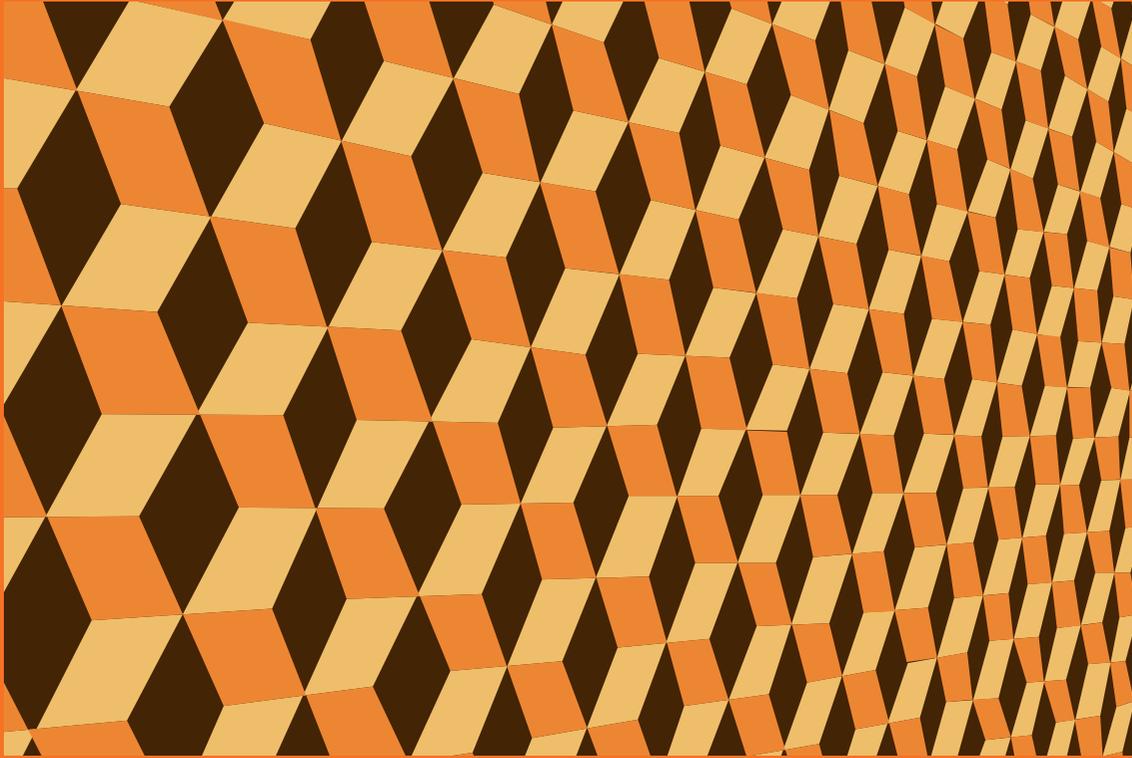




# İSTATİSTİK ARAŞTIRMA DERGİSİ Journal of Statistical Research

**Cilt-Volume: 05 Sayı-Number: 02**  
**Aralık-December 2007**

ISSN 1303-6319



**TÜRKİYE İSTATİSTİK KURUMU**  
Turkish Statistical Institute



# **İSTATİSTİK ARAŞTIRMA DERGİSİ**

## **Journal of Statistical Research**

**Cilt-Volume: 05 Sayı-Number: 02**  
**Aralık-December 2007**



**Yayın istekleri için** For publication order

**Döner Sermaye İşletmesi** Revolving Fund Management

**Tel:** + (312) 425 34 23 - 410 05 96 - 410 02 85

**Fax:** + (312) 417 58 86

**Yayın içeriğine yönelik sorularınız için** For questions about contents of the publication

**Dergi Editörlüğü** Journal Editorship

**Tel:** + (312) 410 03 75 - 284 45 00/171

**Fax:** + (312) 425 34 05

**İnternet** Internet  
**http://www.tuik.gov.tr** http://www.turkstat.gov.tr

**E-posta** E-mail  
**dergi@tuik.gov.tr** journal@tuik.gov.tr

**Yayın No** Publication Number  
**3170**

**ISSN**  
**1303-6319**

**Türkiye İstatistik Kurumu** Turkish Statistical Institute

**Necatibey Cad. No: 114 06100 ANKARA / TÜRKİYE**

**Bu yayının 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'na göre her hakkı Türkiye İstatistik Kurumu Başkanlığı'na aittir. Gerçek veya tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.**

Turkish Statistical Institute reserves all the rights of this publication. Unauthorised duplication and distribution of this publication is prohibited under Law No: 5846.

**Türkiye İstatistik Kurumu Matbaası, Ankara**  
**Temmuz 2008**

**MTB: 2008-0540 - 400 Adet-Copies**

Turkish Statistical Institute, Printing Division, Ankara  
July 2008

**İstatistik Araştırma Dergisi'nin Değerli Okuyucuları,**

Dergi'mizin beşinci cildinin, ikinci sayısını hedeflemiş olduğumuz yayım tarihinden epey gecikmeli olarak da olsa sizlerin kullanımına sunmuş bulunuyoruz. Dergi'mizin hemen hemen tüm sayılarının önsözlerinde vurguladığımız ve bu sayısında da özellikle üzerinde durmak istediğimiz iki konuyu belirtmek isteriz. Bunlardan ilki; makale yazarları tarafından Dergi'de yayımlanmak üzere gönderilen makalelerin, Dergi Kılavuzu'nda belirtilen ilke ve yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmamasıdır. Diğer konu da; ilgili makale konusunda uzman olarak belirlemiş olduğumuz (hakem havuzu bilgilerine dayalı olarak) hakemlerin makale taslağını değerlendirme süreçlerinin, hedeflenen sürecin oldukça üzerinde olmasıdır. Makalelerin bilimsel inceleme süresindeki bu tür beklenmeyen gecikmeler hem bizi, hem de makale sahiplerini çok üzmektedir. Bu konuda, hakemlerimize bir çok kez hatırlatma uyarılarına rağmen, süreçte iyileştirme yapılmasında sıkıntılar yaşanmaktadır.

Dergi'mizde hakemlik sürecine girebilecek nitelik, kalite ve içerikte makale sayısının yeteri kadar olmaması ve değerlendirme sürecinde yaşanan yukarıda sözü edilen sıkıntılar nedeniyle 2008 yılından itibaren (6. cilt ve sonrası) en azından talep bu düzeyde kaldığı sürece, Dergi'nin yılda bir sayıya indirilerek, yayımlanması ve bu sayıda da daha fazla makale yayımlanması ilke kararı olarak Editörlük tarafından benimsenmiştir. Bu önlem ile yaşanan olumsuzlukların denetim altına alınabilmesi (hakem seçiminde daha seçici ve izleyici olunarak) ve daha nitelikli makalelerin yayımlanabilmesi mümkün olabilecektir.

Dergi'mizin 2007 Aralık sayısına ait olmak üzere gönderilen makale sayısı 20 olup; bunlardan 9'u Editör ve/veya hakemlerce *reddedilmiş*, 6'si *kabul edilmiş*, 2'si *yazar veya yazarlarında düzeltmede*, 3'ü de *hakem/hakemlerde* 1. ve 2. inceleme sürecinde bulunmaktadır.

Dergi'nin tüm sayılarına web ortamında erişim imkanı sağlanmıştır. Dergi'nin Türkçe web sayfasında ilgili her tür doküman erişime açılmıştır. Ancak web ortamında, makale başvurularında var olan teknik sorunlar henüz giderilememiştir. Bu konuda gerekli anonslar web sayfasında yapılacaktır. Dergi'nin İngilizce sayfası için de gerekli teknik alt yapı çalışmaları tamamlanmış olup, tasarım çalışmalarına devam edilmektedir.

Dergi'nin basım aşamasına gelmesinde emeğini ve desteklerini esirgemeyen daha önceki TÜİK Başkanı Sayın Doç. Dr. Ömer DEMİR'e, şimdiki Başkan Sayın A. Ömer TOPRAK'a, Dergi'nin her aşamasında emeği geçen Editör yardımcıları TÜİK Uzmanı Sayın Sevil UYGUR'a, Sayın Dr. Özlem İLK'e ve son olarak da emeği geçen diğer tüm TÜİK çalışanlarına teşekkürlerimi iletmemiştir.

Dergi'nin diğer sayılarında hedeflenenler ölçüsünde buluşmak dileği ile saygılar sunarım.

**Prof. Dr. Fetih YILDIRIM**  
**Dergi Editörü**



	Sayfa Page	
<b>ÖNSÖZ</b>	<b>III</b>	<b>FOREWORD</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>V</b>	<b>CONTENTS</b>
<b>AMAÇ, KAPSAM, İLKELER</b>	<b>VI</b>	<b>AIM, TARGET, PRINCIPLES</b>
<b>HAKEM LİSTESİ</b>	<b>VIII</b>	<b>REFEREE LIST</b>
<b>İçilişki ve Genelleştirilmiş Maksimum Entropi Tahmin Edicileri</b> <i>Altan ÇABUK, Fikri AKDENİZ</i>	<b>1</b>	<b>Multicollinearity and Generalized Maximum Entropy Estimators</b> <i>Altan ÇABUK, Fikri AKDENİZ</i>
<b>Otoregresif Hareketli Ortalamalar Sürecinde, Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi ile Bayesci Model Seçimi</b> <i>Erol EĞRİOĞLU, Süleyman GÜNAY</i>	<b>20</b>	<b>Bayesian Model Selection with Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Methods in Autoregressive Moving Average Processes</b> <i>Erol EĞRİOĞLU, Süleyman GÜNAY</i>
<b>Kayıt Dışı Ekonomi Varsayımı Altında Laffer Eğrisinin Tahmini</b> <i>Rahmi YAMAK, N. Alpay KOÇAK</i>	<b>30</b>	<b>Estimation of the Laffer Curve under the Assumption of the Existence of Underground Economy</b> <i>Rahmi YAMAK, N. Alpay KOÇAK</i>
<b>Türkiye’de İller İtibarıyla Kişi Başına Gelir Eşitsizliğinin Kalkılışı: Panel Birim Kök Analizi ile Bir Değerlendirme</b> <i>Ferit KULA, Alper ASLAN</i>	<b>44</b>	<b>The Persistence for Inequality of Real Gross Domestic Product Per Capita at Province Level in Turkey: An Overview with Panel Data Unit Root Test</b> <i>Ferit KULA, Alper ASLAN</i>
<b>Kısmi En Küçük Kareler Algoritmalarından NIPALS ile SIMPLS’in Tanıtımı ve Bir Uygulama</b> <i>Elif BULUT, Aylın ALIN</i>	<b>52</b>	<b>Introduction to Partial Least Squares Algorithms NIPALS and SIMPLS and an Application</b> <i>Elif BULUT, Aylın ALIN</i>
<b>Ridit Analizi</b> <i>İsmet DOĞAN, Nurhan DOĞAN</i>	<b>69</b>	<b>A Review on the Ridit Analysis</b> <i>İsmet DOĞAN, Nurhan DOĞAN</i>
<b>DANIŞMA KURULU ÜYELERİ</b>	<b>78</b>	<b>ADVISORY BOARD MEMBERS</b>

### Amaç ve Kapsam

İstatistik Araştırma Dergisi (İAD), istatistiki araştırmaların niteliğinin yükseltilmesi, istatistik yöntem ve uygulamalarının geliştirilmesi, literatürde yer alan çalışmaların tartışılması, istatistik uygulamalarıyla ilgili anket çalışmalarının ele alınması, kuramsal ve uygulama alanındaki araştırmacılar arasında iletişimin ortak çalışma ve yayınlarla güçlendirilmesi amacıyla, yayımlanan bir dergidir.

İAD'nin kapsamında yer alan tematik konular aşağıda özet olarak verilmiştir.

- Bankacılık, Finans, Sigortacılık, Aktüerya ve Risk Yönetimi; Bayesci İstatistik; Benzetim Teknikleri; Bilgi Sistemleri; Biyoistatistik; Bulanık Teori; Demografi; Deney Tasarımı ve Varyans Analizi; Ekonometri; Genel Sayımlar ve Değerlendirmeleri; İstatistik Eğitimi; İstatistik Etiği; İstatistik Kuramı; İstatistiksel Kalite Kontrolü; Kamuoyu ve Piyasa Araştırmaları; Klinik Denemeler; Mühendislikte İstatistik Uygulamaları; Olasılık ve Stokastik Süreçler; Optimizasyon; Örneklem ve Araştırma Tasarımları; Parametrik Olmayan İstatistiksel Yöntemler; Resmi İstatistikler; Toplum Bilimlerinde İstatistik; Veri Analizi ve Modelleme; Veri Madenciliği; Veri Yönetimi ve Karar Destek Sistemleri; Verimlilikte İstatistiksel Yaklaşımlar; Yönetimsel Süreçlerde Performans Analizi; Yöneylem Araştırması; Zaman Serileri; Diğer İstatistiksel Yöntemler gibi istatistiğin her dalında yeni bilgi üretimine yönelik tüm araştırmalar.

### Makale Dili ve Genel Kurallar

- Bu yayının 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'na göre her hakkı Başbakanlık Türkiye İstatistik Kurumu Başkanlığına aittir. Gerçek veya tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.
- Makale taslakları WORD yazım dilinde, Times New Roman yazı tipinde, 12 punto büyüklükte, satırlar arasında bir satır boşluk bırakılarak yazılmalı, şekil ve grafikler JPG dosyaları olarak hazırlanmalıdır.
- Sayfa boyutunda; soldan 3,5 cm, sağdan, yukarıdan ve aşağıdan 2,5 cm boşluk bırakılmalıdır.
- **Ana bölüm başlıklarının** tümü büyük harf, 12 punto büyüklükte, koyu, ortalı ve Arap rakamları ile numaralandırılarak; **alt bölüm başlıklarında** ise sadece kelimelerin baş harfleri büyük diğerleri küçük harfle, 12 punto büyüklükte, koyu, sola dayalı ve ana bölüm başlığına endeksli olarak Arap rakamları ile numaralandırılarak yazılmalıdır.
- Makale taslağı yazımında, okuyucunun, çalışmanın her aşamasını anlama ve değerlendirmesine olanak verecek bir anlatım ve plâna uyulmalıdır.
- Anlatım olabildiğince sade, anlaşılabilir, öz ve kısa olmalıdır. Gereksiz tekrarlardan, desteklenmemiş ifadelerden ve konu ile doğrudan ilişkisi olmayan açıklamalardan kaçınılmalıdır.
- Yazımda çok genel ifadeler kullanılmamalıdır. Yargı veya kesinlik içeren ifadeler mutlaka verilerek/ referanslara dayandırılmalıdır.
- Araştırmacı/araştırmacılar tarafından probleme, hangi kuramsal/kavramsal açıdan yaklaşıldığı, gerekçeleri ile birlikte belirtilmelidir.
- Kullanılan araştırma yönteminin seçilme gerekçesi açıklanmalıdır. Bütün veri toplama araçlarının geçerliliği ve güvenilirliği belirtilmelidir.
- Araştırma sonucunda elde edilen veriler bir bütünlük içinde sunulmalıdır.
- Sadece elde edilen verilere dayanan sonuçlar sunulmalıdır.
- Sonuçların yorumları, varsa, literatürdeki diğer kaynaklarla desteklenerek, değerlendirilmelidir.
- Yararlanılan kaynaklar, çalışmanın kapsamını yansıtacak zenginlik ve yeterlikte olmalıdır.
- Türkçe ve İngilizce özetler; çalışmanın amacı, yöntemi, kapsamı ve temel bulgularını içermelidir.

Ayrıntılı bilgi için, [www.tuik.gov.tr](http://www.tuik.gov.tr) adresinden "İstatistik Araştırma Dergisi Kılavuzu"na bakınız.

### Aim and Scope

“*Journal of Statistical Research*” (JSR) is a refereed journal with a view to raise the quality of statistical researches, improve the statistical methodology and applications, discuss the related studies in literature, consider survey studies regarding statistical application and strengthen the communication between researchers in the field of theory and application by joint studies and publications.

The contents of the “*Journal of Statistical Research*” are summarized below:

- Researches aimed at producing new knowledge in every field of statistics such as Banking, Finance, Insurance Trade, Actuarial and Risk Management; Bayesian Statistics; Biostatistics; Clinic Tests; Data Analysis and Modeling; Data Management and Decision Support Systems; Data Mining; Demography; Econometrics; Experimental Design and Variance Analysis; Fuzzy Theory; General Census and Evaluation; Information Systems; Non-Parametric Statistical Methods; Official Statistics; Operational Research; Optimization; Sampling and Research Designs; Performance Analysis in Managerial Process; Probability and Stochastic Processes; Public Opinion and Market Researches; Statistical Applications in Engineering; Statistical Approaches in Efficiency; Statistical Ethics; Statistical Quality Control; Statistical Training; Statistics in Social Science; Statistics Theory; Simulation Techniques; Time Series; Other Statistical Methods.

### Article Language and General Rules

- Prime Ministry, Turkish Statistical Institute reserves all the rights of this publication. Unauthorized duplication and distribution of this publication is prohibited under Law No: 5846.
- Article drafts should be prepared in WORD, using Times New Roman font, in 12 point size, with a blank line in between lines. Figures and tables should be prepared as JPG files.
- On an A4 paper size; from left 3,5 cm, from right, top and bottom 2,5 cm margins should be set.
- **Titles of the main sections** should be all capitalized, in 12 point size, bold, centered and numbered with Arabic numerals; only the first letter of the words in the **titles of the subsections** should be capitalized, with 12 point size, bold, left centered and numbered with Arabic numerals indexed to the titles of the main sections.
- In article draft writing, writer should follow such a plan that reader should be able to understand and evaluate all the steps of the study.
- Narration should be as plain as possible, as well as comprehensible, compact and short. Unnecessary repetitions, unsupported declarations and explanations that are not in direct relation to the topic should be avoided.
- General statements should be avoided in writing. Statements that include judgment or facts must be supported by data/references.
- It should be stated, with justifications, from which theoretical/conceptual angle the researcher/researchers have approached the problem.
- The reason of why the employed research methodology is chosen should be explained. The validity and reliability of all the data collection tools should be presented.
- Data obtained in conclusion of the research should be presented in unity.
- Results that only rely on the obtained data should be presented.
- The interpretation of the results should be supported and evaluated by the other resources, if any, in the literature.
- Used resources should be in good wealth and proficiency that will reflect the scope of the study.
- The Turkish and English abstracts should include; the goal, methodology, scope and main findings of the study.

Note: For detailed information, please see “A Guide for Journal of Statistical Research” at [www.tuik.gov.tr](http://www.tuik.gov.tr) web site.

**DERGİ'NİN BU SAYISINA BİLİMSEL KATKI SAĞLAYAN HAKEMLER-  
REFEREE WHO PROVIDE SCIENTIFIC CONTRIBUTIONS FOR THIS VOLUME**

1		<b>A. Ömer TOPRAK</b>	Türkiye İstatistik Kurumu
2	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Aysıt TANSEL</b>	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
3	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Bedriye SARAÇOĞLU</b>	Gazi Üniversitesi
4	<b>Doç. Dr.</b>	<b>Cem BAŞLEVENT</b>	Bilgi Üniversitesi
5	<b>Doç. Dr.</b>	<b>Cem KADILAR</b>	Hacettepe Üniversitesi
6	<b>Dr.</b>	<b>Ceylan YOZGATLIGİL</b>	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
7	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Ergun KARAAĞAOĞLU</b>	Hacettepe Üniversitesi
8	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Fatin SEZGİN</b>	Bilkent Üniversitesi
9	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Fetih YILDIRIM</b>	Çankaya Üniversitesi
10	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Fikri ÖZTÜRK</b>	Ankara Üniversitesi
11	<b>Doç. Dr.</b>	<b>İnci BATMAZ</b>	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
12	<b>Yrd. Doç. Dr.</b>	<b>Jale BALİBEYOĞLU</b>	Gazi Üniversitesi
13	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Kaptan KAPTANGİL</b>	Abant İzzet Baysal Üniversitesi
14	<b>Prof. Dr.</b>	<b>Mustafa AYTAÇ</b>	Uludağ Üniversitesi
15	<b>Dr.</b>	<b>Rukiye DAĞALP</b>	Ankara Üniversitesi
16	<b>Dr.</b>	<b>Saim YOLOĞLU</b>	İnönü Üniversitesi
17	<b>Doç. Dr.</b>	<b>Sevinç MIHÇI</b>	Hacettepe Üniversitesi

# İÇİLİŞKİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMUM ENTROPİ TAHMİN EDİCİLERİ

Prof. Dr. Altan ÇABUK\*

Prof. Dr. Fikri AKDENİZ\*\*

## ÖZET

*Bu çalışmada, alışılmış gösterimlerle  $y = X\beta + u$  genel lineer regresyon modeli düşünülmüştür. Bir çok uygulamada tasarım matrisi  $X$  şiddetli içilişkiye sahip olabilir. İçilişkinin varlığında Ridge regresyon tahmin edicisi  $\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1} X'y$  (Hoerl ve Kennard, 1970) ve Liu tahmin edicisi  $\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1} (X'y + d\hat{\beta})$  (Liu, 1993) ya da geliştirilmiş Ridge ve Liu-tipi tahmin ediciler en küçük kareler tahmin edicilerini iyileştirmek amacıyla kullanılmaktadır. Çalışmada, alternatif tahmin etme yöntem bilimi olarak maksimum entropi verilmiş ve temel veri kümesinde kötü koşulluluk olduğunda, genel lineer regresyonda parametreleri tahmin etmek için maksimum entropi yöntemi kullanılmıştır. Genelleştirilmiş maksimum entropi (GME) tahmin edicisi nitelendirilerek, parametre destek matrisleriyle birlikte parametreler üzerine eşitsizlik kısıtlarının koyulduğu tahmin yöntemi geliştirilmiştir. GME tahmin ediciler alternatif tahmin etme yöntemleri (En küçük kareler (EKK), eşitsizlik kısıtlı EKK, Ridge regresyon ve Liu-tip) ile hata kareleri ortalaması (HKO) ölçütüne göre karşılaştırılmıştır. Bu amaç için ABD'de tavuk talebi veri kümesi (Gujarati, 1992) üzerinde tahmin ediciler için nümerik olarak analiz edilmiştir.*

**Anahtar kelimeler:** Destek Noktası, Eşitsizlik Kısıtlı EKK Tahmin Edicisi, Genelleştirilmiş Maksimum Entropi Tahmin Edicisi, Liu Tahmin Edicisi, Ridge Regresyon Tahmin Edicisi.

## 1. GİRİŞ

Genel lineer modelde uygulanan yöntemlerin sağlaması gerekli varsayımlarda veya koşullarda çoğu kez sapmalar görülür. Araştırmacılar, problemi nitelendirerek ve daha incelikli tahmin yöntemleri bularak bu zorlukların üstesinden gelecek yanıtlar arar. Klasik regresyon varsayımlarında düzenli olarak görülen bu sapmaların nedeni, analizde kullanılan veriden kaynaklanır. Bu veri, genel olarak deneysel olmayan, aynı zamanda, araştırmacının kontrolü dışında oluşan gözlemlerden oluşur. Günümüzde, her ne kadar örneklem yöntemleri geliştirilmiş olsa bile, kullanılan veri kümelerinin çoğu örneklem-içi ve örneklem-dışı (bir araya toplama, kodlama, uyarılama ve yerine kullanma gibi) hataların etkisi altında kalır. Klasik regresyon modelini etkileyen problemlerden, durağan olmama veya tahmin edilecek olan parametre sayısının gözlem sayısından daha çok sayıda olması problemi, kötü sunum (ill-posed) problemi olarak tanımlanır.

\* Prof. Dr. Çukurova Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, 01330 Adana. e-posta: haltan@cu.edu.tr

\*\* Prof. Dr. Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 01330 Adana. e-posta: akdeniz@cu.edu.tr

Diğer yandan, parametre tahminlerinin oldukça kararsız olma problemi ise kötü-koşulluluk (ill-conditioned) problemi olarak tanımlanır.

Gözlemler deneysel olmayan yöntemlere bağlı üretildiklerinde veya veri üretme yöntemi ya da süreci kötü tasarlanmışsa, bu sorunla sıkça karşılaşılır. Parametre tahminlerinin oldukça kararsız olmasına neden olan böyle durumlarda içilişki problemi ortaya çıkar. Uygulamalı çalışmalarda, tam çoklu içilişki problemi ile karşılaşmak yok denecek kadar az olsa bile, önemli derecede çoklu içilişki problemi söz konusu olduğunda, EKK tahmin edicileri büyük varyanslı çıkar. Çoklu içilişkinin varlığı aşağıdaki durumlara neden olabilir:

- 1) Parametre tahminlerinde büyük sapmalara neden olur. Bu durumda parametre tahminlerinin kararlı olduğunu söylemek olanaklı değildir.
- 2) Parametre tahminlerinde artan değişkenlik olabileceği gibi yanlış işaretli çıkmasına da neden olur.
- 3) Parametrelere ilişkin hipotez testleri daha az güce sahip olacağından, hipotez testlerinden çıkarılan sonuçlarda güven eksikliği olacaktır.

Bu nedenlerden dolayı, uygulamalı çalışmalarda çoklu içilişki sorununun olma olasılığının oldukça iyi araştırılması gerekir. Golan vd. (1996, s.128) talep fonksiyonu tahmini çalışmalarında bu önemli problemi özellikle belirtmişlerdir.

Veride ortaya çıkan çoklu içilişki problemi ile ilgili birçok standart yaklaşım vardır. Bu standart yaklaşımların büyük bölümü, problemi yöntemine göre düzenleyen (parametreleri düzeltici) örneklem dışı önsel bilgiyi kullanan yaklaşımlardır. Bu nedenle, çoklu içilişki probleminin üstesinden gelebilmek için elde var olan bilgiden daha fazlasına gereksinim vardır. Tutarlı tahminlere ulaşmayı kolaylaştırmak için, sık sık ek varsayımlara başvurulur. Ancak, bu varsayımların veriler ile tutarlı olup olmadığına bakılmaz (Soofi, 1990).

Çoklu içilişki problemi söz konusu olduğunda, diğer bir tahmin yöntemi zayıf-koşulluluk ve kötü-sunumluluk gibi klasik tahmin problemlerinden etkilenmeyen ve son zamanlarda ortaya atılan maksimum entropi (ME) tahmin yöntemidir. ME prensibi, Shannon (1948) tarafından geliştirilen “bilgi kuramı kavramından” yararlanan Jaynes’in (1957a, b) çalışmasına dayanır. Jaynes “veri ile uyumlu modellerin seçilmesi gerektiğini aksi halde, uygun model seçilmemesi durumunda, kullanılan modellerin daha az bilgi verici olduğunu” önermektedir. ME, bilinmeyen parametrelerin tahminine farklı bir şekilde yaklaşır; ME gereksiz veya gelişigüzel varsayımları veya kısıtları kullanmaksızın, verinin modelde söz sahibi olmasına olanak tanır.

Bugüne kadar yapılan çalışmalardan elde edilen gelişmeler sonucunda GME tahmin edicisi ekonomik uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Veri uygulamalı, GME içeren bilimsel kaynaklar genellikle eksik sunumlu problemlere odaklanmıştır (Fraser, 2000; Paris 2001; Paris ve Howitt , 1998; Campbell ve Hill, 2006).

Daha önce yapılan çalışmalardan sadece Golan vd. (1996) yapmış olduğu çalışmada, temel veri kümesinde kötü koşulluluk söz konusu olduğunda, GME'nin uygulanması düşünülmüştür. Golan vd. (1996) yapmış olduğu bu çalışmada, bünyesinde önemli derecede çoklu içilişki sorununun yer aldığı yapay bir veri kümesi oluşturmuştur. Değişik tahmin edicilerden (EKK, En çok olabilirlik (Maksimum likelihood), Ridge regresyon ve kısıtlı en küçük kareler) elde edilen tahminleri GME'den elde edilen tahminlerle karşılaştırdıklarında, en doğru (kesin) tahmini GME'nin verdiğini bulmuştur. Uygulamış oldukları Monte Carlo simülasyonu sonucunda GME için ölçüt olarak kullanılan "hata kareleri ortalaması"nın, diğer geleneksel tahmin edicilerden elde edilen değerlerle karşılaştırıldığında, önemli derecede düşük olduğunu bulmuştur. Böylece Golan vd. (1996), kötü koşulluluk söz konusu olduğunda, geleneksel tahmin edicilere oranla GME'nin daha güçlü olduğunu göstermiştir.

Çalışmada, Golan vd. (1996, s.86-89) tarafından geliştirilen GME tahmin edicisi kullanılmıştır. Golan vd. (1996) yaptığı bir çok örneklem çalışmasında (özellikle gözlemlerde yüksek derecede içilişki olduğunda), GME tahmin edicisinin hem EKK tahmin edicisinden, hem de kısıtlı en küçük kareler (KEKK=RLS) tahmin edicisinden daha küçük bir riske sahip olduğunu göstermişlerdir. (Golan vd., s.132-133). GME tahmin edicisinde tek bir parametreye yapılan kısıt ile ilgili uygulama Fraser (2000) ve Shen ve Perloff (2001)'in çalışmalarında da vardır.

Bu çalışmada amaç, genel lineer modellerde (GLM), GME tahmin edicisini araştırmaktır. GME tahmin yöntemi parametreler için sınırları belirlemeyi gerektirdiğinden bu çalışmadaki uygulama içinde, hata terimi için uygun destek matrislerinin ve GME parametrelerinin nasıl belirleneceği incelenmiştir. GME parametreleri için belirlenen destek matrisini, önsel bilgiye, düşünülen eşitsizlik kısıtı ya da kısıtlarına uyumlu olarak değiştirerek, GME tahminlerinin duyarlılığı incelenmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde GLM'de yer olan parametreler ve hata terimleri, uygun destek matrisleri kullanılarak, yeniden parametrenmiş modelde parametre ve hata tahminlerinin elde edilişi verilmiştir. Üçüncü bölümde ABD'de piliç talebi veri kümesi (Gujarati, 1992) üzerinde Ridge ve Liu tahmin edicilerinde önce  $\hat{k}$  ve  $\hat{d}$  yanlılık parametreleri tahmin edilerek, sırasıyla Ridge ve Liu tahmin edicileri verilmiştir. Dördüncü bölümde, ABD'de tavuk talebi veri kümesi üzerinde GME tahmin edicileri için sayısal uygulama içinde eşitsizlik kısıtlı en küçük kareler (IRLS) tahminleri bulunmuştur. Ayrıca birden fazla parametrenin yer aldığı, çoklu parametre kısıtları ile GME tahminleri verilerek EKK, EKEKK (IRLS), Ridge ve Liu tahmin edicilerle GME tahmin edicileri hata kareleri ortalaması (HKO) ölçütüne göre karşılaştırılmıştır.

## 2. GENEL LİNEER MODEL (GLM)'DE GME TAHMİNİ

Golan vd. (1996), GLM'de bilinmeyen parametreleri ve hataları birlikte tahmin etmek için GME'yi kullanmıştır. GLM matris formunda (1) nolu eşitlikte verilen biçimde yazılır.

$$y = X\beta + e \quad (1)$$

Bu modelde:

$y : N \times 1$  bağımlı değişken üzerindeki örneklem gözlemler vektörü,

$X : N \times K$  açıklayıcı değişkenler matrisi (tasarım matrisi),

$e : N \times 1$  bilinmeyen hataların vektörü,

$\beta : K \times 1$  bilinmeyen parametrelerin vektörüdür.

Jaynes (1957a, 1957b), maksimum entropinin, kesikli olasılık dağılımında bilinmeyen olasılıkların tahmin edilmesine olanak tanıdığını göstermiştir. Golan vd. (1996), maksimum entropi yöntem bilimini genelleştirmiş, bilinmeyen parametreleri ve bilinmeyen hataları olasılık formunda ifade ederek doğrusal modeli yeniden parametrelemiştir. Destek noktaları ile ilgili bilinmeyen olasılıkları tahmin etmek için maksimum entropi kullanılmıştır. Böylece, bilinmeyen parametrelerin ve bilinmeyen hataların her ikisinin de önsel sınırlar içinde ele alındığı varsayılmıştır.

Parametre desteklerinin öncelikli belirlenmesi önsel bilgiye ya da iktisat teorisine dayanır. Her bir parametre ya da hata terimi için en küçük ve en büyük değerlerini belirlemek kolay bir iş değildir, çünkü iktisat teorisi genellikle bu bilgiyi sağlamayabilir. Bir parametre için doğru önsel bilgi olmadığında, parametre destekleri sıfır değer orta değer olacak şekilde geniş tutulur. Golan vd. (1996) bu önemli noktayı tartışmış ve “parametre destekleri için aralığı geniş tutmak riski azaltıcı sonuç verir” şeklinde sonuçlandırmışlardır.

Her bilinmeyen parametre için, sıfır etrafında simetrik olma zorunluluğu olmayan ancak bilinmeyen parametreleri sınırları içine alan,  $M \geq 2$  destek noktalarından oluşan bir matris tanımlansın.

$z_k : M \times 1$  k. parametre için destek vektörünü,  $p_k : M \times 1$  k. parametre ile ilgili destek noktaları üzerindeki olasılıkların (veya ağırlıkların) vektörünü göstermek üzere bilinmeyen parametre vektörü  $\beta$  (2) nolu eşitlikteki gibi yazılabilir.

$$\beta = Zp = \begin{bmatrix} z'_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & z'_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & z'_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

Burada:

$\beta : K \times 1$  bilinmeyen parametreler vektörünü,

$Z : K \times KM$  destek noktaları matrisini,

$p : KM \times 1$  bilinmeyen ağırlıklar vektörünü gösterir. Öyleki, tüm k'lar için  $p_{km} > 0$  ve

$p'_k i_M = 1$  'dir.

Uygulamada bilinmeyen hatalar için sınırları oluşturmak oldukça zordur. Çalışmada, Pukelsheim (1994)'ün çalışmasından yararlanarak, hata sınırları için sırasıyla  $(-3\sigma, 3\sigma)$  ve  $(-4\sigma, 4\sigma)$  aralıkları kullanılmıştır. Bu kuralı kullanmak için  $\sigma$ 'nın değeri ya tahmin edilmeli ya da bilinmelidir.

Her bir hata için  $J \geq 2$  destek noktaları kümesi tanımlansın. Bu küme, sıfıra göre simetrik ve bilinmeyen hataları sınırlamaktadır.  $v_i: J \times 1$  i. hata için destek vektörü ve  $w_i: J \times 1$  destek noktaları üzerindeki ağırlıkların ilgili vektörü olsun. Bilinmeyen hata vektörü (3) nolu eşitlikle verilen biçimde yazılabilir.

$$e = Vw = \begin{bmatrix} v'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v'_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

$e$ :  $N \times 1$  rastgele hatalar vektörünü,

$V$ :  $N \times NJ$  destek noktaların matrisini,

$w$ :  $NJ \times 1$  bilinmeyen ağırlıklar vektörünü gösterir. Öyleki, tüm  $i$ 'ler için  $w_{ij} > 0$  ve  $w_i' i_j = 1$ 'dir. (2) ve (3), eşitliklerinin kullanılmasıyla (1) nolu GLM yeniden parametreleştirilmiş model olarak,

$$y = X\beta + e = XZp + Vw \quad (4)$$

ve

$$\beta = Zp, e = Vw \quad (5)$$

biçiminde yazılır. (4) denklemindeki yeniden parametrelenenin kullanılmasıyla standart lineer tahmin problemi, GME problemi olarak aşağıdaki amaç fonksiyonu ile formüleleştirilebilir:

$$MaxH(p, w) = -\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K p_{km} \ln p_{km} - \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^N w_{ij} \ln w_{ij} \quad (6)$$

Bu kısıtlı optimizasyon probleminde kısıtlar:

$$y = XZp + Vw \quad (7)$$

$$(I_K \otimes i'_M)p = i_K, \quad (8)$$

$$(I_N \otimes i'_J)w = i_N, \quad (9)$$

dir.

Burada;

⊗ : Kronoker çarpımı göstermektedir. (7) nolu denklem model kısıtını, (8) ve (9) nolu denklemler ise toplanabilirlik kısıtlarını gösterir. Kısıtlar, K parametrenin ve N hatanın her biri için olasılıklar toplamının 1 olmasını gerektirir. Parametre destek matrisi, blok-köşegen matris ise GME kısıtlı optimizasyon probleminin çözümleri

$$\hat{p}_{km} = \exp(z_{km}x'_k\hat{\lambda}) / \sum_{m=1}^M \exp(z_{km}x'_k\hat{\lambda}) \quad (10)$$

ve

$$\hat{w}_{nj} = \exp(v_{nj}\hat{\lambda}_n) / \sum_{j=1}^J \exp(v_{nj}\hat{\lambda}_n) \quad (11)$$

olacaktır (Fraser (2000) , Campbell ve Hill (2006)).

### 3. GENEL LİNEER MODELDE İÇİLİŞKİ OLMASI DURUMUNDA EKK, RIDGE VE LIU TAHMİNLERİ

Bu bölümde, Tablo1'deki veriyi ve (12) nolu denklemi kullanarak 4. bölümde GME tahminleri ile karşılaştırmak üzere EKK ile birlikte Ridge ve Liu yanlı tahminleri hesaplanmıştır. Doğrusal regresyon probleminde GME, Golan vd. (1996) tarafından ifade edilen ampirik Bayes ve Stein-Like tahmin edicilere benzer daraltıcı bir yanlı tahmin edicidir. (1) denklemi ile verilen  $y = X\beta + e$  GLM'de  $\beta$ 'yi tahmin etmek için genel olarak EKK tahmin edicisi  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$  kullanılır. Açıklayıcı değişkenler arasında içilişki olması durumunda  $\hat{\beta}$  kararlı bir tahmin edici değildir. Çalışmada kullanılan (12) nolu model log-lineer tavuk eti talep modelidir.

$$y = X\beta + u = \beta_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + u \quad (12)$$

Modelde yer alan değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$y = \ln Y =$  kişi başına tavuk eti tüketiminin logaritması

$x_2 = \ln X_2 =$  kişi başına harcanabilir reel gelirin logaritması

$x_3 = \ln X_3 =$  tavuk etinin perakende reel satış fiyatının<sup>(1)</sup> logaritması

$x_4 = \ln X_4 =$  domuz etinin perakende reel satış fiyatının logaritması

$x_5 = \ln X_5 =$  sığır etinin perakende reel satış fiyatının logaritması

Modelin değişkenlerine ilişkin gözlemler; (Gujarati, 1992, s.305) Tablo 1'de ve bu değişkenlerin doğal logaritmaları alındıktan sonra gözlemlere ilişkin ortaya çıkan özet istatistikler Tablo 2'de verilmiştir. (12) eşitliğindeki  $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  parametreleri sırasıyla, gelir, tavuk eti fiyatı, çapraz domuz eti fiyatı ve çapraz sığır eti fiyatı esneklik değerleridir.

(1): Reel fiyatlar, nominal fiyatların gıda için "Tüketici Fiyat Endeksi"ne bölünmesiyle elde edilir.

Bu parametrelerin beklenen işaretleri ise sırasıyla  $\beta_2 > 0$ ,  $\beta_3 < 0$ ,  $\beta_4 > 0$  ve  $\beta_5 > 0$ 'dır. Modeldeki  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5$  EKK tahminleri kullanılarak tahmin edilen regresyon fonksiyonu:

$$\hat{y} = 2.190 + 0.343x_2 - 0.505x_3 + 0.149x_4 + 0.091x_5$$

(st.hata.)      (0.156)      (0.083)      (0.111)      (0.099)      (0.101)

dır. EKK tahminlerine bakıldığında tüm esneklik değerlerinin beklenen işaretleri sağladığı görülür.

**Tablo 1. Tavuk eti talebi modeli yıllık verileri (1960-1982)**

Y	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
27.8	397.5	42.2	50.7	78.3
29.9	413.3	38.1	52.0	79.2
29.8	439.2	40.3	54.0	79.2
30.8	459.7	39.5	55.3	79.2
31.2	429.9	37.3	54.7	77.4
33.3	528.6	38.1	63.7	80.2
35.6	560.3	39.3	69.8	80.4
36.4	624.6	37.8	65.9	83.9
36.7	666.4	38.4	64.5	85.5
38.4	717.8	40.1	70.0	93.7
40.4	768.2	38.6	73.2	106.1
40.3	843.3	39.8	67.8	104.8
41.8	911.6	39.7	79.1	114.0
40.4	931.1	52.1	95.4	124.1
40.7	1021.5	48.9	94.2	127.6
40.1	1165.9	58.3	123.5	142.9
42.7	1349.6	57.9	129.9	143.6
44.1	1449.4	56.5	117.6	139.2
46.7	1575.5	63.7	130.9	165.5
50.6	1759.1	61.6	129.8	203.3
50.1	1994.2	58.9	128.0	219.6
51.7	2258.1	66.4	141.0	221.6
52.9	2478.7	70.4	168.2	232.6

Tablo 2'de gözlem değerlerinin logaritmaları için ortalama, minimum, maksimum, standart sapma ve değişim katsayılarının değerleri verilmektedir.

**Tablo 2. Tavuk verisi için özet istatistikler**

Değişken	Ortalama	Minimum	Maksimum	Standart sapma	Değişim katsayısı
lnY	3.664	3.325	3.968	0.188	0.051
lnX <sub>2</sub>	6.783	5.985	7.815	0.570	0.084
lnX <sub>3</sub>	3.847	3.619	4.254	0.222	0.058
lnX <sub>4</sub>	4.434	3.926	5.125	0.380	0.086
lnX <sub>5</sub>	4.751	4.349	5.449	0.380	0.080

Parametre tahminlerinin istatistiksel anlamlılıklarına bakıldığında ise, gelir esnekliğinin ( $\hat{\beta}_2$ ) ve tavuk eti fiyat esnekliğinin ( $\hat{\beta}_3$ ) anlamlı, ancak diğer yandan, rakip ürünler olan domuz eti çapraz fiyat esnekliğinin ( $\hat{\beta}_4$ ) ve sığır eti çapraz fiyat esnekliğinin ( $\hat{\beta}_5$ ) anlamsız olduğu görülmektedir. Teoride anlamlı olan, ancak uygulamada istatistiksel olarak anlamsız çıkan bu tahminler, tavuk eti talebinin rakip ürünler olan sığır eti ve domuz eti fiyatlarından etkilenmediğini göstermektedir. Bu durumun ortaya çıkması, “açıklayıcı değişkenler arasında çoklu içilişkinin varlığı probleminden kaynaklanabilir mi?” sorusunu araştırmayı gerektirir. Açıklayıcı değişkenler arasında içilişki olması durumunda  $\hat{\beta}$  kararlı bir tahmin edici değildir.

Tablo 3’te açıklayıcı değişkenlerin logaritmalarının örneklem korelasyon matrisi verilmektedir.

**Tablo 3. Örneklem korelasyon matrisi**

	$\ln Y$	$\ln X_2$	$\ln X_3$	$\ln X_4$	$\ln X_5$
$y = \ln Y$	1.000	0.973	0.804	0.924	0.934
$x_2 = \ln X_2$	0.973	1.000	0.907	0.972	0.979
$x_3 = \ln X_3$	0.804	0.907	1.000	0.947	0.933
$x_4 = \ln X_4$	0.924	0.972	0.947	1.000	0.954
$x_5 = \ln X_5$	0.934	0.979	0.933	0.954	1.000

Görüldüğü gibi dört açıklayıcı değişken arasındaki ikili korelasyonlar 0.90’dan büyüktür ve  $R^2 = 0.9823$ ’dür. Bununla birlikte böyle yüksek ikili korelasyonlar talep fonksiyonunun içilişkidenden etkilenmesini garanti etmez. Belsley (1991) korelasyon ile içilişkinin aynı anlama gelmediğine dikkat çekmiştir. Açıklayıcı değişken çiftleri arasında korelasyon düşük olduğunda da, veri içilişkiye sahip olabilir. Örnekte açıklayıcı değişkenlerin, birinin geri kalanları üzerindeki regresyon denklemi yazılırsa tüm regresyonlar için  $R^2$  değerlerinin 0.94’ü aştığı görülür (Gujarati, 1992 sayfa 306-307). F-testi uygulanırsa  $R^2$ ’lerin istatistiksel olarak önemli olduğu sonucuna varılır. Bu sonuçlar regresyon denklemindeki her bir açıklayıcı değişkenin diğerleri ile yüksek içilişkili olduğunu gösterir.

Belsley vd. (1980) koşul sayısı  $\kappa = \sqrt{\lambda_{\max} / \lambda_{\min}} = 10$  civarında olduğunda veride zayıf bir bağımlılık olduğunu; koşul sayısı 30-100 arasında ise orta düzeyden şiddetli bağımlılığa yaklaşıldığını ve koşul sayısı 100’den büyükse ciddi içilişki problemi olduğunu işaret etmiştir. Yukarıda EKK tahmini verilen Gujarati (1992) verisi için  $X'X$ ’in özdeğerleri sırasıyla  $\lambda_1 = 2406.9$ ,  $\lambda_2 = 0.47683$ ,  $\lambda_3 = 0.15906$ ,  $\lambda_4 = 0.079068$ ,  $\lambda_5 = 0.016011$ ; koşul sayısı  $\kappa = \sqrt{\lambda_{\max} / \lambda_{\min}} = \sqrt{(2406.9) / 0.016011} = 387.72$ ’dir. Bu sonuç veride şiddetli içilişki olduğunu göstermektedir. İçilişki olduğunda bu sorunu çözmek için Hoerl ve Kennard (1970)’da  $\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1} X'y$  ( $k > 0$ ) Ridge regresyon tahmin edicisini

önermiştir. Liu (1993)'te  $\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}_{OLS})$ 'yi önermiştir. Model (3)'e dönerek, model kanonik forma indirgendiğinde;

$$y = Z\alpha + e \quad (13)$$

yazılır. Burada;

$Q$ : ortogonal matris ve kolonları  $X'X$  in özdeğerlerini oluşturmak üzere,  $Z = XQ$  ve  $\alpha = Q'\beta$  'dir. O halde  $Z'Z = Q'X'XQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$   $X'X$  'in sıralı özdeğerleridir. (13) modeli için (i) ve (ii) ile iki farklı tahmin edici yazılabilir.

(i) Hoerl ve Kennard (1970)'in önerdiği Ridge tahmin edicisi:

$$\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1} X'y \text{ ve } \hat{\alpha}_k = (\Lambda + kI)^{-1} \Lambda \hat{\alpha}_{OLS} \quad (14)$$

dir. Hata kareler ortalaması :

$$HKO(\hat{\alpha}_k) = \sum_{i=1}^p (\lambda_i \sigma^2 + k^2 \alpha_i^2) / (\lambda_i + k)^2 \quad (15)$$

dir (Akdeniz ve Erol, 2003). EKK regresyonundan  $\hat{\sigma} = 0.028$  ve

$\hat{\beta}_{OLS} = (2.190, 0.343, -0.505, 0.149, 0.091)'$  olarak bulunur.  $k$  için iki farklı tahmin değeri kullanılabilir: Hoerl vd. (1975) tarafından önerilen

$$\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}^2 / \hat{\beta}'\hat{\beta} = p\hat{\sigma}^2 / \hat{\alpha}'\hat{\alpha} \quad (16)$$

ve Lawless ve Wang (1976)'in önerdiği

$$\hat{k}_{LW} = p\hat{\sigma}^2 / \sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{\alpha}_i^2 = p\hat{\sigma}^2 / \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta} \quad (17)$$

formülleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$\hat{k}_{HKB} = 0.00073233932$  için

$$\hat{\beta}_{HKB} = \begin{bmatrix} 2.1337238 \\ 0.35752892 \\ -0.46839471 \\ 0.12491947 \\ 0.074252764 \end{bmatrix}$$

dir. Tahmin edilmiş hata kareler ortalaması:  $HK\hat{O}(\hat{\beta}_{HKB}) = 0.064784018$  olarak bulunur.  
 $\hat{k}_{LW} = 0.000012297786$  için

$$\hat{\beta}_{LW} = \begin{bmatrix} 2.1888132 \\ 0.34282171 \\ -0.50395762 \\ 0.14812854 \\ 0.090805174 \end{bmatrix}$$

dir. Tahmin edilmiş hata kareler ortalaması:  $HK\hat{O}(\hat{\beta}_{LW}) = 0.063481294$  'dir.

(ii) (1) modeli için Liu (1993) tarafından önerilen Liu tahmin edicisi:

$$\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}_{OLS}) \quad (18)$$

dir. (13) kanonik modeli için Liu tahmin edicisi:

$$\hat{\alpha}_d = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + d\hat{\alpha}_{OLS}), Q'\beta = \alpha, \hat{\beta}_{OLS} = Q\hat{\alpha}_{OLS} \quad (19)$$

dir. O halde

$$\hat{\beta}_d = \begin{bmatrix} 2.1633327 \\ 0.34113666 \\ -0.49515042 \\ 0.14769634 \\ 0.09182490 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$HKO(\hat{\beta}_d) = HKO(\hat{\alpha}_d) = \sum_{i=1}^p [(\lambda_i + d)^2 \sigma^2 + \lambda_i \alpha_i^2 (1-d)^2] / \lambda_i (1 + \lambda_i)^2 \quad (20)$$

dir (Akdeniz ve Erol (2003)).  $d$ 'nin HKO'yu minimum yapan optimal değeri (Liu,1993)'te

$$d_{opt} = \left( \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2 - \sigma^2}{(1 + \lambda_i)^2} \right) / \left( \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 + \lambda_i \alpha_i^2}{\lambda_i (1 + \lambda_i)^2} \right) \quad (21)$$

biçiminde vermiştir.  $\beta$  ve  $\sigma^2$ 'nin EKK tahminleri kullanılırsa, tahmin edilmiş hata kareler ortalaması  $HK\hat{O}(\hat{\alpha}_d)$  elde edilir.  $\hat{d} = 0.98682586$  olduğundan tahmin edilmiş HKO

$HK\hat{O}(\hat{\beta}_d) = 0.062753678$  olarak bulunur.  $HKO(\hat{\beta}_k) = HKO(\hat{\alpha}_k)$  ve  $HKO(\hat{\beta}_d) = HKO(\hat{\alpha}_d)$  olduğu unutulmamalıdır.

#### 4. PARAMETRELERİN GME İLE TAHMİN EDİLMESİ

GME yöntem biliminin uygulanması için en önemli neden, verinin içilişki yapısına sahip olmasıdır. Böylece içilişki potansiyel bir sorundur. X matrisi “kötü koşullu” olarak düşünülür. Bu bölümde (12) eşitliğindeki parametreler için GME tahminleri elde edilmiş ve üçüncü bölümde elde edilen tahminlerle birlikte tablolar halinde sunulmuştur. Modelin teorik özelliğine uygun parametre kısıtlarına da bu bölümde yer verilmiştir.

Veri kümesinin analizi için MATHEMATICA 5.0 paket programı kullanılmıştır. Ayrıca, GME tahminlerinin elde edilmesinde, GAUSS 8 paket programından ve GAUSS 8 paket programının kısıtlı optimizasyon (constrained optimization) modülünden yararlanılmıştır.

##### 4.1 Parametreler Üzerine Kısıt Olmadan GME Tahminleri

Bu bölümde GME kullanılarak modeldeki parametreler tahmin edilmiştir. Bilinmeyen parametreler ve hatalar için destek matrislerinin tanımlanması gerektiğinden, GME tahminleri tek bir küme şeklinde ortaya çıkmamaktadır. (10) ve (11) nolu eşitliklerde gösterildiği gibi GME tahminleri desteklere bağlıdır. Önsel belirlemelere göre GME tahminlerinin duyarlılığını incelemek için farklı parametre ve hata destekleri tanımlanabilir. Önce, parametre destekleri düşünüldüğünde, genel olarak, oldukça iyi önsel bilgi olmadığında ya da katsayının oldukça büyük çıkması beklendiğinde daha geniş sınırlar seçilir. (12) eşitliğindeki parametreler için önsel ortalamalar “0” olarak seçilmiştir. Destekler “0” a göre simetriklerdir. Bu modelde yok denecek kadar az miktarda önsel bilgiye sahip olduğu varsayıldığından destekler için ortalaması sıfır olan sınırlar seçilmiştir. İlk olarak parametreler için kısıt olmaksızın önsel ortalamaların sıfır alındığı destek vektörleri Tablo 4’te verilmiştir.

**Tablo 4. GME-S3 ve GME-S4 için parametre ve hata destekleri (kısıt yok)**

Değişken	Parametre	Parametre desteği	Önsel ortalama
Sabit	$\beta_1$	$z'_1 = \{-5 \ -2.5 \ 0 \ 2.5 \ 5\}$	0
$x_2$	$\beta_2$	$z'_2 = \{-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1\}$	0
$x_3$	$\beta_3$	$z'_3 = \{-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1\}$	0
$x_4$	$\beta_4$	$z'_4 = \{-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1\}$	0

Hata desteklerinin belirlenmesinde gerekli olan  $\sigma$  bilinmemektedir. Bu nedenle tahmin edilmelidir. a) EKK regresyonundan  $\hat{\sigma} = 0.028$  bulunmuştur. b) y’nin örneklem standart sapması  $s = 0.188$  olarak hesaplanmıştır. Daha büyük olması nedeniyle y’nin örneklem standart sapması kullanılarak  $3\sigma$  ve  $4\sigma$  kuralıyla hata destekleri sırasıyla:

$3\sigma$	$v' = \{-0.54 \quad -0.27 \quad 0 \quad 0.27 \quad 0.54\}$
$4\sigma$	$v' = \{-0.72 \quad -0.36 \quad 0 \quad 0.36 \quad 0.72\}$

olacaktır. Tablo 5'te GME tahminleri ile birlikte parametreler için EKK, Ridge ve Liu tahminleri de verilmiştir. Ayrıca destek noktalarının sayısı için M=5 yerine, M=7 olarak parametre tahminlerinin nasıl etkilendiği de Tablo 5'in son iki kolonunda görülmektedir.

**Tablo 5. Kullanılan veri için EKK, Ridge, Liu ve GME tahminleri (kısıt yok)**

Değişken	Parametre	EKK	Ridge	Liu	GME-S3	GME-S4	GME-S3	GME-S4	
		$\hat{k}_{HKB}$	$=0.00073$	$\hat{d}$	$=0.99$	M=5	M=5	M=7	M=7
Sabit	$\beta_1$	2.190	2.134	2.163	1.511	1.385	1.462	1.338	
$x_2$	$\beta_2$	0.343	0.357	0.341	0.263	0.230	0.249	0.219	
$x_3$	$\beta_3$	-0.505	-0.468	-0.495	-0.062	-0.001	-0.037	0.018	
$x_4$	$\beta_4$	0.149	0.125	0.148	0.053	0.065	0.057	0.071	
$x_5$	$\beta_5$	0.091	0.074	0.092	0.078	0.092	0.084	0.096	

Tablo 5 incelendiğinde büyüklük açısından GME ve OLS tahminlerinde farklılıklar olduğu ve işaret açısından fark olmadığı görülür.  $\beta_1, \beta_2, \beta_4$  için GME tahminleri, EKK tahminlerinden daha küçük elde edilmiştir.  $\beta_3$  için GME tahmini, EKK tahmininden daha büyüktür.  $\beta_5$  için EKK tahmini GME-S3 ve GME-S4 tahminleri arasındadır. Ayrıca, Tablo 5'ten görüldüğü gibi tahminlerin normları:  $\hat{\beta}'_{EKK} \hat{\beta}_{EKK} = 5.199 > \hat{\beta}'_d \hat{\beta}_d = 5.070 > \hat{\beta}'_{Ridge} \hat{\beta}_{Ridge} = 4.922 > \hat{\beta}'_{GME1S3} \hat{\beta}_{GME1S3} = 2.365 > \hat{\beta}'_{GME1S4} \hat{\beta}_{GME1S4} = 1.984$  tür. Tahmin edilmiş HKO'ların incelenmesinden  $HK\hat{O}(\hat{\beta}_{EKK}) = 0.0654 > HK\hat{O}(\hat{\beta}_{HKB}) = 0.0648 > HK\hat{O}(\hat{\beta}_{LW}) = 0.0634 > HK\hat{O}(\hat{\beta}_d) = 0.0627 > HK\hat{O}(\hat{\beta}_{GME})$  bulunur. Golan vd. (1996)'da tarafından belirtildiği gibi GME tahmin edicisi en küçük HKO'ya sahiptir.

Katsayıların beklenen işaretleri dikkate alınarak parametre destekleri değiştirildiğinde, bu durumda daha dar parametre sınırları konulabilir. Parametrelerin verilen aralığa düşeceği bilinmektedir.

#### 4.2 Yalnız Parametre İşareti Kısıtlaması ile GME Tahminleri

Bu bölümde her bir katsayının beklenen işareti düşünülerek yeni parametre destekleri verilmiştir. Bu durumda kısıtlı GME'ler K1GME olarak gösterilmiştir. Önsel ortalamaların sıfırdan farklı değerler olduğu Tablo 6'da görülmektedir.

K1GME: Örneklem dışı olarak  $\beta_3 \leq 0$  bilgisine sahip olunması durumunda  $\beta_3$  için destek vektörü yalnız negatif değerler olarak alınır. Örneğin,  $z'_3 = [-0.8 \quad -0.6 \quad -0.4 \quad -0.2 \quad 0]$

alınabilir. Burada,  $z_3$   $M \times 1$ ,  $\beta_3$  için parametre destek vektörüdür. Bu durumda GME tahmini aşağıdaki gibi verilir:  $M=5$  destek noktasının tümünde  $\hat{p}_{3m} \geq 0$  olduğundan

$$\hat{\beta}_3 = -0.8\hat{p}_{31} - 0.6\hat{p}_{32} - 0.4\hat{p}_{33} - 0.2\hat{p}_{34} + 0\hat{p}_{35} \leq 0$$

bulunur.  $\pm 3\sigma$  ve  $\pm 4\sigma$  kuralıyla hata destekleri aşağıdaki gibidir.

$3\sigma$	$v' = \{-0.72 \quad -0.36 \quad 0 \quad 0.36 \quad 0.72\}$	0
$4\sigma$	$v' = \{-0.72 \quad -0.36 \quad 0 \quad 0.36 \quad 0.72\}$	0

**Tablo 6. K1GME-S3 ve K1GME-S4 için parametre destekleri (yalnız işaret kısıtlı)**

$\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_3 \leq 0, \beta_4 \geq 0, \beta_5 \geq 0$							
Değişken	Parametre	Parametre desteği				Önsel ortalama	
Sabit	$\beta_1$	$z'_1 = \{0$	0.75	1.50	2.25	3\}	1.5
$x_2$	$\beta_2$	$z'_2 = \{0$	0.15	0.3	0.45	0.6\}	0.3
$x_3$	$\beta_3$	$z'_3 = \{-0.8$	-0.6	-0.4	-0.2	0\}	-0.4
$x_4$	$\beta_4$	$z'_4 = \{0$	0.05	0.10	0.15	0.20\}	0.1
$x_5$	$\beta_5$	$z'_5 = \{0$	0.04	0.08	0.12	0.16\}	0.08

Yalnız parametre işaret kısıtlaması ile elde edilen GME tahminleri Tablo 7'de verilmiştir.

**Tablo 7. Kullanılan veri için EKK ve GME tahminleri (M=5)**

Değişken	Parametre	EKK	K1GME-S3	K1GME-S4
Sabit	$\beta_1$	2.190	1.82766	1.78956
$x_2$	$\beta_2$	0.343	0.34437	0.34758
$x_3$	$\beta_3$	-0.505	-0.35048	-0.34723
$x_4$	$\beta_4$	0.149	0.10292	0.10330
$x_5$	$\beta_5$	0.091	0.08214	0.08236

### 4.3 $\beta_i > \beta_j$ Kısıtlaması ile GME Tahminleri

Tavuk eti talebi değişkeni bireysel olarak hem domuz eti fiyatı değişkeni, hem de sığır eti fiyatı değişkeni için ayrı ayrı EKK kullanılmıştır. Basit bireysel regresyonlar sonucunda sığır eti fiyat değişkeninin, tavuk eti talebini daha büyük pozitif oranda etkilediği sonucu elde edilmiştir. Bu nedenle, bulgulara dayanarak  $\beta_5 > \beta_4 > 0$  kısıtlaması düşünüldüğünde parametreler için

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = Z \cdot \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_4 & 0 \\ z'_4 & z'_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Burada  $Z : 2 \times 2M$   $\beta_4, \beta_5$  parametreleri ve  $p_4, p_5$  bilinmeyen olasılıkları ile ilgili destek noktalarının matrisidir. Kısıtların bu kümesi için parametre destekleri K2GME ile aşağıdaki gibi belirlenebilir.

K2GME:  $\hat{\beta}_4$  ve  $\hat{\beta}_5$  ün her ikisi de pozitif olarak kısıtlandığından  $\beta_5$  için tahmin,

$$\hat{\beta}_5 = \hat{\beta}_4 + z'_5 \hat{p}_5 \geq \hat{\beta}_4 \text{ biçimindedir. } z'_5 \text{ destek vektörünün elemanları pozitif}$$

olduğundan  $\beta_5$ ' in tahmini için önsel ortalama  $\hat{\beta}_4 + 0.08$  alınabilir.

Yeniden  $\pm 3\sigma$  ve  $\pm 4\sigma$  sınırları kullanılarak hata sınırları aşağıda verilmiştir.

$3\sigma$	$v' = \{-0.54 \quad -0.27 \quad 0 \quad 0.27 \quad 0.54\}$
$4\sigma$	$v' = \{-0.72 \quad -0.36 \quad 0 \quad 0.36 \quad 0.72\}$

K2GME ile verilen kısıtlamaya uygun olarak parametreler için önsel ortalamalar ve parametre destekleri Tablo 8'de verilmiştir.

**Tablo 8. K2GME-S3 ve K2GME-S4 için parametre destekleri**

$(\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_3 \leq 0, \beta_4 \geq 0, \beta_5 \geq 0)$					
Değişken	Parametre	Parametre desteği	Önsel ortalama		
Sabit	$\beta_1$	$z'_1 = \{0 \quad 0.75 \quad 1.50 \quad 2.25 \quad 3\}$	1.5		
$x_2$	$\beta_2$	$z'_2 = \{0 \quad 0.15 \quad 0.3 \quad 0.45 \quad 0.6\}$	0.3		
$x_3$	$\beta_3$	$z'_3 = \{-0.8 \quad -0.6 \quad -0.4 \quad -0.2 \quad 0\}$	-0.4		
$x_4$	$\beta_4$	$z'_4 = \{0 \quad 0.05 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.20\}$	0.1		
$x_5$	$\beta_5$	$z'_5 = \{0 \quad 0.04 \quad 0.08 \quad 0.12 \quad 0.16\}$	$\hat{\beta}_4 + 0.08$		

$\beta_5 > \beta_4$  kısıtlaması ile IRLS ve GME tahminleri Tablo 9'da verilmiştir.

**Tablo 9. Kullanılan veri için EKK, IRLS ve GME tahminleri**

Değişken	Parametre	EKK	IRLS	K2GME-S3	K2GME-S4
Sabit	$\beta_1$	2.190	2.18141	1.77006	1.71287
$x_2$	$\beta_2$	0.343	0.35291	0.30441	0.30947
$x_3$	$\beta_3$	-0.505	-0.50988	-0.38268	-0.37986
$x_4$	$\beta_4$	0.149	0.11395	0.10010	0.10115
$x_5$	$\beta_5$	0.091	0.11544	0.18009	0.18151

Tablo 9'da bulunan IRLS tahmin edicisinin yanlı fakat kısıtlar doğru olduğu sürece karesel hata kayıp fonksiyonu ölçütüne göre EKK'dan üstün olduğu sonucu elde edilir.

K3GME- Şimdiye kadar elde edilen tahminlerde kişi başı harcanabilir gelir değişkeninin tavuk eti talebini pozitif yönde, hem sığır eti fiyat değişkeninden, hem de domuz eti fiyat değişkeninden daha büyük oranda etkilediği bulgularına ulaşılmıştır. Bu bulgular kullanılarak GME ile  $\beta_2 > \beta_5 > \beta_4 > 0$  eşitsizlik kısıtlaması da uygulanabilir. Bu kısıtlama düşünüldüğünde destek matrisi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\beta = Zp = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z'_2 & 0 & z'_4 & z'_5 \\ 0 & 0 & z'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z'_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z'_4 & z'_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{GME} = Z\hat{p} \text{ eşitliğinin düşünülmesiyle } \hat{\beta}_4 = z'_4 \hat{p}_4, \hat{\beta}_5 = z'_4 \hat{p}_4 + z'_5 \hat{p}_5 = \hat{\beta}_4 + z'_5 \hat{p}_5 > \hat{\beta}_4$$

$$\hat{\beta}_2 = z'_2 \hat{p}_2 + z'_4 \hat{p}_4 + z'_5 \hat{p}_5 = z'_2 \hat{p}_2 + \hat{\beta}_4 + (\hat{\beta}_5 - \hat{\beta}_4) = z'_2 \hat{p}_2 + \hat{\beta}_5 > \hat{\beta}_5 > \hat{\beta}_4 \text{ eşitsizliği yazılır.}$$

Burada verilen eşitsizlik kısıtlamasına uygun olarak parametreler için önsel ortalamalar ve destek vektörleri de Tablo 10'da verilmiştir.

**Tablo 10. K3GME-S3 ve K3GME-S4 için parametre destekleri**

$(\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_3 \leq 0, \beta_4 \geq 0, \beta_5 \geq 0)$					
Değişken	Parametre	Parametre desteği	Önsel ortalama		
Sabit	$\beta_1$	$z'_1 = \{0 \ 0.75 \ 1.50 \ 2.25 \ 3\}$	1.5		
$x_2$	$\beta_2$	$z'_2 = \{0 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.45 \ 0.6\}$	$\hat{\beta}_5 + 0.3$		
$x_3$	$\beta_3$	$z'_3 = \{-0.8 \ -0.6 \ -0.4 \ -0.2 \ 0\}$	-0.4		
$x_4$	$\beta_4$	$z'_4 = \{0 \ 0.05 \ 0.10 \ 0.15 \ 0.20\}$	0.1		
$x_5$	$\beta_5$	$z'_5 = \{0 \ 0.04 \ 0.08 \ 0.12 \ 0.16\}$	$\hat{\beta}_4 + 0.08$		

K3GME ile verilen eşitsizlik kısıtlamaları ile parametreler için IRLS ve GME tahminleri Tablo 11'de verilmiştir.

**Tablo 11. Çoklu eşitsizlik kısıtlı tahminler**

$\beta_2 > \beta_5 > \beta_4 \geq 0$					
Değişken	Parametre	EKK	IRLS	K2GME-S3	K2GME-S4
Sabit	$\beta_1$	2.190	1.90879	1.68418	1.58479
$x_2$	$\beta_2$	0.343	0.238528	0.37843	0.39043
$x_3$	$\beta_3$	-0.505	-0.156261	-0.43393	-0.43599
$x_4$	$\beta_4$	0.149	0.003189	0.08093	0.08139
$x_5$	$\beta_5$	0.091	0.153203	0.15198	0.15535

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

GLM'nin açıklayıcı değişkenleri arasında önemli derecede çoklu içilişki problemi olduğunda parametre tahminlerinde karasızlık vardır. Bu nedenle, model parametrelerinin kararlı tahminlerini elde etmek gerekir. Bu çalışma, çoklu içilişkinin bulunduğu bir modelde kararlı tahminleri bulmayı amaçlamıştır. Geliştirilmiş yanlı tahmin edicilerden Ridge ve Liu tahmin edicilerine ek olarak, son yıllarda ekonomi kaynaklarında yaygın kullanım alanı bulan genelleştirilmiş maksimum entropi tahmin edicisi kullanılmış ve HKO ölçütüne göre karşılaştırma yapılmıştır. Açıklanan tahmin edicilere ek olarak, teoriyle uyumlu parametre eşitsizlik kısıtlarına da yer verilerek GME ve eşitsizlik kısıtlı EKK (IRLS) tahminleri yapılmıştır. Kullanılan örneklemden elde edilen sonuçlar GME tahminlerinin EKK tahminlerine, Ridge ve Liu tahminlerine yakın olduğunu göstermektedir. Ayrıca, bulunan sonuçlara göre, parametre destekleri değiştirilen orana göre GME tahminleri daha az değişiklikler göstermektedir. Sonuçlar GME tahmin edicileri ve EKK tahmin edicilerinde büyüklük farkı vermekle birlikte işaret farkı vermemiştir.

Tablo 5'teki sonuçlara göre  $\|\hat{\beta}_{GME}\|^2$  en küçüktür. Önsel bilgiye dayalı parametre destekleri uygulandığında elde edilen GME ve EKK tahminleri, önsel bilgiye dayalı olmayan parametre destekleri uygulandığında elde edilen sonuçlarla genel olarak tutarlılık göstermiştir. Beklenildiği gibi, daha geniş hata sınırları kullanıldığında (GME-S4), katsayılar genellikle önsel ortalamalarına doğru çekilir (büzülür). Bu durumda, hatalara daha fazla ağırlık verilmesi, daha düzgün parametre desteklerine bağlı olasılıkların elde edilmesini ifade eder.

Parametre destek noktaları M=5 yerine, Tablo 5'te görüldüğü gibi M=7 alındığında GME ile yapılan incelemede parametre tahminlerinin çok az değiştiği gözlenmiştir.

EKK, eşitsizlik kısıtlı EKK (IRLS), Ridge regresyon tahminleri ve Liu tahmini ile karşılaştırıldığında GME tahminleri daha küçük tahmin edilmiş hata kareleri ortalamasına sahiptir. Hata sınırları  $\pm 3\sigma$  ve  $\pm 4\sigma$  olarak alındığında, ekonomik olarak anlamlı çoklu kısıtlamalar verildiğinde diagonal olmayan parametre destek matrisinin kullanılmasıyla kısıtlı GME tahminleri Tablo 11'de verilmiştir. Bu durumda GME'nin daraltıcı yapısı

$\|\hat{\beta}_{IRLS}\|^2 = 3.7482737 > \|\hat{\beta}_{GMES3}\|^2 = 3.19798 > \|\hat{\beta}_{GMES4}\|^2 = 2.285136$   
eşitsizliklerinden de görülmektedir.

**Teşekkür.** Bu çalışmanın iyileştirilmesinde katkı sağlayan hakemlere, Dil Editörü ve Editör Prof. Dr. Fetih Yıldırım'a teşekkürlerimizi sunuyoruz.

## 6. KAYNAKLAR

- Akdeniz, F. and Erol, H., 2003. Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 32(12), 2389-2413.
- Belsley, D. A., Kuh, E., Welsch, R. E., 1980. *Regression diagnostics*, New York, Wiley.
- Belsley, D. A., 1991. *Conditioning diagnostics: Collinearity and weak data in Regression*. Wiley Series, New York.
- Campbell, R. C. and Carter Hill, R., 2006. Imposing parameter inequality restrictions using the principle of maximum entropy. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 76 (11), 985-1000.
- Fraser, I., 2000. An application of maximum entropy estimation: The demand for meat in the United Kingdom. *Applied Economics* 32, 45-59.
- Golan, A., Jodge, G. and Miller, D., 1996. *Maximum entropy econometrics*. John Wiley and Sons. New York.
- Gujarati, D., 1992. *Essentials of econometrics*. McGraw-Hill International Editions, New York.
- Hoerl, A. E. and Kennard, R.W., 1970. Ridge regression: Biased estimation for orthogonal Problems. *Technometrics* 12, 55-67.
- Hoerl, A. E. , Kennard, R., Baldwin, K. F., 1975. Ridge regression: Some simulations. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 4(2), 105-123.
- Jaynes, E. T., 1957a. Information theory and statistical mechanics. *Physics Review* 106, 620-630.
- Jaynes, E. T., 1957b. Information theory and statistical mechanics II. *Physics Review* 108, 171-190.
- Lawless, J. F., Wang, P., 1976. A simulation study of Ridge and other regression estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods* A5, 307-323.
- Liu, Kejian, 1993. A new class of biased estimate in linear regression. *Communications in Statistics Theory and Methods* 22, 393-402.

Paris, Q. And Howitt, R. E. 1998. An analysis of ill-posed production problems using maximum entropy. *American Journal of Agricultural Economics*, 80, 124-138.

Paris, Q. 2001. MELE: Maximum entropy Leuven estimators. University of California Davis, Working Paper 01-003.

Pukelsheim, F., 1994. The three sigma rule. *American Statistician* 48, 88-91.

Shannon, C. E., 1948. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal* 27, 379-423.

Shen, E. Z., Perloff, J.M., 2001. Maximum entropy and Bayesian approaches to the ratio problem. *Journal of Econometrics*, 104, 289-313.

Soofi, E. S., 1990. Effects of collinearity on information about regression coefficients. *Journal of Econometrics*, 43, 255-274.

## MULTICOLLINEARITY AND GENERALIZED MAXIMUM ENTROPY ESTIMATORS

### ABSTRACT

*In this paper, we have considered the general linear model (GLM)  $y = X\beta + u$  in the usual notation. In many applications the design matrix  $X$  is frequently subject to severe multicollinearity. In the presence of multicollinearity certain biased estimators, like the ordinary Ridge regression estimator  $\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1} X'y$  and the Liu estimator  $\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1} (X'y + d\hat{\beta}_{OLS})$  or improved Ridge and Liu-type estimators, are used to outperform the ordinary least squares (OLS) estimates in the linear model. In this paper an alternative estimation methodology, maximum entropy, is given and used to estimate the parameters in a linear regression model when the basic data are ill-conditioned. We described the generalized maximum entropy (GME) estimator and develop a method for imposing parameter inequality restrictions through the GME parameter support matrix. We compared the GME estimator to the alternative estimation methodologies (least squares estimator, inequality restricted least squares (IRLS) estimator, Ridge regression estimator and Liu estimator) analyzed empirically for a US chicken demand data set.*

**Key words:** *Generalized Maximum Entropy Estimator, Inequality Restricted Least Squares Estimator, Liu Estimator, Ridge Regression Estimator, Support Point.*

# OTOREGRESİF HAREKETLİ ORTALAMALAR SÜRECİNDE, TERSİNİR SIÇRAMALI MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YÖNTEMİ İLE BAYESÇİ MODEL SEÇİMİ

Erol EĞRİOĞLU\*

Süleyman GÜNAY\*\*

## ÖZET

Otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modellerinde, model derecesinin belirlenmesi için çok değişik yaklaşımlar önerilmiştir. Model derecesinin belirlenmesinde en sık kullanılan Box-Jenkins yönteminde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafiklerinden yararlanılır. Bu yöntem deneyime dayalı bir yöntemdir. Otoregresif hareketli ortalama modellerinin derecesinin belirlenmesinde, Bayesci model seçim yöntemleri de kullanılabilir. Tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo (RJMCMC) yöntemi, parametre uzayları arasında sıçramaya olanak tanıyan etkin bir yöntemdir. Bu çalışmada, Troughton tarafından otoregresif süreçler için önerilen tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo algoritması otoregresif hareketli ortalamalar modeline uyarlanmıştır. Önerilen yeni algoritma simülasyon ile üretilen bir zaman serisine uygulanmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Bayesci Model Seçimi, Otoregresif Hareketli Ortalamalar Modeli, Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi.

## 1. GİRİŞ

Doğrusal zaman serilerinin çözümlenmesinde ARMA modelinin kullanıldığı bir çok çalışma literatürde yer almaktadır. ARMA modelleri ile doğrusal zaman serilerinin modellenmesi için kullanılan ilk yaklaşım Box ve Jenkins (1976) tarafından önerilmiştir. Box-Jenkins yöntemi olarak bilinen bu yaklaşımda ARMA modelinin derecesi, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafiklerinden belirlenmektedir. Bu yöntemde araştırmacı tecrübeye dayalı olarak model derecesini belirlemektedir. Bu nedenle ARMA modellerinde, model derecesinin belirlenmesinde seçenek yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. ARMA modellerinde, model derecesinin belirlenmesine yönelik ilk Bayesci çalışma Monahan (1983) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada model derecesi analize dahil edilerek Bayes çarpanları yardımıyla model seçimi yapılmıştır. Ancak bu çalışma karmaşık sayısal integrasyon teknikleri gerektirdiğinden uygulaması zordur. Son yıllarda Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri kullanılarak zaman serilerinin modellenmesi üzerine çalışmalar yapılmaktadır. RJMCMC yöntemi Green (1995) tarafından önerilmiştir.

\* Yrd. Doç.Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Samsun.  
e-posta: erole@omu.edu.tr

\*\* Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara.  
e-posta: sgunay@hacettepe.edu.tr

Bu yöntemler ile parametre tahminin yanı sıra model seçimi yapmak da mümkündür. RJMCMC yöntemi ile otoregresif sürecin derecesinin belirlendiği çalışmalar; Troughton ve Godsill (1998), Vermaak vd. (2004) ve Troughton (1999)'un çalışmalarıdır. Vermaak vd. (2004) çalışmasında, otoregresif sürecin parametrelerinin uygun bir dönüşüm ile tekrar parametrelendirilmesiyle durağanlık koşulları içinde tahmin yapan ve RJMCMC yöntemini kullanan bir algoritma önerilmiştir. Troughton (1999) ise, otoregresif sürecin parametrelerini ve model derecesini belirleyen ancak durağanlık koşullarını gözetmeyen üç ayrı algoritma önermiştir.

Bu makalede Troughton (1999)'un çalışmasında otoregresif sürecin RJMCMC ile çözümlendiği iç içe model yapısını kullanmayan algoritma ARMA modellerine genişletilerek, yeni bir algoritma elde edilmiştir. Bu algoritmada ARMA modelinin parametrelerinin tahmini ile birlikte model derecesi de belirlenmektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ARMA modelleri hakkında kısa bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde RJMCMC yöntemi özetlenmiştir. Dördüncü bölümde bu çalışmada önerilen yöntem tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise yeni algoritma yapay bir zaman serisi üzerinde uygulanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. ARMA MODELLERİ

(p,q) dereceden bir ARMA modeli  $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$  olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)e_t \quad (1)$$

Burada,  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ ,  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$  ve  $B^p X_t = X_{t-p}$  olmaktadır.  $\{X_1, \dots, X_n\}$  zaman serisinin n birimlik gözlemi olmak üzere ve (1) modeli için  $X_{(0)} = (X_{-p}, \dots, X_0, e_{-q}, \dots, e_0)$  vektörü koşulu altında koşullu olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$L(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q / X_{(0)}, X_{(1)}) = (2\pi\sigma_e^2)^{-(n-p-q)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{t=p+q+1}^n e_t^2\right\} \quad (2)$$

Yerince büyük örnekler için (2) koşullu olabilirliği, tam olabilirlik fonksiyonuna yakınsar.

## 3. RJMCMC ALGORİTMASI

Bayesci model seçimine olanak tanıyan RJMCMC yöntemi Green (1995) tarafından önerilmiştir. RJMCMC algoritmasında göz önünde bulundurulmuş tüm modellerin çarpım uzayında hareket etmek yerine, modellerin parametre uzayları arasında geçiş yapabilen bir Markov zinciri oluşturulmaktadır.

Algoritmanın işleyişi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Markov zincirinin geçerli durumu  $(j, \theta_j)$  olsun. Burada  $\theta_j$ ,  $n_j$  boyutludur.
2.  $h(j, j')$  olasılığı ile yeni bir  $j'$  modelinin önerilmesi.
3.  $q(u / \theta_j, j, j')$  öneri yoğunluğundan  $u$ 'nun üretilmesi.
4.  $(\theta_{j'}, u') = g_{j, j'}(\theta_j, u)$  yapılması. Burada  $g_{j, j'}(\theta_j, u)$  birebir ve örten bir fonksiyondur. Bu boyut eşleme fonksiyonudur ve  $n_j + \dim(u) = n_{j'} + \dim(u')$  dır.
5.  $j$ 'den  $j'$ 'ne hareketin, aşağıda verilen olasılık ile kabul edilmesidir.

$$\alpha_{i \rightarrow j'} = \min \left\{ 1, \frac{f(y / \theta_{j'}, M = j') p(\theta_{j'} / M = j') \pi_{j'} h(j', j) q(u' / \theta_{j'}, j', j)}{f(y / \theta_j, M = j) P(\theta_j / M = j) \pi_j h(j, j') q(u / \theta_j, j, j')} \times \left| \frac{\partial g(\theta_j, u)}{\partial (\theta_j, u)} \right| \right\} \quad (3)$$

Bu adımda  $j' = j$  olduğunda, Metropolis Hastings adımı Gibbs adımına dönmektedir.

#### 4. ARMA SÜREÇLERİNDE RJMCMC YÖNTEMİ

Otoregresif modelde RJMCMC yöntemi ile çözümlene yapabilen üç algoritma Troughton (1999) tarafından önerilmiştir. Bu algoritmaların birincisi doğum ve ölüm hareketine dayalı, ikincisi parametrelerin tam koşullu dağılımlarına dayalı ve üçüncüsü otoregresif modellerin iç-içe model yapısını göz ardı eden tam parametre vektörü dağılımlarına dayalıdır. Üçüncü yaklaşım iç-içe model yapısını göz ardı ettiğinden, ilk iki yaklaşıma göre bir üstünlüğü yoktur. Ancak ilk iki yaklaşım iç-içe modeller için kullanılabileceğinden ARMA modellerine uyarlanamaz. Bu nedenle ARMA modellerinde RJMCMC ile model derecesi ve parametre tahminlerini elde etmeye olanak tanıyan bir yöntem tam parametre vektörü dağılımlarına dayalı olarak işleyen Troughton'un üçüncü algoritmasının genişletilmesi ile elde edilebilir.

(1) modelinin özel durumları olan ARMA(1,0), ARMA(2,0), ARMA(0,1), ARMA(0,2) ve ARMA(1,1) modelleri göz önüne alınsın. Önerilen algoritmada bu beş model için RJMCMC algoritması uygulanmaktadır. Bir başka ifade ile algoritmanın sonuçta seçeceği model bu beş modelden biri olacaktır. İncelenecek model sayısı istenirse artırılabilir. (1) modelinin bu özel durumları için tüm parametrelerin vektörü  $\psi = (\phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2)$  şeklindedir. Modeller aşağıdaki indisler ile gösterilsin.

$k = 1$  ise, model ARMA(1,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\psi^{(1)} = (\phi_1)$  'dir.

$k = 2$  ise, model ARMA(2,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\psi^{(1)} = (\phi_1, \phi_2)$  'dir.

$k = 3$  ise, model ARMA(0,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\psi^{(1)} = (\theta_1)$  'dir.

$k = 4$  ise, model ARMA(0,2) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\psi^{(1)} = (\theta_1, \theta_2)$  'dir.

$k = 5$  ise, model ARMA(1,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\psi^{(1)} = (\phi_1, \theta_1)$  'dir.

Model derecesi için önsel dağılım olarak Troughton (1999) çalışmasındaki üçüncü algoritmadaki gibi kesikli uniform dağılım alınabilir.  $\psi$  parametrelerin önsel dağılımı ise normal dağılım olarak alınır.  $\sigma_e^2$  için ters Gama dağılımı önsel dağılım olarak seçilir.

Sonuç olarak önsel dağılımlar aşağıdaki gibidir.

$$P(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , k = 1,2,3,4,5 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

$$P(\psi^{(k)} / \sigma_a^2) = N(\mu_{pa^{(k)}}, C_{pa^{(k)}})$$

$$P(\sigma_e^2) = IG(\alpha_e, \beta_e)$$

Burada,  $\mu_{pa^{(k)}} = 0$  ve  $C_{pa^{(k)}} = \sigma_a^2 I_k$  olarak alınmıştır. Troughton (1999) tarafından önerilen üçüncü algoritma için, eşitlik (3)'te verilen kabul olasılığı aşağıdaki gibi ARMA modeline uyarlanabilir.

$$\alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_a^2, \sigma_e^2) = \min \left( 1, \sqrt{\frac{|C_{ca^{(k)}}| |C_{pa^{(k')}}|}{|C_{ca^{(k')}}| |C_{pa^{(k)}}|}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k)}}^T C_{ca^{(k)}}^{-1} \mu_{ca^{(k')}}\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k')}}^T C_{ca^{(k')}}^{-1} \mu_{ca^{(k')}}\right\}} \right) \quad (4)$$

Burada ,

$$C_{ca^{(k)}} = \left( \frac{1}{\sigma_e^2} X^{(k)T} X^{(k)} + C_{pa^{(k)}}^{-1} \right)^{-1}$$

$$\mu_{ca^{(k)}} = \frac{1}{\sigma_e^2} C_{ca^{(k)}} X^{(k)T} X_{(1)}$$

şeklindedir.

$X^{(k)}$  ise modelin derecesine göre oluşturulan veri matrisidir. Eşitlik (4)'te verilen kabul olasılığına göre modeller arası geçiş yapılabilir. Modellerde kullanılan öneri dağılımı, Troughton (1999) da kesikli Laplace dağılımıdır. Burada ise kesikli uniform dağılımdan öneri yapılmaktadır. Ancak her iki dağılımda simetrik olduğundan, Troughton (1999) tarafından önerilen formülasyon geçerlidir.

$\psi^{(k)}$  ve  $\sigma_e^2$  parametreleri için ise aşağıdaki dağılımlardan yararlanarak örnek çekilir.

$$\psi^{(k)} \sim N(\mu_{ca^{(k)}}, C_{ca^{(k)}}) \quad (5)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(\alpha_{se}, \beta_{se}), \quad \alpha_{se} = \alpha_e + \frac{1}{2}n_k, \quad \beta_{se} = \beta_e + \frac{1}{2}e^T e \quad (6)$$

Buradaki  $n_k$ ; 1. ve 3. modelde n-1, 2., 4. ve 5. modellerde ise n-2'dir. Bu durumda önerilen yeni algoritma aşağıdaki gibi özetlenebilir.

**Algoritma.** RJMCMC'nin ARMA modellerine uygulaması;

**Adım 1.** Parametreler için başlangıç değerlerinin belirlenmesi.

**Adım 2.** Öneri dağılımından (uniform dağılım) modeller arası hareket için bir  $k'$  değerinin üretilmesi.

**Adım 3.**  $U(0,1)$  standart uniform dağılımından bir  $\alpha_0$  değerinin üretilmesi.

**Adım 4.** (4)'te verilen eşitlikten  $\alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$  kabul olasılığının hesaplanması.

**Adım 5.** Eğer  $\alpha_0 < \alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$  ise,  $k = k'$  alınarak yeni modele hareket edilmesi.

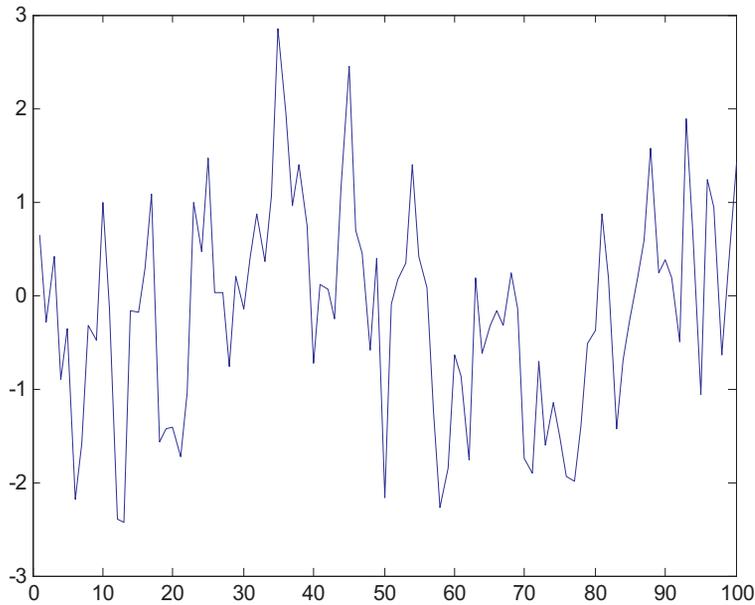
Eğer  $\alpha_0 > \alpha(k \rightarrow k' / X, \sigma_e^2, \sigma_a^2)$  ise, yeni modele hareket edilmemesi.

**Adım 6.** (5) ve (6) dağılımlarından parametreler için örneklem çekilmesi.

**Adım 7.** Adım 2 ve Adım 6'nın belli bir yineleme sayısı için tekrar edilmesi.

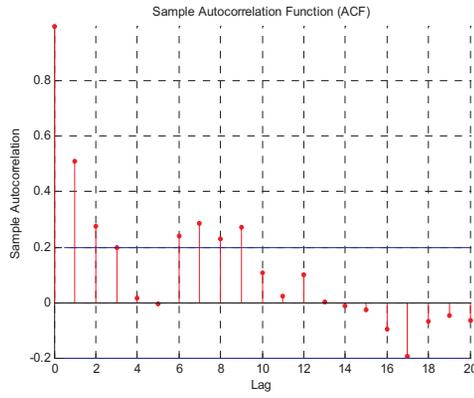
## 5. UYGULAMA

Önerilen yaklaşım simülasyon ile üretilmiş birinci dereceden oto regresif (AR(1)) zaman serisine uygulanmıştır. Üretilen simülasyon serisinin grafiği Şekil-1'de verilmiştir. Bu zaman serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının grafikleri ise Şekil 2a ve Şekil 2b'de verilmiştir.

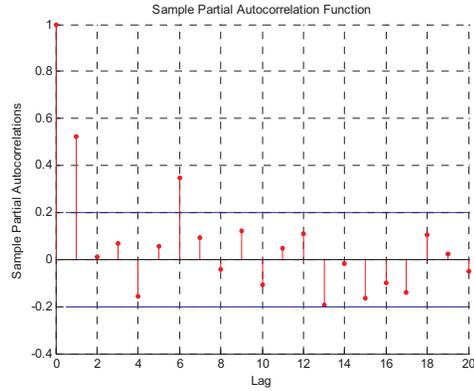


Şekil 1. Simülasyon ile elde edilen AR (1) serisinin grafiği

Şekil 2'deki otokorelasyon grafiklerinden zaman serisine Box-Jenkins yöntemine göre AR(1) modelinin uygun görülebileceği açıktır. Bu çalışmada önerilen algoritma kullanıldığında elde edilen sonsal model olasılıkları Tablo 1'de verilmiştir. Önerilen algoritmanın 0,98 sonsal olasılık ile doğru AR(1) modelini seçtiği görülmektedir. Bu sonsal model olasılıklarına, önerilen algoritmanın 20000 iterasyon çalışması ve ilk 1000 değer durağan dışı dağılım gösterdiğinden elenerek, kalan 19000 örneklem üzerinden ulaşılmıştır. Elde edilen örneklemelerin yakınsaması çeşitli MCMC diyagnostikleri ile denetlenmiştir. Önerilen algoritma MATLAB'da programlanmıştır.  $\phi_1$  parametresi için elde edilen örneklem yakınsamasını denetlemek için kullanılan testlerin sonuçları Tablo 2'de verilmiştir.



Şekil 2a. Simülasyon ile elde edilen serisinin otokorelasyon grafiği



Şekil 2b. Simülasyon ile elde edilen zaman serisinin otokorelasyon grafiği

Tablo 1. Sonsal model olasılıkları

Model	Sonsal Olasılık
AR1	0.9821
AR2	0.0009
MA1	0.0161
MA2	0.0000
ARMA(1,1)	0.0009

**Tablo 2. Algoritma sonunda  $\phi_1$  için elde edilen örneklemin yakınsama teşhisi sonuçları**

MCMC CONVERGENCE diagnostics					
Based on sample size = 18661					
Autocorrelations within each parameter chain					
Variable	Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50	
variable 1	0.007	-0.008	0.004	-0.001	
Raftery-Lewis Diagnostics for each parameter chain (q=0.0250, r=0.010000, s=0.950000)					
Variable	Thin	Burn	Total(N)	(Nmin)	I-stat
variable 1	1	1	938	937	1.001
Geweke Diagnostics for each parameter chain					
Variable	Mean	std dev	NSE iid	RNE iid	
variable 1	0.506214	0.009464	0.000069	1.000000	
Variable	NSE 4%	RNE 4%	NSE 8%	RNE 8%	NSE 15%
variable 1	0.000068	1.036474	0.000070	0.974243	0.000071
Geweke Chi-squared test for each parameter chain First 20% versus Last 50% of the sample					
Variable	variable 1				
NSE estimate	Mean	N.S.E.	Chi-sq Prob		
i.i.d.	0.506307	0.000061	0.150199		
4% taper	0.506307	0.000055	0.115314		
8% taper	0.506304	0.000060	0.115194		
15% taper	0.506305	0.000059	0.119618		

Tablo 2 incelendiğinde elde edilen örneklemin 1.,5.,10. ve 50. gecikmelerde küçük otokorelasyon değerleri aldığı görülmektedir. Ayrıca Geweke (1992) tarafından önerilen testten elde edilen Ki-Kare olasılıklarının 0.05'den büyük olduğu ve Raftery ve Lewis (1995) tarafından önerilen I-stat istatistiğinin 5'den çok küçük olduğu görülebilir. Dolayısıyla elde edilen örneklem, tüm yakınsama ölçütlerine göre, yakınsama problemi içermemektedir. Benzer şekilde Tablo 3 incelendiğinde,  $\sigma_e^2$  içinde yakınsama problemi olmadığı görülmektedir.

**Tablo 3. Algoritma sonunda  $\sigma_e^2$  için elde edilen örneklemin yakınsama teşhisi sonuçları**

MCMC CONVERGENCE diagnostics					
Based on sample size = 18661					
<b>Autocorrelations within each parameter chain</b>					
Variable	Lag 1	Lag 5	Lag 10	Lag 50	
variable 1	0.005	-0.007	0.002	0.003	
<b>Raftery-Lewis Diagnostics for each parameter chain</b>					
(q=0.0250, r=0.010000, s=0.950000)					
Variable	Thin	Burn	Total(N)	(Nmin)	I-stat
variable 1	1	2	943	937	1.006
<b>Geweke Diagnostics for each parameter chain</b>					
Variable	Mean	std dev	NSE iid	RNE iid	
variable 1	0.687921	0.071412	0.000524	1.000000	
Variable	NSE 4%	RNE 4%	NSE 8%	RNE 8%	NSE 15%
variable 1	0.000514	1.036165	0.000475	1.216007	0.000413
<b>Geweke Chi-squared test for each parameter chain</b>					
First 20% versus Last 50% of the sample					
Variable	variable 1				
NSE estimate	Mean	N.S.E.	Chi-sq	Prob	
i.i.d.	0.688092	0.000626	0.630302		
4% taper	0.688180	0.000624	0.596041		
8% taper	0.688136	0.000609	0.599897		
15% taper	0.688094	0.000576	0.600106		

Algoritma sonucunda elde edilen parametre tahmin değerleri ise

$$\sigma_e^2 = 0.688092, \phi_1 = 0.506307$$

olarak bulunmuştur. Simülasyon zaman serisindeki gerçek değerler ise  $\sigma_e^2=1$  ve  $\phi_1=0.5$ 'dir. Simülasyon zaman serisi SPSS 11.5 programı yardımıyla Box-Jenkins yöntemi ile çözümlerse

$$\sigma_e^2 = 0.75, \phi_1 = 0.4566$$

sonuçları elde edilmektedir.

## 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, önerilen yeni algoritma simülasyonu ile elde edilen AR(1) zaman serisine uygulanmıştır. Sözü edilen veri için algoritma parametre tahmin sonuçları ve model derecesi belirlemesi açısından çok başarılı sonuçlar vermiştir. Verilen algoritmanın ayrıntılı bir simülasyon çalışması ile üstün ve zayıf yönleri tartışılabilir. Önerilen algoritma da yaklaşık olabilirlik fonksiyonu kullanılmıştır. Yaklaşık olabilirliğin öneri dağılımı olarak alındığı ve tam olabilirlik fonksiyonunun, gerçek olabilirlik olarak kullanıldığı bir Metropolis-Hastings algoritması ile algoritmanın daha iyi parametre tahmin sonuçları elde edecek şekilde düzeltilmesi mümkündür. Ancak önerilen algoritma bazı parametreler için SPSS paket programında yer alan Marquardt yönteminden daha iyi sonuçlar vermektedir. Önerilen algoritmanın ayrıntılı bir incelemesi geniş bir simülasyon çalışması ile yapılabilir.

## 7. KAYNAKLAR

Box, G.E.P. and Jenkins G.M., 1976. Time series analysis, forecasting and control. Holden Day, California.

Geweke, J., 1992. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. Bayesian Statistics, 4, J.M Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid, and A.F.M Smith, (eds.), pp. 641-649. , Oxford: Clarendon Press.

Green P. J., 1995. Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. Biometrika, 82 , 711-732.

Monahan J.F., 1983. Fully Bayesian analysis of ARMA time series models. Journal of Econometrics , 21, 307-331.

Raftery A.E. and Lewis S.M. 1995. The number of iterations, convergence diagnostics and generic Metropolis algorithms, In Practical Markov Chain Monte Carlo (W.R. Gilks, D.J. Spiegelhalter and S. Richardson, eds.), London, Chapman and Hall, 115-130.

Troughton P.T. and Godsill J., 1998. A reversible jump sampler for autoregressive time series. Proceedings of IEEE ICASSP-98, IV, 2257-2260.

Troughton P.T., 1999. Simulation methods for linear and nonlinear time series models with application to distorted audio signals, University of Cambridge, Cambridge.

Vermaak J., Andrieu C., Doucet A., Godsill J., 2004. Reversible jump Markov chain Monte Carlo strategies for Bayesian model selection in autoregressive processes. Journal of Time Series Analysis, 25, 785-809.

## BAYESIAN MODEL SELECTION WITH REVERSIBLE JUMP MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS IN AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE PROCESSES

### ABSTRACT

*In literature, various approaches have been proposed for determining order of autoregressive moving average models. The most important one is Box-Jenkins approach. Box-Jenkins method is based on autocorrelations and partial autocorrelations. This method also based on experience. Determining the order of autoregressive moving average models Bayesian model selection methods can be used. Reversible jump Markov Chain Monte Carlo method that moves between different model spaces is an influential one. In this study, Troughton's method is modified for determining order of autoregressive moving average models. The new method is applied for simulating time series.*

**Key words:** Bayesian Model Selection, Autoregressive Moving Average Models, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Method.

# KAYIT DIŞI EKONOMİ VARSAYIMI ALTINDA LAFFER EĞRİSİNİN TAHMİNİ

Rahmi YAMAK\*

Necmettin Alpay KOÇAK\*\*

## ÖZET

*Vergi oranları ile vergi gelirleri arasında çan-eğrili bir ilişki olduğunu ileri süren Laffer hipotezinin (eğrisinin) varsayımlarından biri, vergi oranı yükseldikçe bireylerin çalışma şevklerinin kırılacağıdır. Halbuki vergi oranları yükseldikçe bireyler çalışmamak yerine, gelirlerinin bir kısmını ya da tamamını vergilendirmeyerek kayıt dışı ekonomiye geçmeyi tercih edebilir. Her ülkede de az çok kayıt dışı ekonomi bulunacağına göre, Laffer eğrisi çalışılırken kayıt dışı ekonomi dikkate alınmalıdır. Bu çalışmada, kayıt dışı ekonominin hesaba katılması durumunda ortaya çıkan Laffer eğrisi, Türkiye'nin 1972-2004 dönemi için En Küçük Kareler (EKK) yöntemiyle tahmin edilmiş ve elde edilen bulgular çerçevesinde kayıt dışı ekonominin hesaba katılmadığı Laffer eğrisinden farklılıkları tartışılmıştır. Kayıt dışı ekonominin dikkate alındığı Laffer eğrisinde, öncekine kıyasla vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranının daha düşük, elde edilen vergi gelirlerinin ise daha yüksek olduğu görülmüştür.*

**Anahtar kelimeler:** Kayıt dışı ekonomi, Laffer eğrisi, Optimal vergi oranı.

## 1. GİRİŞ

Arz yönlü iktisadi yaklaşımın savunucularından biri olan Arthur Laffer'in vergi oranları ile vergi gelirleri arasında kurmuş olduğu çan-eğrili teorik ilişki, literatürde Laffer eğrisi ya da Laffer hipotezi olarak bilinmektedir.<sup>1</sup> Laffer eğrisine göre, toplam vergi gelirleri belirli bir noktaya kadar vergi oranlarında yapılacak artışlarla birlikte artacak, bu noktadan itibaren vergi oranlarındaki artışlarla birlikte azalacaktır. Bu anlamdaki Laffer eğrisi, genel olarak ters "U" harfine benzemektedir. Laffer eğrisinin bu şekline göre, sıfır vergi geliri sağlayan iki uç nokta vardır. Bu noktalarda vergi oranı, sıfır ile yüzde yüz değerlerini almaktadır. Uygulanan vergi oranı eğer Laffer eğrisinin pozitif eğimli bölgesinde (etkin bölge) yer alıyor ise, vergi oranındaki artışlarla birlikte toplam vergi gelirleri artacaktır. Diğer yandan uygulanan vergi oranı eğrinin negatif eğimli bölgesinde (etkin olmayan bölge) yer alıyor ise, vergi oranında yapılacak küçük bir artış karşısında toplam vergi gelirleri azalacaktır. Dolayısıyla Laffer eğrisini iki bölgeye ayıran öyle bir vergi oranı vardır ki, bu (optimal) oran toplam vergi gelirlerini maksimum yapar. Bu orandaki herhangi bir değişme, mutlak surette vergi gelirlerinin azalmasına neden olur.

\* Prof. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, İ.İ.B.F., Ekonometri Bölümü, Trabzon.

e-posta: [yamak@ktu.edu.tr](mailto:yamak@ktu.edu.tr)

\*\* Uzman Yardımcısı, Türkiye İstatistik Kurumu, Ankara.

e-posta: [alpaykocak@tuik.gov.tr](mailto:alpaykocak@tuik.gov.tr)

<sup>1</sup> Buchanan ve Lee (1982), literatüre 1974 yılında Laffer ilişkisi olarak giren bu görüşün daha önceleri Ibn-i Haldun tarafından da açıklandığını göstermiştir. Sonrasında, Aktan (1989) söz konusu ilişkiyi ya da etkiyi Haldun-Laffer etkisi olarak adlandırmıştır.

Laffer eğrisinde, vergi oranları yükseldikçe ekonomik birimlerin aktif olamayacağı varsayılır. Yüksek bir vergi oranının brüt ücret ile net ücret arasındaki farkın açılmasına, bireylerin çalışma şevkinin kırılmasına, üretimin, milli gelirin ve sonuçta vergi gelirlerinin düşmesine neden olacağı ileri sürülmektedir (Buchanan ve Lee, 1982, 817).

Bu ifadeden, teorik olarak Laffer eğrisi oluşturulurken “kayıt dışı ekonomi” kavramının hesaba katılmadığı anlaşılmaktadır. Gerçekte durum böyle değildir. Çünkü iktisadi olarak yaşamı sürdürebilmek için gelir sağlamak, bunun içinde çalışmak gerekmektedir. Dolayısıyla bireyler vergi oranları yükseldikçe, kayıt altında olan kar, ücret, faiz ve rant gibi faktör gelirlerinin tamamını ya da bir kısmını beyan etmeyerek vergilendirmemeyi tercih edebilmektedir. Bu tercihin sonucunda da kayıt dışı ekonomi olgusu ortaya çıkmaktadır.

Literatür, Laffer ilişkisini farklı ülke ve dönemler için inceleyen ampirik çalışmalar bakımından oldukça zengin sayılabilir. Nitekim, Amerika Birleşik Devletleri için Fullerton (1982), Lindsey (1987) ve Hsing (1996), İsveç için Stuart (1981), Fiege ve McGee (1983), İngiltere için Fiege ve McGee (1982), Hollanda için Van Ravestein ve Vijlbrief (1988), OECD ülkeleri için Heijman ve Van Ophem (2005), Türkiye için Derdiyok (1993), Yamak ve Yamak (1995), Yamak, R. (1996), diğer çalışmalar arasında gösterilebilir. Ancak, Fiege ve McGee (1982), Fiege ve McGee (1983) ve Heijman ve Van Ophem (2005) dışındaki çalışmaların hiçbirinde mevcut Laffer eğrisi oluşturulurken kayıt dışı ekonominin varlığı hesaba katılmamıştır. Oysa, hemen her ülkede kayıt dışı ekonomi az çok mevcuttur. Kayıt dışı ekonominin vergi gelirleri ve vergi oranlarını etkilediği düşünülürse, kayıt dışı ekonomi dikkate alınmadan oluşturulmuş bir Laffer eğrisine dayanılarak uygulanan vergi politikaları beklenmeyen ve arzu edilmeyen sonuçlar doğurabilir.<sup>2</sup>

Fiege ve McGee (1983, 503) ve Heijman ve Van Ophem (2005, 716)'in yapmış olduğu çalışmalarda ekonomi, parasal anlamda kayıtlı ve kayıt dışı olarak ayrılmış ve Laffer eğrisi kayıt dışı ekonomi dikkate alınarak tahmin edilmiştir. Ancak bu çalışmalarda dikkati çeken en önemli nokta, kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı (sadece kayıtlı ekonomi) durumdaki Laffer eğrisinin gösterilmemiş ve dolayısıyla Laffer eğrileri arasındaki farklılıklardan bahsedilmemiş olmasıdır. Yine aynı çalışmalarda yöntem olarak genel denge analizinin kullanılması, belirli bir zaman aralığı hakkında yorum yapmayı da imkansız kılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, kayıt dışı ekonominin varlığı altında Laffer eğrisini yeniden tahmin etmek ve kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumdaki Laffer eğrisinden farklı yanlarını ortaya koymaktır. Bu amaçla çalışmada Türkiye'nin 1972-2004 dönemine ait vergi oranları ve vergi gelirleri arasındaki fonksiyonel ilişki, yine aynı dönemde Türkiye'de var olan kayıt dışı ekonominin hesaba katılmasıyla yeniden tahmin edilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde Laffer eğrisinin ve kayıt dışı ekonominin tahmin süreçleri ayrıntıları ile

<sup>2</sup> Kayıt dışı ekonomi hesaba katılarak oluşturulan Laffer eğrisindeki etkin bölgenin konumu kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumdaki Laffer eğrisine göre değişebileceğinden, vergi oranı artırıldığında vergi gelirlerinde artış yerine azalış görülebilir.

anlatılmıştır. Elde edilen bulguların anlatıldığı üçüncü bölümün ardından, bu bulguların tartışıldığı sonuç bölümü verilmiştir.

## 2. YÖNTEM

Vergi oranları ile vergi gelirleri arasındaki Laffer ilişkisinin tahmininde kullanılan başlıca iki yöntem vardır. Bunlar “dolaylı” ve “doğrudan” yöntemlerdir (Fullerton,1982). Dolaylı yöntemdeki varsayım, vergi oranlarında meydana gelen bir değişimin, sırasıyla kullanılabilir reel ücretleri, emek ve sermaye faktörü arzlarını, reel milli gelir seviyesini ve sonuçta vergi gelirlerini etkileyeceğidir. Bu sebeple, dolaylı tahmin yöntemi altında Laffer eğrisi oluşturulurken vergi oranları ve vergi gelirlerinin yanı sıra emek ve sermaye arz esneklikleri, kişi başına düşen reel milli gelir gibi değişkenler göz önüne alınır (Fiege,1983, 502). Doğrudan yöntemde ise dolaylı yöntem nazaran emek ve sermaye arz esnekliklerinin vergi oranındaki değişimlere karşı zayıf olduğu ya da var olan bu değişimin tahmin edilmesinin güç olduğu varsayılarak, vergi oranı ile vergi gelirleri arasında doğrudan bir ilişki kurulur. Bu ilişki aşağıdaki gibi temsil edilmektedir.

$$VG_{1,t} = f(VO_{1,t}, VO^2_{1,t}) \quad (1)$$

Burada;

$VG_{1,t}$ : kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumda elde edilen vergi gelirlerini,

$VO_{1,t}$ : kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumda gerçekleşen vergi oranını temsil etmektedir.

Bu fonksiyonel ilişki, (2) numaralı denklem kullanılarak EKK yöntemi ile tahmin edilmiştir.

$$\ln(VG_{1,t}) = \beta_0 VO_{1,t} + \beta_1 VO^2_{1,t} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Modelde;

Ln: logaritmik dönüşüm operatörünü,

$\beta_0$  ve  $\beta_1$ : ilgili değişkenlerin katsayılarını,

$\varepsilon_t$ : hata terimini, temsil etmektedir.

Vergi gelirleri ile vergi oranı arasındaki ilişki gerek Laffer eğrisinin biçimi, gerekse optimizasyon teorisi gereği, kuadratik fonksiyon olarak ifade edilmiştir. Çalışmada, yapılan spesifikasyon (uygun model biçimi) testleri sonucunda en iyi modelin log-doğrusal model olduğu ortaya çıkmıştır. (2) numaralı denklemin çan eğrisi şeklini verebilmesi için  $\beta_0$  katsayısının pozitif,  $\beta_1$  katsayısının ise negatif işaretli olması gerekmektedir. Laffer hipotezi gereği, vergi oranı sıfır olduğunda vergi geliri olmayacağından model sabit terim içermemektedir. Bununla birlikte optimal vergi oranının (OVO) her yıl için sabit kalacağı varsayıldığından koşulacak modelde eğilim değişkenine de yer verilmemiştir.

(2) numaralı denklemdeki vergi gelirleri değişkeni, toplam (dolaylı ve dolaysız) vergi gelirlerini temsil etmektedir. Vergi oranı değişkeni ise, toplam vergi gelirlerinin ilgili yıldaki değerinin yine aynı yılda oluşan Gayri Safi Milli Hasıla (GSMH) değerine bölünmesi ile oluşturulmuştur. Bu şekilde hesaplanan vergi oranı, “vergi yükü” olarak da ifade edilebilir. Toplam vergi gelirleri, aynı dönemdeki GSMH deflatörüne bölünerek reel terim cinsinden ifade edilmiştir.

Laffer eğrisinin tahmininde kullanılan veriler yıllık olup, 1972–2004 dönemini kapsamaktadır. Vergi gelirlerine ilişkin veriler Gelirler Genel Müdürlüğü’nün yayınladığı Vergi İstatistikleri Yıllığı’ndan, GSMH ve GSMH deflatörü verileri ise Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK)’ten elde edilmiştir.

Kayıt dışı ekonominin Laffer eğrisine olan etkisinin görülebilmesi için, Kayıt Dışı GSMH (KDGSMH) rakamlarının hesaplanması önemlidir. Bu çalışmada KDGSMH, Tanzi (1982) tarafından geliştirilen parasalcı yaklaşım ile ölçülmüştür. Tanzi (1982) tanımlamasına göre “KDGSMH”, vergi yükümlülükleri ve/veya yasal kısıtlamalardan dolayı resmi kayıtlarda gösterilmeyen ya da eksik gösterilen GSMH’dir. Bu tanıma göre KDGSMH’nin ortaya çıkmasının nedenleri vergi ödeme yükümlülüğü ve ticari faaliyet üzerindeki yasal kısıtlamalardır. Kuşkusuz bireyleri kayıt dışına iten en önemli faktör vergi oranlarının yüksek oluşudur. Öte yandan bir ekonomide vergi oranları sıfır olsa bile, bu ekonominin bir kısmı kayıt dışı olabilir. Bunun nedeni ise, o ekonomide yürütülen faaliyetlerin bazılarının yasalarca kısıtlanmış olmasıdır. Örneğin uyuşturucu kaçakçılığı, fuhuş, kumar gibi faaliyetlerin yasaların dışında olması, bu faaliyetlerin kayıt altına alınmasını engellemektedir.

Tanzi (1982), vergi oranının yanı sıra bir takım sosyal ve ekonomik değişkenleri de dikkate alarak nakit rasyosunu tahmin etmeye çalışmıştır.<sup>3</sup> Nakit rasyosu, nakit paranın (C) geniş para arzına (M2) oranı olarak tanımlanmıştır. Tanzi (1982), nakit rasyosu yerine nakitlerin depozitlere oranının da kullanılabileceğini, fakat bu rasyodaki değişmelerin nakitlerden çok depozitlerden kaynaklanmasından dolayı, ABD için C/M2 rasyosunun daha tutarlı olabileceğini kabul etmiştir.

Bu çalışmada, Tanzi (1982)’nin nakit depozit fonksiyonu yerine, reel nakit talep fonksiyonundan hareket edilmiştir (Yamak, N., 1996, 19). Oluşturulan nakit talep fonksiyonunda, vergi oranının yanı sıra para teorisi gereği bazı değişkenler de yer almıştır.

$$C = f(Y, VO, F) \quad (3)$$

(3) numaralı fonksiyonda;

C: dolaşımdaki reel nakit para stokunu (C/P),

Y: kişi başına düşen reel GSMH’yi,

<sup>3</sup> Tanzi (1982), parasal verilerden hareketle kayıt dışı ekonomideki faaliyetlerin hacmini ölçmeye çalışırken, bir takım varsayımlarda bulunur. Bunlar; (1) kayıt dışı ekonomide kullanılan para sadece nakit paradır, (2) dolaşımdaki para, kayıtlı ve kayıt dışı ekonomide kullanılan paranın toplamına eşittir, (3) paranın dolaşım hızı kayıtlı ve kayıt dışı ekonomide aynıdır.

F: faiz oranını (bono),  
VO: Vergi oranı ( $VO_{1,t}$ )’nin “bir” ile toplamını göstermektedir.

Reel nakit talebi tahmininde kullanılan veriler yıllık olup, 1972–2004 dönemini kapsamaktadır. Dolaşımdaki para ve faiz oranına ilişkin veriler Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası’ndan, kişi başına düşen reel GSMH verileri ise TÜİK’ten elde edilmiştir.

Yukarıda oluşturulan nakit talep fonksiyonunu tahmin etmeden önce, fonksiyonda yer alan değişkenlere ait zaman serilerinin durağanlık özelliğine sahip olup olmadığı Genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) testi ile araştırılmıştır (Dickey ve Fuller, 1981). Bilindiği gibi durağan olmayan serilerle kurulan regresyonlarda “sahte regresyon” problemi çıkma ihtimali yüksektir. Seriler logaritmaları alınarak durağanlık testine tabi tutulmuştur (pre-smoothing). Bunun sebebi ise serilerdeki geçici hareketlerin durağanlık sürecine etki etmemesini sağlamaktır (Enders, 2004, 181). Yapılan testler sonucunda serilerin hepsi logaritmik seviyelerinin birinci devresel farklarında durağan bulunmuştur (Tablo 1).

Bu sonuca bakılarak logaritmik seviyelerinde durağanlık şartını sağlamayan değişkenlerin, uzun dönem nakit talep fonksiyonunda mutlaka birinci devresel farkında kullanılacağı anlaşılmamalıdır. Seviyelerinde istikrarlı olmayan bu değişkenlerin bir araya gelmesi sonucu uzun dönem nakit talep fonksiyonunun istikrarlılık şartı sağlanmış olabilir. Böyle bir durumda, uzun dönem talep fonksiyonunda yer alan değişkenlerin seviye değerlerinin kullanılması uygun ve faydalı olacaktır. Nakit talep fonksiyonunun uzun dönemde istikrarlı (değişkenler arasında uzun dönemli ilişkinin) olup olmadığının testi, Johansen-Juselius eş bütünleşme test tekniği (Johansen, 1990) ile gerçekleştirilmiştir. Yapılan testin sonuçları Tablo 2’de verilmiştir. Tablodaki bulgulara göre değişkenlerin, bireysel olarak seviyelerinde istikrarlı olmamalarına rağmen aynı fonksiyon içinde olmaları durumunda, fonksiyonun istikrarlı olduğu ortaya çıkmıştır.

**Tablo 1. Durağanlık testi sonuçları**

Değişkenler	Seviyesinde				Birinci Sıra Farkında			
	k	ADF <sup>a</sup> t istatistiği	k	ADF <sup>b</sup> t istatistiği	k	ADF <sup>a</sup> t istatistiği	k	ADF <sup>b</sup> t istatistiği
C	0	-0.41	0	-0.92	0	-3.89*	1	-4.80*
Y	0	-0.62	0	-2.62	3	-4.49*	3	-4.32*
F	0	-1.82	4	-2.71	4	-3.88*	4	-5.17*
VO	0	-0.61	0	-0.49	0	-4.99*	0	-5.47*

a: Sabit terim içeren ADF denklemdir. Seviyesinde  $\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$ , birinci sıra farkında

$$\Delta^2 X_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Delta^2 X_{t-i} + \varepsilon_t \text{ test denklemleri kullanılmıştır.}$$

b: Sabit terim ve eğilim değişkeni içeren ADF denklemdir. Seviyesinde  $\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 t + \sum_{i=1}^k \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$ ,

$$\text{birinci sıra farkında } \Delta^2 X_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \alpha_2 t + \sum_{i=1}^k \Delta^2 X_{t-i} + \varepsilon_t \text{ test denklemleri kullanılmıştır.}$$

k: Optimal gecikme uzunluğudur, Akaike bilgi ölçütüne göre belirlenmiştir.

\*: Mackinnon (1996) tablo kritik değerine göre 0.01 anlamlılık seviyesinde durağan olduğunu gösterir.

Tablo 2. Eş bütünleşme testi sonuçları<sup>4</sup>

Hipotezler	Maksimum Özdeğer İstatistiği	Tablo Kritik Değerleri
$r = 0/r = 1$	61.39 <sup>†</sup>	54.46
$r \leq 1/r = 2$	27.38	35.65
$r \leq 2/r = 3$	10.18	20.04
$r \leq 3/r = 4$	0.26	6.65

Hipotezler	İz İstatistiği	Tablo Kritik Değerleri
$r = 0/r \geq 1$	34.01 <sup>†</sup>	32.24
$r = 1/r \geq 2$	17.20	25.52
$r = 2/r \geq 3$	9.92	18.63
$r = 3/r \geq 4$	0.26	6.65

<sup>†</sup> İlgili test istatistiği 0.01 seviyesinde istatistiksel olarak anlamlıdır.  $r$ , eş bütünleşme vektörü sayısını göstermek üzere, değişkenler hem İz, hem de Maksimum Özdeğer istatistiklerine göre 0.01 anlamlılık düzeyinde 1 adet eş bütünleşme vektörüne sahiptir.

Dolayısıyla uzun dönem reel nakit talep fonksiyonunda değişkenler logaritmik seviye değerlerinde kullanılmıştır. Neticede uzun dönem reel nakit talep fonksiyonu (4) numaralı denklem ile oluşturulmuştur.

$$\ln(C_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Y_t) + \beta_2 \ln(F_t) + \beta_3 \ln(VO_t) + \varepsilon_t \quad (4)$$

Tanzi (1982) yaklaşımında kayıt dışı ekonomideki para stoku (KDEPS) tahmin edilirken iki alternatif yaklaşım kullanılmaktadır: (1) sıfır vergi oranına göre, (2) minimum vergi oranına (temel yıl) göre. Minimum vergi oranına göre tahminde, ele alınan dönem içindeki vergi oranı değişmelerinden (en düşük vergi oranına göre) kaynaklanan KDEPS'nin büyüklüğü ölçülmektedir. Sıfır vergi oranı yönteminde ise, ele alınan dönem içinde vergi oranlarının varlığından kaynaklanan KDEPS'nin büyüklüğü ölçülmektedir. Bu çalışmada "sıfır vergi oranı" yaklaşımı kullanılarak KDEPS tahmin edilmiştir.

## 2.1 Sıfır Vergi Oranına göre KDEPS'nin Tahmini

1. EKK yöntemiyle tahmin edilen aşağıdaki nakit talep fonksiyonu kullanılarak, dolaşımdaki (kayıtlı+kayıt dışı) nominal nakit para stoku ( $C_1$ ) yıllar itibariyle belirlenir.

$$\ln(C_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Y_t) + \beta_2 \ln(F_t) + \beta_3 \ln(VO_t) + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\ln(C_{1,t}) = \ln P_t + (\beta_0 + \beta_1 \ln(Y_t) + \beta_2 \ln(F_t) + \beta_3 \ln(VO_t)) \quad (6)$$

$$C_{1,t} = \exp(\ln(C_{1,t})) \quad (7)$$

2. Vergi oranının sıfır olduğu, bir başka ifade ile vergi oranının katsayısının ( $\beta_3$ ) sıfır kabul edildiği durumda, kayıtlı ekonomide mevcut olması gereken nominal para stoku ( $C_2$ ) aşağıdaki eşitliklerin kullanılması sonucu hesaplanır.

<sup>4</sup> Eş bütünleşme testi uygulanırken uygun gecikme uzunluğu 1 olarak alınmıştır. Uygun gecikme uzunluğu bulunurken kullanılan işlem; 1) Değişkenlerin topluca bir VAR modeline sokulması, 2) Likelihood Ratio (LR) ölçütüne göre VAR modelinde uygun gecikme uzunluğunun bulunması, 3) Bir önceki aşamada bulunan gecikme uzunluğunun (Johansen-Juselius eş bütünleşme testinde fark denklemleri kullanıldığı için) bir eksiğinin eş bütünleşme için uygun gecikme uzunluğu olarak belirlenmesi şeklindedir.

$$\ln(C_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(Y_t) + \beta_2 \ln(F_t) + \varepsilon_t \quad (8)$$

$$\ln(C_{2,t}) = \ln(P_t) + (\beta_0 + \beta_1 \ln(Y_t) + \beta_2 \ln(F_t)) \quad (9)$$

$$C_{2,t} = \exp(\ln(C_{2,t})) \quad (10)$$

3. Tamamen vergilendirmeden kaynaklanan KDEPS, kayıtlı ekonomide bulunması gereken para stokunun toplam ekonomide bulunması gereken stoktan çıkarılmasıyla elde edilir.

$$KDEPS_t = C_{1,t} - C_{2,t} \quad (11)$$

Kayıt dışı ekonomide tedavül eden para stoku, yukarıdaki yaklaşım ile belirlendikten sonra, paranın dolaşım hızının<sup>5</sup> ( $V_t$ ) kayıtlı ve kayıt dışı ekonomide aynı olduğu varsayılarak, sıfır vergi oranına göre kayıt dışı ekonomide yaratılan gelir;

$$KDGSMH_t = V_t \times KDEPS_t \quad (12)$$

şeklinde hesaplanır.

## 2.2 Kayıt Dışı Ekonominin Kayıt Altına Alınması Durumu

Ekonomide yaratılan toplam GSMH, kayıtlı ve kayıt dışı GSMH'nin toplamına eşittir.

$$GSMH_{Toplam} = GSMH_{Kayıtlı} + KDGSMH \quad (13)$$

KDGSMH'nin kayıtlı GSMH üzerine eklenerek tüm ekonominin kayıtlı hale getirilmesi sonucu, artık ekonomide tartışılan GSMH,  $GSMH_{Kayıtlı}$  değil  $GSMH_{Toplam}$  olacaktır (Heijman ve Van Ophem, 2005, 716). Dolayısıyla, ekonomide yaratılan GSMH'nin tanımının değişmesi, hem vergi gelirlerini, hem de vergi yükünü etkileyecektir. Bu etkileşimler göz önüne alınarak Laffer eğrisi yeniden tahmin edildiğinde, kayıt dışı ekonomi hesaba katılmış olacaktır. Aşağıdaki (14) ve (15) numaralı eşitlikler, KDGSMH'nin kayıt altına alınması durumunda vergi yüklerinin ve vergi gelirlerinin nasıl değişeceğini göstermektedir.

$$VO_{2,t} = \frac{VG_{1,t}}{GSMH_{Toplam}} \quad (14)$$

$$VG_{2,t} = VG_{1,t} + (KDGSMH_t \times VO_{1,t}) \quad (15)$$

<sup>5</sup> Paranın dolaşım hızı,  $V_t = P_t \times (Q_t / M_t)$ 'dir.

Burada;

P: Fiyatlar genel seviyesini,

Q: Nominal GSMH'yi,

M: Dolaşımdaki Para'yı temsil etmektedir.

(14) ve (15) numaralı eşitlikler bazı varsayımlar sonucu oluşturulmuştur. (14) numaralı eşitlikte KDGSMMH'nin sadece vergi oranını etkilediği varsayılmış ve  $VG_{1,t}$ , GSMH<sub>Toplam</sub>'a oranlanarak yeni vergi oranı ( $VO_{2,t}$ ) hesaplanmıştır<sup>6</sup>. (15) numaralı eşitlikte ise KDGSMMH'nin sadece vergi gelirlerini etkilediği varsayılmış ve KDGSMMH'nin vergi oranları üzerindeki etkisi ihmal edilerek, KDGSMMH  $VO_{1,t}$  ile vergilendirilmiştir<sup>7</sup>. KDGSMMH'dan elde edilen vergi gelirleri de  $VG_{1,t}$ 'nin üzerine eklenerek  $VG_{2,t}$  hesaplanmıştır.

Sonuç olarak, kayıt dışı ekonominin hesaba katıldığı durumdaki Laffer eğrisi,  $VO_{2,t}$  değişkeni  $VG_{2,t}$ 'ye fonksiyon kılınarak, (16) numaralı yarı-logaritmik regresyon denklemi ile ifade edilmiştir.

$$\ln(VG_{2,t}) = \beta_0 VO_{2,t} + \beta_1 VO_{2,t}^2 + \varepsilon_t \quad (16)$$

(16) numaralı regresyon denkleminin bileşenlerinden  $VG_{2,t}$ 'nin  $VG_{1,t}$ 'den daha büyük değerler, ikinci bileşen olan  $VO_{2,t}$ 'nin de  $VO_{1,t}$ 'dan daha düşük değerler içermesi sebebiyle, oluşturulacak yeni Laffer eğrisinin daha yüksek bir vergi gelirinde ve daha düşük bir vergi oranında maksimum değerine ulaşması beklenmektedir.

### 3. BULGULAR

Kayıt dışı GSMH'nin dikkate alınmadığı durumda tahmin edilen Laffer eğrisinin istatistiksel bulguları Tablo 3'te verilmiştir. Tablodan da görüldüğü üzere regresyon denklemindeki katsayıların ( $\beta_0$  ve  $\beta_1$ ) işaretleri beklenildiği gibi çıkmış, ayrıca bu katsayılar istatistiksel olarak  $\alpha=0.01$  seviyesinde anlamlı bulunmuştur. OVO olarak gösterilen optimal vergi oranı 0.187 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 3'teki regresyon denklemi sonucu oluşturulan Laffer eğrisi Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekilde gösterilen A noktası 1972–2004 döneminde vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranı (0.187) ile bu vergi oranından elde edilen reel vergi gelirlerinin kesiştiği noktayı göstermektedir. Bahsedilen dönemde gerçekleşen vergi oranları ile OVO karşılaştırıldığında Türkiye'de vergi yönetimlerinin, 2000 yılı ve sonrasında vergi oranlarına aşırı yüklenilmiş olduğu, dolayısıyla Laffer eğrisinin “etkin olmayan” bölgesinde bulunduğu görülmektedir. Diğer taraftan 2000 yılına kadar vergi yönetimlerinin Laffer eğrisinin “etkin” bölgesinde bulunduğu iddia edilebilir. Özellikle 1999 yılında gerçekleşen vergi oranının (0.189), vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranına çok yakın olduğu gözlenmiştir.

<sup>6</sup> Bu varsayımın sebebi, KDGSMMH'nin kayıt altına alındığı durumda bireyler üzerine yüklenen vergi yükünün azalacak olmasıdır.

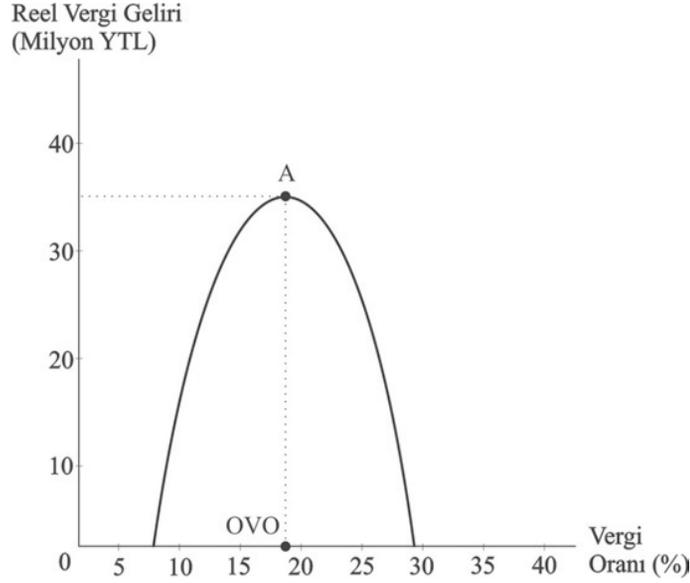
<sup>7</sup> Bu varsayımın sebebi ise, KDGSMMH'nin kayıt altına alındığı durumda elde edilen vergi gelirlerinin, kayıtlı ekonomi durumundakine göre daha yüksek olması gereğidir.

**Tablo 3. Kayıt dışı ekonominin hesaba katılmadığı Laffer eğrisinin istatistiksel bulguları**

Bağımlı Değişken	Katsayılar		RSS <sup>ψ</sup>	OVO <sup>8</sup>
$VG_{1,t}$	$VO_{1,t}$	$VO^2_{1,t}$	7.33	0.187
	185.4 <sup>υ</sup>	- 495.6 <sup>**</sup>		

<sup>ψ</sup>: Hata terimleri kareleri toplamını,

<sup>υ</sup>: İlgili katsayının istatistiksel olarak 0.01 seviyesinde anlamlı olduğunu gösterir.

**Şekil 1. Kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumdaki Laffer eğrisi**

Eş bütünleşme analizi kapsamında oluşturulan nakit para talep fonksiyonunun EKK yöntemi ile tahmin edilmesi sonucunda elde edilen istatistiksel sonuçlar Tablo 4'te gösterilmiştir. Tablodan da görüldüğü üzere denklemin açıklayıcılık gücü ( $R^2$ ) 0.77 olarak yüksek bir seviyede belirlenmiştir. Denklemdaki bütün katsayılar istatistiksel olarak 0.05 seviyesinde anlamlı ve beklenen işaretleri ile bulunmuştur. İskonto oranları ile temsil edilen faiz oranlarının reel nakit talebi üzerine etkisi negatif bulunurken, ortalama vergi oranı ile reel kişi başı gelirin etkisi pozitif yönde bulunmuştur.

Regresyon denklemindeki değişken katsayılarının beklenildiği yönde ve istatistiksel olarak anlamlı çıkmış olması kadar önemli olan bir diğer bulgu, regresyon denkleminin gerekli testleri başarılı bir şekilde geçmiş olmasıdır. Tablo 4'te hesaplanan HETER istatistiği, regresyon hata terimleri varyansının tahmin dönemi içinde sabit olduğu şeklindeki hipotezin reddedilemediğini göstermektedir. Diğer taraftan tahmin edilen regresyon denkleminin ifade ettiği fonksiyonel ilişkinin uygunluğu RESET test istatistiği ile kabul

<sup>8</sup> İlgili denklemin ikinci türevinin ( $\partial^2 VG_{1,t} / \partial VO_{1,t}^2$ ) negatif olması nedeniyle denklem bir maksimum noktaya sahiptir ve OVO yine aynı denklemin birinci türevinin ( $\partial VG_{1,t} / \partial VO_{1,t}$ ) sıfıra eşitlenerek  $VO_{1,t}$ 'ye göre çözülmesi sonucu elde edilmiştir.

edilmiştir. Aynı şekilde Durbin Watson (DW) istatistiği regresyon hata terimlerinde herhangi bir ardışık bağımlılık probleminin olmadığına işaret etmiştir. Hata terimlerinin normal dağılıp dağılmadığını test eden Jarque-Bera istatistiğine göre, hata terimlerinin normal dağıldığı şeklindeki hipotez reddedilememiştir.

**Tablo 4. Nakit talep fonksiyonunun istatistiksel bulguları**

Bağımlı Değişken	Katsayılar	Tahmin	Standart Hata	t-istatistiği
	$\beta_0$	14.6 <sup>o</sup>	0.25	59.5
$C_t$	$Y_t$	0.90 <sup>o</sup>	0.24	3.78
	$F_t$	-0.16 <sup>o</sup>	0.05	-2.75
	$VO_t$	2.54 <sup>o</sup>	1.2	2.10
$R^2 = 0.77$		$DW = 1.66$	$F(3,29) = 10.99[0.00]$	
$HETER(1) = 1.86 [0.11]$		$Jarque-Bera = 0.94[0.62]$	$RESET(1) = 2.38[0.13]$	
$ARCH(1) = 0.001 [0.96]$				

<sup>o</sup>: İlgili katsayının istatistiksel olarak 0.05 seviyesinde anlamlı olduğunu gösterir. *HETER*; Hata terimlerinin varyansının sabit olup olmadığını test etmektedir. *JARQUE-BERA*; Hata terimlerinin normal dağılıma uyup uymadığını test etmektedir. *RESET*; Talep fonksiyon formunun doğru oluşturulup oluşturulmadığını test etmektedir. *ARCH*; Regresyon varyansının şartlı otoregresif bir süreç içinde olup olmadığını test etmektedir. Köşeli parantez içindeki değerler, ilgili istatistiklerin anlamlılık düzeylerini göstermektedir.

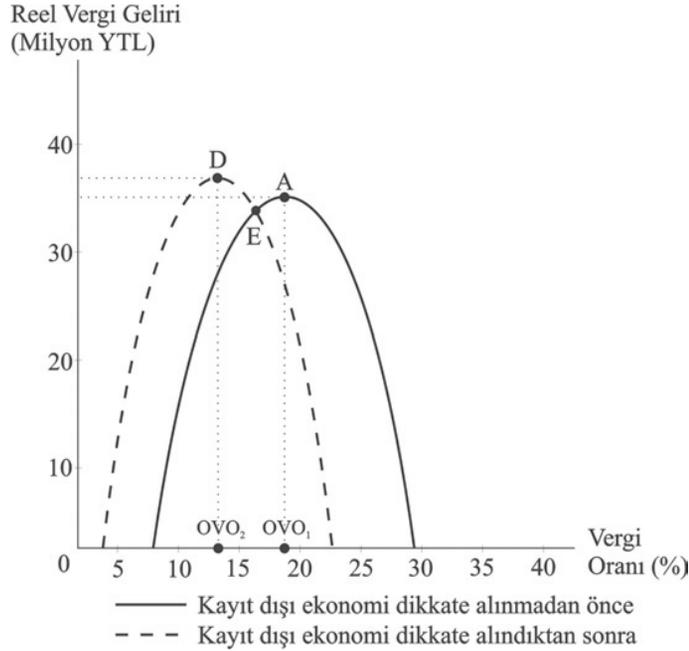
Yukarıda açıklanan “kayıt dışı ekonominin kayıt altına alınması durumu” sürecine göre yeni vergi geliri ve yeni vergi yükü verileri hesaplanmıştır. KDGSMDH kayıt altına alındıktan sonraki durumda tahmin edilen Laffer eğrisinin istatistiksel bulguları Tablo 5’te verilmiştir. Tahmin edilen regresyon denklemindeki katsayıların ( $\beta_0$  ve  $\beta_1$ ) işaretleri beklenildiği gibi çıkmış ve istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Tablo 5’ten elde edilen OVO (0.138) ile 1972-2004 döneminde gerçekleşen vergi oranları karşılaştırıldığında, Türkiye’deki vergi yönetimlerinin 1972-1975 dönemi ve 1983-1995 (1994 hariç) döneminde “etkin bölge”de bulunduğu söylenebilir.

Kayıt dışı ekonominin dikkate alındığı Laffer eğrisi, önceki durumuyla birlikte Şekil 2’de gösterilmiştir. Yeni Laffer eğrisinde göze çarpan ilk nokta, vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranının düşmüş olmasıdır. Bu sonuç, kayıt dışı ekonomi kayıt altına alındığında bireylerin üzerindeki vergi yüklerinin azaldığını göstermektedir. Diğer bir nokta ise OVO’dan elde edilen vergi gelirin önceki Laffer eğrisine kıyasla artmış olmasıdır. Bu bulgu kayıt dışı ekonomi, kayıt altına alındığında mevcut vergi gelirlerinin artmasının bir sonucudur. Kayıt dışı ekonomi kayıt altına alındığında vergi oranlarının düşerek, yatay eksenindeki tanım aralığının daralması nedeniyle son durumda elde edilen Laffer eğrisi daha dar bir şekilde oluşmuştur.

**Tablo 5. Kayıt dışı ekonominin hesaba katıldığı Laffer eğrisinin istatistiksel bulguları**

Bağımlı Değişken	Katsayılar		RSS	OVO <sup>9</sup>
$VG_{2,t}$	$VO_{2,t}$	$VO_{2,t}^2$	3.97	0.138
	250.3 <sup>9</sup>	-901.8 <sup>9</sup>		

<sup>9</sup>: İlgili katsayının istatistiksel olarak 0.01 seviyesinde anlamlı olduğunu göstermektedir.

**Şekil 2. Kayıt dışı ekonominin hesaba katılması durumundaki Laffer eğrisi**

Şekil 2’de gösterilen E noktası, kayıt dışı ekonomi açısından “kritik nokta” olarak adlandırılabilir. Vergi oranının 0.16 olduğu bu noktadan A’ya doğru gidildikçe, kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı Laffer eğrisine göre vergi gelirleri artıyormuş gibi görülmektedir. Oysaki kayıt dışı ekonominin hesaba katıldığı Laffer eğrisine göre E noktası “etkin olmayan bölge”de bulunduğu için, vergi oranı A noktasına doğru arttıkça elde edilen vergi gelirleri azalacaktır.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın amacı, kayıt dışı ekonominin varlığı altında Laffer eğrisini yeniden tahmin etmek ve kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı durumdaki Laffer eğrisinden farklı yanlarını ortaya koymaktır. Bu amaçla, Türkiye’nin 1972-2004 dönemine ait vergi oranları ve vergi gelirleri arasındaki fonksiyonel ilişki, yine aynı dönemde Türkiye’de var olan kayıt dışı ekonomi de hesaba katılarak tahmin edilmiştir.

<sup>9</sup> İlgili denklemin ikinci türevinin ( $\partial^2 VG_{2,t} / \partial VO_{2,t}^2$ ) negatif olması nedeniyle denklem bir maksimum noktaya sahiptir ve OVO yine aynı denklemin birinci türevinin ( $\partial VG_{2,t} / \partial VO_{2,t}$ ) sifira eşitlenerek  $VO_{2,t}$ ’ye göre çözümlenmesi sonucu elde edilmiştir.

Laffer eğrisinin kayıt dışı ekonominin dikkate alındığı ve alınmadığı durumları kıyaslandığında, ilk göze çarpan sonuç vergi gelirlerini maksimum yapan vergi oranının düşmüş olmasıdır. Bunun yanında, düşük bir OVO ile daha yüksek bir vergi geliri elde edilmesi ikinci önemli sonuçtur.

Kayıt dışı ekonominin dikkate alınmadığı Laffer eğrisine göre vergi oranı 0.187 olduğunda, vergi gelirleri maksimum olmaktadır. Ancak kayıt dışı ekonomi hesaba katıldığında durumun böyle olmayacağı açıkça görülmektedir. Laffer eğrisi oluşturulurken Türkiye’de mevcut olan kayıt dışı ekonominin hesaba katılması sonucu OVO önceki duruma kıyasla 0.05 azalarak 0.138’e düşmüştür. Dolayısıyla kayıt dışı ekonominin var olduğu Türkiye’de 0.187’lik bir vergi oranının uygulanması, toplanan vergi gelirlerini maksimum kılmayacaktır. Kayıt dışı ekonominin hesaba katıldığı Laffer eğrisinden elde edilen OVO (0.138) uygulandığı takdirde hem bireyler üzerindeki vergi yükü hafiflemiş olacak, hem de kayıt dışı ekonominin kayıtlı duruma dönmemesinin de etkisiyle vergi gelirleri daha da artacaktır.

Sonuç olarak Laffer eğrisi oluşturulurken ülkede kayıt dışı ekonominin olmadığını varsayılması, vergi yönetimlerinin bireylerin üzerine daha fazla vergi yükü yükleyerek hedefledikleri vergi gelirinden daha az bir gelir elde etmelerine neden olduğu ortaya çıkmıştır. Vergi oranlarında meydana gelen bir indirimin bireylerin kayıt dışı ekonomiden kayıtlı ekonomiye geçişini hızlandıracağı düşünüldüğünde, (2004 yılında gerçekleşen vergi oranı esas alırsa) vergi oranı 0.235’ten 0.187’ye değil, 0.138’e indirilmelidir. Vergi oranı 0.138 olarak belirlendiğinde hem vergi yükü azalarak vergi gelirlerinin artması, hem de kayıt dışı ekonominin minimum düzeyde inmesi beklenmektedir.

## 5. KAYNAKLAR

Aktan, C.C., 1989. Khaldun-Laffer effect of supply-side economics. D.E.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 4, 128-136.

Buchanan, J. ve Lee, D., 1982. Politics, time and Laffer curve. Journal of Political Economy, 90, 4, 816-819.

Derdiyok, T., 1993. Türkiye’nin Laffer Eğrisi. Maliye Dergisi, 112, 26-39.

Dickey, A. ve Fuller, W., 1981. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. Econometrica, 49, 1057-72.

Enders, W., 2004. Applied Econometric Time Series, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc.,

Feige, L. ve Mcgee, T., 1982. The unobserved economy and the U.K. Laffer curve. Journal of Economic Affairs, 3, 36-43.

Feige, L. ve Mcgee, T., 1983. Sweden’s Laffer curve: Taxation and the unobserved economy. Scandinaviav Journal of Economics, 85, 4, 499-519.

Fullerton, D., 1982. On the possibility of an inverse relationship between tax rates and government revenues. *Journal Of Public Economics*, 19, 1, 3-22.

Heijman W.J.M. ve Van OPHEM J.A.C., 2005. Willingness to pay tax the Laffer Curve revisited for 12 OECD countries. *The Journal of Socio-Economics*, 34, 5, 714-723.

Hsing, Y., 1996. Estimating the Laffer curve and policy implications. *The Journal of Socio-Economics*, 25, 3, 395-401.

Johansen, S. ve Juselius, K., 1990. Maximum likelihood estimation and inference on cointegration with applications of demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 231-254.

Lindsey, L.B., 1987. Individual taxpayer response to tax cuts: 1982-1984. *Journal Of Public Economics*, 33, 2, 173-206.

Stuart, C.E., 1981. Swedish tax rates, labor supply and tax revenues. *Journal of Political Economy*, 89, 5, 1020-38.

Tanzi, V., 1982. The underground economy in United States: Annual estimates 1930-1980. *I.M.F. Staff Papers*, 33, 799-811.

Van Ravestein, A. ve Vijlbrief, H, 1988. Welfare cost of higher tax rates: An empirical Laffer curve or the Netherlands. *De Economist*, 136, 205-219.

Yamak, N. ve Yamak, R., 1995. Türkiye'nin vergi türlerine göre Laffer eğrisi. *Ekonomik Yaklaşım*, 6, 51-65.

Yamak, N., 1996. Türkiye'de kayıt dışı ekonominin büyüklüğü. *İktisat, İşletme ve Finans Dergisi*, 126, 17-29.

Yamak, R., 1996. Türkiye'nin Laffer eğrisi: Kalman filtre tahmin tekniği. *Ekonomik Yaklaşım*, 7, 27-38.

## ESTIMATION OF THE LAFFER CURVE UNDER THE ASSUMPTION OF THE EXISTENCE OF UNDERGROUND ECONOMY

### ABSTRACT

*One of the assumptions of the Laffer hypothesis (curve) which proposes a relationship of bell shaped curve between tax rates and tax revenues is negative impact of tax increases on work desire of people. However, as the tax rates are increased, people may prefer to be a member of the underground economy by avoiding taxation of their incomes, completely or partly instead of being out of the labor-force. Since there will be an underground economy more or less in each country, the existence of underground economy should be taken into consideration in formulating the Laffer curve. In this study, the Laffer curve was estimated under the assumption of the existence of underground economy for the period of 1972-2004 of Turkey and the empirical findings were compared to the Laffer curve estimated without assumption of under ground economy. It was found that the tax rate which makes maximum the tax revenues in the Laffer curve with the existence of the underground economy is less than that in the Laffer curve without the existence of the underground economy.*

**Key words:** Underground economy, Laffer curve, Optimal tax rate.

# TÜRKİYE'DE İLLER İTİBARIYLA KİŞİ BAŞINA GELİR EŞİTSİZLİĞİNİN KALICILIĞI: PANEL BİRİM KÖK ANALİZİ İLE BİR DEĞERLENDİRME

Ferit KULA \*

Alper ASLAN\*\*

## ÖZET

*Bu çalışmada 1975-2001 dönemi için Türkiye'de il düzeyinde kişi başına reel gayri safi yurtiçi hâsıla eşitsizliğinin kalıcılığı incelenmiştir. İller arasındaki farklılık Im, Pesaran ve Shin-IPS (2003) tarafından geliştirilen, IPS panel birim kök testi ile değerlendirilmiştir. Çalışmada ulaşılan bulgular birim kökün yokluk hipotezinin reddedilemediğini göstermektedir. Bu nedenle Türkiye'de iller itibariyle eşitsizliğin kalıcı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.*

**Anahtar kelimeler:** Kalıcılık, Panel Birim Kök Testi, Yakınsama.

## 1. GİRİŞ

Bir ülkenin ekonomik büyüme performansı kadar ekonomik büyüme ile ortaya çıkan refah artışının ülke içinde bölgeler veya iller itibariyle bölüşümü de çok önemli bir iktisadi problemdir. Son yıllarda bir ülke içerisinde bölgeler veya iller arasındaki gelir yakınsaması üzerine çok geniş bir literatür oluşmuştur\*\*\*. Örneğin Barro ve Sala-i-Martin (1991), ABD'deki eyaletler ve Avrupa'daki 73 bölge arasında belirgin bir yakınsamanın varlığını göstermişlerdir. Sachs, Bajpai ve Ramiah (2002), Hindistan eyaletleri üzerine yaptıkları araştırmada, Lima ve Resende (2007), Brezilya eyaletleri üzerine yaptıkları analizlerde yakınsamanın olmadığını bulmuşlardır.

Türkiye'de bölgeler veya iller itibariyle gelir eşitsizlikleri konusunda da verilen ilk eserler 1975-1999 dönemi için Tansel ve Güngör (1998) ile Filiztekin (1998) tarafından yapılan araştırmalardır. Tansel ve Güngör (1998) yakınsamayı gözlemleyebilmek için emek verimliliğini dikkate alırken, Filiztekin (1998) kişi başına geliri incelemiştir. Bu nedenle de ulaşılan sonuçlar farklılık göstermektedir. Tansel ve Güngör (1998) hem mutlak, hem de koşullu yakınsama sonucuna ulaşırken, Filiztekin (1998) sadece koşullu yakınsama sonucuna ulaşmıştır. Erk, Ates ve Direkci (2000), 1979-1997 dönemi için yaptıkları çalışmada yakınsamanın olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuç, Berber, Yamak ve Artan (2000) tarafından 1975-1997 dönemi için yapılan analizle de desteklenmiştir. Gezici ve

\*Yrd. Doç. Dr., Erciyes Üniversitesi İİBF İktisat Bölümü, Kayseri. e-posta: kulaf@erciyes.edu.tr

\*\*Araş. Gör., Erciyes Üniversitesi İİBF İktisat Bölümü, Kayseri. e-posta: alperaslan@erciyes.edu.tr

\*\*\*Literatür taraması için Ateş (1996) ve Karaca (2004) kaynaklarına başvurulabilir.

Hewings (2001), 1980-1997 dönemi için, Doğruel ve Doğruel (2003), 1987-1999 dönemi için ve Karaca (2004), 1975-2000 dönemi için yaptıkları analizlerde yakınsamanın olmadığı sonucuna ulaşmıştır.

Görüldüğü gibi yapılan araştırmaların sonuçları ağırlıklı olarak Türkiye’de ciddi bir bölgesel gelir eşitsizliği olduğunu göstermektedir. Ancak Türkiye’de 1960’lı yıllardan bu yana bölgeler itibariyle gelir eşitsizliğinin yarattığı sorunları önlemek için politikalar uygulanmaktadır (Karaca, 2004). Bu araştırmada, Türkiye’de iller itibariyle gelir eşitsizliğinin kalıcı (persistent) olup olmadığı heterojen paneller için birim kök testi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmada ilk olarak kullanılan panel veri birim kök testi yöntemi tanıtılmış, daha sonra elde edilen ampirik bulgu ve sonuçlara yer verilmiştir.

## 2. YÖNTEM

Nelson ve Plosser (1982)’in ABD’nin Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla (GSYİH), işsizlik, ücretler ve benzeri makroekonomik zaman serileri üzerine yapmış oldukları gözlemler, birim kök analizlerini iktisat teorisi ve iktisat politikasının vazgeçilmez bir aracı haline getirmiştir. Nelson ve Plosser’in temel savı, makroekonomik serilerde ve özellikle çıktıdaki (GSYİH) dalgalanmaların devrevi olmaktan çok, teknoloji gibi reel faktörlerden kaynaklandığıdır. Bir başka ifade ile GSYİH serisinde birim kökün bulunması GSYİH hareketlerinin kalıcı olduğu anlamına gelmektedir. Zaman serisi ekonometrisi terimleriyle ifade edilecek olursa, durağan seriler (birim köke sahip olmayan) uzun dönemde ortalamaları etrafında dalgalanırken (kalıcıyken) durağan olmayan seriler (birim köke sahip) şoklardan kalıcı olarak etkilenip yollarından sapabilmektedir.

Nelson ve Plosser’in bu öncü çalışmalarından sonra Campbell ve Mankiw (1987), Cochrane (1988) ve Perron (1989) katkılarıyla gelişen tek değişkenli birim kök sınamaları, ampirik araştırmalar için vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Günümüzde yaygın olarak kullanılan tek değişkenli birim kök sınaması “Geliştirilmiş Dickey-Fuller” (Augmented Dickey-Fuller-ADF) testidir. Ancak ADF testlerinin küçük örneklemdeki istatistiksel gücü zayıftır. Zaman serisi analizlerinde birim kök ve eş bütünleşme analizleri sonlu örneklerde düşük istatistiksel güce sahiptir (Baltağı, 2005). Bu nedenle zaman serisi yardımıyla birim kök analizleri araştırmacıları sınırlandırmaktadır. Son dönemde panel veriler için birim kök testlerinde kaydedilen ilerlemeler “kalıcılık olayı”nın (persistence phenomea) kısa dönemler için analiz edilmesine izin vermektedir (Lima ve Resende, 2007).

Literatürde bu alanda en önemli örnekler olarak Bernard ve Jones (1996)’un, ABD eyaletlerinin verimlilik yakınsaması, Fleissig ve Strauss (2001)’un OECD ülkelerinin satın alma gücü pariteleri ve Lima ve Resende (2007)’in Brezilya eyaletleri arasında gelir eşitsizliğinin kalıcılığı üzerine yaptığı araştırmalar sayılabilir. Bu çalışmada, birim kök analizi uygulamalarındaki gelişmelere paralel olarak Türkiye’de iller itibariyle kişi başına gelir eşitsizliğinin kalıcılığı panel birim kök testi ile araştırılmıştır.

Panel birim kök yöntemleri arasında en yaygın kullanım alanına sahip olanlar, Levin, Lin ve Chu-LLC (2002), ve Im, Pesaran ve Shin-IPS (2003) olarak sıralanabilir\*\*\*\*. Çalışmada

\*\*\*\*Panel birim kök testlerinin değerlendirmesi için bkz. Maddala ve Wu (1999)

LLC yerine IPS panel birim kök testinin kullanılma nedeni, alternatif hipotez altında  $\beta_i$  değerindeki heterojenliğe izin vermesidir. IPS testi, özel birim eğim katsayılarını göz önüne alan bir testtir. Modelde N yatay kesiti ve T zamanı göstermek üzere;

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \beta_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad i=1, \dots, N, t=1, \dots, T \quad (1)$$

şeklindedir. Denklemden  $y$  ile gelir,  $\alpha$  ile sabit ve  $\varepsilon$  ile hata terimi gösterilmektedir. Sınama, ADF testinde olduğu gibi  $\beta$  katsayısının sıfır eşitliğine dayanır. Panel birim kök testlerinde çok sayıda yatay kesit bulunduğu için birden fazla  $\beta$  katsayısı mevcuttur. IPS sınamasında sıfır hipotezi bütün  $i$ 'ler için

$$H_0: \beta_i = 0 \quad (2)$$

ve alternatif hipotez ise

$$H_1: \beta_i < 0 \quad (3)$$

şeklindedir.

IPS'de "birim kök yoktur" hipotezini test etmek için t-bar istatistiği kullanılmaktadır. t-bar istatistiği,

$$\sqrt{N}(\bar{\tau} - E(\tau_i | \beta_i = 0)) / (Var(\tau_i | \beta_i = 0))^{\frac{1}{2}} \sim N(0,1) \quad (4)$$

olmak üzere;

$$\tau_i = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \text{ ve } \bar{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (5)$$

şeklinde elde edilir. Ortalamalar,

$$E(\tau_i | \beta_i = 0) \quad (6)$$

ve varyanslar,

$$Var(\tau_i | \beta_i = 0) \quad (7)$$

ise simülasyonlar vasıtasıyla elde edilir.

IPS testinin en önemli avantajları; her bir yatay kesit için ayrı  $\beta$  katsayıları hesaplaması, dengeli olmayan paneller (unbalanced panel) için kullanılabilmesi ve yatay kesitler için hesaplanan ADF testlerinde farklı gecikme değerlerine izin vermesi olarak sıralanabilir (Baltagi, 2005).

### 3. BULGULAR

Çalışmada 1975-2001 dönemine ilişkin iller itibariyle yıllık Kişi Başına Reel Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla (KBGSYİH) verileri kullanılmıştır. Veriler, Karaca (2004) çalışmasından elde edilmiştir. 1990 sonrasında ortaya çıkan yeni illerin KBGSYİH serileri ayrıldıkları illerin, KBGSYİH serilerine dâhil edilmiş ve araştırma 67 il düzeyinde gerçekleştirilmiştir. Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) iller itibariyle GSYİH verilerini yayımlamaya son vermiştir. Bu nedenle ulaşılabilen en son yıl 2001 yılıdır. Bu çerçevede 1990 yılında il olan Aksaray'ın bu yıldan sonraki verileri Niğde, Bayburt'un Gümüşhane, Karaman'ın Konya, Kırıkkale'nin Ankara ile; 1991 yılında il olan Batman ve Şırnak'ın verileri Siirt ile; 1992 yılında il olan Bartın'ın verileri Zonguldak ile; 1993 yılında il olan Ardahan ve Iğdır'ın verileri Kars ile; 1996 yılında il olan Yalova'nın verileri İstanbul, Karabük'ün verileri Zonguldak, Kilis'in verileri Gaziantep ile; 1997 yılında il olan Osmaniye'nin verileri Adana ile; 2000 yılında il olan Düzce'nin verileri Bolu ile birleştirilmiştir.

Türkiye'de iller itibariyle görelî gelir yakınsamasını test edebilmek için "lider il" olarak Kocaeli seçilmiş diğer illerin Kocaeli'yi yakınsamalarını tespit edebilmek için  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{Kocaeli,t})$  ve illerin Türkiye ortalamasını yakınsamalarını tespit edebilmek için  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{ortalama,t})$  serileri oluşturularak, Eviews 6.0 paket programı yardımıyla panel birim kök testi uygulanmıştır.

Bilindiği gibi durağanlık analizinde gecikme uzunluğunun seçimi kritik bir öneme sahiptir. Çünkü gecikme uzunluğu durağanlık analizinin hem seviyesini, hem de gücünü etkilemektedir. Uygulamada model için gecikme uzunluğunun seçiminde standart ölçütler (Akaike ve Schwarz Information Criterion) kullanılmaktadır. Ancak modelde "negatif hareketli ortalama hataları" (negative moving-average errors) bulunması durumunda standart Akaike ve Schwarz Bilgi Kriterleri oldukça küçük bir gecikme uzunluğu seçmekte ve yanlış tahminlere neden olmaktadır (Caporale and Cerrato, 2006).

Bu nedenle Bai ve Perron (2001), modelde uygun gecikme uzunluğunun tespit edilebilmesi için "Düzenlenmiş Schwarz ve Akaike Bilgi Kriteri"nin (Modified Schwarz and Akaike Information Criterion-MSIC and MAIC) kullanılmasını önermektedir. Gecikme uzunluğu konusunda emin olabilmek için Holmes (2002) tarafından önerilen yol da ( $P = T^{1/3}$ ) takip edilebilir. Modelde bu yolla elde edilen gecikme uzunluğu 2 ile 3 arasında bir değere karşılık gelmektedir. Gecikme uzunluğunun tespit edilmesinde kullanılan diğer bir yöntem ise Lima ve Resende (2007) tarafından takip edilen ve gecikme uzunluğunu sırayla arttırarak ( $P=1$ ,  $P=2$  ve  $P=3$ ) birim kökün araştırılmasıdır. Aşağıda, Tablo 1'de farklı gecikme uzunlukları dikkate alınarak  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{Kocaeli,t})$  serisi için hesaplanmış test istatistikleri verilmiştir.

**Tablo 1.  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{Kocaeli,t})$  serisi panel veri birim kök testleri (1975-2001)**

Gecikme Uzunluğu	Test İstatistikleri
P=1	0,668 (0,748)
P=2	1,460 (0,927)
P=3	-1,002 (0,158)
MSIC	0,773 (0,780)
MAIC	0,773 (0,780)

**Not:** p-değerleri parantez içinde gösterilmiştir.

Tablo 1’de de görüldüğü gibi bütün gecikme uzunlukları için “birim kök yoktur” hipotezi reddedilememiştir. Bu sonuç, Türkiye’de 1975-2001 döneminde illerin Kocaeli’ye yakınsamadığını, bir başka ifade ile iller arasında eşitsizliğin kalıcı olduğunu göstermektedir.

Aşağıda Tablo 2’de ise farklı gecikme uzunlukları dikkate alınarak  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{ortalama,t})$  serisi için hesaplanmış test istatistikleri verilmiştir.

**Tablo 2.  $\log(kbgsyih_{i,t}/kbgsyih_{ortalama,t})$  serisi panel veri birim kök testleri (1975-2001)**

Gecikme Uzunluğu	Test İstatistikleri
P=1	-0,239 (0,405)
P=2	0,284 (0,612)
P=3	-1,283 (0,099)
MSIC	1,332 (0,908)
MAIC	1,416 (0,921)

**Not:** p-değerleri parantez içinde gösterilmiştir.

Tablo 2’deki sonuçlarda, Tablo 1’de olduğu gibi bütün gecikme uzunlukları için “birim kök yoktur” hipotezi reddedilememiştir. Bu sonuç, Türkiye’de 1975-2001 döneminde illerin KBGSYİH seviyelerinin Türkiye ortalamalarına da yakınsamadığını ve kalıcılık sergilediğini göstermektedir.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Türkiye’deki bölgesel gelir eşitsizliği önemli sosyal/ekonomik bir problem olması nedeniyle çok sayıda ampirik analize konu olmuştur. Türkiye’de bölgesel yakınsama literatürü incelendiğinde ulaşılan bulgular, büyük bir ağırlıkla yakınsamanın olmadığını, bölgesel eşitsizliğin varlığını işaret etmektedir. Bu çalışmada, literatürden farklı olarak Türkiye’de bölgesel eşitsizliğin varlığından çok, eşitsizliğin kalıcılık gösterip göstermediği araştırılmıştır. Bu amaçla birim kök literatüründeki tartışmalardan yola çıkarak 1975-2001 döneminde Türkiye’de iller düzeyinde gelir eşitsizliğinin kalıcı olup olmadığı panel birim kök testi ile sınanmıştır. Araştırma yöntem olarak da Türkiye ekonomisi üzerine yapılan ampirik yakınsama literatüründen farklıdır.

Yapılan analiz sonucunda 1975-2001 dönemi için Türkiye’de gelir eşitsizliğinin kalıcı olduğu tespit edilmiştir. Türkiye’de iller itibariyle KBGSYİH eşitsizliğinde ortaya çıkan bu sonuç, birim kök testinin mantığı çerçevesinde değerlendirildiğinde, Türkiye’de iller itibariyle gelir eşitsizliğinin reel faktörlerden (özellikle teknolojiyen) kaynaklandığı ileri sürülebilir. Diğer yandan GSYİH serilerinin ne ölçüde anlamlı olduğu da tartışılabilir. GSYİH’nin ne ölçüde gerçek eşitsizliği/eşitliği yansıtmakta olduğu sorusu yapılacak yeni araştırmalarda, Türkiye’de iller itibariyle eşitsizliğin yeni değişkenler yardımıyla tekrar edilmesi yönünde anlamlı olacaktır.

## 5. KAYNAKLAR

Bai, J. ve Perron, P., 2001. Multiple structural change models: a simulation analysis, in Corbae P. D., Durlauf S. N. and Hansen B. E. (eds), *Econometric Theory and Practice. Frontiers of Analysis and Applied Research*, Cambridge University Press, Cambridge.

Baltagi, B. H., 2005. *Econometric Analysis of Panel Data*, Third Edition, England: John Wiley & Sons Ltd.

Barro, R. and Sala-i Martin, X., 1991. Convergence across states and regions, *Brooking Papers and Economic Activity*, 1, 107-182.

Berber, M. Yamak, R.ve Artan S., 2000. Türkiye’de yakınlaşma hipotezinin bölgeler bazında geçerliliği üzerine ampirik bir çalışma: 1975-1997., 9. Ulusal Bölge Bilimi ve Bölge Planlama Kongresi Bildiri Kitabı, 51-59.

Bernard A., B. ve Jones C., 1996. [Productivity growth across industries and countries: time series theory and evidence](#), *Review of Economics and Statistics*, 78, 135-146.

Campbell, J. ve Mankiw, G., 1987. Are output fluctions transitory?, *Quarterly Journal of Economics*, 102, 857-880.

Cochrane, J., 1988. How big is random walk in GDP?, *Journal of Political Economy*, 96, 893-992.

Caporale, G. M. ve Cerrato M., 2006. [Panel data tests of PPP: a critical overview](#), *Applied Financial Economics*, 16. 73-91.

Dogrueel, F. ve Dogrueel, S., 2003. Türkiye’de bölgesel gelir farklılıkları ve büyüme. (içinde) Köse, A.H., Şenses, F. ve Yeldan, E. (Der.), *İktisat Üzerine Yazılar I: Küresel Düzen, Birikim, Devlet ve Sınıflar*, İstanbul, İletişim Yayınları, 287-318.

Erk, N., Ateş, S. ve Direkçi, T., 2000. Convergence and growth within GAP region (South Eastern Anatolia Project) and overall Turkey’s regions. IV. ODTÜ Uluslararası Ekonomi Kongresi, 13-16 Eylül, Ankara.

Filiztekin, A., 1998. Convergence across industries and provinces in Turkey, *Koc University Working Paper No. 1998/08*.

Fleissig, A. R. ve Strauss, J., 2001. Panel unit root tests of OECD stochastic convergence, *Review of International Economics*, 9, 153-162.

Gezici, F. ve Hewings, G.J.D., 2001. Regional convergence and the economic performance of peripheral areas in Turkey, *REAL Discussion Papers*, No: 01-T-13.

Holmes, M. J., 2002. Convergence in international output: evidence from panel data unit root tests, *Journal of Economic Integration*, 17, 826–38.

- Im, K.S., Pesaran H. ve Shin Y., 2003. Testing for unit roots in heterogeneous panels, *Journal of Econometrics*, 115, 53-74.
- Karaca, O., 2004. Türkiye’de bölgeler arası gelir farklılıkları: yakınsama var mı?, *Turkish Economic Association Discussion Paper No.:* 2004/7.
- Levin, A., Lin, C. F. ve Chu, C. S., 2002 Unit root tests in panel data: asymptotic and finite-sample properties, *Journal of Econometrics*, 108, pp. 1-24.
- Lima, M. A.ve Resende, M., 2007. Convergence of per capita GDP in Brazil: an empirical note, *Applied Economic Letters*, 14, 333-335.
- Maddala, G. S. ve Wu, S., 1999. A comparative study of unit root tests with panel data and a new simple test, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Special Issue, 631–52.
- Nelson, C. ve Plosser, C., 1982. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications, *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-169.
- Perron, P., 1989. The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis, *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- Sachs, J. D., Bajpai, N. ve Ramiah, A., 2002. Understanding regional economic growth in India. *Harvard CID Working Paper*, No: 88.
- Tansel, A. ve Güngör N.D., 1998. Economic growth and convergence: an application to the provinces of Turkey, 1975-1995, *ERC Working Paper No.98/9*, Economic Research Centre, Middle East Technical University.

# THE PERSISTENCE FOR INEQUALITY OF REAL GROSS DOMESTIC PRODUCT PER CAPITA AT PROVINCE LEVEL IN TURKEY: AN OVERVIEW WITH PANEL DATA UNIT ROOT TEST

## ABSTRACT

*This article examined the persistence of real gross domestic product per capita at the province level in Turkey for the period 1975-2001. Departures across cites were appraised in terms of Im-Pesaran-Shin (IPS) panel data unit root test suggested by Im, Pesaran and Shin (2003). In article, it is illustrated that one cannot reject the null hypothesis of unit root. The results indicate a strong form of persistence for real gross domestic product per capita inequality at province level.*

**Key words: Persistence, Panel Data Unit Root Test, Convergence.**

# KİSMİ EN KÜÇÜK KARELER ALGORİTMALARINDAN NIPALS İLE SIMPLS'İN TANITIMI VE BİR UYGULAMA

Elif BULUT\*

Aylin ALIN\*\*

## ÖZET

*Kısmi en küçük kareler (KEKK) yöntemi, aralarında çoklu doğrusal bağlantı bulunan açıklayıcı değişkenler içerisinde, bu değişkenlerdeki değişimin büyük kısmını açıklayacak, dik ve daha az sayıda gizli değişkeni (bileşen) bulmakla ilgilendir. Farklı alanlarda farklı amaçlar doğrultusunda kullanımından dolayı, KEKK için farklı algoritmalar ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmada KEKK için en temel algoritma olan NIPALS, 1993 yılında De Jong tarafından geliştirilen ve yaygın olarak kullanılan SIMPLS algoritmalarına değinilmiş, bir örnek üzerinde uygulama gösterilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Çoklu Doğrusal Bağlantı, Kısmi En Küçük Kareler, NIPALS, SIMPLS.

## 1. GİRİŞ

1960'lı yıllarda Herman Wold tarafından geliştirilen KEKK yöntemlerinin yaygın olarak kullanımına, kimya alanında oğlu Swante Wold tarafından başlanmıştır. Randall (1996)'ın da belirttiği gibi kimya alanında kalibrasyon modellerini kurmak için birçok kimyager tarafından da kullanılan bu yöntem; endüstri, tarım, tıp ve gıda gibi birçok alandada uygulanmaktadır.

KEKK yöntemi, boyut indirgemesi, sınıflama ve regresyon aşamaları gibi birçok aşamayı barındıran çok değişkenli istatistiksel bir yöntemdir. Değişken sayısının gözlem sayısından çok olduğu ve değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı sorununun olduğu durumlarda rahatlıkla kullanılabilen bu yöntem, bağımlı ve açıklayıcı değişkenler matrisi olmak üzere iki veri matrisiyle de ilgilenmektedir. KEKK1 tek bağımlı değişken ve KEKK2 çok bağımlı değişken durumlarında kullanılabilir.

Burada amaç, bağımlı değişkeni tahmin etmeyi sağlayacak, bağımlı ve açıklayıcı değişkenlerdeki birlikte değişimin büyük bir kısmını açıklayacak, açıklayıcı değişkenden

\* Araş. Gör., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., İstatistik Böl., Buca İzmir.

e-posta: elif.bulut@deu.edu.tr

\*\* Yard. Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., İstatistik Böl., Buca İzmir.

e-posta: aylin.alin@deu.edu.tr

daha az sayıda yeni gizli bileşenler bulmaktır. Elde edilen bileşenler aynı zamanda bağımlı değişkendeki değişimi de açıkladığından, yöntem diğer çok değişkenli yöntemlerden ayrılmaktadır.

Modellemede kullanılan bu bileşenler,  $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]$  açıklayıcı değişkenler matrisi ve  $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$  bağımlı değişkenler matrisi olmak üzere  $T = XP$  ve  $U = YC$  eşitlikleri ile elde edilir. Burada  $T$  ve  $P$  sırasıyla  $X$  değişken matrisi için bileşeni ve açıklayıcı değişkenin bileşendeki yükünü ifade eden matrislerdir.  $U$  ve  $C$  ise sırasıyla  $Y$  değişken matrisi için bileşeni ve bağımlı değişkenin bileşendeki ağırlığını ifade eden matrislerdir.

KEKK yinelemeli bir süreçtir. Farklı alanlarda, farklı veri yapıları ile çalışıldığından birçok farklı algoritma geliştirilmiştir. Lindgren ve Rännar (1998)'in çalışmalarında belirttiği gibi; NIPALS, SIMPLS, UNIPAL, SAMPLS ve KERNEL algoritmaları bunlardan birkaçıdır. Çalışmada NIPALS ve SIMPLS algoritmaları kısaca anlatılarak, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Tıp Fakültesi'nden alınan veri kümesine algoritmalar uygulanarak, sonuçlar verilmektedir. Bu çalışmada matrisler büyük, italik ve kalın harf ile vektörler küçük, italik ve kalın harf ile gösterilmiştir. “ $m$ ” simgesi ise matrisin veya vektörün devriğini (transpozunu) göstermektedir.

## 2. NIPALS VE SIMPLS ALGORİTMALARI

### 2.1 NIPALS Algoritması

“Klasik, standart” algoritma olarak da nitelendirilen NIPALS (Non-Linear Iterative Partial Least Squares; Doğrusal olmayan yinelemeli kısmi en küçük kareler) KEKK'nın ilk şeklini oluşturmaktadır ve 1970'lerin başında geliştirilmiştir. NIPALS algoritması farklı yazarlar tarafından ele alınmıştır. Helland (1988), Geladi (1986), Kowalski (1986) ve Höskuldsson (1988), 1980'li yıllarda bu konuda çalışan en önemli isimlerdendir. Bu çalışmada Höskuldsson (1988) tarafından verilen algoritma ele alınmıştır. Algoritmanın başlangıç noktası  $n \times k$  boyutlu  $X$  açıklayıcı değişkenler matrisi ve  $n \times m$  boyutlu  $Y$  bağımlı değişkenler matrisidir. Algoritmaya başlamadan önce farklı ölçümlerden kaynaklanan çeşitliliği ortadan kaldırmak için sıfır ortalama ve birim varyansa sahip olacak şekilde matrisler standartlaştırılır. Bu algoritma yinelemeli bir algoritmadır. Algoritmada yer alan  $l$  indisi yineleme sayısını göstermektedir. Yinelemeler bütün bileşenler elde edilinceye kadar sürmektedir. Bir başka ifade ile  $A$  bileşen sayısı olmak üzere,  $l = 1, 2, \dots, A$ 'dır. İlk yinelemede  $X_1 = X$ ,  $Y_1 = Y$  alınarak algoritma aşağıdaki 12 adım izlenerek çalıştırılır.

1.  $Y$  matrisinin ilk sütunu veya en yüksek varyansa sahip olan sütunu  $u_l$  vektörü olarak tanımlanır.
2.  $X$ 'in,  $Y$ 'nin ilgili bileşeni ( $u$ ) üzerine regresyonundan  $X$  ve  $u$  arasında en büyük kovaryansı sağlayacak  $w$  ağırlık vektörü  $w_l = X'_l u_l / (u'_l u_l)$  eşitliği ile elde edilir.

3.  $\mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$  ile  $\mathbf{w}$  ağırlık vektörü normuna bölünerek boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir.  $\|\mathbf{w}_i\|$ ,  $\mathbf{w}_i$  ağırlık vektörü için normu ifade edip  $\|\mathbf{w}_i\| = \sqrt{\mathbf{w}_i' \mathbf{w}_i}$  ile hesaplanmaktadır.
  4.  $\mathbf{Y}$  değişkenini tahmin etmede kullanılan ve  $\mathbf{t}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{w}_i$  eşitliği ile  $\mathbf{w}$  ağırlıkları ve  $\mathbf{X}$  matrisinin doğrusal birleşiminden oluşan  $\mathbf{t}$  bileşen vektörü tanımlanır.
  5.  $\mathbf{Y}$ 'nin,  $\mathbf{X}$ 'in ilgili bileşeni ( $\mathbf{t}$ ) üzerine regresyonundan  $\mathbf{Y}$  matrisi için ağırlıkları verecek olan  $\mathbf{c}$  vektörü  $\mathbf{c}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{t}_i / (\mathbf{t}_i' \mathbf{t}_i)$  eşitliği ile elde edilir.
  6.  $\mathbf{c}_i / \|\mathbf{c}_i\|$  ile  $\mathbf{c}$  ağırlık vektörü normuna bölünerek boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir.  $\mathbf{c}_i$ 'nin normu  $\|\mathbf{c}_i\| = \sqrt{\mathbf{c}_i' \mathbf{c}_i}$  ile hesaplanır.
  7. Önceki adımda hesaplanan  $\mathbf{c}$  ağırlık vektörü,  $\mathbf{Y}_i \mathbf{c}_i / (\mathbf{c}_i' \mathbf{c}_i)$  bölümüyle  $\mathbf{u}_{yeni}$  bileşen vektörünü tanımlamakta kullanılmaktadır. Elde edilen değerler,  $\mathbf{Y}$  matrisi ile  $\mathbf{c}$  ağırlık vektör değerleri nin doğrusal bir kombinasyonudur.
  8. Yedinci adımda elde edilen  $\mathbf{u}_{yeni}$  bileşen vektörü ile ilk adımda kullanılan  $\mathbf{u}$  vektörü arasında bir yakınsama sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Eğer bu iki değer arasındaki farkın normu  $10^{-6}$  gibi bir değere yakınsıyorsa, algoritma sonraki adımlara devam edilerek bitirilir. Aksi takdirde yedinci adımda elde edilen  $\mathbf{u}_{yeni}$  vektörü, ikinci adımda yerine koyularak tekrar adım adım algoritmaya devam edilir.
  9.  $\mathbf{X}_i' \mathbf{t}_i / (\mathbf{t}_i' \mathbf{t}_i)$  ile  $\mathbf{X}$  değişken matrisinin ilgili bileşeni üzerine regresyonundan  $\mathbf{p}_i$  yük vektörü elde edilir. Bu değerler ilgili temel bileşenin  $\mathbf{X}$  değişken matrisini ne kadar açıkladığını belirlemekte kullanılır. Bir başka ifade ile  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  değişkeninin ilgili bileşen üzerindeki yükünü göstermektedir.
  10.  $\mathbf{Y}_i' \mathbf{u}_i / (\mathbf{u}_i' \mathbf{u}_i)$  ile  $\mathbf{Y}$  değişken matrisinin ilgili bileşeni üzerine regresyonundan  $\mathbf{q}_i$  yük vektörü elde edilir. Bu değerler ilgili temel bileşenin  $\mathbf{Y}$  değişken matrisini ne kadar açıkladığını belirlemekte kullanılır. Bu değer,  $\mathbf{Y}_i$  değişkeninin ilgili bileşen üzerindeki yükünü göstermektedir.
  11. Bileşenler arasında içsel bir ilişki tanımlayan  $b$  katsayısı,  $b = \mathbf{u}_i' \mathbf{t}_i / (\mathbf{t}_i' \mathbf{t}_i)$  ile  $\mathbf{u}$ 'nun  $\mathbf{t}$  üzerine regresyonundan tahmin edilir. Bu sabit bir değerdir ve tahmin etmede önem taşımaktadır.
  12. Son adımda ise  $(l+1)$ . yinelemede kullanılacak olan artık vektörler açıklayıcı değişkenler için  $\mathbf{X}_{(l+1)}$  ve bağımlı değişkenler için  $\mathbf{Y}_{(l+1)}$  sırasıyla  $\mathbf{X}_{l+1} \rightarrow \mathbf{X}_l - \mathbf{t}_l \mathbf{p}_l'$  ve  $\mathbf{Y}_{l+1} \rightarrow \mathbf{Y}_l - b \mathbf{t}_l \mathbf{c}_l'$  eşitlikleri ile elde edilir. Bu matrisler  $l$ . yinelemede kullanılan matrislerin açıklayamadığı değişimlerden oluşan matrislerdir.
- Gösterim ile ifade edilmek istenirse;

$$\begin{array}{ccc}
 X_{(t+1)} & \rightarrow & X_1 - t_l p_l' \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 & & \hat{X}_l \text{ (algoritmadan elde edilen değerlerle tahmin edilen kısım)} \\
 & & \text{Algoritmanın } l \text{ . yinelemesinde kullanılan matris} \\
 \text{Yeni matris (artık değer)} & & 
 \end{array}$$

Aynı işlem  $Y$  değişken matrisi içinde tanımlanmaktadır.

Algoritmaya  $X$  değişken matrisi sıfır matrisi oluncaya kadar başka bir deyişle açıklayıcı değişkenlerinin büyük bir kısmı açıklanuncaya kadar devam edilir. Algoritmanın yineleme sayısı ihtiyaç duyulan bileşen sayısını vermektedir.

## 2.2 SIMPLS Algoritması

De Jong (1993)'un geliştirdiği SIMPLS algoritmanın temeli NIPALS algoritmasına dayanmaktadır. İsmi İngilizce olarak “**S**traightforward **I**mplementation of a **S**tatistically Inspired Modification of PLS Method” dan alan bu algoritma, yaygın olarak kullanılmakta olup, KEKK yönteminin istatistiksel bir uyarlamasıdır.

SIMPLS algoritması ile NIPALS algoritması arasında benzerlikler ve farklılıklar bulunmaktadır. Lindgren ve Rännar (1998)'in ifade ettiği gibi SIMPLS, NIPALS algoritmasına kıyasla daha hızlı, daha az zaman gerektiren ve hafızada daha az yer kaplayan bir algoritmadır. Diğer bir benzerlik ve fark ise De Jong (1993)'un makalesinde de belirttiği gibi bağımlı değişken sayısının bir olduğu durumda algoritmaların aynı sonucu vermesi, bağımlı değişken sayısının birden fazla olduğu durumda ise sonuçlar arasında çok fazla olmayan bir farklılığın mevcut olmasıdır.

NIPALS algoritmasında ağırlık vektörleri hesaplanırken her seferinde  $X$  ve  $Y$  değişkenlerinin azaltılmış veri matrisleri kullanılmaktadır. Bu da faktörlerin yorumlanmasını zorlaştırmaktadır. Çünkü yineleme sayısı ilerledikçe alt yinelemelerde kullanılan azaltılmış veri matrisindeki katkının ne olduğundan şüphe duyulabilmektedir. Bazı  $X$  değişkenleri ilk faktörde yer alırken, diğer değişkenler sonraki faktörlerde kullanılmaktadır. Bu nedenle bileşen ve değişkenler arasındaki ilişki, yükler ( $p$ ) aracılığıyla daha iyi anlatılabilmektedir. SIMPLS algoritmasında ise, bileşenler sıfır ortalamaya sahip  $X$  orijinal veri matrisi üzerinden tanımlanmaktadır.

$$t_l = Xr_l \quad (1)$$

$$u_l = Yc_l \quad l = 1, \dots, A \quad (2)$$

Yukarıdaki eşitliklerde gösterilen değerler, her bir yinelemede elde edilen vektörlerdir. Algoritmanın sonunda bu vektörler matris olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$T = XR \quad (3)$$

$$U = YC \quad (4)$$

SIMPLS algoritması da değişkenler arasındaki kovaryansı en çoklama temeline dayanmaktadır. Bu algorithmada kullanılan  $r$  ve  $c$  ağırlıkları,  $t$  ve  $u$  skor vektörleri arasındaki kovaryansı en çok yapacak şekilde aşağıdaki kısıtlar altında elde edilir.

1.  $r'_l r_l = 1$  ağırlıkların normalize edilmesi.
2.  $c'_l c_l = 1$  ağırlıkların normalize edilmesi.
3.  $t$  skorlarının dikliği. Bir başka ifade ile,  $t'_{l+1} t_l = 0$  koşulunun sağlanması.
4.  $u'_l t_l$  kovaryansının en çoklanması.

SIMPLS algoritmasında  $S = X'Y$  kovaryans matrisine tekil değer ayrıştırması yöntemi uygulanarak,  $l$ . adım için ağırlık vektörleri  $r_l$  ve  $c_l$  elde edilir.  $r_l$  bu ayrıştırmada en yüksek tekil değere karşılık gelen sol tekil vektör iken,  $c_l$  sağ tekil vektördür. Dik  $t$  bileşen vektörleri elde etmek için ilk adımdan sonra ( $l > 1$  için)  $S_l = S_{l-1} - v_l(v'_l S_{l-1})$  matrisi hesaplanarak bu matris üzerinden algoritmaya devam edilir. Ortonormal  $v_l$  vektörü ilk adımda  $v_1 \propto p_1$  şeklinde hesaplanırken,  $l = 2, 3, \dots, A$  için  $v_l \propto p_l - V_{l-1}(V'_{l-1} p_l)$  şeklinde hesaplanmaktadır. Burada  $V_{l-1}$  matrisi,  $(l+1)$ . adıma kadar elde edilen vektörlerden oluşmaktadır. Bir başka ifade ile,  $V_{l-1} = [v_1, v_2, \dots, v_{l-1}]$ 'dir.  $\propto$  simgesi oransallığın yanı sıra ilgili vektörün uzunluğu bir olacak şekilde normalize edilmesini de ifade etmektedir. Bu algorithmada NIPALS algoritmasına karşı önerilen değişiklik  $R$  ağırlıklarının doğrudan hesaplanmasıdır. Bu yolla  $X$  ve  $Y$  matrisleri her bir yinelemede indirgenmemiş olmaktadır.

SIMPLS algoritması aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır. Algorithmada  $l$  indisi NIPALS' ta olduğu gibi yineleme sayısını göstermekte olup  $l = 1, 2, 3, \dots, A$  'dır.

1. Orijinal veri matrisleri üzerinden  $S = X'Y$  kovaryans matrisi tanımlanır ve bu matrise tekil değer ayrıştırması uygulanır. En yüksek tekil değer elde edilir.
2. En yüksek tekil değere karşılık gelen sol tekil vektör  $r_l$ , bir başka ifade ile  $X$  değişkeninin ilgili bileşeni ( $t$ ) için ağırlık vektörü hesaplanır.
3.  $X$  değişkeninin ilgili bileşen değeri  $t_l = Xr_l$  ile orijinal  $X$  matrisi ile bu bileşen için ağırlıkların çarpımından elde edilir.
4.  $t$  bileşeni normuna bölünerek boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir. Yeni  $t_l$  bileşeni  $t_l = t_l / \|t_l\|$  ile elde edilir ve bu eşitlikte  $\|t_l\|$ ,  $\sqrt{t'_l t_l}$  ile hesaplanmaktadır.
5.  $t$  bileşeninin boyu bir olacak şekilde ölçeklendirildiği için  $r_l = r_l / \|t_l\|$  ile ağırlık vektörü  $r$ ,  $t$ 'nin normuna bölünerek, ölçeklendirilen  $t$  bileşen vektörüne göre uyarlanır.

6.  $X$  değişkeninin ilgili bileşeni için,  $X$  değişkeninin bileşen üzerine yükü  $p_l$ ,  $p_l = X't_l$  eşitliği ile hesaplanır.
7. Adım 6'ya benzer olarak  $Y$  değişkeninin ilgili bileşeni için ağırlık değeri  $c_l$ ,  $c_l = Y't_l$  eşitliği ile elde edilir.
8. Bir önceki adımda elde edilen  $c_l$  değeri  $u_l = Yc_l$  eşitliğinde yerine konularak,  $Y$  değişkeninin ilgili bileşen değeri hesaplanır.

9.  $l = 1$  için  $v_1 = p_1$  alınarak dik yükler algoritmaya dahil edilir.

$l > 1$  için ise

$v_l = v_l - V(V'p_l)$  eşitliği ile önceki yüklere dik olacak şekilde  $v$  vektörü elde edilir.

10.  $u_l = u_l - T(T'u_l)$  eşitliği ile de önceki  $t$  değerlerine dik olacak şekilde  $u$  vektörü elde edilir.

11.  $v_l = v_l / \|v_l\|$  ile elde edilen yeni  $v$  yük vektörü normuna bölünerek boyu 1 olacak şekilde ölçeklendirilir.

12. Son adımda ise önceki adımlardan elde edilen değerler  $S_{l+1} = S_l - v_l(v_l'S_l)$  eşitliğinde kullanılarak indirgenmiş kovaryans matrisi elde edilir ve bu değer adım 1'de yerine konularak algoritmaya devam edilir.

### 3. UYGULAMA

Uygulamada kullanılan veriler 'Ondokuz Mayıs Üniversitesi Tıp Fakültesi'nden alınmıştır. Değişkenler 75 hasta için ölçülmüş olup, aşağıda Tablo 1'de verilmiştir. Uygulamada iki bağımlı değişken,  $Y$  matrisi, 15 açıklayıcı değişken,  $X$  matrisi, olarak alınmıştır.

**Tablo 1. Değişkenler tablosu**

Bağımlı Değişkenler	Bağımsız Değişkenler
Yüksek kan basıncı (siskb)	Yaş
Düşük kan basıncı (diaskb)	Boy
	Kilo
	Bme (vücut-kütle endeksi)
	Bç (bel çevresi)
	Kç (kalça çevresi)
	Bko (bel kalça oranı)
	Lpa (lipoprotein a)
	Trigliserid (kandaki yağ miktarı, mg/dl)
	Totkol (toplam kolesterol, mg/dl)
	Ldl (kötü huylu kolesterol, mg/dl)
	Hdl (iyi huylu kolesterol, mg/dl)
	Glikoz (mg/dl)
	İnsülin (ulU/ml)
	Homo (mg/dl)

Fazla sayıda açıklayıcı değişken olması değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı probleminin ortaya çıkmasını kolaylaştırmaktadır. Açıklayıcı değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı problemini saptamak için VIF (Variance Inflation Factor) varyans şişirme faktör değerlerine bakılmıştır. VIF değerinin 10'dan büyük olması, değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı probleminin olduğunu göstermektedir. VIF hakkında daha ayrıntılı bilgi için bakınız "Rawlings (1988)". Çalışmada bazı açıklayıcı değişkenler için VIF değerleri boy için 13.69, bç için 500 ve insülin için 55.56 olarak hesaplanmıştır. Bu değerler, açıklayıcı değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı olduğunun bir göstergesidir.

Çalışmanın amacı, açıklayıcı değişkenler arasındaki çoklu doğrusal bağlantı problemini ortadan kaldırmak ve hem açıklayıcı değişkenlerdeki değişimi, hem de bağımlı değişkendeki değişimi açıklayacak az sayıda bileşenleri elde etmek için kullanılan KEKK algoritmalarından NIPALS ve SIMPLS algoritmalarını uygulamak, analizler sonucunda elde edilen değerlerin benzerliklerini ve farklılıklarını ortaya koymaktır. Algoritmalar MATLAB programında yazılarak sonuçlar hesaplatılmıştır. Algoritmalara ait MATLAB kodları ekte yer almaktadır.

### 3.1 NIPALS Algoritması

Algoritma sonucunda elde edilen değerler Tablo 2-Tablo 9'da verilmektedir.

**Tablo 2.  $X$  değişken matrisi için bileşen matrisi ( $T$ )**

Hasta	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	$t_{13}$	$t_{14}$	$t_{15}$
1	0.0386	-0.1045	-0.0224	...	0.1134	-0.0191	0.0015
2	0.0197	-0.0285	-0.1182	...	0.0503	-0.0054	-0.1169
3	0.2036	0.1603	-0.0805	...	0.1637	-0.0553	-0.1350
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
73	-0.1241	0.2232	-0.0234	...	0.1569	-0.1055	0.0921
74	-0.1457	-0.0789	0.0291	...	0.0938	-0.1787	-0.2559
75	-0.1443	-0.0909	-0.0657	...	0.0474	-0.0496	0.0240

**Tablo 3.  $Y$  değişken matrisi için bileşen matrisi ( $U$ )**

Hasta	$u_1$	$u_2$	$u_3$	...	$u_{13}$	$u_{14}$	$u_{15}$
1	-0.0739	-0.4086	-0.0898	...	-0.1447	-0.2206	-0.2943
2	0.9376	0.6809	0.6188	...	0.9141	-0.6283	0.5569
3	4.2439	2.6269	1.8934	...	2.1983	-0.0612	1.9070
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
73	0.7980	1.7232	0.8776	...	0.9779	-0.0521	0.8027
74	-2.1875	-1.0830	-0.7753	...	-0.4710	-0.1517	-0.5122
75	-0.6249	0.4090	0.6395	...	1.0173	-0.2066	0.8360

Tablo 2 ve Tablo 3’de verilen  $t_a$  ve  $u_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 15$ , vektörleri yeni bileşen matrislerini oluşturmaktadır. Tablo 2 ile verilen  $t_a$  bileşenleri  $X$  değişken matrisini modellemede ve  $Y$ ’yi tahmin etmede kullanılmaktadır.

**Tablo 4.  $T$  için ağırlık matrisi ( $W$ )**

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	...	$w_{13}$	$w_{14}$	$w_{15}$
Yaş	0.0850	0.1582	-0.2183	...	0.0014	-0.0166	0.0022
Boy	-0.0488	0.1289	0.0626	...	0.1633	-0.0571	-0.0551
Kilo	0.3900	0.0152	0.0070	...	-0.4550	0.1309	0.2035
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
Glikoz	0.2780	0.2156	0.1067	...	-0.0329	0.0452	0.0060
İnsulin	0.2814	-0.1444	0.3769	...	-0.3092	0.0259	0.0160
Homo	0.2831	-0.1806	0.1830	...	0.3283	-0.0532	-0.0209

**Tablo 5.  $U$  için ağırlık matrisi ( $C$ )**

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$
Siskb	0.7264	0.8086	0.8980	...	0.5554	0.8209	0.8439
Diaskb	0.6873	0.5884	0.4401	...	0.8316	-0.5711	0.5365

Tablo 4 ve Tablo 5 ile verilen ağırlık matrisleri  $T = XW$  ve  $U = YC$  eşitlikleri ile bileşenleri oluşturmakta kullanılmaktadır.  $w_a$  ve  $c_a$  ağırlık vektörleri  $t_a$  ve  $u_a$  bileşenlerinin yorumlanmasını sağlamaktadır.  $w_{ia}$  ve  $c_{ja}$  katsayıları,  $i = 1, 2, \dots, 15$  ve  $j = 1, 2$  için değişkenlerin bileşenlerini oluşturmak için nasıl bir araya geldiklerini göstermektedir.  $t_a$  bileşenine katkısı yüksek olan  $X_i$  değişkenine ait  $w_{ia}$  değeri yüksek olacaktır.  $t_a$  bileşeninin  $Y_i$ ’yi modellemedeki önemi ise  $c_{ja}$  ile ölçülmektedir. Eğer  $t_a$  bileşeni  $Y_i$ ’yi modellemede önemli ise  $c_{ja}$  değeri yüksek olacaktır. Örneğin; Tablo 4’e bakıldığında kilo değişkeninin 13. bileşene katkısı -0.4550 katsayısı ile daha yüksek iken, insülin ve homo değişkenlerinin ilgili bileşene katkılarının eşit olduğu söylenebilir. Ayrıca yaş değişkeninin de ilgili bileşene katkısı oldukça düşüktür. Tablo 5’e bakıldığında ise, 3. bileşenin siskb değişkenini modellemedeki katkısının diaskb değişkenini modellemedeki katkısına göre daha fazla olduğu görülmektedir.

**Tablo 6.  $X$  değişken matrisini açıklayan bileşenler için yük matrisi ( $P$ )**

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$
Yaş	1.2407	1.6976	-4.1808	...	0.0004	-0.0059	0.0007
Boy	-1.3673	0.8199	3.0663	...	0.0947	-0.0168	-0.0167
Kilo	7.9740	0.1404	0.5088	...	-0.2703	0.0342	0.0617
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
Glikoz	4.9478	0.9437	0.1482	...	-0.0182	0.0154	0.0018
İnsulin	6.2710	-1.9534	3.3867	...	-0.1687	0.0081	0.0048
Homo	6.4084	-1.6746	3.2505	...	0.1795	-0.0174	-0.0063

Yük matris değerleri, bileşenlerin açıklayıcı değişkendeki değişimi açıklamaya olan katkılarından oluşmaktadır.  $p_a$  değerleri açıklayıcı değişkende var olan değişimin en iyi özetleyicisidirler.  $X_i$ 'yi modellemede önemli olan  $t_a$  vektörüne ait  $p_{ia}$  değeri yüksek olacaktır.

Elde edilen bileşenlerin tek tek ve birikimli olarak değişkenlerdeki değişimi açıklama yüzdeleri merak edilebilir. Açıklayıcı değişkendeki değişimi açıklama yüzdelerini bulmak için  $P'P$  matrisinin köşegen değerleri  $SS_X$ 'e bölünmektedir.  $P'P$  matrisin köşegen değerleri aşağıda verilmektedir.

**Tablo 7.  $P'P$  matrisinin köşegen değerleri**

430.9972	54.0879	143.4910	63.4381	77.1674	57.0910	49.9939
58.4382	43.3200	57.3475	64.4502	9.6541	0.3070	0.1247
						0.0922

Açıklayıcı değişkenler için kareler toplamını gösteren  $SS_X$ ,  $X'X$  matrisinin iz değerine eşittir ve yapılan hesaplama sonucunda bu değer 1110 olarak elde edilmiştir. Bileşenlerin açıklayıcı değişkenlerdeki değişimi açıklama yüzdeleri aşağıda Tablo 8'de verilmektedir.

**Tablo 8. Bileşenlerin açıklayıcı değişkendeki değişimi açıklama yüzdeleri**

Bileşen	$X$ 'deki değişimi açıklama yüzdesi	Açıklanan değişimin birikimli yüzdesi
1	38.83	38.83
2	4.87	43.70
3	12.93	56.63
4	5.71	62.34
5	6.95	69.29
6	5.15	74.44
7	4.50	78.94
8	5.27	84.21
9	3.90	88.11
10	5.17	93.28
11	5.80	99.08
12	0.87	99.95
13	0.03	99.98
14	0.01	99.99
15	0.01	100.0

Tablodan da görüleceği gibi 15 açıklayıcı değişkenden, NIPALS algoritması sonucunda elde edilen 11 bileşen  $X$ 'deki değişimin %99'unu açıklamaktadır. 11. bileşen ise tek başına açıklayıcı değişkendeki değişimin %5.80'ini açıklamaktadır. Bu bileşenden sonraki bileşenlerin değişimi açıklama yüzdeleri yok denilebilecek kadar azdır.

Aynı tablo bağımlı değişken için de verilebilir. Bağımlı değişkendeki değişimi açıklama yüzdeleri  $C'C$  matrisinin köşegen değerlerinin  $SS_Y = iz(Y'Y) = 148$ 'e bölünmesi ile elde edilir.  $SS_Y$  bağımlı değişkenler için kareler toplamını göstermektedir. Hesaplamalar sonucunda elde edilen açıklama yüzdeleri Tablo 9'da verilmektedir.

**Tablo 9. Bileşenlerin bağımlı değişkendeki değişimi açıklama yüzdeleri**

Bileşen	Y'deki değişimi açıklama yüzdesi	Açıklanan değişimin birikimli yüzdesi
1	38.67	38.67
2	8.55	47.22
3	0.59	47.81
4	0.58	48.39
5	0.28	48.67
6	0.22	48.89
7	0.39	49.28
8	0.72	50.00
9	0.79	50.79
10	0.13	50.92
11	0.18	51.10
12	0.99	52.09
13	0.37	52.46
14	0.31	52.77
15	0.08	52.85

Tablo 9'dan da görüldüğü gibi 15 değişkenden elde edilen bileşenlerin 11 tanesi  $Y$ 'deki değişimin %51'ini açıklamaktadır. Bu değişim 15 bileşen için yaklaşık olarak %53 olarak elde edilmiştir.

### 3.2 SIMPLS Algoritması

SIMPLS algoritması sonucunda elde edilen değerler, Tablo 10-Tablo 15'de verilmektedir.

**Tablo 10.  $X$  değişken matrisi için bileşen matrisi ( $T$ )**

Hasta	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	$t_{13}$	$t_{14}$	$t_{15}$
1	0.0386	-0.1046	-0.0256	...	0.1133	0.0191	-0.0017
2	0.0198	-0.0286	-0.1180	...	0.0503	0.0064	0.1168
3	0.2036	0.1603	-0.0795	...	0.1637	0.0565	0.1345
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
73	-0.1241	0.2233	-0.0194	...	0.1563	0.1055	-0.0929
74	-0.1457	-0.0789	0.0298	...	0.0933	0.1812	0.2547
75	-0.1443	-0.0909	-0.0639	...	0.0474	0.0499	-0.0244

**Tablo 11.  $Y$  değişken matrisi için bileşen matrisi ( $U$ )**

Hasta	$u_1$	$u_2$	$u_3$	...	$u_{13}$	$u_{14}$	$u_{15}$
1	-0.5590	-1.4540	-0.0909	...	-0.1069	0.1534	0.0959
2	7.0931	2.4214	0.5493	...	0.6682	0.4210	-0.1863
3	32.1060	9.3446	1.7319	...	1.6106	0.0204	-0.6280
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
73	6.0368	6.1301	0.8059	...	0.7156	0.0270	-0.2642
74	-16.5490	-3.8528	-0.7154	...	-0.3473	0.1100	0.1683
75	-4.7277	1.4544	0.5791	...	0.7448	0.1314	-0.2761

Bu algoritma, Bölüm 2.1'de verilen NIPALS algoritmasından farklı olarak  $\boldsymbol{w}$  ağırlık vektörü yerine  $\boldsymbol{r}$  ile gösterilen dikleştirilmiş ağırlık vektörü ile çalışmaktadır. Her adımda  $\boldsymbol{w}$  ağırlık vektörü azaltılmış  $\boldsymbol{X}$  matrisi üzerinden hesaplanırken,  $\boldsymbol{r}$  vektörü orijinal  $\boldsymbol{X}$  matrisi üzerinden hesaplanmaktadır. NIPALS algoritmasında da  $\boldsymbol{w}$  ağırlık vektörü yerine  $\boldsymbol{r}$  ağırlık vektörü hesaplanabilmektedir (Bakınız Wold vd., 2001).

**Tablo 12.**  $\boldsymbol{T}$  için ağırlık matrisi ( $\boldsymbol{R}$ )

	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$	$\boldsymbol{r}_3$	...	$\boldsymbol{r}_{13}$	$\boldsymbol{r}_{14}$	$\boldsymbol{r}_{15}$
Yaş	0.0850	0.1693	-0.1349	...	-0.0023	-0.0081	-0.0029
Boy	-0.0488	0.1202	0.1165	...	0.1821	0.0551	0.0180
Kilo	0.3900	0.0747	0.0406	...	-0.5937	-0.1471	-0.0768
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
Glikoz	0.2781	0.2549	0.1702	...	-0.0030	-0.0187	-0.0076
İnsulin	0.2815	-0.0994	0.3190	...	-0.1110	-0.0674	0.0009
Homo	0.2831	-0.1351	0.1244	...	0.1225	0.0704	0.0015

$\boldsymbol{X}$  matrisi için ağırlık ve yük  $\boldsymbol{R}$  ve  $\boldsymbol{P}$ , Tablo 12 ve Tablo 13'te verilmektedir.  $\boldsymbol{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$ , ağırlık değerleri orijinal  $\boldsymbol{X}$  değişkenlerinin  $\boldsymbol{t}_i$  bileşenleri üzerine ağırlığını belirtmektedir.  $\boldsymbol{r}_a$  vektörleri orijinal  $\boldsymbol{X}$  matrisi üzerinden hesaplandığı için,  $\boldsymbol{w}_{ia}$  değerleri yerine  $\boldsymbol{r}_{ia}$  değerlerinin kullanılması ilgili değişkenin  $\boldsymbol{t}_a$  bileşeni üzerine etkisini yorumlamada kolaylık sağlamaktadır.

**Tablo 13.**  $\boldsymbol{X}$  değişken matrisini açıklayan bileşenler için yük matrisi ( $\boldsymbol{P}$ )

	$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$	...	$\boldsymbol{p}_{13}$	$\boldsymbol{p}_{14}$	$\boldsymbol{p}_{15}$
Yaş	1.2407	1.6940	-4.2186	...	0.0008	0.0170	-0.0007
Boy	-1.3673	0.8250	3.1576	...	0.0934	0.0117	0.0166
Kilo	7.9740	0.1419	0.5407	...	-0.2696	-0.0389	-0.0613
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
Glikoz	4.9478	0.9393	0.0282	...	-0.0213	-0.0194	-0.0017
İnsulin	6.2710	-1.9504	3.4267	...	-0.1687	-0.0008	-0.0047
Homo	6.4084	-1.6726	3.2649	...	0.1792	0.0308	0.0061

NIPALS algoritmasındaki benzer olarak SIMPLS algoritması sonucunda da bulunan bileşenlerin bağımlı ve açıklayıcı değişkenlerdeki değişimi açıklama yüzdeleri hesaplanabilir. Bu değerler, NIPALS algoritmasında olduğu gibi hesaplanmaktadır.

**Tablo 14. Bileşenlerin açıklayıcı değişkendeki değişimi açıklama yüzdeleri**

Bileşen	X'deki değişimi açıklama yüzdesi	Açıklanan değişimin birikimli yüzdesi
1	38.83	38.83
2	4.86	43.69
3	12.94	56.63
4	5.74	62.37
5	6.94	69.31
6	5.73	75.04
7	4.93	79.97
8	4.40	84.37
9	2.55	86.92
10	4.60	91.52
11	8.00	99.52
12	0.43	99.95
13	0.03	99.98
14	0.01	99.99
15	0.01	100.0

**Tablo 15. Bileşenlerin bağımlı değişkendeki değişimi açıklama yüzdeleri**

Bileşen	Y'deki değişimi açıklama yüzdesi	Açıklanan değişimin birikimli yüzdesi
1	38.67	38.67
2	8.55	47.22
3	0.59	47.81
4	0.58	48.39
5	0.28	48.67
6	0.08	48.75
7	0.24	48.99
8	0.47	49.46
9	1.10	50.56
10	0.36	50.92
11	0.08	51.00
12	1.09	52.09
13	0.37	52.46
14	0.31	52.77
15	0.08	52.85

Tablo 10 sonuçlarına bakıldığında, daha öncede bahsedildiği gibi  $t_1$  bileşen değerlerinin NIPALS algoritması ile aynı ve  $t_2, \dots, t_{15}$  değerlerinden ise çok da büyük olmayan farklılıklar olduğu görülmektedir. Aynı yorum Tablo 12 ve Tablo 13 ile verilen ağırlık ve yük değerleri içinde geçerlidir. Bileşenlerin değişimi açıklama yüzdeleri incelendiğinde ise sonuçların genel olarak NIPALS algoritması ile yakın hatta aynı olduğu söylenebilir.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

KEKK, açıklayıcı değişkenin gözlem sayısından çok olduğu durumda veya açıklayıcı değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı olduğu durumda kullanılabilen bir yöntemdir. Burada amaç açıklayıcı değişkeni açıklayan az sayıda bileşeni seçerken bağımlı değişkeni de en iyi şekilde tahmin etmektir. Uygulamada kullanılan veri kümesinde açıklayıcı değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı olduğundan bu yöntem tercih edilmiştir.

Bu çalışmada kısaca KEKK yönteminde bileşenleri elde etmek için kullanılan NIPALS ve SIMPLS algoritmaları arasındaki benzerlik ve farklılıklar anlatılarak, bir örnek üzerinde uygulaması yapılmıştır. Her iki algoritma da  $X'Y$  kovaryans matrisini en çoklamaya dayanmaktadır. Fakat NIPALS algoritması bileşenleri  $X$  ve  $Y$  veri matrislerini indirgeyerek elde ederken, SIMPLS algoritması  $S = X'Y$  kovaryans matrisini indirgeme temeline dayanmaktadır. Uygulama sonuçlarına bakıldığında her iki algoritma sonucunda elde edilen ilk 11 bileşen açıklayıcı ve bağımlı değişkenlerdeki değişiminin sırası ile %99 ve %51'ini açıklamaktadır. Bu iki algortmada aralarında çoklu doğrusal bağlantı olan 15 açıklayıcı değişken, açıklayıcı değişkenlerdeki değişimin neredeyse tamamını ve bağımlı değişkendeki değişimin yarısını açıklayacak şekilde aralarında çoklu doğrusal bağlantı problemi olmayan 11 bileşene indirgenmektedir. Tablolar incelendiğinde, her iki algoritma sonucunda ilk bileşen için elde edilen değerlerin aynı olduğu, diğer bileşenler ( $a > 2$ ) için ise az da olsa bir farklılığın mevcut olduğu görülmektedir. SIMPLS algoritmasında  $c$  vektörünün boyu 1 olacak şekilde ölçeklendirilmediğinden bağımlı değişken için elde edilen bileşen değerleri NIPALS'dan farklı çıkmaktadır.

#### 5. KAYNAKLAR

De Jong, S., 1993. SIMPLS: An alternative approach to partial least squares regression. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 18, 251-263.

Geladi, P., Kowalski, R., 1986. Partial least squares regression: A tutorial. *Analytica Chimica Acta* 185, 1-17.

Helland, I. S., 1988. On the structure of partial least squares regression. *Communications in Statistics* 17(2), 581-607.

Höskuldsson, A., 1988. PLS regression methods. *Journal of Chemometrics* 2, 211- 228.

Lindgren, F., Rännar, S., 1998. Alternative partial least-squares (PLS) algorithms. *Perspectives in Drug Discovery and Design* 12/13/14, 105-113.

Randall, D. Tobias., 1996. An introduction to partial least squares regression. SAS Institute Inc., Cary, NC. <http://support.sas.com/techsup/technote/ts509.pdf>, 11 Şubat 2008.

Rawlings, J. O., 1988. Applied regression analysis: A research tool. Cole Advanced Books&Software. California.

Wold, S., Sjostrom, M., Eriksson, L., 2001. PLS-regression: A basic tool of chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 58, 109-130.

## INTRODUCTION TO PARTIAL LEAST SQUARES ALGORITHMS NIPALS AND SIMPLS AND AN APPLICATION

### ABSTRACT

*Partial least squares (PLS) is used for obtaining the smallest number of orthogonal latent variables (component) that explain the great amount of variation in the original independent variables which have multicollinearity. Since it is applicable to various disciplines different algorithms have been developed for PLS. In this study, NIPALS which is the first and basic algorithm of PLS and SIMPLS developed by De Jong in 1993 will be described and illustrated on an health data set.*

**Key words:** *Multicollinearity, Partial Least Squares, NIPALS, SIMPLS.*

## 6. EKLER

### Ek 1. NIPALS Algoritması için MATLAB Kodu

[X]=x;	Açıklayıcı değişkenler matrisi tanımlanır.
[Y]=y;	Bağımlı değişkenler matrisi tanımlanır.
hata2=1;	Dış döngü ve birikimli varyans açıklama başlangıç değerleri tanımlanır.
tekrar=0;	
cumvarx=0;	
cumvary=0;	
ictekrar=[];	Açıklayıcı değişkenler için $X'X$ varyans-kovaryans matrisi oluşturulur.
SSX=X'*X;	
SSY=Y'*Y;	Bağımlı değişkenler için $Y'Y$ varyans-kovaryans matrisi oluşturulur.
while hata2>10^-6	Y matrisinin ilk sütunu u vektörü olarak alınır. Dış döngüdeki yinelemeyi artırır.
var(x)=0	
u=Y(:,1);	İç döngü için başlangıç değeri (u vektörlerinin yakınsaması ile ilgili olan döngü)
tekrar=tekrar+1;	
hata=1;	İç döngüdeki yinelemeyi artırır.
tekrar2=0;	
while hata>10^-6	X matrisinin ilgili bileşeni için ağırlık vektörü oluşturulur.
tekrar2=tekrar2+1;	
w=X'*u/(u'*u);	Ağırlık vektörü boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir.
w=w/norm(w);	
t=X*w;	X matrisi için bileşen vektörü elde edilir.
t=t/norm(t);	
c=Y'*t/(t'*t);	Bileşen vektörü boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir.
c=c/norm(c);	
u_yeni=Y*c/(c'*c);	Y matrisinin ilgili bileşeni için ağırlık vektörü oluşturulur.
d=u-u_yeni;	
hata=norm(d);	Ağırlık vektörü boyu bir olacak şekilde ölçeklendirilir.
u=u_yeni;	
end;	Y matrisi için bileşen vektörü elde edilir.
ictekrar=[ictekrar tekrar2];	
p=X'*t/(t'*t);	İlk adımdaki u vektörü ile elde edilen u vektörü arasındaki fark hesaplanır.
q=Y'*u/(u'*u);	
b=u'*t/(t'*t);	Fark vektörünün boyu hesaplanır.
X_yeni=X-(t*p);	
Y_yeni=Y - b*t*c';	Elde edilen yeni u vektörü u vektörü olarak alınır.
hata2=sum(sum(abs(X_yeni)));	
X=X_yeni;	X'in ilgili bileşeni için yük vektörü hesaplanır.
Y=Y_yeni;	
varx=(p'*p)/trace(SSX);	Y'nin ilgili bileşeni için yük vektörü hesaplanır.
	Bileşenler arası içsel ilişkiyi tanımlayan b katsayısı hesaplanır.
	X matrisi için artık değer matrisi hesaplanır.
	Y matrisi için artık değer matrisi hesaplanır.
	Yeni artık değer matrisi X matrisi olarak alınır.
	Yeni artık değer matrisi Y matrisi olarak alınır.
	Her bileşenin açıklayıcı değişkenlerin varyansını açıklama yüzdeleri elde edilir.

```

vary=(b*b)/trace(SSY)
u_lar(:,tekrar)=u;
t_lar(:,tekrar)=t;
b_lar(:,tekrar)=b;

c_lar(:,tekrar)=c;
w_lar(:,tekrar)=w;
q_lar(:,tekrar)=q;
varxpercler(:,tekrar)=varx;

varypercler(:,tekrar)=vary;

cumvarperxler(:,tekrar)=cumvarx;

cumvarperyler(:,tekrar)=cumvary;

end;
u_lar
t_lar
b_lar
p_lar
c_lar
w_lar
q_lar
varxpercler
varypercler
cumvarperxler
cumvarperyler
tekrar
ictekrar

```

Her bileşenin bağımlı değişkenlerin varyansını açıklama yüzdeleri elde edilir.

Elde edilen vektörler ilgili matrislere atanır.  $p\_lar(:,tekrar)=p;$

Elde edilen vektörler ilgili matrislere atanır.

Her bir bileşen için açıklayıcı değişkenlerin varyansı açıklama yüzdeleri matrise atanır.

Her bir bileşen için bağımlı değişkenlerin varyansı açıklama yüzdeleri matrise atanır.

Tüm bileşenlerin açıklayıcı değişkenlerin varyansı açıklamada birikimli açıklama yüzdeleri matrise atanır.

Tüm bileşenlerin bağımlı değişkenlerin varyansı açıklamada birikimli açıklama yüzdeleri matrise atanır.

Matrisler yazdırılır.

Açıklama yüzdeleri yazdırılır.

Algoritma yineleme sayısını verir.  
u vektörlerinin birbirine yakınsaması ile ilgili olan iç döngüdeki toplam yineleme sayısını verir.

## Ek 2. SIMPLS Algoritması için MATLAB Kodu

[X]=x;	Açıklayıcı değişkenler matrisi tanımlanır.
[Y]=y;	Bağımlı değişkenler matrisi tanımlanır.
S=X'*Y;	X'Y varyans-kovaryans matrisi oluşturulur.
SSX=X'*X;	Açıklayıcı değişkenler için X'X varyans-kovaryans matrisi oluşturulur.
SSY=Y'*Y;	Bağımlı değişkenler için Y'Y varyans-kovaryans matrisi oluşturulur.
cumvarx=0;	} Birikimli varyans açıklama başlangıç değeri tanımlanır.
cumvary=0;	
for a=1:15	
[r,s,c]=svds(S,1);	X'Y matrisinin özdeğer ve özvektörü hesaplatılır.
t=X*r;	X matrisi için bileşen vektörü elde edilir.
t=t-mean(t);	Bileşen vektör değerleri ortalamasından çıkarılarak merkezileştirilir.
t=t/norm(t);	Bileşen vektörü normuna bölünerek ölçeklendirilir.
r=r/norm(t);	Ağırlık vektörü bileşen vektörünün normuna bölünerek ölçeklendirilir.
p=X*t;	Bileşen için yük vektörü elde edilir.
c=Y*t;	Y matrisinin ilgili bileşeni için ağırlık vektörü oluşturulur.
u=Y*c;	Y matrisi için bileşen vektörü elde edilir.
v=p;	
varx=(p'*p)/trace(SSX);	Bileşenlerin açıklayıcı değişkenlerin varyansını açıklama yüzdeleri elde edilir.
vary=(c'*c)/trace(SSY);	Bileşenlerin bağımlı değişkenlerin varyansını açıklama yüzdeleri elde edilir.
if a>1	
v=v-V*(V'*p);	} v vektörü önceki yük vektörüne ve u vektörü önceki t vektörlerine dik olacak şekilde tanımlanır.
u=u-T*(T'*u);	
end;	
v=v/norm(v);	v vektörü normuna bölünerek ölçeklendirilir.
S=S-v*(v'*S);	S matrisi indirgenir.
R(:,a)=r; T(:,a)=t;	} Elde edilen vektörler ilgili matrislere atanır.
P(:,a)=p; C(:,a)=c;	
U(:,a)=u; V(:,a)=v;	
varxpercler(:,a)=varx;	Her bir bileşen için açıklayıcı değişkenlerdeki varyansı açıklama yüzdeleri matrise atanır.
varypercler(:,a)=vary;	Her bir bileşen için bağımlı değişkenlerdeki varyansı açıklama yüzdeleri matrise atanır.
cumvarperxler(:,a)=cumvarx;	} Birikimli varyans açıklama yüzdeleri matrise atanır.
cumvarperyler(:,a)=cumvary;	
end;	
varxpercler;	} Açıklama yüzdeleri yazdırılır.
varypercler;	
cumvarperxler;	
cumvarperyler;	

## A REVIEW ON THE RIDIT ANALYSIS

İsmet DOĞAN\*

Nurhan DOĞAN\*\*

### ABSTRACT

*Appropriate methods for analysis of ordinal data, though familiar to statisticians are less well known to practicing scientists and clinicians. Consequently, treatment of ordinal data has been inconsistent, with some investigators analyzing ordinal ratings as if they were true quantitative measurements yielding means and standard errors and others treating similar data as purely nominal categories, ignoring even the ordered nature of the responses. Ridit Analysis is a statistical method for comparing ordinal-scale responses. It was introduced by Bross as a means of comparing ordinal scale responses such as degree of injury, dissatisfaction, preference or agreement. Since then, his technique has found application in such fields as epidemiology, questionnaire design, biomedicine and psychology. The Ridit score does not require a normal distribution and preserves differences present in the (ordinal) data. It can be applied to nominal, interval and ratio data as well. The aim of this study is to introduce this method to the researchers. For this aim a simulated data was used.*

**Key words: Ridit Analysis, Ordinal Data.**

---

\*Assoc. Prof., Afyon Kocatepe University, Medicine Faculty, Department of Biostatistics, Afyonkarahisar.  
e-mail: [idoğan@aku.edu.tr](mailto:idoğan@aku.edu.tr)

\*\*Assist. Prof., Afyon Kocatepe University, Medicine Faculty, Department of Biostatistics, Afyonkarahisar.  
e-mail: [ndogan@aku.edu.tr](mailto:ndogan@aku.edu.tr)

## 1. INTRODUCTION

In many scientific studies in the biological and behavioral sciences the scientist has to work with a response variable which falls in the “borderland” between dichotomous classifications (e.g. “lived-dead”, “yes-no”) and refined measurement systems. Sometimes the response variable is a subjective scale (such as minor, moderate, severe). At other times the response variable takes numerical values but the measurement system is heavily dependent on the quality of experimental material or the technical skill of the scientist. These “borderland” response variables may not be adequately analyzed by the chi-square family of statistical methods and at the same time the t-test family of techniques may not be appropriate. In this situation Ridit Analysis may serve as a “missing link” between the two traditional families of statistical methods (Bross, 1958).

Because effectiveness has been recorded as a dichotomous variable, methods designed for one nominal and one ordinal variable may be just as effective as those designed for two ordinal variables. One such method is Ridit Analysis (Lewis and Baldwin, 1997).

Ridit Analysis is a statistical method for comparing ordinal-scale responses. It was introduced by Bross as a means of comparing ordinal scale responses such as degree of injury, dissatisfaction, preference or agreement. Since then, his technique has found application in such fields as epidemiology, questionnaire design, biomedicine and psychology (Beder and Heim, 1990). For example, Ridit Analysis was first applied in dental research to the comparative study of marginal fracture of amalgam restoration, with fracture graded on a five point or a six point ordered scale by Fleiss and etc. (Fleiss et al., 1979).

Ridit means ‘Relative to an Identified Distribution’ and is originally developed and applied by Bross for the analysis of ordinal data. The Ridit score does not require a normal distribution and preserves differences present in the (ordinal) data. It can be applied to nominal, interval and ratio data as well. Ridit Analysis illustrates the relative position of the score of a particular group against an identified distribution of a reference group. According to Bross, the normal value of a Ridit score is between 0 and 1 (Goossen, 2001).

The name Ridit has its origins with the probit and logit, the “it” meaning type of transformation. Where probits relate to a theoretical distribution (the normal distribution), Ridits relate to an observed, empirical distribution, **R**elative to an **I**dentified **D**istribution, that is, based on the observed distribution of a variable for a set of observations (Doyle and Dorling, 2002).

The aim of this study is to introduce this method to the researchers in Turkey.

## 2. MATERIALS AND METHODS

In general, Bross proposed a method for assigning quantitative values to ranked categorical data. His assignment function is as follows:

Let  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , denote the empirical proportion of  $N$  items which fall into the  $i$  th ranked category when there are  $k$  categories; then

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{j<i} p_j - \sum_{j>i} p_j \right) + 0.5 \quad (1)$$

is the value (called the Ridit value) assigned to category  $i$  (Brockett and Levine, 1977).

Although standard numeric and statistical methods suffice for quantitative data, ordinal data pose special problems: without further assumptions, they generate no measured amounts appropriate for numeric analysis (Donaldson, 1988).

The first step in Ridit Analysis involves the choice of an identified distribution. For this purpose, several alternatives may be offered to the practitioner. The choice of the identified distribution is the critical stage in Ridit Analysis as it forms the baseline of subsequent studies. For example, if the aim is to assess the preference of a set of products in comparison with a product that has a historical role (current product, competing product, etc.) then the distribution function associated with the latter product may be chosen as a reference distribution. The analysis will therefore focus on how products differ from this standard product. Alternatively, if no reference product emerges, the distribution function representative of the pooled data may be considered as an identified distribution (Pouplard et al., 1997).

The procedure is as follows: from a reference population with the same categories one determines a "Ridit" or score for each category. This score for each category is the percentile rank of an item in the reference population and is equal to the number of items in all lower categories plus one-half the number of items in the subject category, all divided by the population size. Once the Ridits for each category have been determined, they are taken as values of a dependent variable for the other (comparison) groups and the usual normal distribution family of statistics is applied (e.g., means, standart deviation, etc.) (Flora, 974).

Ridits for each category of the reference group are calculated as the proportion of cases below the category plus one half the proportion of cases in the category. Ridits are surrogates for the cumulative probabilities that would be observed if the response could be measured on a continuous scale. To evaluate a variable in samples from other populations using the same response scale, each category is assigned the corresponding Ridit from the reference group as a numeric score (each 'mild' response would receive a numeric score of 0.10, etc.). These scores are then treated as ordinary numbers to compute a 'mean Ridit' for each comparison group. This is the procedure that should be followed to compare study results against known norms. With experimental data, however, the 'reference group' is unknown, and one of the groups must be selected as the reference. Although the choice is

statistically arbitrary, it is usual to consider a ‘control’ or ‘treatment as usual’ group, if one exists in the study, as the reference. Mean Ridits can then be obtained for all comparison groups relative to the chosen reference condition (To calculate standard errors and confidence intervals, it is also necessary to compute Ridits for the comparison groups as well as the reference group), (Donaldson, 1988).

As an example of the method for calculating the Ridit values with one dependent variable was presented in detail with computation scheme in Table 1. In column A, it was given the frequency distribution for the 264 patients. Column B is simply the frequencies in column A divided by 2 so that we have one-half of column A. Column C is a cumulative frequency count based on column A. Column D, which is the sum of columns B and C, gives us the needed cumulative frequencies plus one-half the frequency of the particular category of interest. Finally, in column E, the Ridit value is computed by dividing the entry in column D by N, the total number of patients in this sample. The values in column E are the Ridit values for the particular categories. Column F is a check column, which is obtained by multiplying column A by column E. This is the computation one performs in order to calculate the average Ridit for a particular class of interest and is a check in this instance because the Ridit value for the reference class should be equal to 0.50 (Norman, 1969).

**Table 1. An Example for Ridit Computation**

Groups	A Frequency	B ½ Column A	C Cumulative Frequency	D Columns B + C	E Ridit Values (Column D/N)	F Check (A*E)
1	4	2.0	0	2.0	0.008	0.032
2	11	5.5	4	9.5	0.036	0.396
3	17	8.5	15	23.5	0.089	1.513
4	39	19.5	32	51.5	0.195	7.605
5	60	30.0	71	101.0	0.383	22.980
6	48	24.0	131	155.0	0.587	28.176
7	40	20.0	179	199.0	0.754	30.160
8	33	16.5	219	235.5	0.892	29.436
9	12	6.0	252	258.0	0.977	11.724
Total	264		264			132.022

Average Ridit  $132.022 / 264 = 0.50$

A noteworthy feature of Ridit Analysis is related to the fact that the average Ridits have a probabilistic interpretation. This property should be at the forefront of the practitioner’s mind in sorting out the outcomes of any analysis based upon Ridits. This property states that the average Ridit of each product is (an estimate of) the probability that this product is better than the reference product. Thus, a product that has an average Ridit greater than 0.5 is likely to be preferred to the product taken as reference. Conversely, a product with an average Ridit smaller than 0.5 is likely to be less preferred than the reference product. In comparison, the average Ridit of the reference distribution is always equal to 0.5.

Furthermore, the Ridit Analysis also makes it possible to compare any two products with respect to each other (i.e. without involving the reference distribution). If the average Ridits of products  $i$  and  $j$  are respectively denoted by  $r_i$  and  $r_j$ , then an estimate of the probability  $p_{ij}$  that product  $i$  is better than product  $j$  can be obtained very simply by adding 0.5 to the numerical difference between  $r_i$  and  $r_j$ ; that is

$$p_{ij} = 0.5 + r_i - r_j \quad (2)$$

Bross remarked that this rule is an approximate one which might break down if the difference  $r_i - r_j$  is close to or larger than 0.5. The value 0.5 is a border value that delimits those products that are likely to be better than the 'average product' from those products that are less preferred than the 'average product' (Pouplard et al., 1997).

To check the Ridit scores, it is possible to estimate the confidence interval with the following formula:

$$1 / \sqrt{3 \times N} \quad (3)$$

For example, it is assumed that, the Ridit score is approximately 0.70, and  $N = 76$  in the sample. Applying the formula gives the following figures:

$$1 / \sqrt{3 \times 76} = 1 / \sqrt{228} = 1 / 15.1 = 0,07$$

Thus the confidence intervals for this Ridit score are between

$$0.7 + 0.07 = 0.77 \text{ and } 0.7 - 0.07 = 0.63 \text{ (Goossen, 2001).}$$

The confidence errors for different sizes of  $N$  have been used in calculating the statistical significance of differences in average Ridit values. Differences between groups were considered statistically significant when the upper bound of the confidence interval for the lower Ridit value didn't overlap the lower bound of the confidence interval for the higher Ridit value (Norman, 1969).

To determine the meaning of the differences between groups, the odds can be calculated by  $A/B$ . A more accurate calculation is the odds ratio, which can be calculated based on the following equation:

$$(0.50 + d) / [1 - (0.50 + d)] \quad (4)$$

where  $d$  is the numerical difference between average Ridits of reference and test distributions. The Odds ratio can be used as a confidence limit that an individual will be worse of than an individual in the reference distribution or be worse of than an individual from another response category. As Ridit scores are numeric scale values for variable categories, statistics as the arithmetic mean, standard deviation, standard error, analysis of variances, and principal component analysis can be used (Goossen, 2001).

Bross' paper was designed to elucidate the use of Ridits and so did not contain the mathematical ideas underlying its derivation. Bross promised to provide this derivation but it never appeared. Since Redit Analysis is an important tool of statistical analysis, it is useful to characterize mathematical structures which lead to this assignment method. Brockett and Levine were developed two different sets of postulates which lead to essentially to Ridits (Brockett and Levine, 1977). Moreover, the exact variance and asymptotic distribution of the average Redit is developed, including the cases in which the reference group is sampled or the comparison group is finite, by Beder and Heim (1990).

### 3. DISCUSSION

Redit Analysis is suitable for the statistical processing of preference data involving ordered categories. It makes it possible to reduce the data to an easily comprehensible form without having to use complex computations and sophisticated software (Pouplard et al., 1997).

Redit Analysis begins with the assumption that the ordered response categories represent an approximation to an underlying continuum with successive categories corresponding to consecutive intervals on the variable. But this method requires an arbitrary choice of a standard distribution against which to make comparisons. Results differ dramatically depending on this choice. Chi-square statistics and Redit Analysis explore consistency across items within a test, but neither reveals where an individual respondent stands on the underlying concept which the test is intended to measure, or whether the test has done well in providing useful information.

Redit Analysis, like other non-parametric procedures, can only describe differences in terms of rank order, and the precision of this description depends on the reliability of these rankings and on the number of categories in the response variable. Although more-sophisticated methods exist for analyzing ordinal response categories in terms of a presumed underlying continuum, these approaches require specialized software and generally pose far greater technical and interpretive challenges. Redit scores, by contrast, are highly interpretable, statistically appropriate, and can be obtained directly from a table of percentages using only a calculator.

Since the mean Redit can be derived from the Wilcoxon rank-sum test, it is not necessary to have separate hypothesis-testing procedures for the Redit. With moderately large samples (greater than 25-30), the test of the null hypothesis of equal mean Redit scores is equivalent to the hypothesis tested by the Wilcoxon and Mann-Whitney statistics, two interchangeable non-parametric tests provided by most computer analysis packages. For small samples, it is advisable to use programs that conduct exact non-parametric inference.

Ridit scores require minimal assumptions for valid application. To use Ridits meaningfully, one must assume that the response categories of the scale are properly ordered levels of an underlying continuum. With such data, Ridit scores are more efficient than statistics developed for purely categorical or 'nominal' scales, such as chi-square, which ignore the ordered nature of the response categories (Donaldson, 1988).

Ridit scores, unlike most purely quantitative methods, depend only on how the response categories are ordered, not on how they are coded. Even when variables have different numbers of response categories, the interpretation of their Ridit scores is similar. When there are several ordinal measures, Ridit scores provide a consistent interpretation even when the number of categories differs. Ridits can be compared consistently across several different variables, all having different numbers of categories, and even across variables measured in different studies. Like other measures of effect size, Ridit comparisons describe magnitudes of treatment effects without regard to overall sample size (although standard errors and confidence intervals depend strongly on sample size).

In summary, Ridit Analysis provides a simple alternative or adjunct to rank order statistical analysis, and may be viewed as adding an intuitively appealing, descriptive element to it (Fleiss et al., 1979).

The importance of Ridit Analysis is not yet appreciated amongst researchers in Turkey. Clearly, Ridit Analysis is being largely ignored. Researchers are unfamiliar with the concept of Ridit Analysis, or are not convinced of its fundamental importance. In conclusion, the Ridit Analysis can be used in studies without required complex analysis.

#### 4. REFERENCES

- Beder, J. H. and Heim, R. C., 1990. On the use of Ridit Analysis. *Psychometrika*, 55 (4), 603-616.
- Brockett, P. L. and Levine, A., 1977. On a characterization of Ridits. *The Annals of Statistics*, 5 (6), 1245-1248.
- Bross, I. D. J., 1958. How to use Ridit Analysis. *Biometrics*, 14: 18-38.
- Donaldson, G. W., 1988. Ridit scores for analysis and interpretation of ordinal pain data. *European Journal of Pain*, 221-227.
- Doyle, M. and Dorling, S., 2002. Visibility trends in the UK 1950-1997. *Atmospheric Environment*, 36, 3161-3172.
- Fleiss, J. L., Chilton, N. W., Wallenstein, S., 1979. Ridit Analysis in dental clinical studies. *J. Dent. Res.*, 58 (11), 2080-2084.
- Flora, J. D., 1974. A note on Ridit Analysis. Technical Report, Michigan.

Goossen, W. T. F., 2001. Exploiting the nursing minimum data set for the Netherlands. Medinfo, 1334-1338.

Lewis, J. and Baldwin, J., 1997. Ridit Analysis. Statistical Package for Improved Analysis of Hillslope Monitoring Data Collected as Part of the Board of Forestry's Long-Term Monitoring Program.

Norman, M. B., 1969. The structure of the psychological well-being. Aldine Pub. Co., Chicago, 249-256.

Pouplard, N., Qannari, E. M., Simon, S., 1997. Use of Ridits to analyse categorical data in preference studies. Food Quality and Preference, 8 (5-6), 419-42

## RİDİT ANALİZİ

### ÖZET

*Sıralı ölçek ile ölçülmüş verilerin analizi için uygun olan metotlar, istatistikçiler tarafından bilinmesine rağmen klinisyen ve uygulama ile uğraşan bilim adamları tarafından daha az bilinen metotlardır. Dolayısıyla, sıralı verilerin sıralı yapısının göz ardı edilerek, bazı araştırmacıların yaptığı gibi ortalama ve standart hataların hesaplanabildiği kantitatif ölçümler veya nominal kategoriler gibi analiz edilmesi uygun değildir. Ridit Analizi, sıralı ölçek ile elde edilen cevapların karşılaştırılmaları için geliştirilmiş bir istatistiksel metottur. Yöntem, Bross tarafından yaralanma, tatminsizlik, tercih veya hem fikir olma düzeyleri gibi sıralı ölçekli cevapların karşılaştırılması anlamında literatüre kazandırılmıştı. Yöntem ortaya atılmasından sonra epidemiyoloji, anket düzenleme, tıbbi tedavi ve psikoloji gibi alanlarda da kullanılmıştır. Ridit değerleri normal dağılıma ihtiyaç duymaz ve sıralı verilerde mevcut olan farklılıkları belirler. Yöntem bilinen hali ile sınıflayıcı, aralıklı ve oranlı ölçek kullanılarak elde edilen verilere de uygulanabilmektedir. Bu çalışmanın amacı, araştırmacılara yöntemi tanıtmaktır. Çalışmada simülatif olarak türetilmiş veriler kullanılmıştır.*

**Anahtar Kelimeler:** Ridit Analizi, Sıralı Veri.

## DANIŖMA KURULU ÜYELERİ - ADVISORY BOARD MEMBERS

Ahmet KARA  
Ali YAZICI  
Alper GÜVEL  
Asaf ŖavaŖ AKAT  
AŖır GENÇ  
Aydın ÖZTÜRK  
AyŖe GÜNDÜZ HOŖGÖR  
Bedriye SARAÇOĞLU  
Ceyhan İNAL  
CoŖkun Can AKTAN  
Deniz GÖKÇE  
Ekrem ERDEM  
Ercan UYGUR  
Erdem BAŖCI  
Erinç YELDAN  
Erol TAYMAZ  
Eser KARAKAŖ  
Fatih ÖZATAY  
Fatın SEZGİN  
Fikri AKDENİZ  
Fikri ÖZTÜRK  
Gülay BAŖARIR KIROĐLU  
Güven SAK  
Haluk LEVENT  
Hamza EROL  
İbrahim DALMIŖ  
İlhan TEKELİ  
İmdat KARA  
İnsan TUNALI  
Levent KANDİLLER  
Mehmet KAYTAZ  
Meltem DAYIOĐLU  
Metin TOPRAK  
Mustafa ACAR  
Mustafa AYTAÇ  
Nihat BOZDAĐ  
Onur BASKAN  
Orhan GÜVENEN  
Ömer Faruk ÇOLAK  
Ömer L. GEBİZLİOĞLU  
Özkan ÜNVER  
ÖztaŖ AYHAN  
ReŖat KASAP  
SavaŖ ALPAY  
Seyfettin GÜRSOY  
Süleyman GÜNAY  
Turan EROL  
Ümit OKTAY FIRAT  
Yasin AKTAY  
Yılmaz AKDİ  
Yusuf Ziya ÖZCAN

Fatih Üniversitesi  
TOBB  
Çukurova Üniversitesi  
Bilgi Üniversitesi  
Selçuk Üniversitesi  
Ege Üniversitesi  
OrtadoĐu Teknik Üniversitesi  
Gazi Üniversitesi  
Hacettepe Üniversitesi  
Dokuz Eylül Üniversitesi  
BoĐaziçi Üniversitesi  
Erciyes Üniversitesi  
Ankara Üniversitesi  
T.C. Merkez Bankası  
Bilkent Üniversitesi  
OrtadoĐu Teknik Üniversitesi  
BahçeŖehir Üniversitesi  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Bilkent Üniversitesi  
Çukurova Üniversitesi  
Ankara Üniversitesi  
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi  
TOBB  
Galatasaray Üniversitesi  
Çukurova Üniversitesi  
Kırkkale Üniversitesi  
OrtadoĐu Teknik Üniversitesi  
BaŖkent Üniversitesi  
Koç Üniversitesi  
Çankaya Üniversitesi  
IŖık Üniversitesi  
OrtadoĐu Teknik Üniversitesi  
BDDK  
Kırkkale Üniversitesi  
Uludağ Üniversitesi  
Gazi Üniversitesi  
Ege Üniversitesi  
Bilkent Üniversitesi  
Gazi Üniversitesi  
Ankara Üniversitesi  
Ufuk Üniversitesi  
OrtadoĐu Teknik Üniversitesi  
Gazi Üniversitesi  
SESRTCIC  
Galatasaray Üniversitesi  
Hacettepe Üniversitesi  
SPK  
Marmara Üniversitesi  
Selçuk Üniversitesi  
Ankara Üniversitesi  
YÖK