>.
- [34] Z.L. Bai, Y. Peng, J.M. Zhang, Three-Dimensional Turbulence Simulation of Flow in a V-Shaped Stepped Spillway, *J. Hydraul. Eng.* 143 (2017) 06017011. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0001328](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0001328).
- [35] H. Torabi, A. Parsaie, H. Yonesi, E. Mozafari, Energy Dissipation on Rough Stepped Spillways, *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Civ. Eng.* 42 (2018) 325–330. <https://doi.org/10.1007/s40996-018-0092-5>.
- [36] G. Zhang, H. Chanson, Effects of Step and Cavity Shapes on Aeration and Energy Dissipation Performances of Stepped Chutes, *J. Hydraul. Eng.* 144 (2018) 04018060. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0001505](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0001505).
- [37] A. Ashoor, A. Riazi, Stepped Spillways and Energy Dissipation: A Non-Uniform Step Length Approach, *Appl. Sci.* 9 (2019) 5071. <https://doi.org/10.3390/app9235071>.
- [38] J. Wu, S. Qian, Y. Wang, Y. Zhou, Residual Energy on Ski-Jump-Step and Stepped Spillways with Various Step Configurations, *J. Hydraul. Eng.* 146 (2020) 06020002. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)hy.1943-7900.0001710](https://doi.org/10.1061/(asce)hy.1943-7900.0001710).
- [39] Y. Zhou, J. Wu, F. Ma, J. Hu, Uniform flow and energy dissipation of hydraulic-jump-stepped spillways, *Water Sci. Technol. Water Supply.* 20 (2020) 1546–1553. <https://doi.org/10.2166/ws.2020.056>.



## **Semi-Invariant Submanifolds A Lorentzian Kenmotsu Manifold With Semi-Symmetric Metric Connection**

**Ramazan SARI<sup>1\*</sup>, İnan ÜNAL<sup>2</sup>**

<sup>1\*</sup>Gümüşhacıköy Hasan Duman Vocational Schools., Amasya University, Amasya, Turkey.  
e-mail: ramazansr@gmail.com

<sup>2</sup>Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Munzur University, Tunceli, Turkey.  
e-mail: inanunal@gmail.com

(Arrival: 21.05.2021, Acceptance: 01.07.2021, Published: 09.07.2021)

### **Abstract**

In this paper, semi-invariant submanifolds of a lorentzian Kenmotsu manifold endowed with a semi-symmetric metric connection are studied. Necessary and sufficient conditions are given on a submanifold of a lorentzian Kenmotsu manifold to be semi-invariant submanifold with the semi-symmetric metric connection. Moreover, the parallel conditions of the distribution on semi-invariant submanifolds of a lorentzian Kenmotsu manifold with the semi-symmetric metric.

**Key words:** Lorentzian Kenmotsu manifold, semi invariant submanifold, semi symmetric metric connection.

### **1. INTRODUCTION**

To study manifolds with negative curvature, Bishop and O'Neill introduced the notion of warped product as a generalization of Riemannian product [1]. In 1960's and 1970's, when almost contact manifolds were studied as an odd dimensional counterpart of almost complex manifolds, the warped product was used to make examples of almost contact manifolds.

Kenmotsu studied a class of almost contact Riemannian manifold. He showed normal an almost contact Riemannian manifold with [4] but not quasi Sasakian hence not Sasakian.

At the same time, in the year 1969, Takahashi [11] has introduced the Sasakian manifolds with Pseudo-Riemannian metric and prove that one can study the Lorentzian Sasakian structure with an indefinite metric. Furthermore, in 1990, K. L. Duggal [2] has initiated the space time manifolds with contact structure and analyzed the paper of Takahashi. In 1991, Roşca introduced Lorentzian Kenmotsu manifold [7]. Many authors studied on Lorentzian Kenmotsu manifold [8,9].

Semi-invariant submanifolds are studied by some authors (for examples, M. Kobayashi [5], B.B. Sinha, A.K. Srivastava [10] and A.Turgut Vanlı, R. Sarı [12]). In [6] S. A. Nirmala and R.C. Mangala have introduced a semi-symmetric non-metric connection, they studied some properties of the curvature tensor with respect to the semi-symmetric non-metric connection.

Let  $\nabla$  be a linear connection in an n-dimensional differentiable manifold  $\bar{M}$ . The torsion tensor T and the curvature tensor R of  $\nabla$  are given respectively by

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

The connection  $\nabla$  is symmetric if the torsion tensor  $T$  vanishes, otherwise it is non-symmetric. The connection  $\nabla$  is a metric connection if there is a Riemannian metric  $\mathcal{G}$  in  $\bar{M}$  such that  $\nabla g = 0$  otherwise it is non-metric. It is well known that a linear connection is symmetric and metric if it is the Levi-Civita connection. In [3], A. Friedmann and J. A. Schouten introduced the idea of a semi-symmetric linear connection. A linear connection  $\nabla$  is said to be a semi-symmetric connection if its torsion tensor  $T$  is of the form

$$T(X, Y) = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

where  $\eta$  is a 1-form. In [13], K. Yano studied some properties of semi-symmetric metric connections.

The paper is organized as follows : In section 2, we give a brief introduction of lorentzian Kenmotsu manifold. We defined a lorentzian Kenmotsu manifold with a semi-symmetric metric connection. In section 3, we give some basic results for semi-invariant submanifolds of lorentzian Kenmotsu manifold with a semi-symmetric metric connection. In last section, we obtained some necessary and sufficient conditions for parallel of certain distributions on semi-invariant submanifolds of lorentzian Kenmotsu manifold with a semi-symmetric metric connection.

## 2. PRELIMINARIES

Let  $\bar{M}$  be a  $(2n + 1)$ -dimensional differentiable manifold,  $\varphi$  is  $(1,1)$ -tensor field,  $\eta$  is a 1-form,  $\xi$  is a vector field and  $g$  is a semi-Riemannian metric on  $\bar{M}$ . If for all  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$  following conditions are satisfied then  $\bar{M}$  called Lorentzian almost para contact metric manifold

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1 \tag{1}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{2}$$

In addition, we have

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(X) = -g(X, \xi). \tag{3}$$

Moreover, a Lorentzian almost contact metric manifold is normal if  $[\varphi, \varphi] - 2d\eta \otimes \xi = 0$  where  $[\varphi, \varphi]$  is denoting the Nijenhuis tensor field associated to  $\varphi$ . A normal Lorentzian almost contact metric manifold is called Lorentzian contact metric manifold.

**Definition 2.1** Let  $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$  be a  $(2n + 1)$ -dimensional Lorentzian almost contact metric manifold.  $\bar{M}$  is said to be a Lorentzian almost Kenmotsu manifold if 1-form  $\eta$  are closed and  $d\Phi = -2\eta \wedge \Phi$ .

If  $\bar{M}$  is also normal then we call  $\bar{M}$  is called a Lorentzian Kenmotsu manifold. The following theorem gives us the necessary and sufficient condition for  $\bar{M}$  to be Lorentzian Kenmotsu manifold.

**Theorem 2.2** Let  $(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$  be a Lorentzian almost contact metric manifold.  $\bar{M}$  is a Lorentzian Kenmotsu manifold if and only if

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = -g(\varphi X, Y)\xi + \eta(Y)\varphi X \tag{4}$$

for all  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ .

**Corollary 2.3** Let  $\bar{M}$  be  $(2n+1)$ -dimensional a Lorentzian Kenmotsu manifold with structure  $(\varphi, \xi, \eta, g)$ . Then we have

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\varphi^2 X \quad (5)$$

for all  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ .

Now, we define a connection  $\tilde{\nabla}$  as

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \eta(Y)X - g(X, Y)\xi \quad (6)$$

**Theorem 2.4.** Let  $\bar{\nabla}$  be the Riemannian connection on a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$ . Then the linear connection which is defined as

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \eta(Y)X - g(X, Y)\xi \quad (7)$$

is a semi-symmetric non metric connection on  $\bar{M}$ .

*Proof.* Let  $\tilde{T}$  be the torsion tensor of  $\tilde{\nabla}$ . Then,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= \eta(Y)X - \eta(X)Y. \end{aligned}$$

Moreover we get,

$$(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) = X[g(Y, Z)] - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z).$$

**Theorem 2.5.** Let  $M$  be a semi-invariant submanifold of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$  with semi-symmetric metric connection. Then

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = 0 \quad (8)$$

for all  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

**Corollary 2.6.** Let  $M$  be a semi-invariant submanifold of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$  with semi-symmetric metric connection, then

$$\tilde{\nabla}_X \xi = 0 \quad (9)$$

for all  $X \in \Gamma(TM)$ .

### 3. SEMI INVARIANT SUBMANIFOLDS OF LORENTZIAN KENMOTSU MANIFOLD

**Definition 3.1** An  $(2n+1)$ -dimensional Riemannian submanifold  $M$  of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$  is called a semi-invariant submanifold if  $\xi$  are tangent to  $\bar{M}$  and there exists on  $M$  a pair of orthogonal distribution  $\{D, D^\perp\}$  such that

- i.  $TM = D \oplus D^\perp \oplus Sp\{\xi\}$ ,
- ii. The distribution  $D$  is invariant under  $\varphi$ ,  $\varphi D = D$ ,
- iii. The distribution  $D^\perp$  is anti invariant under  $\varphi$ , that is  $\varphi D^\perp \subset TM^\perp$ .

A semi-invariant submanifold  $M$  is said to be an invariant (resp. anti-invariant) submanifold if we have  $D^\perp = \{0\}$  (resp.  $D = \{0\}$ ). We say that  $M$  is a proper semi-invariant submanifold, which is neither an invariant nor an anti-invariant submanifold.

Let  $\bar{\nabla}$  be the Levi-Civita connection of  $\bar{M}$  with respect to the induced metric  $g$ . Then Gauss and Weingarten formulas are given by

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y - h(X, Y) \quad (10)$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{*\perp}_X Y \quad (11)$$

for any  $X, Y \in \Gamma(TM)$  and  $V \in \Gamma(TM^\perp)$ .  $\nabla^{*\perp}$  is the connection in the normal bundle,  $h$  is the second fundamental form of  $\bar{M}$  and  $A_V$  is the Weingarten endomorphism associated with  $V$ . The second fundamental form  $h$  and the shape operator  $A$  related by

$$g(h(X, Y), V) = g(A_V X, Y) \quad (12)$$

We denote by same symbol  $g$  both metrics on  $\bar{M}$  and  $M$ . Let  $\tilde{\nabla}$  be the semi-symmetric metric connection on  $\bar{M}$  and  $\nabla$  be the induced connection on  $M$  with respect to unit normal  $N$ . Then,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + m(X, Y) \quad (13)$$

where  $m$  is a tensor field of type  $(0,2)$  on semi-invariant submanifold  $M$ . Using (6) and (10) we have,

$$\nabla_X Y + m(X, Y) = \nabla^*_X Y + h(X, Y) + \eta(Y)X$$

So equation tangential and normal components from both the sides, we get

$$\begin{aligned} m(X, Y) &= h(X, Y) \text{ and} \\ \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla^*_X Y + \eta(Y)X \end{aligned} \quad (14)$$

From (14) and (11)

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X N &= \nabla^*_X N + \eta(N)X \\ &= -A_N X + \eta(N)X \\ &= (-A_N + a)X \end{aligned}$$

where is  $a = \eta(N)X$  function on  $M$ .

Now, Gauss and Weingarten formulas for a semi-invariant submanifolds of a Lorentzian Kenmotsu manifold with a semi-symmetric non-metric connection is

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y) \quad (15)$$

and

$$\tilde{\nabla}_X N = (-A_N + a)X + \nabla^{*\perp}_X Y \quad (16)$$

for all  $X, Y \in \Gamma(TM)$   $N \in \Gamma(TM^\perp)$   $h$  second fundamental form of  $M$  and  $A_N$  is the Weingarten endomorphism associated with  $N$ . The second fundamental form  $h$  and the shape operator  $A$  related by

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y). \quad (17)$$

The projection morphisms of  $TM$  to  $D$  and  $D^\perp$  are denoted by  $P$  and  $Q$  respectively. For any  $X, Y \in \Gamma(TM)$  and  $N \in \Gamma(TM^\perp)$  we have

$$X = PX + QX + \sum_{i=1}^s \eta^i(X)\xi_i \quad (18)$$

and

$$\varphi V = tV + nV \quad (19)$$

where  $tV$  (resp.  $nV$ ) denotes the tangential (resp. normal) component of  $\varphi N$ .

**Theorem 3.5.** The connection induced on semi-invariant submanifolds of a Lorentzian Kenmotsu manifold with semi-symmetric metric connection is also a semi-symmetric metric connection.

#### 4. GEOMETRY OF DISTRIBUTIONS

**Definition 4.1** The invariant (resp. anti-invariant) distribution on  $D$  (resp.  $D^\perp$ ) is said to be parallel with respect to the connection  $\nabla$  on  $M$  if  $\nabla_X Y \in D$  (resp.  $\nabla_Z W \in D^\perp$ ) for all  $X, Y \in D$  (resp.  $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ ).

**Theorem 4.2** Let  $M$  be a semi invariant submanifold of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$  with semi-symmetric metric connection. Then, the horizontal distribution  $D$  is parallel if and only if

$$h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y) = \varphi h(X, Y)$$

for all  $X, Y \in D$ .

*Proof.* Since every parallel is involutive then the first equality follows immediately. Now since  $D$  is parallel, for all  $X, Y \in D$ , we have

$$\nabla_X \varphi Y \in D.$$

After some calculations, we get

$$th(X, Y) = 0.$$

Then  $D$  is parallel if and only if  $h(X, \varphi Y) = nh(X, Y)$ .

On the other hand

$$\varphi h(X, Y) = th(X, Y) + nh(X, Y).$$

Then we have  $\varphi h(X, Y) = nh(X, Y)$ , which completes the proof.

**Theorem 4.3** Let  $M$  be a semi invariant submanifold of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\bar{M}$  with semi-symmetric metric connection. Then, the distribution  $D^\perp$  is parallel if and only if

$$-A_{\varphi W} Z = g(Z, W)\xi + th(Z, W)$$

for all  $Z, W \in D^\perp$ .

*Proof.* For all  $Z, W \in D^\perp$  we get,

$$-A_{\varphi W} Z - \varphi P \nabla_Z W = g(Z, W)\xi + th(Z, W)$$

Then, we have,

$$\nabla_Z W \in D^\perp \Leftrightarrow P \nabla_Z W = 0,$$

which gives our assertion.

**Definition 4.4** A semi invariant submanifold is said to be mixed totally geodesic  $h(X, Y) = 0$ , for any  $X \in \Gamma(D)$  and  $Z \in D^\perp$ .

**Lemma 5** Let  $M$  be a semi invariant submanifold of a Lorentzian Kenmotsu manifold  $\overline{M}$  with semi-symmetric metric connection. Then  $M$  is mixed totally geodesic if and only if

$$A_V X \in D, \quad \forall X \in D, V \in \Gamma(TM^\perp)$$

and

$$A_V Y \in D^\perp, \quad \forall Y \in D^\perp, V \in \Gamma(TM^\perp).$$

*Proof.* For all  $X \in D, V \in \Gamma(TM^\perp)$  and  $Y \in D^\perp$  we have

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V). \tag{20}$$

Let  $M$  be mixed totally geodesic. Then we get

$$g(h(X, Y), V) = 0.$$

On the other hand, using (20) we arrive

$$g(A_V X, Y) = 0 \Leftrightarrow A_V X \in D.$$

Hence, for all  $\forall X \in D, V \in \Gamma(TM^\perp)$ , we obtain

$$g(h(X, Y), V) = 0 \Leftrightarrow h(X, Y) = 0 \Leftrightarrow A_V X \in D.$$

In a similar way is deduced relation second equation.

## REFERENCES

- [1] Bishop RL, O'Neill B. Manifolds of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. 145: 1-50.
- [2] Duggal KL. Space time manifold and contact Manifolds. *Int. J. of math. And mathematical science.* 1990. 13: 545-554.
- [3] Friedmann A, Schouten JA. Uber die Geometric der halbsymmetrischen Ubertragung. *Math. Z.* 1924. 21: 211-223.
- [4] Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds. *TohokuMath. J. II Ser.* 1972. 24: 93-103.
- [5] Kobayashi M. Semi-invariant submanifolds of a certain class of almost contact manifolds. *Tensor N. S.* 1986. 43: 28-36.
- [6] Nirmala SA, Mangala RC. A semi-symmetric non-metric connection on Riemannian manifold. *Indiana J. Pure Appl. Math.* 1992. 23: 399-40.
- [7] Roşca R. On Lorentzian Kenmotsu manifolds. *Atti Accad. Peloritana Pericolanti, Cl. Sci.* 1991. 69: 15-30.
- [8] Sarı R, Vanlı A. Slant submanifolds of a Lorentz Kenmotsu manifold. *Mediterr. J. Math.* 2019. 16:129.
- [9] Sarı R. Some Properties Curvature of Lorentzian Kenmotsu Manifolds. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences.* 2020. 5(1): 283–292.

- [10] Sinha BB, Srivastava AK. Semi-invariant submanifolds of a Kenmotsu manifold with constant  $\phi$ -holomorphic sectional curvature. *Indian J. pure appl. Math.* 1992. 23(11): 783-789.
- [11] Takahashi T. Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric. *Tohoku Math. J.* 1969. 21(2): 271-290.
- [12] Turgut Vanli A, Sari R. On semi invariant submanifolds of generalized Kenmotsu manifolds with semi symmetric metric connection. *Acta Universitatis Apulensis.* 2015. 43: 79-92.
- [13] Yano K. On semi-symmetric metric connection. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 1970. 15: 1579-1586.