



Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi & Sinop University Journal of Natural Sciences

Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

&

*Sinop University
Journal of Natural Sciences*

*Cilt / Volume 7
Sayı / Number 2
2022*



SINOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ

Adres: Korucuk Mahallesi Üniversite Caddesi 15 Temmuz Yerleşkesi No: 21B 57010 – SINOP / TÜRKİYE
Telefon: 0 368 271 57 57 - **Faks:** 0 368 271 57 63 - **Mali:** sufbd@sinop.edu.tr

ISSN 2536-4383 / e-ISSN 2564-7873

Cilt
(7)
Sayı
(2)
2022



SINOP ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI

SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

SİNOP UNIVERSITY
JOURNAL OF NATURAL SCIENCES

Cilt/Volume 7

Sayı/Number 2

2022

Sinop Üniversitesi'nin 50. Bilimsel Yayınıdır.

It is the 50th Scientific Publication of Sinop University.

ISSN 2536-4383/e-ISSN 2564-7873

SİNOP ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

Sinop University Journal of Natural Sciences

SAHİBİ/PUBLISHER

Prof. Dr. Nihat DALGIN (Sinop Üniversitesi Rektörü/Rector)

EDİTÖR/EDITOR

Prof. Dr. Türkay ÖZTÜRK

YARDIMCI EDİTÖR/CO EDITOR IN CHIEF

Doç. Dr. Sevda YILDIZ

EDİTÖR KURULU/EDITORIAL BOARD

Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ

Prof. Dr. Ahmet TABAK

Prof. Dr. Cem Cüneyt ERSANLI

Prof. Dr. Ahmet ÖZER

Prof. Dr. Hülya TURAN

Prof. Dr. Levent BAT

Prof. Dr. Şükrü ÇELİK

Prof. Dr. Hülya ÖZLER

Doç. Dr. Emel ÇANKAYA

Doç. Dr. Meryem SEFERİNOĞLU

Doç. Dr. Oylum GÖKKURT BAKI

Dr. Öğr. Üyesi Levent ÖNCEL

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Kemal BALKİ

Prof. Dr. Carlo BARDARO

Prof. Dr. Kulwinder SINGH MANN

Prof. Dr. Richard P. PATTERSON

Prof. Dr. Vishwanath P. SINGH

Doç. Dr. Jakrapong KAEWKHAO

Dr. Bahaeddine TAOUFİK

Dr. Julia KORNYYCHUK

Dr. Munish Kumar GUPTA

Dr. Kremena STEFANOVA

DİL EDİTÖRLERİ (İNGİLİZCE)/LANGUAGE EDITORS (ENGLISH)

Doç. Dr. Murat UZUNCA

MİZANPAJ EDİTÖRÜ/LAYOUT EDITOR

Dr. Öğr. Üyesi Bengünur ÇORAPCI

ADRES/ADDRESS

Sinop Üniversitesi Rektörlüğü, Korucuk Mahallesi Üniversite Caddesi 15 Temmuz Yerleşkesi
No:21B 57010-SİNOP/TÜRKİYE

Tel: 0 368 271 57 57 **Faks:** 0 368 271 57 63

<https://dergipark.org.tr/sinopfbd>

e-Posta: sufbd@sinop.edu.tr

Araştırma Makaleleri/Research Articles

Sayfa/Page

Türkiye, Japonya ve Güney Kore Nükleer Güç Santrali Edinme Süreçlerinin Karşılaştırılması 102

Comparison of Nuclear Power Plant Acquisition Processes in Turkey, Japan and South Korea
Ümmühan BARLAK ve Hasan OĞUL

The Proposal of Gamma Folded-Normal Distribution 116

Gamma Katlanmış-Normal Dağılım Önerisi
Yasin ALTINIŞIK, Tahir CEYLAN and Emel ÇANKAYA

Maternal Kanda Bakır Düzeyi ve Etkileyen Faktörlerin Belirlenmesi 132

Determination of Copper Level and Affecting Factors in Maternal Blood
Yılmaz ALTUNER ve Esra EMÜL

Tensor Product of Phase Retrievable Frames 142

Fazları Geri Alınabilen Frame Vektörlerinin Tensör Çarpımı
Fatma Bozkurt

Approximation On Modular Spaces Via P-Statistical Relative A-Summation Process 152

Modüler Uzaylar Üzerinde P-İstatistiksel A-Toplam Süreci Aracılığıyla Yaklaşım
Kamil DEMİRCİ and Sevda YILDIZ

Derlemeler/Reviews

Sayfa/Page

İleri Oksidasyon Proseslerinin Sızıntı Sularının Arıtımında Kullanımı 173

The Use of Advanced Oxidation Processes in the Treatment of Leachate
Kasım ATMACA ve Nevzat BEYAZIT



Türkiye, Japonya ve Güney Kore Nükleer Güç Santrali Edinme Süreçlerinin Karşılaştırılması

Ümmühan BARLAK¹ ve Hasan OĞUL²

How to cite: Barlak, Ü., & Oğul, H. (2022). Türkiye, Japonya ve Güney Kore nükleer güç santrali edinme süreçlerinin karşılaştırılması. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 102-115. <https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1051512>

Araştırma Makalesi

Sorumlu Yazar

Ümmühan BARLAK
 umbarlak@gmail.com

Yazarlara ait ORCID

Ü.B: 0000-0002-7365-8810
 H.O: 0000-0002-5121-2893

Received: 31.12.2021

Accepted: 09.08.2022

Öz

Enerjide sürekliliği sağlayabilmek ve dışa bağımlılığı en aza indirebilmek için ülkelerin birden çok enerji kaynağını kurulu sistemler halinde yönetebilmesi gerekmektedir. Nükleer enerji düşük karbon salımlı bir enerji kaynağı olması sebebiyle çağımızın iklim değişikliği sorunuyla mücadelede kilit rol oynama potansiyeline sahip bir enerji türü olarak değerlendirilmektedir. Nükleer santraller kullandığı yakıt kütesine oranla yüksek miktarda enerji açığa çıkarabilmesi, hava olaylarından etkilenmeden devamlı olarak enerji üretebilmesi ve elektrik üretim maliyetleri konusundaki öngörülebilirliği gibi kendine özgü özellikleri ile ülkeler tarafından tercih edilmektedir. Türkiye, Japonya ve Güney Kore nükleer güç santrali teknolojilerine sahip olabilmek için erken bir dönemde ve yaklaşık olarak aynı zaman diliminde adımlar atmaya başlayan ülkelerdendir. Japonya ve Güney Kore günümüzde kurulu birçok nükleer santrali ve geliştirmekte olduğu kendi tasarımlarıyla çeşitli alanlarda ulusal ve uluslararası projeler yürütmekte olan iki ülke konumundadır. Türkiye’de başlatılan girişimler için süreç aynı şekilde ilerlememiş ve yapılması planlanan ilk santralin inşaatına 2010’lu yıllarda başlanabilmektedir. Bu çalışmada nükleer güç santrali teknolojilerini elde etme süreçleri birbirine yakın zamanlarda başlamış olan bu üç ülkenin faaliyet süreçleri kronolojik bir düzende ele alınmış ve zaman içerisinde atılan adımlar karşılaştırılmıştır. Türkiye için mevcut durum değerlendirilerek geleceğe yönelik önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nükleer enerji, nükleer güç santrali, Türkiye, Japonya, Güney Kore

Comparison of Nuclear Power Plant Acquisition Processes in Turkey, Japan and South Korea

¹Sinop Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Nükleer Enerji Mühendisliği Anabilim Dalı Sinop, Türkiye

²Sinop Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Nükleer Enerji Mühendisliği Anabilim Dalı Sinop, Türkiye

Abstract

Countries should be able to manage multiple energy sources in order to ensure continuity in energy and to minimize foreign dependency. Nuclear energy has the potential to play a key role in dealing with the climate change problem of our age since it is a low-carbon energy source. Nuclear power plants are preferred by countries due to their unique features such as being able to release a high amount of energy compared to the fuel they use, producing energy continuously without being affected by weather events, and predictability in electricity production costs. Turkey, Japan and South Korea are among the countries that have started to take steps in an early period and approximately at the same time to acquire nuclear power plant technologies. Today, Japan and South Korea are two countries that carry out national and international nuclear power projects with many

Giriş

Enerji kaynaklarının sınırlı olması ve maliyetlerindeki sürekli artış nedeniyle dünyada süregelen bir enerji sorunu ortaya çıkmıştır. Mevcut enerji kaynaklarının dünyada eşit olmayan dağılımına ve sınırlı olmasına karşın insanlığın daha yüksek refah beklentisi de bu sorunun asli nedenidir. Temel enerji kaynağı olarak kullanılan fosil yakıtlar küresel iklim değişikliğine neden olmaktadır [1]. Sanayi devriminin etkisiyle birlikte özellikle 1750’li yıllardan sonra insan faaliyetleri hız kazanmıştır. Bu durum sera gazı emisyonlarının artmasına, dolayısıyla atmosfer kompozisyonunun değişmesine yol açmıştır [2]. Bu küresel soruna karşı bir önlem alınmaması durumunda yirmi birinci yüzyılın sonundan itibaren küresel sıcaklıkta 1°C ila 4°C’lik bir artış olabileceği öngörülmektedir. Bu küresel ısınma yeryüzünde kuraklıklara, sellere ve çeşitli tropikal hastalıklara zemin hazırlamaktadır. Ayrıca buzulların erimesi sonucu okyanus seviyelerindeki yükselme ve buna bağlı olarak sahile yakın yerleşimlerin su altında kalma tehlikesi oluşmaktadır [1]. Fosil enerji kullanımı, toplam sera gazı salınımının üçte ikisini oluşturmaktadır. Bu nedenle salımları azaltmak ve iklim değişikliğini önlemek üzere çeşitli alanlarda alınan önlemler enerji sektörünü de içermek zorundadır [3]. Nükleer enerji düşük karbon ayak izine sahip bir enerji kaynağı olması nedeniyle geleceğin temiz enerji hedeflerine ulaşmada önemli rol oynayabilecek bir potansiyele sahiptir. Günümüzde nükleer santraller güçlü güvenlik sistemleriyle donatılmıştır. Nükleer santrallerden çevreye salınan radyasyon doğal radyasyonun yaklaşık %1’i kadar bir etkiye sahiptir ve santral çevresinde yapılan tarım, balıkçılık, turizm gibi faaliyetler ve bulunan halk bu durumdan asgari düzeyde etkilenmektedir [4]. Nükleer enerjinin tüketilen miktarına göre sağladığı enerji diğer kaynaklara göre oldukça yüksektir. Enerji üretiminde az miktarda hammadde kullanıldığından tüketilen enerji içinde hammaddenin maliyete katkısı düşük olmaktadır. Diğer santraller ile kıyaslandığında gereksinim duyulan arazi daha küçük olmaktadır. Ayrıca nükleer yakıtlar uzun süre depolanabildiğinden dışa bağımlılığı azaltmaktadır. Buna karşın nükleer enerjinin dezavantajları da bulunmaktadır. Örneğin nükleer atıklardan yayımlanan radyasyonun güvenli seviyelere gelmesi çok uzun yıllar sürebilmektedir. Kullanılmış yakıtların yeniden işlenmesi ve bertarafı hassas bir süreçtir. Olası nükleer kazalar geniş alanları etkileyebilen çok tehlikeli durumlar oluşturabilmektedir [5].

Dünyada nükleer gücün araştırılması ve geliştirilmesi ilk olarak Amerika Birleşik Devletleri’nde başlamış ve sonrasında diğer ülkelere de yayılarak büyük oranda genişlemiştir. Bunun başlıca iki nedeni

çoğu ülkenin kömür ve petrol gibi kendi fosil enerji kaynaklarına sahip olmaması ve Fransa örneğinde olduğu gibi bazı ülkelerin nükleer enerjiyi bir devlet politikası olarak incelemesidir [1]. 2021 yılı verilerine göre Fransa, elektrik üretiminin %70.6'sını nükleer enerjiden sağlamaktadır. Ukrayna enerjisinin yaklaşık %51'ini, Belçika yaklaşık %39'unu, Güney Kore %29.6'sını, Rusya %20.6'sını, ABD %19.7'sini ve Japonya enerjisinin %5.1'ini nükleer enerjiden karşılamaktadır [6].

Bu çalışmanın konusu olan ve nükleer enerji alanındaki tarihi süreci incelenen üç ülke -Japonya, Güney Kore ve Türkiye- nükleer enerjiyi edinme girişimlerine sırasıyla 1953, 1957 ve 1955 yıllarında başlamışlardır. Japonya'da Aralık 2021 verilerine göre şu anda işletme halinde olan 33 adet reaktörün toplam elektrik üretim kapasitesi 31679 MWe'dir. Daha önce yapılan 27 adet reaktör kapatılmış olup, 2 adet santral yapım aşamasındadır [7]. Nükleer enerji, toplam elektrik üretiminin yaklaşık %5.1'lik bir bölümünü oluşturmaktadır [6]. Güney Kore 2021 yılı itibariyle işletme halinde olan 24 nükleer reaktörü ile dünyanın önde gelen nükleer enerji ülkeleri arasında yer almaktadır. Kapatılan 2 adet reaktörü ve yapım aşamasında olan 4 adet reaktörü bulunmaktadır. Teknolojisini geniş çapta ihraç eden ülke, Birleşik Arap Emirlikleri'nin ilk nükleer reaktörünün inşasında yer almıştır [8]. Nükleer enerji Güney Kore'nin toplam elektrik üretiminde %29.6'lık bir paya sahiptir [6]. Başlangıç zamanları yaklaşık olarak aynı tarihlerde olmasına rağmen Japonya ve Güney Kore günümüzde nükleer güç santrallerine sahip iken Türkiye henüz sahip değildir. Türkiye'de nükleer teknolojilerin kullanımını geliştirmek adına bazı adımlar atılmakta ve hâlihazırda nükleer santral projeleri yürütülmektedir. 2010 yılında Rusya Federasyonu Hükümeti ile imzalanan iş birliği anlaşması ile aktif proje olan Akkuyu NGS'ye (Nükleer Güç Santrali) başlamıştır [9]. Toplamda 4800 MW kurulu güce sahip olacak nükleer santralin Türkiye'deki teknoloji gelişimine katkı sağlaması, istihdamı artırması ve insan kaynaklarını geliştirmeye katkı sunmasının yanında ülkenin doğal gaz ithalatını da azaltması beklenmektedir [10]. Nükleer güç santrali teknolojilerini edinme ve geliştirme faaliyetlerinde diğer ülkelerin benzer süreçlerinin incelenmesi ve karşılaştırmalarla yapılan değerlendirmeler ile oluşturulan fikir ve önerilerin çoğaltılması gerekmektedir. Çalışmada nükleer güç santrali teknolojilerini elde etme faaliyetleri birbirine yakın zamanlarda başlamış olan Türkiye, Japonya ve Güney Kore ülkelerinin bu teknolojiyi elde etme süreçleri incelenerek gelişim adımları üzerinden bir değerlendirme yapılmıştır.

Materyal ve Metot

Çalışmada Türkiye, Japonya ve Güney Kore'nin nükleer güç teknolojilerini edinme ve geliştirme süreçleri kronolojik bir zaman düzeni içerisinde işlenmektedir. Faaliyet süreçleri ve zaman içerisinde atılan adımlar karşılaştırılmalı olarak ve neden sonuç ilişkisi çerçevesinde değerlendirilerek geleceğe yönelik önerilere yer verilmektedir. Süreçlere dair bilgilere ulaşılırken öncelikli olarak Uluslararası Atom Enerjisi Ajansı (IAEA), Japonya Atom Enerjisi Ajansı (JAEA), Kore Atom Enerjisi Araştırma Enstitüsü (KAERI) ve Türkiye Enerji, Nükleer ve Maden Araştırma Kurumu (TENMAK) verilerinden, ayrıca konuya ilişkin akademik metinlerden yararlanılmıştır. Çalışmada nükleer güç santrali yapım

faaliyetlerine odaklanılmış, nükleer enerjinin diğer kullanım alanları kapsam dışında bırakılmıştır. Nükleer teknoloji, büyük yatırım ve çalışma gerektiren bir alandır. Nükleer alanda gelişme ve ilerlemenin sağlanması farklı disiplinler arası detaylı inceleme ve araştırmalar ile mümkün olabilmektedir. Bu araştırmalar yapılırken nükleer teknolojilere sahip olan veya birbirinden farklı prosedürlere sahip ülkelerde süreçlerinin incelenmesi büyük önem taşımaktadır. Literatürde nükleer enerji ile ilgili ülkeler bazında karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilen ve kronolojik düzende süreçler hakkında bilgiler verilen benzer akademik metinler bulunmaktadır. Örneğin Bredimas ve Nuttall [11] tarafından yapılan çalışmada Kanada, Fransa, Almanya, Japonya, İsviçre, Birleşik Krallık ve ABD olmak üzere yedi farklı ülkenin lisanslama prosedürleri karşılaştırılarak geliştirilecek yeni nükleer santrallerin uygun bir şekilde lisanslanabilmesi için gereken önlemlerin alınması amaçlanmıştır. Yoon vd. [12] tarafından yapılan çalışmada Kore ve Japonya'nın nükleer, sosyal ve teknolojik alanlarda izlediği yolların farklılık sebepleri analiz edilmektedir. Jin ve Park [13] tarafından yapılan başka bir çalışmada Fukushima Nükleer Kazası'na farklı tepkiler veren Almanya ve Kore'nin nükleer politikaları karşılaştırılmalı olarak değerlendirilmektedir. Oğul ve Karaağaç [14] tarafından yapılan çalışmada Türkiye'nin farklı şehirleri için nükleer güç santrallerinin (NGS) halk tarafından kabul edilebilirliğini değerlendirmek üzere bir anket yapılmıştır ve elde edilen sonuçlar daha önce Türkiye'de ve diğer ülkelerde yapılmış çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Shim ve Park [15] tarafından yapılan çalışmada; ABD, İngiltere, Almanya, Fransa, Japonya ve Güney Kore politika çerçeveleri araştırılmıştır. Konuya ilişkin akademik metinler incelendiğinde çeşitli olay, durum ve süreçlerin karşılaştırmalı olarak ele alınması sonucunda güncel fikirlere ışık tutma, yorumlama ve sorulara cevap bulma süreçlerinin daha etkin bir şekilde gerçekleştirilebildiği görülmektedir. Bu kapsamda bu çalışmanın Türkiye'de nükleer teknolojileri geliştirme faaliyetleri için yararlı olması beklenmektedir.

Japonya'da Nükleer Teknolojileri Edinme ve Geliştirme Süreci

Japonya'nın nükleer teknolojileri geliştirme süreci, Uluslararası Atom Enerjisi Ajansı'nın (IAEA) temelini atıldığı 8 Aralık 1953 tarihinde başlamıştır. Hemen ertesi yıl Japonya Ulusal Diyet'i (parlamento) tarafından nükleer araştırmalar için 235 milyon JPY bütçe ayrılmıştır. 1956 yılında IAEA üye devletlerine katılmasının ardından JAERİ (Japonya Atom Enerjisi Araştırma Enstitüsü), Atom Enerjisi Komisyonu, Bilim ve Teknoloji Ajansı, Atomik Yakıt Kurumu gibi ulusal organlar kurulmuştur. Nükleer teknolojinin Japonya'ya hızlı bir şekilde girmesi amacıyla JAERİ tarafından yapımı gerçekleştirilen Japonya Araştırma Reaktörü No.1 (JRR-1) 1957 yılında ilk kritikliği elde etmiştir. 50 kW gücündeki bu araştırma reaktörü temel bilimsel araştırmalarda kullanılmak üzere radyoizotop üretimi ile mühendis ve araştırmacıların eğitimleri için kullanılmıştır. Bir sonraki adım olarak yüksek performanslı bir araştırma reaktörü olan 10 MW gücündeki Japonya Araştırma Reaktörü No.2 (JRR-2) inşa edilmiş ve 1960'ta ilk kritikliğe ulaşmıştır. Bu reaktör radyoizotop üretiminin yanı sıra nötron deneyleri, yakıt ışınlanması, nötron aktivasyon analizi gibi uygulamalar için de kullanılmıştır.

Yerli olarak inşa edilen ilk araştırma reaktörü JRR-3 (Japonya Araştırma Reaktörü No.3) olmuş ve nükleer teknoloji ve nötron bilimine katkılardan dolayı Amerikan Nükleer Topluluğu'nun Tarihi Dönüm Noktası Ödülü'nü almıştır [16]. Japonya Araştırma Reaktörü No. 4 (JRR-4) ilk olarak Japon nükleer gemisi 'MUTSU' için deneyler yapmak amacıyla kurulmuş ancak tıbbi ışınlama, aktivasyon analizi, radyoizotop üretimi ve eğitim gibi çeşitli amaçlarla kullanılmıştır. "TRIGA reaktörü" olarak adlandırılan araştırma reaktörlerinden biri NSRR reaktörüdür [17]. Reaktivite kazalarına karşı reaktör güvenliğini incelemek üzere özel bir reaktör olarak yapılmıştır. Günümüzde de NSRR reaktöründe yakıt erimesi gibi ciddi kaza olaylarının simülasyon çalışmaları yürütülmektedir [18]. Nisan 1968'de Japonya Malzeme Test Reaktörü (JMTR) ilk kez kritik olmuştur. Bu reaktör hafif su reaktörleri (LWR) için yakıt ve malzeme ışınlama testleri gibi çeşitli amaçlarla kullanılmıştır [19]. JMTR aracılığıyla farklı radyoizotoplar üretilmiş ve bunlar tıbbi tedavilerde yaygın olarak kullanılmıştır [16]. Japonya'da elektrik üreten ilk reaktör, prototip bir kaynar su reaktörü (BWR) olan Japon Güç Gösterme Reaktörü'dür (JPDR). Bu reaktör, 1963 yılından 1976 yılına kadar çalışmıştır ve daha sonra yapılacak ticari reaktörler için büyük miktarda bilgi edinilmesini sağlamıştır [7]. Japonya'nın ilk ticari nükleer enerji reaktörü Birleşik Krallık'tan ithal edilen 160 MWe gücünde gaz soğutmalı bir reaktör olan Tokai-No'dur. Reaktör 1966'da çalışmaya başlamış ve Mart 1998'e kadar çalışmaya devam etmiştir [16]. Daha sonra zenginleştirilmiş uranyum kullanan hafif su reaktörleri (PWR ve BWR) inşa edilmiştir. Japon kamu kuruluşları, ABD'li satıcılardan tasarımlar satın almış ve bunları Japon şirketlerinin iş birliğiyle inşa etmiştir. Sonrasında da benzer tesisler kurmak için lisans alınmaya başlanmıştır. Hitachi Co. Ltd., Toshiba Co. Ltd. ve Mitsubishi Heavy Industry Co. Ltd. gibi şirketler kendi LWR'lerini tasarlama ve inşa etme kapasitelerini geliştirmiştir [7]. Japon endüstrisi 1970'li yılların sonuna gelindiğinde büyük ölçüde kendi yerli nükleer enerji teknolojilerini geliştirmiştir ve bugün diğer ülkelere ihracat yapabilmektedir [16]. Ekim 2005'te Japonya Atom Enerjisi Ajansı (JAEA) kurulmuştur [20]. Japonya'da ilk gelişmiş kaynar su reaktörleri (ABWR) Tokyo Electric Power Co.'nun (TEPCO) Kashiwazaki-Kariwa üniteleri 6 ve 7'dir. Bu tesisler 1996-1997 yıllarında çalışmaya başlamıştır ve şu anda da ticari olarak işletmededir. Japonya'da nükleer enerjinin barışçıl kullanımı için radyasyon ve radyoizotop uygulamaları üzerine çeşitli Ar-Ge faaliyetleri yürütülmüştür. Radyasyon ve radyoizotoplar endüstri, tarım ve tıbbi tedavi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır [16]. Japonya, enerji gereksiniminin %90'ından fazlasını ithalat yoluyla karşılamaktadır. II. Dünya Savaşı'ndan sonra toparlanarak endüstriyel tabanını hızla genişletmiş, böylece fosil yakıt ve özellikle Orta Doğu'dan petrol ithalatına bağımlı hale gelmişti. Nitekim 1974 yılında elektrik üretiminin %66'sı petrole dayanmaktaydı. Bu sırada Japonya zaten beş adet çalışan reaktör geliştirmişti ve nükleer endüstrisini büyütmekteydi. Dolayısıyla ülke, petrol ithalatının azaltılmasına öncelik vermiş ve nükleer programlara yönelmiştir [7]. Japonya insanlığın artan ortak enerji ihtiyacına cevap verme arayışında olan ve gelecek için uzun vadeli bir enerji kaynağının en çekici seçeneklerinden biri olarak görülen ITER (Uluslararası Termonükleer Deneysel Reaktör) projesine katılmış ve bu alanda da çalışmalar yürütmekte ve geliştirmektedir [16].

Görüldüğü üzere Japonya uzun yıllardır kullanılan ve ticari olarak yaygın hale gelmiş fisyon reaktörlerine erişmesinin yanı sıra geleceğin nükleer enerjisi olarak düşünülen ve henüz ticarileşmemiş füzyon reaktörleri çalışmalarına da katılmaktadır.

Güney Kore’de Nükleer Teknolojileri Edinme ve Geliştirme Süreci

Güney Kore 1957 yılında IAEA’ya üye olarak nükleer alandaki faaliyetlerini başlatmıştır. 1958 yılında devlet tarafından Atom Enerji Yasası kabul edilmiş, 1959’da Atom Enerjisi Dairesi (OAE) ve Atom Enerjisi Araştırma Enstitüsü (AERI) kurulmuştur. Kore Atom Enerjisi Araştırma Enstitüsü (KAERI)’nin temeli bu kurumlar ile oluşmuştur [21]. 19 Mart 1962’de ilk araştırma reaktörü olan TRIGA Mark-II reaktörünün inşaatı tamamlanmıştır [22]. Bu reaktör küçük bir araştırma birimi olmakla beraber ülkede kritikliğe ulaşan ilk reaktör niteliğini taşımaktadır [8]. 10 Mayıs 1972’de TRIGA Mark-III reaktörünün inşaatı tamamlanmış, 1973’te Radyolojik Araştırma Enstitüsü (RRI) ve Tarımda Radyasyon Araştırma Enstitüsü (RRIA) birleştirilerek KAERI kurulmuştur [22]. İlk nükleer güç santrali olma özelliği taşıyan Kori tesisinin 1. Ünitesi Kori-1’in inşaatı 1975 yılında başlamıştır. Aynı yıl KAERI bir yan kuruluş olarak Kore Güç Mühendisliği Şirketi KOPEC’i kurmuştur. KOPEC günümüzde de nükleer santrallerin mimari ve mühendislik alanlarından sorumludur [21]. Kori-1 1978 yılında ticari olarak işleme başlamıştır [23]. Kore’de 1980’li yılların başında yapım aşamasında olan 8 adet nükleer reaktör ile bir faaliyet patlaması yaşanmıştır [8]. Kori 3-4, Yonggwang 1-2 ve Ulchin 1-2 olmak üzere 6 ünite ülkenin ikinci nesil nükleer reaktörlerini oluşturmuştur. Bu sırada ülkede ABD’nin Combustion Engineering firmasından 6, Avrupa’nın Framatome firmasından 2 ve Kanada AECL Firmasından 1 adet CANDU olmak üzere farklı tasarımlara sahip basınçlı su reaktörü üniteleri bulunmaktaydı. 1987 yılında nükleer enerjide kendine yeterlilik oluşturmak istenmiş ve daha sonra Westinghouse firması tarafından satın alınan Combustion Engineering (CE) firmasıyla bir teknoloji transferi programı başlatılmıştır. 1987 yılında “CE System 80” isimli buhar sistemi standartlaşmanın temeli olarak alınmış ve bu sistemin özelliklerinden bazılarını içeren ABD’nin İleri Hafif Su Reaktörü (ALWR) tasarımından da özellikler alınarak Kore Standart Nükleer Santrali (KSNP) tasarımı oluşturulmuştur [21]. 1961 yılından Nisan 2001’e kadar Güney Kore’nin tek elektrik kuruluşu bir devlet kuruluşu olan KEPCO (Korea Electric Power Company) idi. Daha sonra altı birime bölünen kurumun nükleer üretim kapasitesi Kore Hidro ve Nükleer Enerji (KHNP)’nin bir parçası haline gelmiştir [8]. Projesi 1992 yılında başlatılan APR-1400 (Advanced Pressurised Reactor-1400) “Kore Gelecek Nesil Reaktörü” olarak bilinmekteydi ve temel tasarımı 1999 yılında tamamlandı. KAERI nükleer enerjinin farklı alanlarda kullanımlarına katkılar sunmuş ve sunmaktadır. Örneğin 2001 yılında tıbbi cerrahi olmadan karaciğer kanserini tedavi etmek için yeni bir radyofarmasötik geliştirmiştir. Güney Kore, 2011 yılında ABD ve Japonya’dan sonra yüksek güçlü bir proton lineer hızlandırıcı geliştiren üçüncü ülke olmuştur. 2012 yılında birincil bileşenleri ile tek bir sızdırmaz basınçlı kap içerisine yerleştirilen SMART Reaktörü tasarımı, entegre bir reaktör için ilk standart tasarım onayını almayı başarmıştır. Reaktörü ticarileştirmek için 2015 yılında

Suudi Arabistan ile ortaklık kurulmuştur. 2017 yılında Kore'nin ihraç ettiği ilk nükleer tesis olan JRTR Reaktörü Ürdün'de 6 yıl 10 ayda tamamlanmıştır [22]. Güney Kore'de nükleer reaktörlerin büyük bir kısmı ülkenin yoğun nüfuslu güneydoğu kesiminde başlıca elektrik talep merkezlerini bulunduran ve birçok ağır üretim tesisine ev sahipliği yapan Gyeongju, Ulsan ve Busan şehirlerine yakın iki komplekste yer almaktadır. Kori-1 reaktörü 2017 yılında devre dışı bırakılmış ve 2019'da kalıcı olarak kapatılmıştır [24].

Türkiye'de Nükleer Teknolojileri Edinme ve Geliştirme Süreci

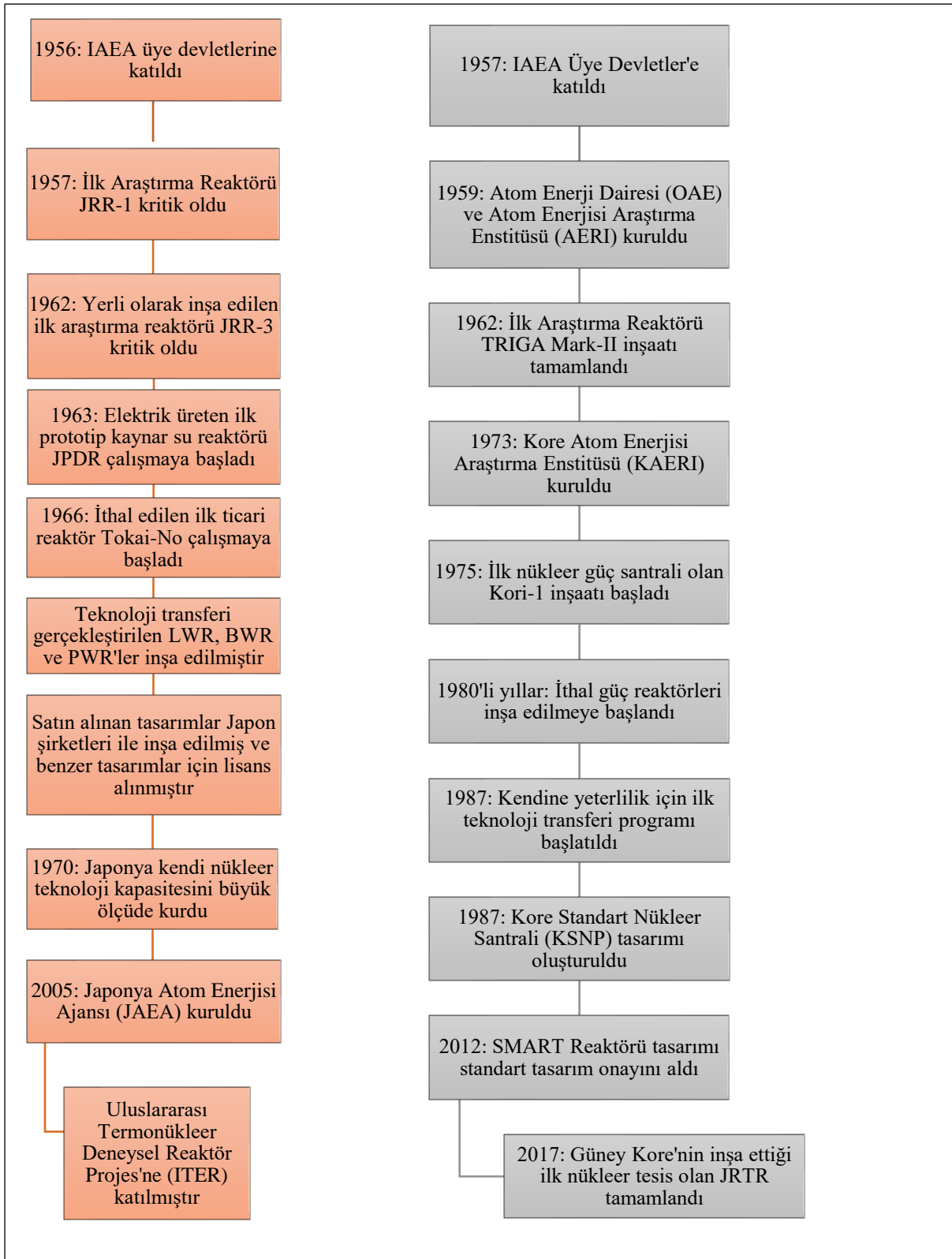
Türkiye'de nükleer konulara ilişkin imzalanan ilk diplomatik anlaşma, nükleer enerjinin barışçıl kullanımı ile ilgili bir iş birliği anlaşması olan ve Mayıs 1955'te ABD ile imzalanan Atom Enerjisi Yasası'dır [25]. Ülke içindeki ilk ve önemli girişim ise 1956 yılında Başbakanlık'a bağlı olarak Atom Enerjisi Komisyonu (AEK)'nin kurulmasıdır [25]. Kurulan ilk nükleer tesis 1 MW gücündeki TR-1 Araştırma Reaktörü'dür. İstanbul Küçükçekmece bölgesine kurulan tesisin temeli 1959 yılında atılmış ve proje "Çekmece Nükleer Araştırma ve Eğitim Merkezi" olarak adlandırılmıştır [26]. 1965 yılında nükleer güç santralleri kurulması ile ilgili ilk çalışmalar başlatılmıştır. 1977 yılında faaliyete geçmesi planlanan 300-400 MWe gücünde bir CANDU tipi güç reaktörü için fizibilite çalışması yapılmış fakat yer seçimiyle ilgili sorunların yanı sıra 1968 yılında yapılan II. Beş Yıllık Kalkınma Planı'nda bu santralin yerine eğitim amaçlı prototip bir santral kurulması planlandığından proje gerçekleştirilememiştir [27]. Türkiye Elektrik Kurumu (TEK) tarafından planlanan bu prototip reaktörün daha sonra büyük kapasiteye sahip bir güç reaktörünün inşasını geciktirebileceği düşünülerek proje iptal edilmiş ve yapılan yer seçimleri sonucu Mersin Akkuyu bölgesinde 600 MWe gücünde bir NGS yapılmasına karar verilmiştir. 1976 yılında bölge Atom Enerjisi Komisyonu'ndan yer lisansı almış ve 1977 yılında ihalesi yapılmıştır ancak verilen kredi garantisinin geri çekilmesinden dolayı 1980 yılının eylül ayında proje iptal edilmiştir [28]. 1970'li yıllara gelindiğinde Türkiye'nin nükleer alandaki çalışmalarının artması ve bununla birlikte oluşan radyoizotop ihtiyacının karşılanması amacıyla TR-2 Araştırma Reaktörü'nün kurulmasına karar verilmiştir. 5 MW gücündeki araştırma reaktörü tıpta kullanılan radyoizotop üretimi, nötron aktivasyon analizleri için örnek ışınlamaları, nükleer konularda öğrenim görmekte olan öğrencilerin eğitimi gibi amaçlara hizmet etmektedir [26]. İTÜ TRIGA Mark-II Araştırma ve Eğitim Reaktörü var olan TRIGA reaktörlerinin 54.'sü olarak Türkiye'de kurulmuş ve 11 Mart 1979 tarihinde kritik yapmıştır. [29]. 1982 yılında Atom Enerjisi Komisyonu, Türkiye Atom Enerjisi Kurumu (TAEK) ismini alarak yeniden düzenlenmiştir ve nükleer güç reaktörü inşaatı konusunda yeni bir adım daha atılmıştır. Atomic Energy of Canada Limited (AECL), Kraftwerk Union AG (KWU) ve General Electric firmalarıyla anlaşmalar yapılmış, Akkuyu ve Sinop'a reaktör üniteleri kurulması planlanmıştır ancak Türkiye'nin yap-işlet-devret modelini uygulamak istemeyen KWU firması görüşmelerden çekilmiştir. AECL firması ile kurulması planlanan CANDU reaktörü için görüşmeler devam etmiş ancak firmanın yap-işlet-devret kredisini devlet garantisinde almak istemesi ve

Türk Hükümeti'nin bunu reddetmesi sebebiyle proje iptal olmuştur [28]. 1996 yılında Türkiye Elektrik Üretim İletim A.Ş. (TEAŞ) Akkuyu Nükleer Santrali için tekrar uluslararası bir ihaleye çıkmıştır ancak girişimden sonuç alınamamış ve projenin ertelenmesine karar verilmiştir [27]. TETAŞ, Akkuyu'da kurulması planlanan NGS'nin inşası, işletilmesi ve enerji satışı için 2008 yılında bir yarışma düzenlemiştir fakat yapılan değerlendirmeler sonucu Kasım 2009'da yarışmayı iptal ettiğini duyurmuştur [28]. 12 Mayıs 2010 tarihinde Rusya Federasyonu ve Türkiye Cumhuriyeti Hükümeti arasında Akkuyu Nükleer Santralinin inşası konusunda karar kılınmış ve anlaşma imzalanmıştır. Böylece Akkuyu NGS Elektrik Üretim A.Ş. Türkiye'nin ilk nükleer güç santralini hayata geçirmek üzere tescil edilmiştir. 2 Nisan 2018'de TAEK tarafından 1. Güç ünitesi için inşaat lisansı verilmiştir. Ertesi gün düzenlenen temel atma töreniyle birlikte tam kapsamlı inşaat çalışmalarına resmen başlanmıştır. Yap-sahip ol-işlet modeline göre gerçekleştirilen ilk nükleer güç santrali olma özelliği inşaat kalitesi için ek güvence anlamına gelmektedir. Akkuyu NGS Rus tasarımı VVER V-509 modelinde her biri 1200 MWe kapasiteye sahip 4 adet üniteye sahiptir. İlk ünitenin 2023 yılında, diğer ünitelerinin ise birer yıl aralıklarla 2026 yılı sonuna kadar işletmeye alınması beklenmektedir. İnşaat tamamlandığında santralin yılda 35 milyar kWh elektrik üretimi sağlaması ve Türkiye'nin elektrik ihtiyacının yaklaşık %10'unu karşılaması öngörülmektedir [30]. Sinop NGS için süreç 3 Mayıs 2013 tarihinde başlatılmış ve Elektrik Üretim A.Ş. (EÜAŞ) tarafından yürütülen proje için Japonya'ya ait Mitsubishi Heavy Industries (MHI) ve Fransız şirketi Areva ortaklığı ile tasarlanmış olan ATMEA1 tipi bir basınçlı su reaktörü (PWR) inşaatına karar verilmişti [27]. 2018 yılında saha uygunluk değerlendirmesi ve finansal model geliştirme için fizibilite çalışmaları yapılmıştır [28]. Enerji Bakanlığı tarafından fizibilite çalışmalarının değerlendirilmesi sonucu inşaat bütçesi ve tamamlama takvimi için beklentilerin karşılanmadığı bildirilmiş ve projenin ortak karar olarak ertelenmesine karar verilmiştir. Ekim 2015'te üçüncü nükleer santral inşaatı için Kırklareli'nin İğneada bölgesinin planlandığı açıklanmıştır [31]. Türkiye'de Ulusal Enerji ve Maden Politika'sının elektrik üretimi hedefleri yerli enerji üretimini arttırmak amacıyla yenilenebilir enerjinin enerji üretimindeki payını en az %30'a çıkarmak (2019'da bu hedefe ulaşılmıştır) ve nükleer santrallerin elektrik üretimindeki payını en az %10'a çıkarmaktır [28]. 2019 yılında oluşturulan 11. Beş Yıllık Kalkınma Planı, nükleer alanda yapılması planlanan teknolojik yenilikleri içermektedir. Örneğin içerikte nükleer santraller için üretilen kompozit malzemeler için yerli üretimin desteklenmesi, radyofarmasötik hammadde üretimine yönelik altyapının geliştirilmesi ve NGS'lerde teknoloji transferi ile dışa bağımlılığı azaltma gibi hedefler yer almaktadır [32].

Tartışma ve Sonuç

Türkiye, Japonya ve Güney Kore'nin nükleer teknoloji geliştirme süreçleri incelendiğinde atılan ilk adımların birbirine yakın dönemlerde gerçekleştirildiği görülmektedir. Nitekim Uluslararası Atom Enerjisi Ajansı'nın kurulduğu 1957 yılında her üç ülke de bu alanda diplomatik ilişkileri kurmaya

başlamıştır. Yapılan ilk faaliyetler nükleer ile ilgili kurumların kurulması ve araştırma reaktörlerinin inşa edilmesi olmuştur. 1960'lı yılların başında her üç ülkenin de araştırma reaktörlerinin olduğu görülmektedir. Japonya ilk elektrik üreten prototip reaktörünü 1963 yılında kurmuştur. Buna yakın bir tarih olan 1965 yılında Türkiye, 1977 yılında işletmeye alınması planlanan bir CANDU tipi güç reaktörü kurulumu için fizibilite çalışması yapmış fakat II. Beş Yıllık Kalkınma Planı'nda bu santralin yerine eğitim amaçlı prototip bir santral kurulması planlandığından projeden vazgeçilmiştir. 1966 yılında Japonya'da ithal edilen ilk ticari reaktör işletmeye açılmıştır. Hemen ardından teknoloji transferi ile farklı reaktör tiplerinin inşasına başlanmış ve 1970'li yıllara gelindiğinde kendi teknoloji kapasiteleri büyük ölçüde kurulmuştur. Güney Kore için ilk nükleer güç santralının inşasının başlaması ise 1975 yılında gerçekleşmiştir. 1976 yılında Türkiye'de bir NGS inşası için Mersin Akkuyu bölgesi seçilmiş ve yer lisansı alınmıştır. Ancak verilen kredi garantisinin geri çekilmesi sebebiyle bu proje iptal olmuştur. 1980'li yıllar Güney Kore için ithal güç reaktörlerinin hızlı bir şekilde inşa edildiği zaman dilimi olmuştur. Bu süreçte Türkiye, Akkuyu ve Sinop için birer NGS inşaatı girişiminde bulunmaktaydı. Ancak görüşme yapılan firmalarla anlaşmaya varılamadığından proje gerçekleştirilememiştir. 1987 yılında Güney Kore kendine yeterlilik için teknoloji transferini başlatmış ve KSNP tasarımını oluşturmuştur. 1996 yılında Türkiye'de Akkuyu NGS için yeniden bir ihaleye çıkılmış ancak bir sonuç alınamamıştır. 2008 yılında ihale için gerçekleştirilen yarışmanın iptal edilmesinden sonra 2010 yılında Rusya ile Akkuyu NGS inşası konusunda karar kılınmış ve anlaşma imzalanmıştır. Şu anda inşası devam etmekte ve ilk ünitenin 2023 yılında işletmeye alınması planlanmaktadır. Güney Kore ve Japonya günümüzde uluslararası birçok projede söz sahibi olan, kendi tasarımlarını geliştiren ve ihraç eden ülkeler konumundadır. Yukarıda belirtilen tüm bu süreçler daha anlaşılır bir şekilde sunulabilmesi için Şekil 1 Japonya ve Güney Kore ve Şekil 2 Türkiye için olmak üzere birer şema haline getirilmiş ve aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. Japonya ve Güney Kore nükleer teknolojileri geliştirme tarihi şeması

Nükleer güç reaktörleri ileri teknoloji ve yatırım gerektiren büyük projelerdir. Bu teknolojinin edinilmesi ve devamlılığının sağlanabilmesi için uzun süreçlerde istikrarlı bir ilerleme sağlanması gerekmektedir. Türkiye nükleer enerjinin önemini erken bir dönemde kavrayan ve bu alanda hızlı bir şekilde anlaşmalar yaparak girişimlere başlayan ülkelerden biridir. Ancak nükleer teknolojilerin elde edilme sürecinde çoğunlukla ekonomik tabanlı sebeplerden kaynaklanan bir istikrarsızlık görülmektedir. Nükleer süreçlere Türkiye ile yakın tarihlerde başlayan iki ülke olarak Japonya ve Güney Kore'de bu istikrarın sağlanabildiği ve bu teknolojiyi elde etme, transferini sağlama ve gerekli altyapıyı oluşturma gibi adımların başarıyla uygulandığı görülmektedir. Türkiye'de nükleer alanda oluşturulan politika doğrultusunda girişimlerde bulunmaya devam edilmektedir. Türk öğrenciler ve uzmanlar ülke içinde eğitim almakta ve yurt dışında uzman yetiştirme programlarına katılmaktadır. Yazarların görüşü Türkiye için kendine yeterliliğin sağlanması ve dışa bağımlılığın azaltılması sürecinde nükleer alanlarda gerekli ekipmanların ülke içinde de üretilmesi gerektiği yönündedir. Nükleer programlarda kullanılan laboratuvar ve malzemelerin iyileştirilmesi ve yeni nükleer alanların açılması eğitim faaliyetleri için faydalı olacaktır. Teknoloji transferinin başarılı bir şekilde sağlanmasından sonraki süreçte Türkiye'nin nükleer teknolojileri üreten ve ihraç eden bir ülke haline gelmesi beklenmektedir.

Teşekkür -

Fon/Finansman bilgileri Herhangi bir kurum ve/veya kuruluş tarafından desteklenmemiştir.

Etik Kurul Onayı ve İzinler Çalışma, etik kurul izni ve herhangi bir özel izin gerektirmemektedir.

Çıkar Çatışmaları/Çatışan Çıkarlar Herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

Yazarların Katkısı Bu çalışma Sinop Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Nükleer Enerji Mühendisliği Bölümünde bitirme projesi olarak sunulmuştur. Tüm yazarlar, bu çalışmanın yürütülmesine yazar olarak dahil edilmek üzere yeterince katkıda bulunmuştur. Tüm yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

- [1] Muray, R. L., & Holbert, K. E. (2015). *Nükleer Enerji* (7. Baskı). (A. H. Yılmaz vd., Çev.) Nobel Akademik Yayıncılık. (Orijinal eserin basım tarihi 2015).
- [2] Meteoroloji Genel Müdürlüğü (2021, Haziran). *İklim değişikliği*. <https://mgm.gov.tr/iklim/iklim-degisikligi.aspx>
- [3] International Energy Agency (2021, Haziran). *Climate Change*. <https://www.iea.org/topics/climate-change>
- [4] Türkiye Cumhuriyeti Enerji ve Tabii Kaynaklar Bakanlığı (2021, Haziran). *Nükleer Enerji*. <https://enerji.gov.tr/bilgi-merkezi-enerji-nukleer-enerji>
- [5] Temurçin, K. & Aliagaoglu, A. (2003). Nükleer enerji ve tartışmalar ışığında Türkiye'de nükleer enerji gerçeği. *Coğrafi Bilimler Dergisi*, 1(2): 25-39. https://doi.org/10.1501/Cogbil_0000000034
- [6] International Atomic Energy Agency (2021, 18 Aralık). *Nuclear share of electricity generation*.

- <https://pris.iaea.org/PRIS/WorldStatistics/NuclearShareofElectricityGeneration.aspx>
- [7] World Nuclear Association (2021, Aralık). *Nuclear power in Japan*. <https://www.world-nuclear.org/information-library/country-profiles/countries-g-n/japan-nuclear-power.aspx>
- [8] World Nuclear Association (2021, Ekim). *Nuclear power in South Korea*. <https://www.world-nuclear.org/information-library/country-profiles/countries-o-s/south-korea.aspx>
- [9] Akkuyu Nükleer (2021). *Akkuyu NGS inşaat projesi*. <http://www.akkuyu.com/index.php?lang=tr>
- [10] Türkiye Cumhuriyeti Enerji ve Tabii Kaynaklar Bakanlığı (2021). *Sıkça sorulan sorular* <https://enerji.gov.tr/sikca-sorulan-sorular>
- [11] Bredimas, A. ve Nuttall, W. J. (2008). An international comparison of regulatory organizations and licensing procedures for new nuclear power plants. *Energy Policy*, 36(4): 1344-1354. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2007.10.035>
- [12] Yoon, S., Kim, S. & Jeong, M. (2011). Similarities and differences of development paths of the nuclear technological systems of Japan and Korea: Focused on the concepts of momentum and reverse salients. *Hwangyeongsahoehag-yeongu* ECO 15(2), 147-195. <https://www.dbpia.co.kr/Journal/articleDetail?nodeId=NODE01788288#none>
- [13] Jin, S. & Park, J. (2012). A comparative study on the energy policies of South Korea and Germany, Focusing on policy stream model. *Hangugjeongchaeghaghoebo*, 21(3), 265-289.
- [14] Oğul, H., & Karaağaç, M. O. (2019). Public attitudes toward nuclear power plants in Turkey. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 25(4), 423-429. <https://doi.org/10.5505/pajes.2018.97415>
- [15] Shim, J., & Park, C. (2015). Identifying policy frames through semantic network analysis: An examination of nuclear energy policy across six countries. *Policy Sciences*, (48), 51-83. <https://doi.org/10.1007/s11077-015-9211-3>
- [16] Yamashita, K. (2015). History of nuclear technology development in Japan. *AIP Conference Proceedings*, 1659, 020003. <https://doi.org/10.1063/1.4916842>
- [17] Japan Atomic Energy Agency (2021, Haziran). *JRR-4*. https://www.jaea.go.jp/english/04/ntokai/kasokuki/kasokuki_02.html
- [18] Japan Atomic Energy Agency (2021). *Nuclear Safety Research Reactor*. <https://nsrr.jaea.go.jp/>
- [19] Japan Atomic Energy Agency (2021). *Decommissioning and R&D of JMTR (Japan Materials Testing Reactor)*. https://www.jaea.go.jp/04/o-arai/en/research/research_02.html
- [20] Japan Atomic Energy Agency (2021). *Our history*. <https://www.jaea.go.jp/english/about/history.html>
- [21] Türk Asya Stratejik Araştırmalar Merkezi (2007, 18 Nisan). *Güney Kore Nükleer Teknoloji İnceleme Gezisi*. <https://tasam.org/tr-TR>
- [22] Korea Atomic Energy Research Institute (2018). *History and research achievements*. <https://www.kaeri.re.kr/eng/board?menuId=MENU00734>
- [23] World Nuclear News (2021, 14 Mayıs). *KHNP applies to dismantle Kori 1*. <https://world-nuclear-news.org/Articles/KHNP-applies-to-dismantle-Kori-1>

- [24] United States Energy Information Administration (2021). *Today in energy*.
<https://www.eia.gov/todayinenergy/detail.php?id=44916>
- [25] Türkiye Atom Enerjisi Kurumu (2020). <https://www.taek.gov.tr>
- [26] Türkiye Enerji, Nükleer ve Maden Araştırma Kurumu (2021). *TR-2 Araştırma Reaktörü tesisi*.
<https://nuken.tenmak.gov.tr/tr/tesisler/arastirma-reaktoru.html>
- [27] Eral. M. (2015). Nükleer Güç Santralleri ve Ülkemiz.
https://www.kmo.org.tr/resimler/ekler/1423037b0f99b51_ek.pdf
- [28] International Atomic Energy Agency (2021). *Country nuclear power profiles Turkey*.
<https://cnpp.iaea.org/countryprofiles/Turkey/Turkey.html>
- [29] TRIGA Mark-II Reaktörü (2021). *TRIGA Mark-II Araştırma ve Eğitim Reaktörü*
<http://www.triga.itu.edu.tr>
- [30] Akkuyu Nükleer (2021). *Projenin tarihçesi*. <http://www.akkunpp.com/projenin-tarihcesi>
- [31] World Nuclear Association (2021, Kasım). *Nuclear power in Turkey* <https://world-nuclear.org/information-library/country-profiles/countries-t-z/turkey.aspx>
- [32] Türkiye Cumhuriyeti Cumhurbaşkanlığı Strateji ve Bütçe Başkanlığı (2019-2023). *11. Beş yıllık kalkınma planı*. <https://www.sbb.gov.tr/kalkinma-planlari/>



The Proposal of Gamma Folded-Normal Distribution

Yasin ALTINIŞIK¹, Tahir CEYLAN² and Emel ÇANKAYA¹

How to cite: Altınışik, Y., Ceylan, T., & Çankaya, E. (2022). The proposal of gamma folded-normal distribution. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 116-131. <https://doi.org/10.33484/sinopfbid.1164454>

Research Article

Corresponding Author
Yasin ALTINIŞIK
yaltinisik@sinop.edu.tr

ORCID of the Authors
Y.A: 0000-0001-9375-2276
T.C: 0000-0002-3187-2800
E.Ç: 0000-0002-2892-2520

Received: 19.08.2022
Accepted: 11.10.2022

Abstract

Development of new flexible distributions for modeling non-negative measurements occurring in lifetime or reliability studies is a prominent research area in Statistics. As being the most favoured positive definite form, the Gamma distribution poses a basis for such improvements. It is well known that transforming a Gamma variable with another continuous random variable (X) creates Gamma-X family of distributions. Following this principle, we here attempted to define the X variable as Folded-Normal distributed which is also positive definite so as to propose a new family of distributions. Named as Gamma Folded-Normal distribution (GFN), our proposal is a generalization of Gamma Half-Normal distribution and contains more freely estimated parameters. This study evaluates some mathematical properties of GFN distribution such as moments and illustrates the estimation procedure for unknown parameters through a simulation study. A separate simulation is also conducted to compare the performance of this new distribution with the Folded-Normal, Half-Normal and Gamma Half-Normal distributions. Besides, the practical importance of our new proposal is illustrated by analyzing a real world data set.

Keywords: Gamma-X Family, Gamma Half-Normal, Folded-Normal, Lifetime Data, Non-negative Modeling

Gamma Katlanmış-Normal Dağılım Önerisi

¹Sinop University, Faculty of Arts and Sciences, Statistics Department, Sinop, Türkiye

²Sinop University, Faculty of Arts and Sciences, Mathematics Department, Sinop, Türkiye

Öz

Yaşam ve güvenilirlik çalışmalarında ortaya çıkan negatif olmayan ölçümleri modellemek için yeni esnek dağılımların geliştirilmesi, İstatistikte dikkat çeken bir araştırma alanıdır. Pozitif tanımlı ve en çok tercih edilen bir biçim olan Gamma dağılımı, bu tür geliştirmeler için bir temel oluşturur. Bir Gamma değişkenini başka bir sürekli rastgele değişken (X) ile dönüştürmenin, Gamma-X dağılım ailesini oluşturduğu iyi bilinmektedir. Bu prensibi takip ederek, X değişkenini de yine pozitif tanımlı olan Katlanmış-Normal dağılımlı tanımlayarak, burada yeni bir dağılım ailesi önermeye çalıştık. Gamma Katlanmış-Normal dağılım (GFN) olarak adlandırılan önerimiz, Gamma Yarı-Normal dağılımının bir genellemesidir ve daha fazla sayıda serbest tahminli parametreler içerir. Bu çalışma, GFN dağılımının momentler gibi bazı matematiksel özelliklerini geliştirmekte ve bir simülasyon çalışması aracılığıyla bilinmeyen parametreler için tahmin prosedürünü göstermektedir. Bu yeni dağılımın performansını, Katlanmış-Normal, Yarı-Normal ve Gamma Yarı-Normal dağılımları ile karşılaştırmak için ise ayrı bir simülasyon çalışması da gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, bir gerçek hayat veri setinin analizi yapılarak yeni önerimizin uygulamada önemi gösterilmiştir.

Introduction

Attempts to define new Gamma related probability distributions serve for non-negative modeling particularly for lifetime processes. The need for such attempts stems from the fact that many well-known distributions fail to provide precise evaluation of real world phenomena. In this respect, Alzaatreh, Famoye, and Lee [1] suggested a new method to generate a new class of distributions. It is based on transforming a random variable (T) by another random variable (X), resulting in T-X family of distributions. If T is chosen as a Gamma distributed random variable then Gamma-X family of distributions are produced [1]. Particularly suitable to the non-negative nature of lifetime processes, X is further chosen as a positive definite continuous distribution. In the literature, Half-Normal (HN) distribution appears one of the most preferable transformer (X) for this purpose, which creates the Gamma Half-Normal (GHN) distribution [2]. This new form is stated as more flexible due to the additional shape (α) and scale (β) parameters of Gamma to the only parameter of HN (σ) that characterises the shape [3]. The Folded-Normal distribution (FN) is also suitable for modeling positive values and known to be a special case of the Gaussian distribution [4, 5]. It resembles the HN distribution where the location parameter μ is not necessarily zero. FN distribution can be considered as a good candidate for the derivation of a new flexible distribution due to its additional location parameter. The main objective of this study is therefore to offer a new combined form of Gamma using the Folded-Normal distribution with the claim of that the resulting distribution would provide a more accurate assessment of the data. The proposal of the Gamma Folded-Normal (GFN) distribution would be a member of Gamma-X family of distributions and could be considered as a generalization of the GHN distribution as it turns out to be the GHN distribution when its location parameter μ is equal to zero. The aim of this study is to provide various properties of this new distribution including maximum likelihood estimation of its four parameters. Two simulation studies are conducted to investigate the distributional properties of GFN in comparison to the HN, FN, and GHN distributions. A real data example is also provided to support the conclusions drawn from the simulation experiments. The outline of the paper is as follows. Next section gives a general definition of Gamma-X family and Folded-Normal distributions. This is followed by the generation of the GFN distribution based on this definition as well as the derivation of the maximum likelihood estimates of the parameters and moments for this new form. As a crucial step of parameter estimation process, the choice of initials for the model parameters is introduced as a requirement of an optimization process in a separate section. Simulation section provides a performance evaluation for each distribution with respect to bias, precision, and accuracy measures as well as the log likelihood values. Following section discusses the

applicability of the GFN distribution through a real world data analysis. The paper is then finalised with a brief discussion.

The Folded-Normal and Gamma-X Family of Distributions

Let X be a random variable that has the FN distribution with a location parameter μ and a scale parameter σ . The probability density function (PDF) of $X \sim \text{FN}(\mu, \sigma)$ can be defined as

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mu)^2} \right] \quad (1)$$

where $\mu \geq 0$ and $\sigma > 0$. Note that this functional form reduces to the PDF of the HN distribution when the location parameter μ is equal to zero. Taking the integral of (1) with respect to X gives the cumulative density function (CDF) of the FN distribution:

$$F(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right) - 1 \quad (2)$$

where $\Phi(\cdot)$ is the CDF of the standard normal distribution. Then, (1) and (2) above can be incorporated into Gamma-X family of distributions to produce our new proposal which would contain four parameters (i.e., α and β belonging to the gamma distribution and μ and σ to the FN distribution).

The Gamma-X family of distributions is a member of a more general the T-X family of distributions described by [1]. The PDF and the CDF of the Gamma-X family of distributions are the main tools for characterizing the new proposal of the current paper. In general definition, the PDF of the Gamma-X family of distributions is given by

$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} f(x) (-\log(1 - F(x)))^{\alpha-1} (1 - F(x))^{\frac{1}{\beta}-1} \quad (3)$$

where α and β are the parameters of the gamma distribution and $f(x)$ and $F(x)$ are the PDF and CDF of the continuous target distribution (e.g., the FN distribution with parameters μ and σ in our case), respectively. Similarly, the CDF of the Gamma-X family of distributions is defined by

$$H(x) = \int_0^{-\log(1-F(x))} r(t) dt \quad (4)$$

where $r(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}$, $t \geq 0$ is the PDF of the Gamma distribution.

Following the principles of the Gamma-X family of distributions introduced here, the next section gives the derivation of our new proposal, namely Gamma Folded-Normal (GFN), as well as the elaboration of the parameter estimation and the evaluation of the moments for this new form.

The GFN Distribution: Definition and Parameter Estimation

Let X be a positively defined random variable from the GFN distribution ($X \sim \text{GFN}(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$) with four freely estimated parameters, where $\mu \geq 0$ and α, β , and $\sigma > 0$. The PDF of variable X can be obtained by incorporating the PDF and CDF of the FN distribution in (1) and (2) into the PDF of the

Gamma-X family of distributions in (3). The resulting PDF of X is here named as the GFN distribution and can be defined as

$$h(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mu)^2} \right] \times (-\log(2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})))^{\alpha-1} \times (2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma}))^{\frac{1}{\beta}-1} \quad (5)$$

The Gamma Folded-Normal distribution containing four freely estimated parameters is the end point of a sequence of generalizations which started with the Half-Normal distribution. The $h(x)$ function above reduces to the PDF of the GHN distribution for $\mu = 0$; the FN distribution for $\alpha = \beta = 1$; and the HN distribution for $\alpha = \beta = 1$ and $\mu = 0$. Figure 1 displays the distributional forms of the GFN for varying values of α , β , μ , and σ parameters.

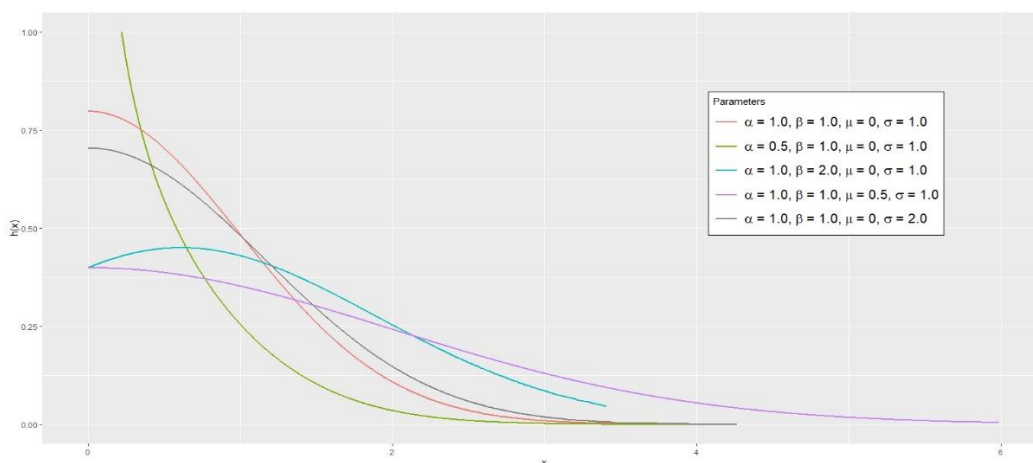


Figure 1. Illustrations of the GFN distribution with varying values of parameters.

The CDF of Gamma-X family of distributions in (4) with respect to the FN continuous target distribution is defined as

$$H(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{-\log(2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma}))} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt \quad (6)$$

By applying $u = \frac{t}{\beta}$ transformation, the $H(x)$ function above becomes

$$H(x) = \gamma(\alpha, -\frac{1}{\beta} \log(2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma}))) / \Gamma(\alpha) \quad (7)$$

where $\gamma(\cdot)$ is the lower incomplete gamma function with $\gamma(\alpha, A) = \int_0^A u^{\alpha-1} e^{-u} du$.

Let x_1, x_2, \dots, x_n be a sample of size n from the GFN distribution. To facilitate the log likelihood function based on this sample, the $h(x)$ function is analogously expressed by

$$h(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (1 + e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) \right]$$

$$\begin{aligned} & \times (-\log(2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})))^{\alpha-1} \\ & \times (2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma}))^{\frac{1}{\beta}-1} \end{aligned} \quad (8)$$

where $\Phi(\cdot)$ is the CDF of the standard normal distribution.

Then, the log likelihood function for the Gamma Folded-Normal distribution is given by

$$\begin{aligned} \log L(\alpha, \beta, \mu, \sigma) &= -\alpha n \log(\beta) - n \log(\Gamma(\alpha)) - \frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{-\frac{2\mu x_i}{\sigma^2}}) \\ & + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(-\log(2 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma}))) \\ & + (\frac{1}{\beta} - 1) \sum_{i=1}^n \log(2 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma})) \end{aligned} \quad (9)$$

The log likelihood function above can be maximized by the estimates of α , β , μ , and σ parameters. This can be ensured by taking the derivative of the log likelihood function with respect to each parameter and setting the resulting expression equal to zero (see Appendix A). However, these expressions do not have closed form solutions, since they involve the functions of the CDF of a Normal distribution and/or the derivative of the Gamma function. Thus, a numerical procedure is utilized to estimate model parameters. The Rv3.2.4 package *maxLik* with the subroutine Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) optimisation method is used for maximum likelihood estimation. Implementation of the BFGS procedure in R statistical software [6] requires a set of properly chosen initial values for the parameters, which will be elaborated after defining the moments for the GFN distribution in the following section.

Moments

Lemma 1 If $u = -\log[2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})]$, the derivative with respect to u can be defined as

$$du = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} [e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}}]}{\Phi(-\frac{x-\mu}{\sigma}) + \Phi(-\frac{x+\mu}{\sigma})}$$

Proof $u = -\log[2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})]$

$$\begin{aligned} &= -\log[1 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) + 1 - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})] \\ &= -\log[\Phi(-\frac{x-\mu}{\sigma}) + \Phi(-\frac{x+\mu}{\sigma})] \end{aligned}$$

where $\Phi(\cdot)$ is the CDF of the standard normal distribution. Thus,

$$du = \frac{\frac{1}{\sigma} [\Phi'(-\frac{x-\mu}{\sigma}) + \Phi'(-\frac{x+\mu}{\sigma})]}{\Phi(-\frac{x-\mu}{\sigma}) + \Phi(-\frac{x+\mu}{\sigma})}$$

where $\Phi'(-\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\text{and } \Phi'(-\frac{x+\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Lemma 2 If $u = -\log[2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})]$, variable X following GFN distribution can be defined with respect to u as

$$x = (-0.5)\sigma\Phi^{-1}(e^{-u})$$

Proof. By following Lemma 1,

$$\Phi(-\frac{x-\mu}{\sigma}) + \Phi(-\frac{x+\mu}{\sigma}) = e^{-u}.$$

If we take the inverse CDF of both sides of the equation above

$$-\left[\frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{x+\mu}{\sigma}\right] = \Phi^{-1}(e^{-u})$$

and then

$$x = (-0.5)\sigma\Phi^{-1}(e^{-u}).$$

The r th moments of the GFN distribution using the PDF of variable X in (5) can be defined as

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty X^r [e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mu)^2}] \\ &\times (-\log(2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma})))^{\alpha-1} \\ &\times (2 - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x+\mu}{\sigma}))^{\frac{1}{\beta}-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

By following Lemma 1 and Lemma 2, the equation above can be simplified as

$$E(X^r) = \frac{(-0.5)^r \sigma^r}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty [\Phi^{-1}(e^{-u})]^r u^{\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}} du. \quad (11)$$

Note that there is no closed form solution available for the integral above, similar to the moments of the GHN distribution (see [2, p. 109]).

Choice of Initials

This section elaborates on how to choose initial values for the parameter(s) of the HN, FN, GHN, and GFN distributions. Like many optimization techniques, the BFGS method often converges and performs well in estimating model parameters if the initials for the parameters are close enough to the roots of expressions set to zero. The sample mean (\bar{x}) is considered in this paper as a reasonable initial for the location parameter μ in the FN distribution, that is, $\mu_{\text{init}} = \bar{x}$, where $X \sim FN(\mu, \sigma)$. Moreover, an association between parameters μ and σ in the FN distribution is given by [6].

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \mu^2. \quad (12)$$

Based on this relationship, the initial for the scale parameter σ is chosen as

$$\sigma_{\text{init}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad (13)$$

where the parameter μ is replaced by the sample mean \bar{x} .

In addition, a set of initials for the parameters of the GHN distribution is provided by [2]

$$\sigma_{\text{init}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{x}, \quad \alpha_{\text{init}} = \frac{\bar{y}^2}{s_y^2}, \quad \text{and} \quad \beta_{\text{init}} = \frac{s_y^2}{\bar{y}} \quad (14)$$

where \bar{y} and s_y are the sample mean and standard deviation of $y_i = \log(2\Phi(-\frac{x_i}{\sigma}))$, $i = 1, 2, \dots, n$ that is assumed to be drawn from the Gamma distribution with parameters α and β . The equation $\sigma_{\text{init}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{x}$ can also be used as the initial for the scale parameter σ in the HN distribution, since this distribution is a special case of the GHN distribution where $\alpha = \beta = 1$. This paper utilizes the sample mean as the initial for the location parameter μ in the GFN distribution. The formulas in (14) are used to obtain the initials for the other parameters, where $y_i = -\log(2 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma}))$, $i = 1, 2, \dots, n$ come from the Gamma distribution. As will be elaborated in the next section, the conformity of the set of initials above when estimating model parameters for the GFN distribution is empirically tested and validated via a simulation study.

Simulations

This section conducts two separate simulations. In the first, the conformity of the sets of initials presented in the previous section are empirically tested and validated by measuring the bias, precision, and accuracy with varying sample sizes for the HN, FN, GHN, and GFN distributions, respectively. In the second simulation, the performance of the distributions are compared to each other in relation to varying sample sizes based on the log likelihood values. Parameter estimation in the simulations is performed using the method of maximum likelihood with the Conjugate-Gradient (CG) optimisation method.

For the first simulation, the measures used for the estimates of each parameter can be defined as:

$$\begin{aligned} \text{Bias} &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (\hat{\theta}_s - \theta), \\ \text{Precision} &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (\hat{\theta}_s - \bar{\theta})^2, \\ \text{Accuracy} &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (\hat{\theta}_s - \theta)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

where $\bar{\theta} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{\theta}_s$ for $s = 1, 2, \dots, 1000$. The steps below are executed to obtain these measures under each of the distributions:

Step 1:

(a) *For the HN distribution:* Set $\sigma = 2$ as the population value of the scale parameter, where the location parameter μ is assumed by definition to be set to zero.

(b) *For the FN distribution:* Set $\mu = 4$ and $\sigma = 1$ as the population values of the location and scale parameters, respectively.

(c) *For the GHN distribution:* Set the population values of the parameters as $\alpha = 1$, $\beta = 1$, and $\sigma = 2$.

(d) *For the GFN distribution:* Set the population values of the parameters as $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\mu = 30$, and $\sigma = 0.8$.

Step 2: Choose the sample size as $N = 20, 50, 100$ or 1000 .

Step 3: Generate the data from one of the listed distributions with the particular parameter values defined in Step 1 and with the sample size chosen in Step 2.

Step 4: Set the initials for the parameters based on the information given in the previous subsection.

Step 5: Estimate the model parameter(s) for each distribution and calculate the bias, precision, and accuracy measures in (15). Repeat steps from 3 to 5 by 1000 times.

Step 6: Calculate the means of the estimates and measures in Step 5 across 1000 simulation trials.

Table 1 displays the results of the first simulation for the sample sizes of 20, 50, 100 or 1000. The estimates of parameters get closer to the population values of parameters (i.e., smaller bias), thus better precision and accuracy measures are obtained as the sample size increases. This implies that the set of initials provided in the previous section are adequately determined.

For the second simulation, the data sets are generated with varying sample sizes (i.e., 20, 50, 100, and 1000) from the HN, FN, and GHN distributions. The performance of the GFN distribution is inspected along with these distributions with respect to log likelihood values. Figures 2, 3, and 4 display the log likelihood values obtained across the 1000 simulation trials, where $X \sim HN(\sigma = 2)$, $X \sim FN(\mu = 4, \sigma = 1)$, and $X \sim GHN(\alpha = 1, \beta = 1, \sigma = 2)$, respectively. The log likelihoods for the GFN distribution in these figures are often larger than those for other distributions, no matter what the underlying distributions of the simulated data sets are. The superiority of the GFN distribution becomes more apparent for larger sample sizes. It should be noted that, since the HN distribution has only the scale parameter, it is not a flexible distribution, and thus, it does not perform well (i.e., it has small log likelihood value) when compared to other distributions. In the simulations, this happened when the data sets are generated from the HN distribution using a small sample size (i.e., when $n = 20$) and when the data sets are generated from the FN distribution, where the location parameter is $\mu = 4$ and not $\mu = 0$.

Table 1. Estimates, bias, precision, and accuracy measures for the parameters of the HN, FN, GHN, and GFN distribution

$X \sim HN(\sigma = 2)$				
Sample size	$\hat{\sigma}$	Bias (σ)	Precision (σ)	Accuracy (σ)
$N = 20$	1.969	-0.031	0.097	0.098
$N = 50$	1.993	-0.007	0.041	0.041
$N = 100$	1.995	-0.005	0.018	0.018
$N = 1000$	2.000	-0.0004	0.002	0.002
$X \sim FN(\mu = 4, \sigma = 1)$				
Sample size	$\hat{\mu}$	Bias (μ)	Precision (μ)	Accuracy (μ)
$N = 20$	3.999	-0.001	0.052	0.052
$N = 50$	3.991	-0.009	0.021	0.021
$N = 100$	3.997	-0.003	0.011	0.011
$N = 1000$	4.000	0.0005	0.001	0.001
Sample size	$\hat{\sigma}$	Bias (σ)	Precision (σ)	Accuracy (σ)
$N = 20$	0.958	-0.042	0.024	0.026
$N = 50$	0.986	-0.014	0.010	0.010
$N = 100$	0.992	-0.008	0.005	0.005
$N = 1000$	0.999	-0.001	0.0005	0.0005
$X \sim GHN(\alpha = 1, \beta = 1, \sigma = 2)$				
Sample size	$\hat{\alpha}$	Bias (α)	Precision (α)	Accuracy (α)
$N = 20$	1.150	0.150	0.164	0.187
$N = 50$	1.042	0.042	0.055	0.056
$N = 100$	1.019	0.019	0.028	0.029
$N = 1000$	1.008	0.008	0.004	0.004
Sample size	$\hat{\beta}$	Bias (β)	Precision (β)	Accuracy (β)
$N = 20$	1.533	0.533	1.726	2.011
$N = 50$	1.592	0.592	1.727	2.078
$N = 100$	1.405	0.405	1.016	1.180
$N = 1000$	1.024	0.024	0.107	0.108
Sample size	$\hat{\sigma}$	Bias (σ)	Precision (σ)	Accuracy (σ)
$N = 20$	2.242	0.242	1.683	1.741
$N = 50$	2.179	0.179	1.300	1.332
$N = 100$	2.131	0.131	0.960	0.977

Table 1. ...continued

$X \sim GFN(\alpha = 1, \beta = 1, \mu = 30, \sigma = 0.8)$				
Sample size	$\hat{\alpha}$	Bias (α)	Precision (α)	Accuracy (α)
$N = 20$	0.811	-0.189	0.279	0.315
$N = 50$	0.903	-0.097	0.229	0.238
$N = 100$	0.970	-0.030	0.127	0.128
$N = 1000$	1.013	0.013	0.017	0.017
Sample size	$\hat{\beta}$	Bias (β)	Precision (β)	Accuracy (β)
$N = 20$	1.904	0.904	3.012	3.830
$N = 50$	1.693	0.693	1.794	2.274
$N = 100$	1.344	0.344	0.824	0.942
$N = 1000$	1.062	0.062	0.118	0.122
Sample size	$\hat{\mu}$	Bias (μ)	Precision (μ)	Accuracy (μ)
$N = 20$	30.213	0.213	1.309	1.355
$N = 50$	30.093	0.093	0.955	0.964
$N = 100$	30.048	0.048	0.647	0.619
$N = 1000$	29.988	-0.012	0.103	0.104
Sample size	$\hat{\sigma}$	Bias (σ)	Precision (σ)	Accuracy (σ)
$N = 20$	0.609	-0.191	0.444	0.481
$N = 50$	0.671	-0.129	0.061	0.078
$N = 100$	0.732	-0.068	0.025	0.030
$N = 1000$	0.795	-0.005	0.004	0.005

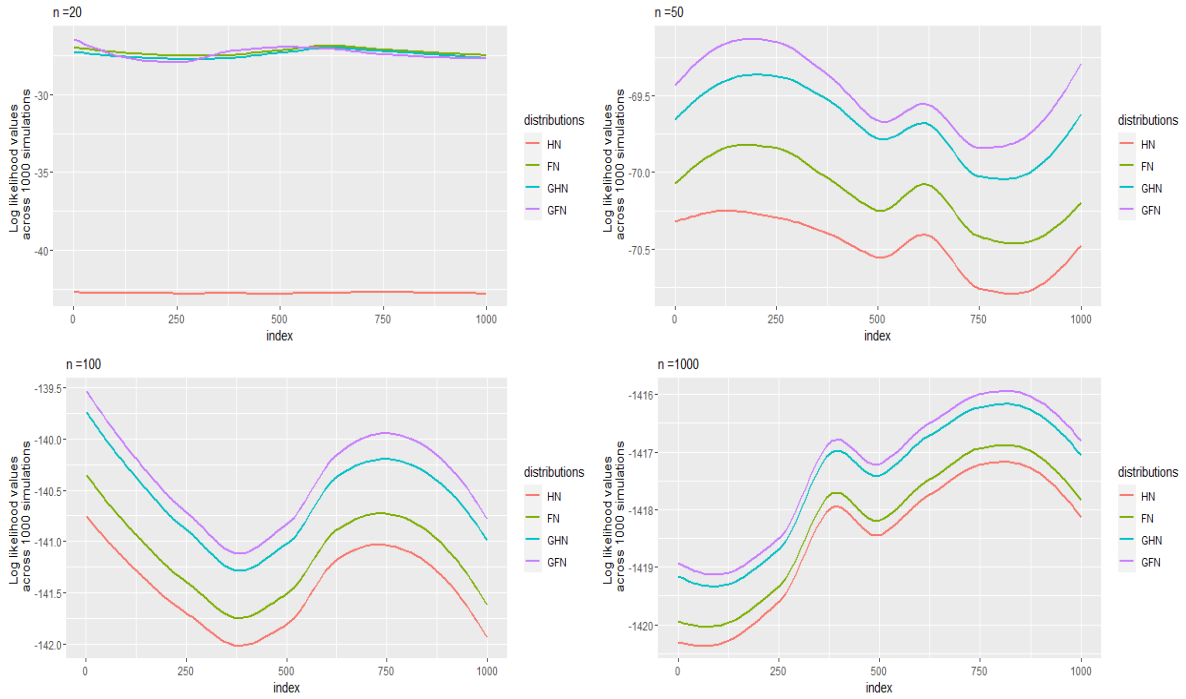


Figure 2. The log likelihood values with varying sample sizes where $X \sim HN(\sigma = 2)$.

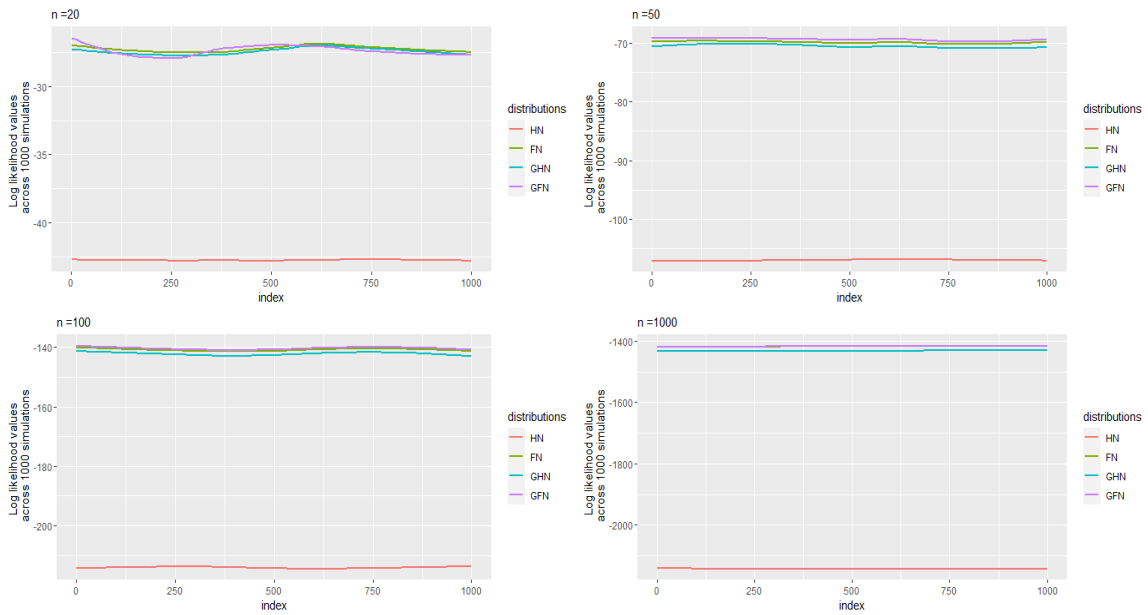


Figure 3. The log likelihood values with varying sample sizes where $X \sim FN(\mu = 4, \sigma = 1)$.

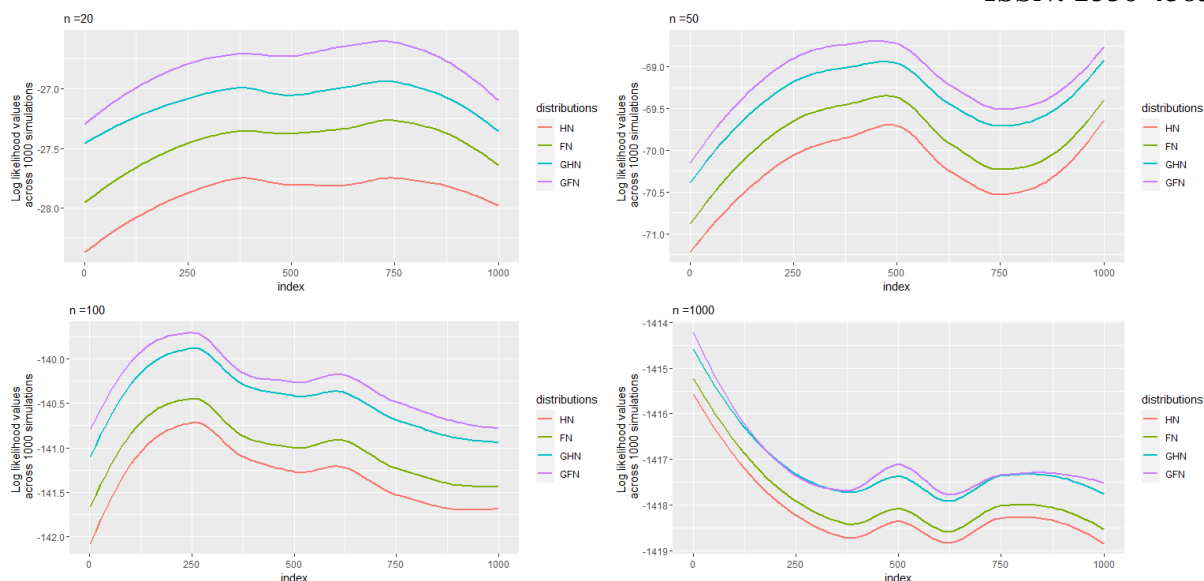


Figure 4. The log likelihood values with varying sample sizes where $X \sim GHN(\alpha = 1, \beta = 1, \sigma = 2)$.

Real Data Example

In order to illustrate the fitting performance of the new Gamma Folded-Normal distribution, the strength data for single carbon fibers first reported by Bader and Priest [7] were used. Single fibers were measured in GPA and tested under tension at gauge lengths of 1, 10, 20 and 50 mm. For the current study, we considered the transformed form of the tensile strength data for the single fibers of 20mm ($N=69$) which have also been the subject of some other studies for modeling purposes [8, 2]. The performance assessment of GFN was achieved by comparing its probability density function and cumulative density function with those of the Half-Normal, Folded-Normal, and Gamma Half-Normal distributions. Figure 5 presents the histogram of the data and the estimated HN, FN, GHN, and GFN distributions. This figure shows that the fits of the GFN and FN distributions to the data are better than that of the HN and GHN distributions. Figure 6 displays the cumulative density functions for all distributions. It should be noted that the cumulative density function for the GFN distribution (along with the CDFs of other distributions except the HN distribution) fluctuates around the empirical cumulative distribution function, which implies that the GFN distribution performs well in explaining the underlying distribution of the data.

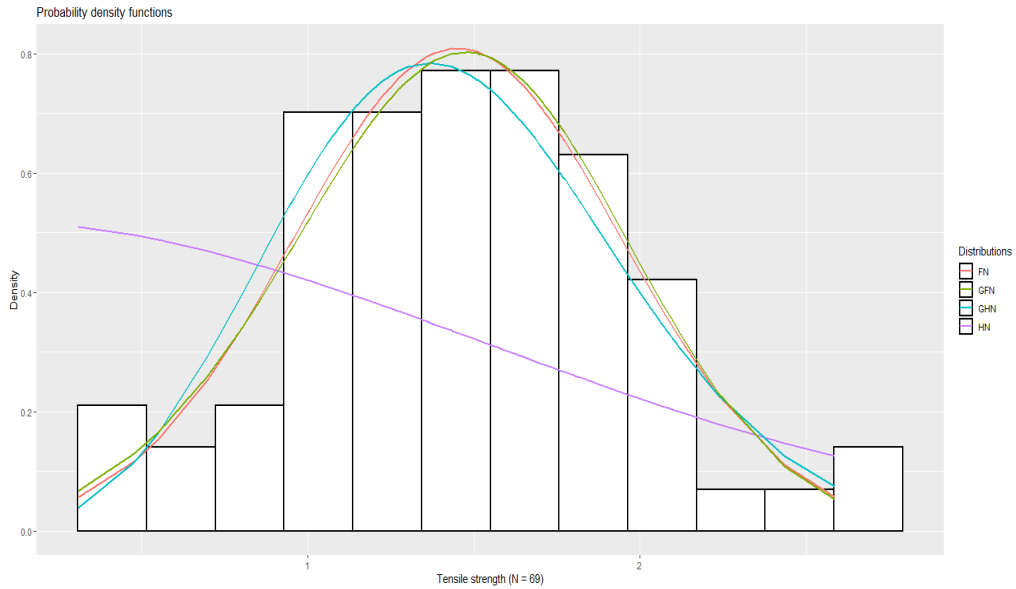


Figure 5. Histogram of the data and probability density functions with the fit of HN, FN, GHN, and GFN distributions.

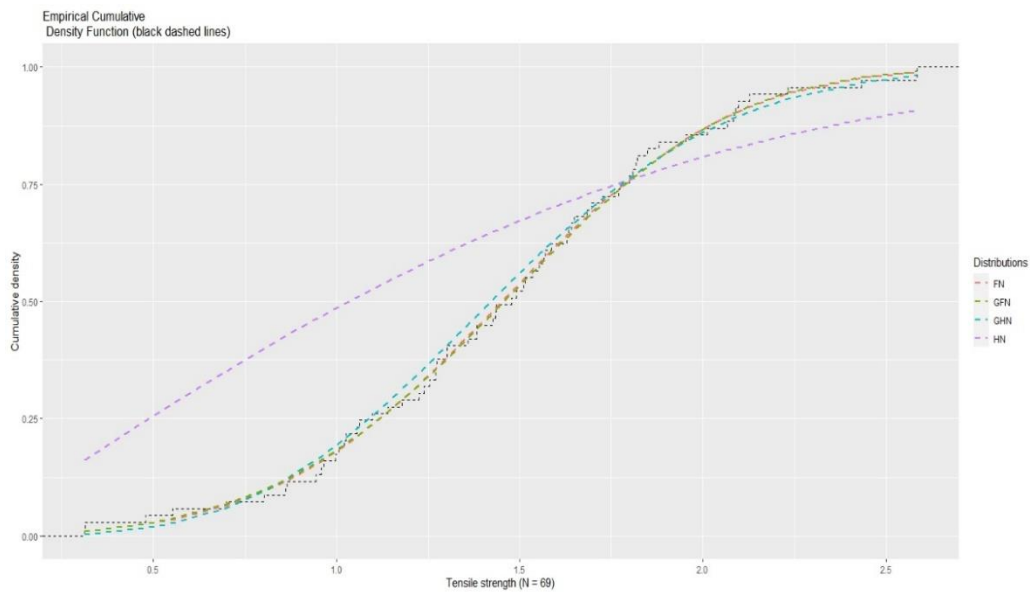


Figure 6. Cumulative density functions for the HN, FN, GHN, and GFN distributions.

Table 2 displays the maximum likelihood estimates (MLEs) of model parameters for the HN, FN, GHN, and GFN distributions. Table 3 shows the log likelihood values for the distributions. The results presented in this table indicate that the GFN distribution has the best fit among the four distributions. In comparison to the GHN distribution, the fitting performance seems to be improved by the additional location parameter.

Table 2. Parameter estimates of the HN, FN, GHN, and GFN distributions for the tensile strength data

Distributions	Parameters	Estimates
HN	σ_{HN}	$\hat{\sigma}_{HN} = 1.53$
FN	μ_{FN}	$\hat{\mu}_{FN} = 1.45$
	σ_{FN}	$\hat{\sigma}_{FN} = 0.49$
GHN	α_{GHN}	$\hat{\alpha}_{GHN} = 2.89$
	β_{GHN}	$\hat{\beta}_{GHN} = 3.11$
	σ_{GHN}	$\hat{\sigma}_{GHN} = 0.40$
GFN	α_{GFN}	$\hat{\alpha}_{GFN} = 2.09$
	β_{GFN}	$\hat{\beta}_{GFN} = 0.20$
	μ_{GFN}	$\hat{\mu}_{GFN} = 1.95$
	σ_{GFN}	$\hat{\sigma}_{GFN} = 0.94$

Table 3. The log likelihood values of the four distributions for the tensile strength data

Distributions	Log likelihoods
HN	-79.527
FN	-48.851
GHN	-49.665
GFN	48.631

Discussion

This paper proposes a new distribution named as the Gamma Folded-Normal distribution. This distribution is flexible in the sense that it contains α and β parameters of the Gamma distribution and μ and σ parameters of the Folded-Normal distribution. First, an appropriate set of initials for these parameters are determined. Then, the adequacy of the set of initials are empirically tested and validated by means of a simulation study. It has been shown by another simulation study that the GFN distribution often has larger log likelihood values than the HN, FN, and GHN distributions especially when the sample size is large. A real life data example is used to illustrate the applicability of the GFN distribution. Both the empirical and real world data indicate that the GFN distribution provide an adequate fit to the data. It can be concluded that our proposal GFN distribution enriches the Gamma-X family of distributions and provides a valuable distributional form for modeling the non-negative measurements.

Appendix A.

The derivative of the log likelihood function in (3) with respect to each of the four parameters for the GFN distribution are given by

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \beta, \mu, \sigma)}{\partial \alpha} = -n \log(\beta) - n \Psi(\alpha), \quad (16)$$

$$\text{where } \Psi = \frac{d}{dx} \log(\Gamma(\alpha)) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\frac{\partial \log L(\alpha, \beta, \mu, \sigma)}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \log(2 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma})), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \beta, \mu, \sigma)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\frac{2\mu x_i}{\sigma^2}}}{1 + e^{-\frac{2\mu x_i}{\sigma^2}}} \\ &- \frac{\alpha - 1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \frac{h_z(\frac{x_i + \mu}{\sigma}) - h_z(\frac{x_i - \mu}{\sigma})}{\eta \log(\eta)} \\ &+ \frac{(1 - \beta)}{\sigma \beta} \sum_{i=1}^n \frac{h_z(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - h_z(\frac{x_i + \mu}{\sigma})}{\eta}, \end{aligned} \quad (18)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\alpha, \beta, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \frac{4\mu}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\frac{2\mu x_i}{\sigma^2}}}{1 + e^{-\frac{2\mu x_i}{\sigma^2}}} \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{h_z(\frac{x_i - \mu}{\sigma})(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}) + h_z(\frac{x_i + \mu}{\sigma})(\frac{x_i + \mu}{\sigma^2})}{\eta \log(\eta)} \\ &+ (1 - \frac{1}{\beta}) \sum_{i=1}^n \frac{h_z(\frac{x_i - \mu}{\sigma})(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}) + h_z(\frac{x_i + \mu}{\sigma})(\frac{x_i + \mu}{\sigma^2})}{\eta}, \end{aligned} \quad (19)$$

where $\eta = 2 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma})$ and $h_z(\cdot)$ is the hazard rate function with $h_z(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) = \frac{\delta(\frac{x_i - \mu}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma})}$ and

$h_z(\frac{x_i + \mu}{\sigma}) = \frac{\delta(\frac{x_i + \mu}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{x_i + \mu}{\sigma})}$ and $\delta(\cdot)$ is the PDF of the Standard Normal distribution.

Acknowledgments -

Funding/Financial Disclosure The authors have no received any financial support for the research, authorship, or publication of this study.

Ethics Committee Approval and Permissions The study does not require ethics committee permission or any special permission.

Conflict of Interests The authors state that there is no conflict of interest related to this article.

Authors Contribution All authors read and approved the final manuscript.

References

- [1] Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, 71(1), 63–79. <https://doi.org/10.1007/s40300-013-0007-y>

- [2] Alzaatreh, A. & Knight, K. (2013). On the gamma-half normal distribution and its applications. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 12(1), 103-119. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1367381640>
- [3] Bland, J. M., & Altman, D. G. (1999). Measuring agreement in method comparison studies. *Statistical Methods in Medical Research*, 8, 135–160. <https://doi.org/10.1177/096228029900800204>
- [4] Leone, F. C., Nelson, L. S., & Nottingham, R. B. (1961). The folded normal distribution. *Technometrics* 3, 543–550. <https://doi.org/10.2307/1266560>
- [5] Tsagris, M., Beneki, C., & Hassani, H. (2014). On the folded normal distribution. *Mathematics*, 2(1), 12–28. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.3559>
- [6] R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: *R Foundation for Statistical Computing*. <https://www.R-project.org/>
- [7] Bader, M., & Priest, A. (1982). Statistical Aspects of Fiber and Bundle Strength in Hybrid Composites. In: *Hayashi, T., Kawata, S. and Umekawa, S., Eds., Progress in Science and Engineering Composites, ICCM-IV, Tokyo*, 1129-1136.
- [8] Raqab, M, Z., & Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr Type X distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 34(2), 465-483. <https://doi.org/10.1080/03610920802162664>



Maternal Kanda Bakır Düzeyi ve Etkileyen Faktörlerin Belirlenmesi

Yılmaz ALTUNER¹ ve Esra EMÜL²

How to cite: Altuner, Y., & Emül, E. (2022). Maternal kanda bakır düzeyi ve etkileyen faktörlerin belirlenmesi. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 132-141. <https://doi.org/10.33484/sinopfbfd.1024345>

Araştırma Makalesi

Sorumlu Yazar

Yılmaz ALTUNER
ayilmaz@karabuk.edu.tr

Yazarlara ait ORCID

Y.A:0000-0002-8162-2842
E.E:0000-0001-8625-819X

Received: 17.11.2021

Accepted: 21.06.2022

Öz

Vücutta eser element olarak bulunan bakır (Cu), birçok enzimin yapısında yer alırken, gebelik döneminde çeşitli faktörlere bağlı olarak miktarının değişiklik göstermesi ile gebe ve fetus üzerinde olumsuz etkiler oluşturabilmektedir. Cu eksikliğinde prematürite, beslenme ve emilim bozuklukları, aşırı beslenme, kronik diyare görülürken, bakır toksisitesinde karaciğer ve böbrekte nekroz ve sindirim sistemi kanamalarını oluşturduğu ileri sürülmüştür. Karabük Eğitim ve Araştırma Hastanesi'ne doğum yapmak üzere gelen gebelere (n=50) rastgele örneklem yöntemi ile hem kan analizi hem de anket uygulanarak sosyodemografik sonuçlar elde edilmiştir. Gebelerin yaş ortalamaları 29.2 ± 5.39 olup, %80'i herhangi bir işte çalışmazken, %20'si ilköğretim ve %26'sı ortaokul mezunu olarak belirlenmiştir. Ayrıca gebelerin %18'inin kronik hastalığının bulunduğu, %12'sinde gestasyonel diabetes mellitus ve %4'ünde hipertansiyon olduğu belirlenmiştir. Araştırmamızda maternal kanda Cu düzeyi ortalama 200.7 ± 43.3 µg/dl olarak bulunmuştur. Ayrıca gebenin maternal yaş, yaşam süresi, yaşadığı yerin fabrika, otogar ve anayola yakınlığı ile bakır düzeyi arasında herhangi bir ilişki bulunamazken ($P>0.05$), gebelerin lise ve ortaöğretim mezunu olan eşlerinde kan bakır düzeyleri arasında anlamlı ilişki saptanmıştır ($P<0.05$). Gelecekte gebeler ve fetus üzerinde bakırın uzun dönem olası etkilerinin kapsamlı araştırılmasına ve envanter tutulmasına gereksinim duyulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gebelik, maternal kan, bakır, eser element

Determination of Copper Level and Affecting Factors in Maternal Blood

¹Karabük Üniversitesi Sağlık Bilimleri Fakültesi, Ebelik Bölümü, Balıklar Kayası, Karabük, Türkiye

²Karabük Üniversitesi, Lisanüstü Eğitim Programı, Ebelik Bölümü, Balıklar Kayası, Karabük, Türkiye.

Abstract

While copper (Cu), which is found as a trace element in the body, is included in the structure of many enzymes, it can have negative effects on the pregnant and fetus due to its amount changing depending on various factors during pregnancy. Prematurity, nutritional and absorption disorders, overnutrition, chronic diarrhea are seen in Cu deficiency, while copper toxicity has been suggested to cause liver and kidney necrosis and gastrointestinal bleeding. Sociodemographic results were obtained by applying both blood analysis and questionnaire with random sampling method to pregnant women who came to Karabük Training and Research Hospital (n = 50) to give birth. The average age of pregnant women is 29.2 ± 5.39 , 80% of them do not work, 20% of them are primary school graduates and 26% are secondary school graduates. In addition, it was determined that 18% of pregnant women had chronic disease, 12% had gestational diabetes mellitus and 4% had hypertension. In our study, the mean Cu level in maternal blood was found to be 200.7 ± 43.3 µg / dl. In addition, while there was no correlation between maternal age, life

Giriş

Bakırın canlı vücudunda yeri doldurulamaz bir iz element olduğu ve otuzun üzerinde proteinde bulunduğu belirlenmiştir [1, 2]. İnsan vücudundaki ortalama bakır düzeyinin 100 mg, serum bakır düzeyinin 70-140 mcg ve yetişkin bireylerin alması gereken günlük bakır miktarının 1-1.6 mg olduğu ileri sürülmüştür [3]. Bakır metabolik reaksiyonlarda, oksijen taşıma ve antioksidan olarak görev yapan [4], gebelik ilerledikçe artış gösteren [5] ve gebelik sona erdikten sonra eski seviyesine geri dönen [6] vücut için önemli bir iz elementtir. İnsan vücudunda bakır en çok karaciğer olmak üzere, böbrek, kalp, kas dokusu beyin ve saçta bulunmuştur [7, 8]. Vücutta bakırın başlıca adrenalin ve prostaglandin üretimi [9], myelin kılıfı oluşumu, deri ve kıl pigmentasyonu, hemoglobin ve kardiyak fonksiyonlar, hücre solunum [10, 11], savunma sistemi fonksiyonları ve melanin pigmentinin sentezlenmesinde [12] görev aldığı belirlenmiştir. Vücuda alınan bakırın %98'i safra ile, %2'si ise üriner sistem ile uzaklaştırılır [6]. Düşük bakır seviyesi gebelik çıktıktan olumsuz etkilemektedir. Omeljaniuk ve ark. [12] düşük yapan gebelerin sigara içen gebelerle benzer şekilde plasenta bakır oranlarının 3 kat daha düşük olduğunu saptamıştır. Alebic ve Frkovic [13] spontan abortus, missed abortus, abortus imminens ve anembriyonik gebelik gibi birinci trimester hastalıklarında bakır düzeyinin anlamlı ölçüde düşük olduğunu ileri sürmüşlerdir. Gebelik döneminde bakır ile diğer eser elementler arasında belirgin bir ilişki bulunmaktadır. Bu dönemde artan demir eksikliği sonucunda maternal kan, karaciğer, serum ve plasentada [14, 15] bakır ve seruloplazmin [16] seviyesinin yükseldiği ileri sürülmüştür. Ayrıca anne vücudundaki bu yükselmenin aksine fetal karaciğerde bakır seviyesinin azalmasının bakır metabolizmasını düzenleyen genlerde olumsuz etkiler gösterdiği belirlenmiştir [17, 18]. Diğer taraftan çinkonun nöral tüp defekti gelişiminde bakır metabolizmasını etkileyerek rol oynayabildiği de ileri sürülmüştür [19-21]. Gebelerde bakır ile preeklampsi arasında bir ilişki bulunmaktadır. Sarwar ve ark. [23] preeklampsi olan gebelerde serum bakır düzeyinin kontrol grubundan anlamlı ölçüde düşük olduğunu bulmuştur. Buna karşın Fan ve ark. [22] kesitsel ve 10 vaka kontrol çalışmasını dahil ettiği bir meta analiz çalışmasında Sarwar ve ark. [23] nın çalışmasının aksi yönünde sonuçlar bulmuştur. Literatür taramasında ülkemizde bakır ile ilgili yapılan çalışmaların yetersiz olduğu belirlenmiştir. Araştırmamız Karabük Eğitim ve Araştırma Hastanesi'ne başvuran gebelerin (n=50) sosyo-demografik özellikleri ve kan analizleri yapılarak bakır düzeyi ve bunun gebelik üzerine olası etkilerini belirlemek amacıyla yapılmıştır.

Materyal ve Metot

Araştırmamız Karabük Üniversitesi Girişimsel Olmayan Etik Kurul izni ve BAP (Bilimsel Araştırma Projesi) koordinatörlüğü tarafından desteklenen proje ile Karabük Üniversitesi Eğitim ve Araştırma Hastanesi'nde 01.09.2018-01.09.2019 tarihleri arasında gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın Evren ve Örneklemi

Karabük Eğitim ve Araştırma Hastanesi'ne 01.09.2018-01.09.2019 tarihleri arasında doğum için başvuran tüm gebeler araştırmanın evrenini oluşturmuştur. Örneklemi iletişim problemi ve mental yetersizliği olmayan, Türkçe anlayıp konuşabilen, son 1 yıldır Karabük ilinde yaşayan ve araştırmaya katılmayı kabul eden 100 gebeden oluşmuştur.

Bağımlı ve Bağımsız Değişkenler

Araştırmamızda bağımlı değişkeni gebe kanında bakır düzeyi oluştururken, bağımsız değişkenleri meslek, yaş, eğitim durumu, kronik hastalık varlığı, yaşam alanının otogar, fabrika ve anayola mesafesi, evin bulunduğu konumun trafik yoğunluğu ve Karabük ilinde yaşam süresi oluşturmuştur.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Araştırmamızda sosyo-demografik ve obstetrik özellikleri, gebeliğe bağlı sağlık sorunları, tıbbi öyküsü ile ilgili özellikleri belirlemek için gebelere 34 soru sorulmuştur. Araştırmaya katılan bütün gebelerden 5-10 ml venöz kan alınmıştır. Alınan kan EDTA'sız eser element tüpüne alınıp santrifüj edildikten sonra serum kısmı enjektör yardımı ile ependorf tüpüne aktarılmış ve analiz edilene kadar -80°C'de bekletilmiştir. Toplanan kanlar Baran Medikal toksokoloji laboratuvarında çalışılmıştır. Kanların analizi Grafit Firin Atomik Absorpsiyon Spektrometre Cihazı ile yapılmıştır. Sosyo-demografik değişkenlerin birim sayıları nedeniyle Shapiro Wilk's'den yararlanılmış ve normal dağılımdan gelme durumları değerlendirilmiştir. Sonuçlar yorumlanırken anlamlılık düzeyi olarak 0.5 kullanılmış olup; $P < 0.05$ olması durumunda anlamlı bir ilişkinin olduğu, $P > 0.05$ olması durumunda ise anlamlı bir ilişkinin olmadığı belirtilmiştir.

Bulgular

Maternal kanda bakır düzeyi ve etkileyen faktörlerin belirlenmesi amacıyla elde edilen bulgular şu şekilde sınıflandırılarak tablolandırılmıştır.

1. Gebelerin sosyo-demografik özellikleri ile bakır değerlerinin karşılaştırılması
2. Gebelerin tıbbi öyküsüne bağlı değişkenlerin bakır değerleri ile karşılaştırılması
3. Gebelerin bulunduğu lokasyon değişkenleri bakır değerleri ile karşılaştırılması

1. Gebelerin Sosyo-Demografik Özellikleri ile Kandaki Bakır Değerlerinin Karşılaştırılması

Araştırma sonuçlarımıza göre maternal kanda bakır düzeyi ortalama 200.7 ± 43.3 $\mu\text{g/dl}$ olarak saptanmıştır. Çalışmaya katılan gebelerin yaş ortalaması 29.2 ± 5.39 'dur (Tablo 1). Maternal kanda bakır düzeyi ile anne yaşı arasında anlamlı bir fark saptanmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 1). Maternal kandaki bakır düzeyi ve çalışma durumu incelendiğinde ev hanımı 197.9 ± 39.2 $\mu\text{g/dl}$, memur 232.9 ± 0.25 $\mu\text{g/dl}$, işçi 190.1 ± 0.25 $\mu\text{g/dl}$, serbest meslek 228.4 $\mu\text{g/dl}$, diğer özel sektör çalışanlarında ise 199.1 $\mu\text{g/dl}$ değerleri bulunmuş, aralarında anlamlı bir ilişkiye rastlanmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 1). Gebelerin eşlerinin eğitim durumu ile kan bakır düzeyleri arasındaki ilişki incelendiğinde, bakır düzeyi, okuryazar eşi olanlarda 165.5 ± 7.77 $\mu\text{g/dl}$, ilkökul mezunu olanlarda 189.4 ± 39.48 $\mu\text{g/dl}$, ortaokul mezunu olanlarda 240.3 ± 33.38 $\mu\text{g/dl}$, lise mezunu olanlarda 183.2 ± 29.96 $\mu\text{g/dl}$, lisans ve üstü mezunu olanlarda ortalama 226.0 ± 53.57 $\mu\text{g/dl}$ olarak saptanmıştır. Eşi okuryazar olan gebelerin kan bakır düzeyi diğer gruplara göre daha düşük bulunmuştur (165.5 ± 7.77 $\mu\text{g/dl}$ ($P<0.001$)) (Tablo 1). Gebe eşlerinin meslekleri ve kan bakır düzeyi arasındaki değerlendirildiğinde, eşi işçi olanlarda 195.0 ± 39.51 $\mu\text{g/dl}$, memur olanlarda 212.8 ± 60.50 $\mu\text{g/dl}$, serbest meslek yapanlarda 203.9 ± 49.94 $\mu\text{g/dl}$ ve diğer olarak belirtilen özel sektör çalışanlarda 200.4 ± 19.61 $\mu\text{g/dl}$ olarak tespit edilmiştir ($P<0.001$). (Tablo 1).

Tablo 1. Gebelerin sosyo-demografik özellikleri ile bakır değerlerinin karşılaştırılması

	Bakır Düzeyi				
	N	Arit. Ort. \pm SS	Min-Maks	İstatistiksel Analiz	
Bakır Düzeyi	50	200.7 ± 43.3	127.4 – 339.2		
Yaş	50	29.2 ± 5.39	18 - 40		
Sosyo-demografik özellikler	N	r	P		
	50	0.08	0.580		
	N	%	Arit. Ort. \pm SS	Sıra Ort.	
Okuryazar	4	8	195.7 ± 37.2	24.75	
İlkökul	10	20	198.3 ± 47.1	23.90	
Ortaokul	13	26	208.7 ± 38.6	29.69	
Lise	14	28	196.6 ± 37.4	24.93	H=1.623; P=0.805
Lisans ve üstü	9	18	200.3 ± 61.6	22.44	
Ev hanımı	40	80	197.9 ± 39.2	25.13	
Memur	4	8	232.9 ± 0.25	86.51	
İşçi	4	8	190.1 ± 0.25	35.50	H=1.417; P=0.841
Serbest	1	2	$228.4 \pm$ yok	29.00	
Diğer	1	2	$199.1 \pm$ yok	25.00	
Okuryazar	2	4	165.5 ± 7.77	13.00	
İlkökul	11	22	189.4 ± 39.48	22.27	
Ortaokul	8	16	240.3 ± 33.38	39.38	H=14.667; P=0.005*
Lise	20	40	183.2 ± 29.96	19.70	
Lisans ve üstü	9	18	226.0 ± 53.57	32.78	

r=Korelasyon Katsayısı H=Kruskal Wallis H Testi, Arit. Ort: Aritmetik ortalama, ss: standart sapma, sıra ort.: sıra ortalaması, N=örnek sayısı, %=yüzde, P=anlamlılık düzeyi

2. Gebelerin Tıbbi Öyküsüne Bağlı Değişkenlerin Kandaki Bakır Değerleri ile Karşılaştırılması

Gebelerin kalıtsal hastalık varlığı ve bakır düzeyi arasındaki ilişki incelendiğinde kalıtsal hastalığı olan gebelerin kan bakır düzeyi 196.4 ± 38.45 $\mu\text{g/dl}$, kalıtsal hastalığı bulunmayan gebelerin ise 204.3 ± 47.42 $\mu\text{g/dl}$ olarak tespit edilmiş ve bu sonuç istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 2.). Gestasyonel hipertansiyonu olan gebelerin kan bakır düzeyi 236.8 ± 5.63 $\mu\text{g/dl}$, hipertansiyonu bulunmayan gebelerin ise 201.0 ± 43.52 $\mu\text{g/dl}$ olarak saptanmıştır. İki grup arasında anlamlı bir farklılık saptanmamasına rağmen ($P>0.05$), hipertansiyonu olan gebelerin bakır düzeyleri yüksek bulunmuştur. Yine gestasyonel diyabeti olan gebelerin bakır seviyesi 203.5 ± 46.92 $\mu\text{g/dl}$, gestasyonel diyabeti olmayan gebelerin 200.3 ± 43.32 $\mu\text{g/dl}$ olarak bulunmasına rağmen anlamlı bir ilişki tespit edilmemiştir ($P>0.05$) (Tablo 2). Sigara içen gebelerde kan bakır düzeyi 180.1 ± 0.30 $\mu\text{g/dl}$, sigara içmeyenlerde 203.5 ± 0.16 $\mu\text{g/dl}$ olarak bulunmuştur. Sigara içen gebelerin kan bakır düzeyi daha düşük bulunmasına rağmen anlamlı bir farklılık saptanmamıştır ($P>0.05$). Sigara dumanına maruz kalan gebelerde kan bakır düzeyi 192.8 ± 39.40 $\mu\text{g/dl}$, sigara dumanına maruz kalmayan gebelerde ise 209.2 ± 46.43 $\mu\text{g/dl}$ olarak tespit edilmiş ve iki grup arasında anlamlı bir fark bulunmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 2).

Tablo 2. Gebelerin tıbbi öyküsüne bağlı değişkenlerin kandaki bakır değerleri ile karşılaştırılması

		Bakır Düzeyi				İstatistiksel Analiz
		N	r	P		
Gebelik sayısı		50		0.017	0.908	
		N	%	Arit. Ort. \pm SS	Sıra Ort.	
Kalıtsal hastalığınız var mı?	Evet	23	46	196.4 ± 38.45	24.87	$z=-0.282$; $P=0.778$
	Hayır	27	54	204.3 ± 47.42	26.07	
Kronik hastalığınız var mı?	Evet	9	18	202.2 ± 35.20	27.44	$z=-0.442$; $P=0.659$
	Hayır	41	82	200.4 ± 45.20	25.07	
Gestasyonel hipertansiyon var mı?	Evet	2	4	236.8 ± 5.63	42.00	$z=-1.634$; $P=0.118$
	Hayır	48	96	201.0 ± 43.52	24.81	
Gestasyonel diyabetes mellitus var mı?	Evet	6	12	203.5 ± 46.92	25.33	$z=-0.061$; $P=0.976$
	Hayır	44	88	200.3 ± 43.32	25.52	
Sigara içme	Evet	6	12	180.1 ± 0.30	32.2	$z=-1.194$; $P=0.232$
	Hayır	44	88	203.5 ± 0.16	44.1	
Sigara dumanına maruz kalma	Evet	26	52	192.8 ± 39.40	23.23	$z=-1.146$; $P=0.252$
	Hayır	24	48	209.2 ± 46.43	27.96	

3. Gebelerin Bulunduğu Lokasyon Değişkenleri ile Kandaki Bakır Değerleri ile Karşılaştırılması

Maternal kanda bakır düzeyi ve ikamet ettiği yer arasındaki ilişki incelendiğinde il merkezinde ikamet eden gebelerin bakır düzeyi 197.7 ± 48.66 µg/dl ilçe merkezinde ikamet edenlerde 199.8 ± 37.12 µg/dl, köyde ikamet edenlerde 214.6 ± 33.91 µg/dl olarak bulunmuştur. Köyde yaşayan gebelerin bakır düzeyi daha yüksek bulunmasına rağmen gruplar arasında anlamlı fark tespit edilmemiştir ($P>0.05$) (Tablo 3). İkamet ettiği yer Karabük merkezine uzak olan gebelerin kan bakır düzeyi 199.0 ± 32.7 µg/dl, orta uzaklıkta olanlarda 207.7 ± 40.0 µg/dl, yakın olanlarda 198.6 ± 49.34 µg/dl bulunmasına rağmen, anlamlı bir fark saptanmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 3). İkamet ettiği yer fabrika bölgesine yakın olan gebelerin bakır düzeyi 200.0 ± 49.39 µg/dl, uzak olanlarda 201.6 ± 34.24 µg/dl tespit edilmiş, fakat bu fark istatistiksel olarak anlamlı bulunmamıştır ($P>0.05$) (Tablo 3).

Tablo 3. Gebelerin bulunduğu lokasyon değişkenleri ile bakır değerleri ile karşılaştırılması

		Bakır Düzeyi				İstatistiksel Analiz
		N	%	Arit. Ort. ± SS	Sıra Ort.	
İkamet ettiği yer	İl	28	56	197.7 ± 48.66	22.93	H=2.964; P=0.227
	İlçe	15	30	199.8 ± 37.12	26.67	
	Kasaba					
	Köy	7	14	214.6 ± 33.91	33.29	
	Hayır	46	92	201.2 ± 43.51	25.57	
Son 1 yılda ev boyandı mı	Evet	6	12	206.18 ± 39.75	28.83	z=-0.597; P=0.550
	Hayır	44	88	196.94 ± 44.11	25.05	
İkamet ettiği yerin Karabük merkeze yakınlığı	Uzak	12	24	199.0 ± 32.7	26.83	H=1.706; P=0.426
	Orta uzaklıkta	11	22	207.7 ± 40.0	29.73	
	Yakın	27	54	198.6 ± 49.34	23.19	
İkamet ettiği yerin fabrika bölgesine yakınlığı	Evet	29	58	200.0 ± 49.39	24.24	z=-0.033; P=0.974
	Hayır	21	42	201.6 ± 34.24	27.24	
	Hayır	32	64	194.0 ± 33.61	24.38	

Tartışma ve Sonuç

Gebelik süreci içinde birçok enzimatik aktivitede rol alan ve fetüsün gelişim sürecine katılan bakır, birçok enzimin oluşumu için gerekli olmasının yanında, insan vücudu için önemli olan esansiyel bir mikro elementtir. Erken gebelik döneminde artmaya başlayan bakır seviyesi gebelik süresince devam etmektedir. Termde bir gebenin bakır seviyesi gebe olmayan bir kadının yaklaşık olarak iki katıdır ve bu değer doğum sonrası dönemde normale dönmektedir [25]. Araştırmamızda maternal kanda bakır düzeyi ortalama 200.7 ± 43.3 µg/dl bulunmuştur. Literatürde araştırmamızı destekleyen sonuçlar mevcuttur. Vukelic ve ark. [5] sağlıklı gebeler, patolojik gebeler ve olumsuz sonuçları bulunan patolojik gebeler olarak 3 gruba ele almıştır. 1. Trimesterde olan sağlıklı gebelerin kan bakır düzeyi 24-43 µmol/l,

2. Trimesterdeki gebelerin 30-52 µmol/l, 3. Trimesterdeki gebelerin 35-60 µmol/l olarak bulunmuştur. Patolojik gebeliklerde 1. Trimesterde kan bakır seviyesi 17-25 µmol/l, 2. Trimesterde 22-30 µmol/l, 3. Trimesterde 27-35 µmol/l olarak bulunmuştur. Olumsuz çıktıları olan gebelerin kan bakır seviyesinin diğer gruplara oranla anlamlı şekilde düşük olduğu saptanmıştır. Patolojik olmayan 159 gebenin dahil edildiği bir başka araştırmada 15. gebelik haftasından küçük gebelerin kan bakır düzeyleri 147-53 µg/dl, 15-25 haftalık gebelerin 197.14 µg/dl, 25-35 haftalık gebelerin 195.11 µg/dl, 35 haftalıktan büyük gebelerin 204.22 µg/dl olarak tespit edilmiştir [24]. Gestasyonel diyabet (GD) toplumda yaygın görülen bir bozukluktur ve olumsuz maternal-fetal çıktıları bulunmaktadır. Li ve ark. [25], GD ve bakır arasındaki ilişkiyi açıklayabilmek için 248 vaka, 248 kontrol grubundan oluşan gebeleri incelemişler sonuç olarak GD tanısı alan gebelerin kan bakır düzeyi 1960.24 ± 391.98 µg/dl ve sağlıklı gebelerin kan bakır düzeyi 1842.43 ± 387.09 µg/dl olarak tespit edilmiş ve bu değerler arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuştur. Bir başka araştırmada 15 sağlıklı ve 15 GD gebe kanları değerlendirildiğinde, GD tanılı gebelerin bakır düzeyi 2345.8 ± 76.1 µg/dl bulunurken sağlıklı gebelerin 2156.2 ± 72.22 µg/dl olarak tespit edilmiştir [26]. Bu araştırma sonuçlarının aksine Genova ve ark. [27], 13 GD tanılı ve 26 sağlıklı gebeyi dahil ettiği araştırmada, GD tanılı gebelerin kan bakır düzeyi 30.9 ± 4.3 mol/L, sağlıklı gebelerin kan bakır düzeyi 31.3 ± 4.07 mol/L değerleri ile diğer araştırmalara kıyasla daha yüksek bulunmuştur. Araştırmamıza katılan 6 gebede GD mevcuttur. Diyabetli gebelerin plazma bakır seviyesi 203.5 ± 46.92 , diyabet olmayan 44 gebenin bakır seviyesi ise 200.3 ± 43.32 bulunmuştur. Aralarında anlamlı bir ilişki olmamasına rağmen diyabet tanısı almış gebelerin bakır değerlerinin daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Preeklampsi (PE) kan basıncının 140/90 ve üzeri olması, ödem ve proteinüri ile karakterize ilerleyici ve multisistemik bir bozukluk olduğu ablasyo plasenta, serebrovasküler ve kardiyak komplikasyonlar ve maternal ölümlere sebep olabileceği bilinmektedir. Akhlaghi ve Molkizadeh [28] GDM tanısı almış PE tanılı gebeleri ve PE tanısı almamış sağlıklı gebeleri gruplandırmış ve mikroelement seviyelerini karşılaştırmış; PE tanılı gebelerde kan plazma düzeyini 220.59 ± 61.92 µg/dl, sağlıklı gebelerde ise 192.83 ± 47.46 µg/dl olarak tespit etmişlerdir. Lewandowska ve ark. [29] bakır oranını PE'li gebelerde 1595.01 µg/L ve sağlıklı gebelerde 1693.39 µg/L olarak bulmuş ve bakır düzeyinin anlamlı ölçüde düşük olduğunu saptamışlardır. Araştırmamıza katılan 2 gebe PE tanısı almış olup, PE'li grupta kan bakır oranı 236.8 ± 5.63 µg/dl, sağlıklı grupta ise 201.0 ± 43.52 µg/dl bulunmuştur. Çalışma sonuçlarımızda PE'li grubun bakır değerleri daha yüksek olarak bulunsa da istatistiksel olarak anlamlı bir ilişki tespit edilmemiştir. Araştırmamızda yer alan gebelerin altısı sigara içtiklerini belirtmişlerdir. Sigara içen gebelerin kan bakır düzeyi 180.1 ± 0.30 µg/dl iken, sigara içmeyen gebelerin 203.5 ± 0.16 µg/dl olarak saptanmıştır. Ayrıca sigara dumanına maruz kalan gebelerin kan bakır seviyeleri 192.8 ± 39.40 µg/dl iken, sigara dumanına maruz kalmayan gebelerin 209.2 ± 46.43 µg/dl olarak bulunmuştur. Bütün gruplar arasında en yüksek bakır seviyesi sigara içmeyen ve sigara dumanına maruz kalmayan gebelerde saptanmış fakat istatistiksel olarak anlamlı bir sonuç teşkil etmemiştir ($P > 0.001$). Sonuç olarak maternal kanda bakır düzeyi birçok faktör ile ilişkilidir. Sağlıklı

gebelik ve sağlıklı nesiller için bakır düzeyinin uzun dönem etkilerinin hem kan hem de doku ve organlarda geliştirilen teknik ve yöntemlerle araştırılması ile olası sonuçların belirlenmesinde katkı yapacağına inanmaktayız.

Teşekkür -

Fon/Finansman bilgileri Bu çalışma, Karabük Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenen projenin bir parçasıdır. Proje ID: 575 Proje Kod: KBÜBAP-18-YL-177. Bu çalışma, Karabük Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

Etik Kurul Onayı ve İzinler Bu çalışma Karabük Üniversitesi Girişimsel Olmayan Etik Kurul tarafından onaylanmıştır (etik kurul no: 77192459) -050.99-E.29112)

Çıkar çatışmaları/Çatışan çıkarlar Muhtemel ve fiili çıkar çatışmalarına ilişkin açıklamalar bulunmamaktadır.

Yazarların Katkısı. Tüm yazarlar, bu çalışmanın yürütülmesine yazar olarak dahil edilmek üzere yeterince katkıda bulunmuştur. Tüm yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

- [1] Aksoy, M., (2014). Beslenme Biyokimyası, Ankara, Hatipoğlu Yayınevi.
- [2] Yurtseven, K. (2019). Depresyon hastalarında beslenme ile ilintili kan çinko ve bakır düzeylerinin değerlendirilmesi. (Tez no. 557332) [Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi].
- [3] Emür, G. Y. (2016). Yoğun bakım ünitesinden servise devredilen hastalarda serum mikronütrient (vitamin B1, vitamin B6, vitamin B12, çinko, bakır, seruloplazmin, krom selenyum ve kobalt) seviyesinin tespit edilmesi. (Tez no. 443719) [Tıpta Uzmanlık Tezi, Erciyes Üniversitesi].
- [4] Mistry, H. D., Kurlak, L. O., Young, S. D., Briley, A. L., Broughton Pipkin, F., Baker, P. N., & Poston, L. (2014). Maternal selenium, copper and zinc concentrations in pregnancy associated with small-for-gestational-age infants. *Maternal & Child Nutrition*, 10(3), 327-334.
- [5] Vukelic, J., Kapamadzija, A., Petrovic, D., Grujic, Z., Novakov- Mikic, A., Kopitovic, V., & Bjelica A. (2012). Variations of serum copper values in pregnancy. *Srpski Arhivza Celokupno Lekarstvo*, 140 (1-2), 158-163.
- [6] İritaş, S. B. (2008). Otopsi sonucu alınan karaciğer doku örneklerinde kadmiyum, bakır ve çinko düzeyleri. (Tez no. 225408) [Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi].
- [7] Çelik, M. (2011). Obez kişilerde ve sağlıklı kontrollerde kan ADMA, adiponektin, çinko ve bakır düzeylerinin araştırılması. (Tez no. 281508) [Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi].
- [8] Öztürk, Ç. (2018). Talasemi hastalarında oksidatif stres ve eser element düzeylerinin araştırılması. (Tez no. 538805) [Tıpta Uzmanlık Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi].
- [9] Akar, E. (2015). Gaziantep bölgesinde yetiştirilen ivesi ırkı toklularda serum bakır çinko ve magnezyum düzeylerinin araştırılması. (Tez no. 408396) [Yüksek Lisans Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi].

- [10] Aksu, E. (2018). Kahramanmaraş merkez ilçelerindeki koyunlarda demir, bakır ve çinko seviyelerinin araştırılması. (Tez no. 510751) [Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi].
- [11] Şen, E. (2015). Tip 2 diyabetli hastalarda serum çinko, bakır ve seruloplazmin düzeyleri. (Tez no. 399233) [Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi].
- [12] Omeljaniuk, W. J., Socha, K., Borawska, M. H., Charkiewicz, A., Laudanski, T., Kulikowski, M., & Kobylec, E. (2015). Antioxidant status in women who have had a miscarriage. *Advances in Medical Sciences*, 60(2), 329-334.
- [13] Alebic Juretic, & A., Frkovic, A. (2005). Plasma copper concentrations in pathological pregnancies. *Journal of Trace Elements in Medicine and Biology*, 19(2-3), 191-194.
- [14] Sherman, A. R., & Tissue, N. T. (1981). Tissue iron, copper and zinc levels in offspring of iron-sufficient and iron deficient rats. *The Journal of Nutrition*, 111(2), 266-275.
- [15] Sherman, A. R., & Moran, P. E. (1984). Copper metabolism in iron-deficient maternal and neonatal rats. *The Journal of Nutrition*, 114(2), 298-306.
- [16] Gambling, L., Dunford, S., & McArdle, H. J. (2004). Iron deficiency in the pregnant rat has differential effects on maternal and fetal copper levels. *The Journal of Nutritional Biochemistry*, 15(6), 366-372.
- [17] Gambling, L., Andersen, H. S., Czopek, A., Wojciak, R., Krejpcio, Z., & McArdle, H. J. (2014). Effect of timing of iron supplementation on maternal and neonatal growth and iron status of iron-deficient pregnant rats. *The Journal of Physiology*, 561(1), 195-203.
- [18] Lenartowicz, M., Kennedy, C., Hayes, H., & McArdle, H. J. (2015). Transcriptional regulation of copper metabolism genes in the liver of fetal and neonatal control and iron-deficient rats. *Biometals*, 28(1), 51-59.
- [19] Harika, R., Faber, M., Samuel, F., Kimiywe, J., Mulugeta, A., & Eilander, A. (2017). Micronutrient status and dietary intake of iron, vitamin A, iodine, folate and zinc in women of reproductive age and pregnant women in Ethiopia, Kenya, Nigeria and South Africa: a systematic review of data from 2005 to 2015. *Nutrients*, 9(10), 1096.
- [20] Lugo, N. T. (2016). Papel del ácido fólico, zinc y cobre en la prevención primaria de los defectos congénitos. *Revista Cubana de Medicina General Integral*, 32(4).
- [21] Nguyen, C. L., Hoang, D. V., Nguyen, P. T. H., Ha, A. V. V., Chu, T. K., Pham, N. M., Lee, A. H., Duong, D.V., & Binns, C. W. (2018). Low dietary intakes of essential nutrients during pregnancy in Vietnam. *Nutrients*, 10(8), 1025.
- [22] Fan, Y., Kang, Y., & Zhang, M. (2016). A meta-analysis of copper level and risk of preeclampsia: evidence from 12 publications. *Bioscience Reports*, 36(4).
- [23] Sarwar, M. S., Ahmed, S., Ullah, M. S., Kabir, H., Rahman, G. M., Hasnat, A., & Islam, M. S. (2013). Comparative study of serum zinc, copper, manganese, and iron in preeclamptic pregnant women. *Biological Trace Element Research*, 154(1), 14-20.
- [24] Alvarez, S. I., Castanon, S. G., Ruata, M. L., Aragües, E. F., Terraz, P. B., Irazabal, Y. G., & Rodriguez, B. G. (2007). Updating of normal levels of copper, zinc and selenium in serum of pregnant women. *Journal of Trace Elements in Medicine and Biology*, 21, 49-52.

- [25] Li, P., Yin, J., Zhu, Y., Li, S., Chen, S., Sun, T., Shan, Z., Wang, J., Shang, Q., Li, X., Yang, W., & Liu, L. (2019). Association between plasma concentration of copper and gestational diabetes mellitus. *Clinical Nutrition*, 38(6), 2922-2927.
- [26] Al-Saleh, E., Nandakumaran, M., Al-Shammari, M., & Al-Harouny, A. (2004). Maternal–fetal status of copper, iron, molybdenum, selenium and zinc in patients with gestational diabetes. *The Journal of Maternal-Fetal & Neonatal Medicine*, 16(1), 15-21.
- [27] Genova, M., Atanasova, B., Ivanova, I., Todorova, K., Dimitrova, V., Jordanova, Y., & Svinarov, D. (2019). Copper, ceruloplasmin and copper: ceruloplasmin ratio in healthy pregnancy and gestational diabetes. *Clinica Chimica Acta*, 493, 633-634.
- [28] Akhlaghi, F., & Molkizadeh, F. (2018). A comparative study of micronutrient levels in the women with hypertensive gestational diabetes with and without preeclampsia. *Journal of Nutrition, Fasting and Health*, 6(2), 115-121.
- [29] Lewandowska, M., Sajdak, S., Marciniak, W., & Lubiński, J. (2018). First trimester serum copper or zinc levels, and risk of pregnancy-induced hypertension. *Nutrients*, 11(10), 2479.



Tensor Product of Phase Retrievable Frames

Fatma Bozkurt¹

How to cite: Bozkurt, F. (2022). Tensor Product of Phase Retrievable Frames. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 142-151. <https://doi.org/10.33484/sinopfbfd.1211231>

Research Article

Corresponding Author

Fatma Bozkurt
fbozkurt@adiyaman.edu.tr

ORCID of the Authors

E.B: 0000 0002 6788 0052

Received: 28.11.2022

Accepted: 06.12.2022

Abstract

Frame vectors in the tensor product of Hilbert spaces that accomplish phase retrieval can be characterized. In this article, we determine the conditions under which the tensor product of vectors may do phase retrieval. Given that tensor product of two frames always implies a frame in the tensor product of Hilbert spaces, we particularly concentrate on finding conditions for phase retrieval in the tensor product of Hilbert spaces.

Keywords: Frame vectors, Tensor product, Phase retrieval

Fazları Geri Alınabilen Frame Vektörlerinin Tensör Çarpımı

¹Department of Mathematics,
Adiyaman University, Adiyaman,
Türkiye

This work is licensed under a
Creative Commons Attribution 4.0
International License

Öz

Hilbert uzaylarının tensör çarpımındaki faz geri dönüşünü gerçekleştiren frame vektörleri karakterize edilmektedir. Bu makalede, vektörlerin tensör çarpımının hangi koşullar altında faz geri getirme yapabileceği belirlenmektedir. İki frame setinin tensör çarpımının her zaman Hilbert uzaylarının tensör çarpımında bir frame ima ettiği göz önüne alındığında, bu çalışmada özellikle Hilbert uzaylarının tensör çarpımında frame vektörlerinin faz geri dönüşü için gerekli koşullar belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frame vektörleri, Tensör çarpımı, Faz geri alma

Introduction

Given a signal x and an orthonormal basis $\{u_i\}_{i \in I}$ in a Hilbert space H , we know that the sequence of measurements $\{\langle x, u_i \rangle\}_{i \in I}$ allows us to reconstruct the signal x by using the orthonormal basis $\{u_i\}_{i \in I}$. The reconstruction of the signal x is not possible if we lose some of these measurements. Because of the redundancy, frame vectors can be possible used as a solution to the reconstruction of a signal if some of the coefficients are lost or cannot be measured. Frame vectors can be thought of as a generalization of orthonormal vectors with many other advantages. Duffin and Schaeffer [1] introduced frame theory for

separable Hilbert spaces in the context of nonharmonic Fourier series in 1952. Duffin and Schaeffer's definition was an abstraction of Gabor's concept for signal processing in [2].

Signal reconstruction is very important notion in engineering but it is a significant challenge if there is a partial loss of information. Given a signal x and a frame $\{x_i\}_{i \in I}$ in a Hilbert space H , we are not able to construct the exact signal x if we only have the phaseless measurements $\{|\langle x, x_i \rangle|\}_{i \in I}$.

Casazza, Balan and Edidin [3] introduced the concept of phase retrieval for Hilbert spaces in 2006. Phase retrieval is the idea of reconstruction of a signal without using phase.

They showed that given the intensity measurements $\{|\langle x, x_i \rangle|\}_{i \in I}$ from a redundant linear system, x and αx with $|\alpha| = 1$ cannot be distinguish from phaseless measurements. Phase retrieval has applications in areas such that X-ray crystallography [4, 5], speech recognition [6], electron microscopy [7, 8] and many of other areas. Tensor product is so often used in approximation theory. Folland in [9], Kadison and Ringrose in [10] gave the representation of the tensor product $H_1 \otimes H_2$ of Hilbert spaces H_1 and H_2 as the space of bounded antilinear maps from H_2 into H_1 . G. Upender Reddy, N. Gopal Reddy and B. Krishna Reddy in [11], Amir Khosravi and M.S. Asgari in [12] introduced the definition of the frames vectors in the tensor products of Hilbert spaces. Both of the papers showed that given the two sequences $\{x_i\}_{i \in I}$ in H_1 and $\{y_j\}_{j \in J}$ in H_2 , the tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$ is a frame for the tensor product of Hilbert spaces $H_1 \otimes H_2$ if and only if the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is a frame in H_1 and H_2 , respectively. Tensor product of dual frames is studied in [13] by Ya-Hui Wang and Yun-Zhang Li. Later, Samineh Zakeri and Ahmad Ahmedi in [14] investigated the conditions under which the tensor product of two frames is a scalable frame. A. Razghandi and R. Raisi Tousi gave an explicit expression to the reconstruction of a signal from magnitudes of frame coefficients of the tensor product dual frames.

In this paper, we study the property of phase retrievability of frame vectors in tensor product of Hilbert spaces. We examine the conditions under which a frame is phase retrievable in the tensor product of Hilbert spaces. The main results of this paper provide that given the two sequences $\{x_i\}_{i \in I}$ in H_1 and $\{y_j\}_{j \in J}$ in H_2 , the tensor product of $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$ is a phase retrievable frame for the tensor product of Hilbert spaces $H_1 \otimes H_2$ if and only if the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is a phase retrievable frame in H_1 and H_2 , respectively. We also give an explicit expression to show that when a set of vectors in tensor product of Hilbert spaces does not do phase retrieval in $H_1 \otimes H_2$. The organization of the paper is as follows. In section 2, we give some basic definitions and information about frame theory, tensor product of Hilbert spaces and phase retrieval which are necessary to understand context of the paper. In section 3, we define phase retrieval in tensor product of Hilbert spaces. We give the conditions under which tensor product of frames vectors does phase retrieval in $H_1 \otimes H_2$. We prove that most of the results in [12] also holds for the tensor product of phase retrievable frames.

Preliminaries

In this section, we give basic definitions and some important properties of the frame theory, phase retrievable frames and the tensor product of Hilbert spaces in the literature. We refer the reader [3, 9, 10, 15–19] for more details. In the rest of this paper H will denote a separable Hilbert space, I and J are a countable index set.

Definition 1. [1] A collection of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ in a Hilbert space H is called a frame if there exists

two constants $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$A\|x\|^2 \leq \sum_i |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad \text{for all } x \in H.$$

A and B are called the lower and the upper frame bounds. A frame is called a tight frame if $A = B$ and a Parseval frame if $A = B = 1$.

Definition 2. [3] A set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ in a Hilbert space H does phase retrieval if for all $x, y \in H$ satisfying $|\langle x, x_i \rangle| = |\langle y, x_i \rangle|$ for all i , then $x = \alpha y$ for some scalar α with $|\alpha| = 1$.

There are different ways to define the tensor product of Hilbert spaces, but we will use the following. Folland in [9], Kadison and Ringrose in [10] defined the tensor product of Hilbert spaces H_1 and H_2 as a space of all antilinear operators. An operator $T : H_2 \rightarrow H_1$ is said to be **antilinear** if

$$T(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}T(x) + \bar{\beta}T(y)$$

for any $x, y \in H_2$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. The adjoint T^* of a bounded antilinear map T is defined by

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle Ty, x \rangle.$$

The tensor product $H_1 \otimes H_2$ of the Hilbert spaces H_1 and H_2 is the set of all antilinear maps $T : H_2 \rightarrow H_1$ such that $\sum_j \|Tv_j\|^2 < \infty$ for any orthonormal basis $\{v_j\}$ for H_2 . By Theorem (7.12) in [9], $H_1 \otimes H_2$ is a Hilbert space with the norm

$$\|T\|^2 = \sum_j \|Tv_j\|^2$$

and the associated inner product

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \sum_j \langle T_1 v_j, T_2 v_j \rangle$$

where $\{v_j\}$ is any orthonormal basis for H_2 and T_1, T_2 be the antilinear maps from H_2 onto H_1 . For any $x \in H_1$ and $y \in H_2$, the map defined in [9] by

$$(x \otimes y)(t) = \langle y, t \rangle x, \quad t \in H_2$$

belongs to $H_1 \otimes H_2$ and

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|,$$

$$\langle x \otimes y, x^* \otimes y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle \quad \text{for all } x, x^* \in H_1, y, y^* \in H_2.$$

Tensor product of operators have the following results in [9, Theorem 7.18].

Let H_1 and H_2 be Hilbert spaces. For all $C, C' \in B(H_1)$ and $D, D' \in B(H_2)$, we have

- $\|C \otimes D\| = \|C\| \|D\|$

2. $(C \otimes D)(C' \otimes D') = (CC') \otimes (DD')$
3. $(C \otimes D)^* = D^* \otimes C^*$
4. $(C \otimes D)(x \otimes y) = Cx \otimes Dy$ for all $x \in H_1, y \in H_2$

Now, we want to state the definition of a frame in the tensor product of Hilbert spaces.

Definition 3. [11] Let $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ be the set of vectors in the Hilbert spaces H_1 and H_2 , respectively. The tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$ is called a frame for the tensor product of Hilbert spaces $H_1 \otimes H_2$ if there exists two constants $0 < A \leq B < \infty$ such that

$$A\|x \otimes y\|^2 \leq \sum_{i,j} |\langle x \otimes y, x_i \otimes y_j \rangle|^2 \leq B\|x \otimes y\|^2 \quad \text{for all } x \otimes y \in H_1 \otimes H_2.$$

A and B are called the lower and the upper frame bounds for $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$.

Tensor Product of Phase Retrievable Frames

In this section, we extend the definition of phase retrieval in [3] to the tensor product of Hilbert spaces. We give the main results of phase retrievable frames in the tensor product of Hilbert spaces and show that we can carry out the frame vector results in [12] to the phase retrievable frames in the tensor product of Hilbert spaces.

Definition 4. Let $\{T_i\}_{i \in I}$ be a collection of operators in $H_1 \otimes H_2$. We say that the collection of $\{T_i\}_{i \in I}$ does phase retrieval if for all $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \in H_1 \otimes H_2$ satisfying

$$|\langle x_1 \otimes y_1, T_i \rangle| = |\langle x_2 \otimes y_2, T_i \rangle| \quad \text{for all } i$$

then $(x_1 \otimes y_1) = \alpha(x_2 \otimes y_2)$ for some scalar α with $|\alpha| = 1$.

For any vector $x_i \in H_1$ and $y_j \in H_2$, since the map defined in [9] by

$$(x_i \otimes y_j)(t) = \langle y_j, t \rangle x_i, \quad t \in H_2$$

belongs to $H_1 \otimes H_2$, we can state the following theorem.

Theorem 1. Tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ of $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$ if and only if the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ does phase retrieval in H_1 and H_2 , respectively.

Proof. Let us assume that $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ does phase retrievable for $H_1 \otimes H_2$. To prove that $\{x_i\}_{i \in I}$ does phase retrieval in H_1 , for any $z_1, z_2 \in H_1$ that satisfies $|\langle z_1, x_i \rangle| = |\langle z_2, x_i \rangle|$ for all i , we want to show that there exists a scalar α such that $z_1 = \alpha z_2$ with $|\alpha| = 1$.

For each i and j , we have

$$\langle z_1 \otimes y_j, x_i \otimes y_j \rangle = \langle z_1, x_i \rangle \langle y_j, y_j \rangle \quad \text{and} \quad \langle z_2 \otimes y_j, x_i \otimes y_j \rangle = \langle z_2, x_i \rangle \langle y_j, y_j \rangle.$$

Since we have $|\langle z_1, x_i \rangle| = |\langle z_2, x_i \rangle|$ for all i by the assumption, this allows us to write

$$|\langle z_1 \otimes y_j, x_i \otimes y_j \rangle| = |\langle z_2 \otimes y_j, x_i \otimes y_j \rangle|$$

for all i and j . We assume that $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ does phase retrievable for $H_1 \otimes H_2$. This implies that there exists a scalar α such that $(z_1 \otimes y_j) = \alpha(z_2 \otimes y_j)$ with $|\alpha| = 1$. For $y_j \in H_2$, we have

$$\begin{aligned} (z_1 \otimes y_j)(y_j) &= \alpha(z_2 \otimes y_j)(y_j) \implies \langle y_j, y_j \rangle z_1 = \alpha \langle y_j, y_j \rangle z_2 \\ &\implies z_1 = \alpha z_2. \end{aligned}$$

This says that the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ does phase retrieval in H_1 . A similar argument works for the set of vectors $\{y_j\}_{j \in J}$ to do phase retrieval in H_2 .

To prove other direction, suppose the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ does phase retrieval in H_1 and H_2 , respectively. For any $z_1 \otimes t_1, z_2 \otimes t_2 \in H_1 \otimes H_2$ that satisfies

$$|\langle z_1 \otimes t_1, x_i \otimes y_j \rangle| = |\langle z_2 \otimes t_2, x_i \otimes y_j \rangle| \quad (1)$$

for all i and j , we can write

$$|\langle z_1 \otimes t_1, x_i \otimes y_j \rangle| = |\langle z_1, x_i \rangle \langle t_1, y_j \rangle| = |\langle z_1, x_i \rangle| |\langle t_1, y_j \rangle|$$

$$|\langle z_2 \otimes t_2, x_i \otimes y_j \rangle| = |\langle z_2, x_i \rangle \langle t_2, y_j \rangle| = |\langle z_2, x_i \rangle| |\langle t_2, y_j \rangle|.$$

By the equality in (1), we have

$$|\langle z_1, x_i \rangle| |\langle t_1, y_j \rangle| = |\langle z_2, x_i \rangle| |\langle t_2, y_j \rangle| \implies \frac{|\langle z_1, x_i \rangle|}{|\langle z_2, x_i \rangle|} = \frac{|\langle t_2, y_j \rangle|}{|\langle t_1, y_j \rangle|} \quad (2)$$

for all i and j . Assume that $\frac{|\langle z_1, x_i \rangle|}{|\langle z_2, x_i \rangle|} = \beta \neq 0$ for some fixed i . Since the equality in (2) holds for all i and j , this implies that

$$\frac{|\langle z_1, x_i \rangle|}{|\langle z_2, x_i \rangle|} = \frac{|\langle t_2, y_j \rangle|}{|\langle t_1, y_j \rangle|} = \beta \neq 0$$

for all i and j . Therefore, we have $|\langle z_1, x_i \rangle| = \beta |\langle z_2, x_i \rangle|$ for all i and $|\langle t_2, y_j \rangle| = \beta |\langle t_1, y_j \rangle|$ for all j . Since we assume that the set of vectors $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ does phase retrieval in H_1 and H_2 , respectively, we can say that there exists α_1, α_2 such that $z_1 = \alpha_1 \beta z_2$ and $t_2 = \alpha_2 \beta t_1$ with $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$. For any $t \in H_2$, we have

$$\begin{aligned} (z_1 \otimes t_1)(t) &= \langle t_1, t \rangle z_1 = \langle \frac{t_2}{\alpha_2 \beta}, t \rangle \alpha_1 \beta z_2 \\ &= \frac{\alpha_1 \beta}{\alpha_2 \beta} \langle t_2, t \rangle z_2 \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (z_2 \otimes t_2)(t). \end{aligned}$$

Since there exists a scalar $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ such that $(z_1 \otimes t_1)(t) = \alpha(z_2 \otimes t_2)(t)$ together with $|\alpha| = \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right| =$

$\frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|} = 1$, this shows that the tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ of $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$.

Theorem 2. If tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ of $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$, then $\overline{\text{span}}\{(x_i \otimes y_j)t\}_{\{i,j\}} = H_1$ for every nonzero vector $t \in H_2$.

Proof. We show the proof by contrapositive. Suppose there exists $t \in H_2$ such that

$$\overline{\text{span}}\{(x_i \otimes y_j)t\}_{\{i,j\}} \neq H_1.$$

This says that there exists a nonzero vector $z \in H_1$ such that $\langle z, (x_i \otimes y_j)t \rangle = 0 \quad \forall i, j$.

$$\langle z, (x_i \otimes y_j)t \rangle = \langle z, \langle y_j, t \rangle x_i \rangle = \langle z, x_i \rangle \langle t, y_j \rangle = 0 \quad (3)$$

For any nonzero scalar c with $|c| \neq 1$, let $z_c = cz$.

By the equality in (3),

$$\begin{aligned} |\langle x_i \otimes y_j, z \otimes t \rangle| &= |\langle x_i, z \rangle \langle y_j, t \rangle| \\ &= |\langle x_i, z \rangle| \cdot |\langle y_j, t \rangle| \\ &= |\langle x_i, \frac{1}{c} z_c \rangle| \cdot |\langle y_j, t \rangle| \\ &= \frac{1}{|c|} |\langle x_i, z_c \rangle| \cdot |\langle y_j, t \rangle| \\ &= \frac{1}{|c|} |\langle x_i \otimes y_j, z_c \otimes t \rangle| = 0. \end{aligned}$$

That is $|\langle x_i \otimes y_j, z \otimes t \rangle| = |\langle x_i \otimes y_j, z_c \otimes t \rangle|$ for all i, j . On the other hand, we know that $(z_c \otimes t) = c(z \otimes t)$ for nonzero scalar c with $|c| \neq 1$. This implies that $(z_c \otimes t) \neq \alpha(z \otimes t)$ for any α with $|\alpha| = 1$. Therefore, tensor product $\{x_i \otimes y_j\}_{\{i,j\}}$ of $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ is not a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$.

Theorem 3. Let $\{T_i\}_{i \in I}$ be a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$. Then for any $x \in H_1$ and $y \in H_2$, the set of vectors $\{T_i y\}_{i \in I}$ and $\{T_i^* x\}_{i \in I}$ does phase retrieval for H_1 and H_2 , respectively.

Proof. Suppose that given $x_1, x_2 \in H_1$, we have $|\langle x_1, T_i y \rangle| = |\langle x_2, T_i y \rangle|$ for all i . For any orthonormal basis $\{u_\ell\}_{\ell \in L}$ in H_2 ,

$$\begin{aligned} \langle x_1, T_i y \rangle &= \langle x_1, T_i (\sum_{\ell} \langle y, u_\ell \rangle u_\ell) \rangle = \langle x_1, \sum_{\ell} \overline{\langle y, u_\ell \rangle} T_i u_\ell \rangle \quad (T_i \text{ is an antilinear map}) \\ &= \sum_{\ell} \langle y, u_\ell \rangle \langle x_1, T_i u_\ell \rangle = \sum_{\ell} \langle \langle y, u_\ell \rangle x_1, T_i u_\ell \rangle \\ &= \sum_{\ell} \langle (x_1 \otimes y)(u_\ell), T_i u_\ell \rangle \\ &= \langle x_1 \otimes y, T_i \rangle. \end{aligned}$$

Similarly, we have $\langle x_2, T_i y \rangle = \langle x_2 \otimes y, T_i \rangle$ for all i .

Hence, $|\langle x_1 \otimes y, T_i \rangle| = |\langle x_2 \otimes y, T_i \rangle|$ for all i and $\{T_i\}_{i \in I}$ is a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$.

This says that there exists α such that $(x_1 \otimes y) = \alpha(x_2 \otimes y)$ with $|\alpha| = 1$. For the given $y \in H_2$, we can write

$$\begin{aligned}(x_1 \otimes y)(y) &= \alpha(x_2 \otimes y)(y) \implies \langle y, y \rangle x_1 = \alpha \langle y, y \rangle x_2 \\ &\implies x_1 = \alpha x_2.\end{aligned}$$

This concludes that the set vectors $\{T_i y\}_{i \in I}$ does phase retrieval for H_1 . A similar argument works for $\{T_i^* x\}_{i \in I}$ to do phase retrieval in H_2 .

Corollary 1. Let T be an operator in $H_1 \otimes H_2$ such that $\text{range}(T) = H_1$ and $\{Q_j\}_{j \in J}$ be a phase retrievable frame for $H_2 \otimes H_1$. Then for any $x \in H_1$, the set of vectors $\{TQ_j(x)\}_j$ does phase retrieval in H_1 .

Proof. For any $x \in H_1$ and any given $x_1, x_2 \in H_1$ which satisfies the condition

$$|\langle x_1, TQ_j(x) \rangle| = |\langle x_2, TQ_j(x) \rangle| \text{ for all } j, \text{ we have}$$

$$|\langle x_1, TQ_j(x) \rangle| = |\langle x_2, TQ_j(x) \rangle| \implies |\langle T^* x_1, Q_j(x) \rangle| = |\langle T^* x_2, Q_j(x) \rangle| \text{ for all } j.$$

Since we assume that $\{Q_j\}_{j \in J}$ is a phase retrievable frame for $H_2 \otimes H_1$, by Theorem (3), the set of vectors $\{Q_j(x)\}_{j \in J}$ is also phase retrievable frame for H_1 . This says that $T^* x_1 = \alpha T^* x_2$ for some α with $|\alpha| = 1$. For any $y \in H_2$, we can write

$$\begin{aligned}\langle T^* x_1, y \rangle &= \langle \alpha T^* x_2, y \rangle \implies \langle x_1, Ty \rangle = \langle \alpha x_2, Ty \rangle \\ &\implies \langle x_1 - \alpha x_2, Ty \rangle = 0\end{aligned}$$

When $\text{range}(T) = H_1$, we can choose the $y \in H_2$ such that $Ty = x_1 - \alpha x_2$. Hence, $\langle x_1 - \alpha x_2, x_1 - \alpha x_2 \rangle = \|x_1 - \alpha x_2\|^2 = 0 \implies x_1 = \alpha x_2$ and this says that the set of vectors $\{TQ_j(x)\}_j$ does phase retrieval in H_1 .

Corollary 2. If $\{T_i\}_{i \in I}$ is a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$, then for any $x \in H_1$ and $y \in H_2$, the set of tensor products $\{T_i(y \otimes x)T_i\}$ does phase retrieval in $H_1 \otimes H_2$.

Proof. For any $x \in H_1$ and $y \in H_2$, we showed in Theorem (3) that $\{T_i y\}_{i \in I}$ and $\{T_i^* x\}_{i \in I}$ does phase retrieval for H_1 and H_2 , respectively. By Theorem (1), tensor product of two phase retrievable frames are also phase retrievable. Hence, $\{(T_i y) \otimes (T_i^* x)\}$ does phase retrieval in $H_1 \otimes H_2$. For any $t \in H_2$, we have

$$\begin{aligned}((T_i y) \otimes (T_i^* x))(t) &= \langle T_i^* x, t \rangle T_i y \\ &= \langle T_i t, x \rangle T_i y \\ &= T_i (\langle T_i t, x \rangle y) \\ &= T_i (\langle x, T_i t \rangle y) \\ &= T_i (y \otimes x) T_i(t).\end{aligned}$$

This proves that the set $\{T_i(y \otimes x)T_i\}$ does phase retrieval in $H_1 \otimes H_2$.

Corollary 3. Let $T_1 \in B(H_1), T_2 \in B(H_2)$ be invertible operators. If $\{x_i\}_{i \in I}$ and $\{y_j\}_{j \in J}$ are phase retrievable frames for H_1 and H_2 , respectively, then $\{T_1 x_i \otimes T_2 y_j\}_{i,j}$ does phase retrieval for $H_1 \otimes H_2$.

Proof. Let T_1 and T_2 be invertible operators on H_1 and H_2 , respectively.

Since we have $(T_1 \otimes T_2)^{-1} = T_1^{-1} \otimes T_2^{-1}$ and

$$(T_1 \otimes T_2)(T_1 \otimes T_2)^{-1} = T_1 T_1^{-1} \otimes T_2 T_2^{-1} = I_{H_1} \otimes I_{H_2},$$

$T_1 \otimes T_2$ is an invertible operator on $H_1 \otimes H_2$. Theorem (4.8) in [15] says that phase retrievable frames are preserved under invertible operators. By Theorem 1, we show that tensor product of two phase retrievable frames is also a phase retrievable frame for $H_1 \otimes H_2$. Hence, $(T_1 \otimes T_2)(x_i \otimes y_j) = \{T_1 x_i \otimes T_2 y_j\}_{i,j}$ does phase retrieval for $H_1 \otimes H_2$.

Corollary 4. The set of $\{T_i\}_{i \in I}$ does not do phase retrieval for $H_1 \otimes H_2$ if there exists linearly independent vectors $u_1, u_2 \in H_1$ and $v_1, v_2 \in H_2$ such that $\langle u_1, T_i v_2 \rangle + \langle u_2, T_i v_1 \rangle = 0$ for all i .

Proof. Suppose $u_1, u_2 \in H_1$ and $v_1, v_2 \in H_2$ be linearly independent vectors such that $\langle u_1, T_i v_2 \rangle + \langle u_2, T_i v_1 \rangle = 0$. For any scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$, we can define

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_2 & y_1 &= v_1 + v_2 \\ x_2 &= \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{\alpha}} & y_2 &= \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

This implies that

$$\begin{aligned} x_1 \oplus y_1 &= u_1 \oplus v_1 + u_1 \oplus v_2 + u_2 \oplus v_1 + u_2 \oplus v_2 \\ x_2 \oplus y_2 &= \frac{1}{\alpha}(u_1 \oplus v_1 - u_1 \oplus v_2 - u_2 \oplus v_1 + u_2 \oplus v_2). \end{aligned}$$

By assumption, we have $\langle u_1, T_i v_2 \rangle + \langle u_2, T_i v_1 \rangle = 0$.

This says that $|\langle x_1 \oplus y_1, T_i \rangle| = |\frac{1}{\alpha}| |\langle x_2 \oplus y_2, T_i \rangle| = |\langle x_2 \oplus y_2, T_i \rangle|$ for all $i \in I$. To show that the set of $\{T_i\}_{i \in I}$ does not do phase retrievable for $H_1 \otimes H_2$, we need to show that $x_1 \oplus y_1 \neq \alpha x_2 \oplus y_2$. To have a contradiction, suppose we have $x_1 \oplus y_1 = \alpha x_2 \oplus y_2$.

For any $t \in H_2$, we have

$$(x_1 \oplus y_1 - \alpha x_2 \oplus y_2)(t) = \frac{1}{\alpha + 1}(u_1 \oplus v_2 + u_2 \oplus v_1)(t) = 0.$$

$(u_1 \oplus v_2 + u_2 \oplus v_1)(t) = \langle v_2, t \rangle u_1 + \langle v_1, t \rangle u_2 = 0$ and $u_1, u_2 \in H_1$ are linearly independent vectors, this says that $\langle v_2, t \rangle = \langle v_1, t \rangle = 0$. Since we have $\langle v_2 - v_1, t \rangle = 0$ for any $t \in H_2$, this contradicts with the assumption that $v_1, v_2 \in H_2$ are linearly independent vectors. Hence, we have $x_1 \oplus y_1 \neq \alpha x_2 \oplus y_2$ and the set of $\{T_i\}_{i \in I}$ does not do phase retrievable for $H_1 \otimes H_2$.

Acknowledgments -

Funding/Financial Disclosure The authors have no received any financial support for the research, authorship, or publication of this study.

Ethics Committee Approval and Permissions The work does not require ethics committee approval and any private permission.

Conflict of Interests The authors stated that there are no conflict of interest in this article.

Authors Contribution Authors contributed equally to the study.

References

- [1] Duffin, R. J., & Schaeffer, A. C. (1952). A class of nonharmonic fourier series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 72(2), 341–366. <https://doi.org/10.2307/1990760>
- [2] Gabor, D. (1946). Theory of communication. part 1: The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering*, 93(26), 429–441. <https://doi.org/10.1049/ji-3-2.1946.0074>
- [3] Balan, R., Casazza, P., & Edidin, D. (2006). On signal reconstruction without phase. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 20(3), 345–356. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.001>
- [4] Chen, H., Wang, Z., Gao, K., Hou, Q., Wang, D., & Wu, Z. (2015). Quantitative phase retrieval in x-ray zernike phase contrast microscopy. *Journal of Synchrotron Radiation*, 22(4), 1056–1061. <https://doi.org/10.1107/S1600577515007699>
- [5] Pinilla, S., García, H., Díaz, L., Poveda, J., & Arguello, H. (2018). Coded aperture design for solving the phase retrieval problem in x-ray crystallography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 338, 111-128. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.02.002>
- [6] Shi, G., Shanechi, M. M., & Aarabi, P. (2006). On the importance of phase in human speech recognition. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 14(5), 1867-1874. <https://doi.org/10.1109/tsa.2005.858512>
- [7] Hüe, F., Rodenburg, J., Maiden, A., Sweeney, F., & Midgley, P. (2010). Wave-front phase retrieval in transmission electron microscopy via ptychography. *Physical Review B*, 82(12), 121415. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.121415>
- [8] Yu, R. P., Kennedy, S. M., Paganin, D., & Jesson, D. (2010) Phase retrieval low energy electron microscopy. *Micron*, 41(3), 232-238. <https://doi.org/10.1016/j.micron.2009.10.010>
- [9] Folland, G. B. (1994). *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press.
- [10] Ringrose, J. R., & Kadison, R. V. (1983). *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. Academic Press.
- [11] Reddy, G. U., Reddy, N. G., & Reddy, B. K. (2009). Frame operator and hilbert-schmidt operator in tensor product of hilbert spaces. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 7(1), 61-70. <https://doi.org/10.1080/1726037X.2009.10698563>
- [12] Khosravi, A., & Asgari, M. S. (2012). Frames and bases in tensor product of hilbert spaces. *arXiv Preprint arXiv:1204.0096*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1204.0096>

- [13] Wang, Y. H., & Li, Y. Z. (2019). Tensor product dual frames. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019(1), 1-17. <https://doi.org/10.1186/s13660-019-2034-6>
- [14] Zakeri, S., & Ahmadi, A. (2020). Scalable frames in tensor product of hilbert spaces. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 11(2), 149-159. <https://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2019.17608.1953>
- [15] Bahmanpour, S., Cahill, J., Casazza, P. G., Jasper, J., & Woodland, L. M. (2014). Phase retrieval and norm retrieval. *arXiv Preprint arXiv:1409.8266*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.8266>
- [16] Cahill, J., Casazza, P. G., Peterson, J., & Woodland, L. (2013). Phase retrieval by projections. *arXiv Preprint arXiv:1305.6226*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.6226>
- [17] Casazza, P. G., & Kutyniok, G. (2012). *Finite frames: Theory and Applications*. Springer.
- [18] Casazza, P. G., & Woodland, L. M. (2014). Phase retrieval by vectors and projections. *Operator Methods in Wavelets, Tilings, and Frames*, 626, 1-17. <https://doi.org/10.1090/conm/626/12501>
- [19] Christensen, O. (2003). *An Introduction to Frames and Riesz Bases (Vol. 7)*. Boston: Birkhäuser.



Approximation On Modular Spaces Via P -Statistical Relative \mathcal{A} -Summation Process

Kamil DEMİRÇİ¹ and Sevda YILDIZ¹

How to cite: Demirci, K., & Yıldız, S. (2022). Approximation On Modular Spaces Via P -Statistical Relative \mathcal{A} -Summation Process. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 152-172. <https://doi.org/10.33484//sinopfbfd.1197502>

Research Article

Corresponding Author
Sevda YILDIZ
sevdaorhan@sinop.edu.tr

ORCID of the Authors
K.D: 0000-0002-5976-9768
S.Y: 0000-0002-4730-2271

Received: 31.10.2022
Accepted: 13.12.2022

Abstract

In this paper, we first present the notions of statistical relative modular and F -norm convergence concerning the power series method. Then, we also present theorems of Korovkin-type via statistical relative \mathcal{A} -summation process via power series method on modular spaces, including as particular cases weighted spaces, certain interpolation spaces, Orlicz and Musielak-Orlicz spaces, L_p spaces and many others. Later, we consider some applications to Kantorovich-type operators in Orlicz spaces. Moreover, we present some estimates of rates of convergence via modulus of continuity. We end the paper with giving some concluding remarks.

Keywords: Korovkin theorem, modular space, statistical convergence, matrix summability, power series method

Modüler Uzaylar Üzerinde P -İstatistiksel \mathcal{A} -Toplam Süreci Aracılığıyla Yaklaşım

¹Sinop University Department of Mathematics, Sinop, Türkiye

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Öz

Bu çalışmada, ilk olarak, kuvvet serisi yöntemiyle ilgili istatistiksel relative modüler ve F -norm yakınsama kavramlarını sunuyoruz. Daha sonra, özel durumlar olarak ağırlıklı uzaylar, belirli enterpolasyon uzayları, Orlicz ve Musielak-Orlicz uzayları, L_p uzayları ve diğer bir çok uzayları içeren modüler uzaylar üzerinde kuvvet serisi yöntemiyle istatistiksel relative \mathcal{A} -toplam süreci aracılığıyla Korovkin-tipi teoremleri de sunuyoruz. Daha sonra, Orlicz uzaylarında Kantorovich tipi operatörlere bazı uygulamaları göz önüne alıyoruz. Dahası, süreklilik modülü aracılığıyla yakınsama oranlarının bazı tahminlerini sunuyoruz. Makaleyi bazı son sözler vererek bitiriyoruz.

Anahtar Kelimeler: Korovkin teoremi, modüler uzay, istatistiksel yakınsaklık, matris toplanabilme, kuvvet serisi yöntemi

Introduction and Preliminaries Notations

We begin this section with the notions of statistical convergence and the power series statistical convergence a sequence z :

First let \mathbb{N} be the set of natural numbers. Next let, $E \subseteq \mathbb{N}$, then the natural density of E , indicated by the symbol $\delta(E)$, is determined by:

$$\delta(E) := \lim_n \frac{\#\{k \leq n : k \in E\}}{n}$$

whenever the limit exists, where $\#\{.\}$ denotes the cardinality of the set [1].

A sequence $z = \{z_k\}$ of numbers is statistically convergent to κ iff, for every $\varepsilon > 0$,

$$\lim_n \frac{\#\{k \leq n : |z_k - \kappa| \geq \varepsilon\}}{n} = 0$$

that is, $E_n(\varepsilon) := \{k \leq n : |z_k - \kappa| \geq \varepsilon\}$ has natural density zero. This is denoted by $st - \lim_k z_k = \kappa$ [2, 3]. It is evident from the definition that a convergent sequence (in the usual sense) is statistically convergent to the same value. For all that a statistically convergent sequence need not be convergent in light of the above.

Another interesting convergence method is P -statistical convergence, which recently introduced by Ünver and Orhan [4] and is a different type of statistical convergence given via power series methods. They gave striking examples to demonstrate the incompatibility between statistical convergence and P -statistical convergence. The Abel and Borel methods are two well-known power series methods that are more effective than ordinary convergence.

Let $\{p_k\}$ be a positive real sequence such that $p_0 > 0$ and the associated power series

$$p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

has radius of convergence \mathcal{R} with $0 < \mathcal{R} \leq \infty$. A sequence $z = \{z_k\}$ is convergent in the sense of power series method provided that

$$\lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k z_k = \kappa \quad ([5, 6]).$$

Keep in mind that the method is regular iff $\lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{p_k t^k}{p(t)} = 0$ for every k (see, e.g. [7]).

Remark 1. We should note the special cases of power series methods. In case of $\mathcal{R} = 1$, if $p_k = 1$ and $p_k = \frac{1}{k+1}$, the power series methods give us Abel method and logarithmic method, respectively. Also, if $\mathcal{R} = \infty$ and $p_k = \frac{1}{k!}$, then the power series method gives us Borel method.

The rest of the paper, we assume that the method of power series is regular.

Now, we recall the next definitions:

Definition 1. [4] Let $E \subset \mathbb{N}_0$. If the limit

$$\delta_P(E) := \lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k \in E} p_k t^k$$

exists, then $\delta_P(E)$ is called the P -density of E .

It is evident from the definition of a power series method and P -density that $0 \leq \delta_P(E) \leq 1$ whenever it exists.

In a manner similar to the natural density, we can give the following properties for the P -density:

- i) $\delta_P(\mathbb{N}_0) = 1$,
- ii) if $E \subset F$ then $\delta_P(E) \leq \delta_P(F)$,
- iii) if E has P -density then $\delta_P(\mathbb{N}_0 \setminus E) = 1 - \delta_P(E)$.

Definition 2. [4] Let $z = \{z_k\}$ be a sequence. Then z is said to be P -statistically convergent, i.e., statistically convergent with respect to power series method to κ provided that for any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k \in E_\varepsilon} p_k t^k = 0$$

that is $\delta_P(E_\varepsilon) = 0$ for any $\varepsilon > 0$ where $E_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N}_0 : |z_k - \kappa| \geq \varepsilon\}$. This is denoted by $st_P - \lim z_k = \kappa$.

Definition 3. A sequence of real numbers $z = \{z_k\}$ is said to be P -statistically bounded if for some $H > 0$ such that $\delta_P(\{k : |z_k| > H\}) = 0$.

The terms statistical limit superior and statistical limit inferior have been given by Fridy and Orhan [8]. Then, Demirci [9] has generalized these ideas to ideal limit superior and limit inferior. We can now introduce the ideas of P -statistical limit superior and P -statistical limit inferior in light of these investigations. The P -statistical limit superior of a number sequence $z = \{z_k\}$, we write $st_P - \limsup z_k$, is defined by

$$st_P - \limsup z_k = \begin{cases} \sup B_z, & \text{if } B_z \neq \phi, \\ -\infty, & \text{if } B_z = \phi, \end{cases}$$

where $B_z := \{b \in \mathbb{R} : \delta_P(\{k : z_k > b\}) > 0 \text{ or does not exist in } \mathbb{R}\}$ and the symbol ϕ represents the empty set. Similarly, the P -statistical limit inferior of $\{z_k\}$, we write $st_P - \liminf z_k$, is defined by

$$st_P - \liminf z_k = \begin{cases} \inf C_z, & \text{if } C_z \neq \phi, \\ +\infty, & \text{if } C_z = \phi, \end{cases}$$

where $C_z := \{c \in \mathbb{R} : \delta_P(\{k : z_k < c\}) > 0 \text{ or does not exist in } \mathbb{R}\}$. It is discovered that, similar to the statistical superior or inferior limit $st_P - \liminf z_k \leq st_P - \limsup z_k$ and notice that, for any sequence $z = \{z_k\}$ satisfying $\delta_P(\{k : |z_k| > H\}) = 0$ for some $H > 0$, $st_P - \lim z_k = \kappa$ iff $st_P - \liminf z_k = st_P - \limsup z_k = \kappa$.

Let us briefly recall some simple, basic facts about modular spaces which will be used in our main section.

Let $I = [c, d]$ be the Lebesgue-measured bounded interval of the real line \mathbb{R} . The space of all real-valued measurable functions on I that are guaranteed to have equality a.e. will then be denoted by the symbol $X(I)$. A functional $\rho : X(I) \rightarrow [0, +\infty]$ is said to be a modular on $X(I)$ if $\rho(f) = 0$ if and only if $f = 0$ a.e. in I , $\rho(-f) = \rho(f)$ for every $f \in X(I)$, $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ for every $f, g \in X(I)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

If there is a constant $\mathcal{N} \geq 1$ such that $\rho(af) \leq \mathcal{N}a\rho(\mathcal{N}f)$ holds for any $f \in X(I)$ and $a \in (0, 1]$, then a modular ρ is said to be \mathcal{N} -quasi semiconvex. A modular ρ is \mathcal{N} -quasi convex if there exists a constant

$\mathcal{N} \geq 1$ such that $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \mathcal{N}\alpha\rho(\mathcal{N}f) + \mathcal{N}\beta\rho(\mathcal{N}g)$ holds for every $f, g \in X(I)$, $\alpha, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta = 1$. If $\mathcal{N} = 1$, then ρ is called *convex*.

An \mathcal{N} -quasi convex modular is obviously an \mathcal{N} -quasi semiconvex modular. It is worth noting that Bardaro et. al. [10] introduced and detailed the above two ideas.

By means of a modular ρ , we recall the vector subspace of $X(I)$, denoted by $L^\rho(I)$ and it is called the modular space:

$$L^\rho(I) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\}$$

and the subspace of $L^\rho(I)$ defined by

$$E^\rho(I) := \{ f \in L^\rho(I) : \rho(\lambda f) < +\infty \text{ for all } \lambda > 0 \}.$$

It is easy to verify that if ρ is \mathcal{N} -quasi semiconvex, then we have the following characterization of the modular space $L^\rho(I)$:

$$L^\rho(I) = \{ f \in X(I) : \rho(\lambda f) < +\infty \text{ for some } \lambda > 0 \}.$$

For the notions about modulars, we refer the readers to [10, 11] (Also, see [12, 13]).

Now we deal with the convergence notions in modular spaces.

Let a function sequence $\{f_k\}$ be in $L^\rho(I)$. Then, $\{f_k\}$ is said to be *modularly convergent* to a function $f \in L^\rho(I)$ iff

$$\lim_k \rho(\lambda_0 (f_k - f)) = 0, \text{ for some } \lambda_0 > 0. \quad (1)$$

Also, if (1) is provided for all $\lambda > 0$, then it is called *F-norm convergent* (or, *strongly convergent*), i.e.,

$$\lim_k \rho(\lambda (f_k - f)) = 0, \text{ for every } \lambda > 0. \quad (2)$$

It is well known from Musielak [13] that (1) and (2) are equivalent if and only if the modular ρ satisfies the Δ_2 -condition, that is to say, $\exists H > 0$ such that $\rho(2f) \leq H\rho(f)$ for every $f \in X(I)$.

We also recall the definitions of relative modular and strong convergence given by Yılmaz et al. [14]:

Let a function sequence $\{f_k\}$ be in $L^\rho(I)$. Then, $\{f_k\}$ is said to be *relatively modularly convergent* to a function $f \in L^\rho(I)$ if there exists a function $\sigma(z)$, called a scale function $\sigma \in X(I)$, $|\sigma(z)| \neq 0$ such that

$$\lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ for some } \lambda_0 > 0.$$

Also, $\{f_k\}$ is *F-norm convergent* (or, *strongly convergent*) to f iff

$$\lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ for every } \lambda > 0.$$

Notice that modular convergence is a particular case of relative modular convergence where the scale

function is a constant that is not zero.

The majority of classical operators have a tendency to approximate the function's value, although at discontinuous points they typically converge to the average of the function's left and right limits. As previously mentioned, the fundamental tools for resolving the lack of convergence are the matrix summability methods or, more generally, \mathcal{A} -summation methods.

Let $\mathcal{A} := \{A^{(j)}\} = \left\{ \left(a_{nk}^{(j)} \right) \right\}$ be a sequence of infinite non-negative real matrices. For a sequence of real numbers, $z = \{z_k\}$, the double sequence $\mathcal{A}z := \left\{ (Az)_n^j : n, j \in \mathbb{N} \right\}$ defined by $(Az)_n^j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} z_k$ is referred to as the \mathcal{A} -transform of z whenever the series converges for all n and j . A sequence z is said to be \mathcal{A} -summable to κ if

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} z_k = \kappa$$

uniformly in j [15, 16]. If $A^{(j)} = \mathcal{B}$ for some matrix \mathcal{B} then, we get the ordinary matrix summability.

Orhan and Demirci [17] presented \mathcal{A} -summation process and then Kolay et al. [18] presented relative \mathcal{A} -summation process on a modular space as follows:

First let ρ be a monotone and finite modular on $X(I)$. Then, assume that D is a set satisfying $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$. Next let $\mathbb{T} := \{T_j\}$ be a sequence of positive linear operators from D into $X(I)$, more precisely there holds, for all $n, j \in \mathbb{N}$, $f \in D$ the series

$$A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k f \quad (3)$$

is absolutely convergent almost everywhere with respect to Lebesgue measure.

A sequence $\mathbb{T} := \{T_k\}$ of positive linear operators of D into $X(I)$ constitutes a relative \mathcal{A} -summation process on D if $\{T_k f\}$ is relatively \mathcal{A} -summable to f (with respect to modular ρ) for every $f \in D$, i.e.,

$$\lim_n \rho \left[\lambda \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right] = 0, \text{ uniformly in } j. \quad (4)$$

Note that the scale function in an \mathcal{A} -summation process is a non-zero constant, making it a special case of a relative \mathcal{A} -summation process [18].

Statistical type convergences in the sense of the power series method in modular spaces are now introduced:

Definition 4. Let $\{f_k\}$ be a function sequence whose terms belong to $L^\rho(I)$. Then, $\{f_k\}$ is said to be P -statistically relatively modularly convergent to a function $f \in L^\rho(I)$ iff there exists a scale function $\sigma \in X(I)$, $|\sigma(z)| \neq 0$ such that

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ for some } \lambda_0 > 0. \quad (5)$$

In addition, if (5) is provided for all $\lambda > 0$, then it is called P -statistical relative F -norm convergence

(or, P -statistical relative strong convergence), i.e.,

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ for every } \lambda > 0. \quad (6)$$

It can be immediately seen that (5) and (6) are equivalent if and only if the modular ρ satisfies the Δ_2 -condition. Indeed, P -statistical relative strong convergence of the sequence $\{f_k\}$ to f is equivalent to the condition $st_P - \lim \rho \left(2^N \lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0$, for all $N = 1, 2, \dots$ and some $\lambda > 0$. Let $\{f_k\}$ be P -statistically relatively modularly convergent to f , hence, there exists a $\lambda > 0$ such that

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0. \text{ Also, } \Delta_2\text{-condition implies by induction that}$$

$$\rho \left(2^N \lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) \leq H^N \rho \left(\lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right). \text{ Then, we get}$$

$$st_P - \lim \rho \left(2^N \lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0.$$

It is also important to keep in mind that P -statistical relative modular convergence is a special case of P -statistical modular convergence where the scale function is a non-zero constant.

Here, we provide a striking example of how our new definitions are more precise.

Example 1. Take $I = [0, 1]$ and with the following requirements, let $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous function:

- φ is convex,
- $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ for $u > 0$ and $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Therefore, take into consideration the functional ρ^φ on $X(I)$ defined by

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(z)|) dz \text{ for } f \in X(I).$$

In this case, all of the assumptions listed in this section are satisfied since ρ^φ is a convex modular on $X(I)$. Take into account the Orlicz space generated by φ by the following:

$$L_\varphi^\rho(I) := \{f \in X(I) : \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty \text{ for some } \lambda > 0\}.$$

For each $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 2$), define $h_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$h_k(z) = \begin{cases} k, & k = 2n, \\ k^2 z, & 0 \leq z \leq \frac{1}{k}, k = 2n + 1, \\ 2k - k^2 z, & \frac{1}{k} < z \leq \frac{2}{k}, k = 2n + 1, \\ 0, & \frac{2}{k} < z \leq 1, k = 2n + 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

If $\varphi(z) = z^p$ for $1 \leq p < \infty$, $z \geq 0$, then $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$. Moreover, we have for any function $f \in L_\varphi^\rho(I)$ that $\rho^\varphi(f) = \|f\|_{L_p}^p$. Additionally, let's say that the power series method is provided with

$$p_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

It is evident that $\{h_k\}$ does not converge either statistically modularly or modularly. Additionally, $\{h_k\}$ converges P -statistically modularly relative to a scale function σ rather than P -statistically modularly to $h = 0$ where

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ \frac{1}{z^2}, & z \in (0, 1] \end{cases}$$

on $L_1(I)$. Indeed, for some $\lambda_0 > 0$, with the choice of $p = 1$ we have $\rho^\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_{L_1}$,

$$\rho(\lambda_0(h_k - h)) = \|\lambda_0(h_k - h)\|_{L_1} = \lambda_0 \begin{cases} k, & k = 2n, \\ 1, & k = 2n + 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

As a result, it is simple to prove that $\{h_k\}$ does not converge statistically or P -statistically. Using the scale function σ , let's now

$$\rho\left(\lambda_0\left(\frac{h_k - h}{\sigma}\right)\right) = \left\|\lambda_0\left(\frac{h_k - h}{\sigma}\right)\right\|_{L_1} = \lambda_0 \begin{cases} \frac{k}{3}, & k = 2n, \\ \frac{7}{6k^2}, & k = 2n + 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

then, we get

$$st_P - \lim \rho\left(\lambda_0\left(\frac{h_k - h}{\sigma}\right)\right) = 0. \quad (9)$$

On the other hand, referring to (8), we see that the sequence $\{h_k\}$ neither converges to $h = 0$ statistically modularly nor P -statistically modularly on $L_1(I)$.

We conclude this section with the following assumptions:

- ◆ A modular ρ is said to be *finite* if $\chi_A \in L^\rho(I)$ when A is measurable subset of I such that $\mu(A) < \infty$,
- ◆ If a modular ρ is finite and, for every $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $\rho(\lambda\chi_B) < \varepsilon$ for any measurable subset $B \subset I$ with $\mu(B) < \delta$, then ρ is *absolutely finite* and if $\chi_I \in E^\rho(I)$, then ρ is *strongly finite*,
- ◆ A modular ρ is *monotone* if $\rho(f) \leq \rho(g)$ for $|f| \leq |g|$,
- ◆ A modular ρ is *absolutely continuous* provided that there exists an $\alpha > 0$ such that, for every $f \in X(I)$ with $\rho(f) < +\infty$, the following condition holds: for every $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that $\rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$ whenever B is any measurable subset of I with $\mu(B) < \delta$.

Let $C(I)$ stands for the space of all continuous real-valued functions, as usual. We have $C(I) \subset L^\rho(I)$ if a modular ρ is monotone and finite (see [21]). Also, if ρ is monotone and strongly finite, then $C(I) \subset E^\rho(I)$. Let $C^\infty(I)$ denote the space of all infinitely differentiable functions on I . If ρ is monotone, absolutely finite and absolutely continuous, then $\overline{C^\infty(I)} = L^\rho(I)$ with respect to the modular convergence in the ordinary sense (see [10, 11, 22, 23]).

In this study, we analyze the statistical relative \mathcal{A} -summation process's approximation of the Korovkin-type with respect to the power series method on modular spaces. Then, in Orlicz spaces, we apply some Kantorovich-type operators. We also provide some estimates of convergence rates obtained from moduli of continuity. We provide some final remarks at the end of the study.

P-Statistical Korovkin Theorems in Modular Spaces

The Korovkin-type approximation [24,25], which is undoubtedly one of the most elegant and fascinating result, has emerged as a wide field of study in recent years. There is a wide variety of Korovkin type results in the approximation (see e.g. [26–41]). Korovkin-type approximation first obtained by Bardaro and Mantellini [21] in the abstract setting of the modular spaces, a class of function spaces which includes weighted spaces, certain interpolation spaces, Orlicz and Musielak–Orlicz spaces, L_p spaces. Especially, using the concept of statistical convergence, Karakuş, Demirci and Duman [42] have introduced the Korovkin theorems on modular space and also, using matrix summability methods Karakuş and Demirci proved Korovkin theorems in [43]. In the absence of convergence, it is also become a powerfull tool to use the matrix summability methods or more generally, summation methods. It is the reason why Nishishiraho introduced and studied the notion of \mathcal{A} -summation process on a compact Hausdorff space [44, 45]. Recently, Kolay et al. have studied an approximation theorem of statistical type via relative \mathcal{A} -summation process in modular function space in [18].

The key findings of a *P*-statistical relative \mathcal{A} -summation process on a modular space are presented in this part in order to provide the Korovkin type approximation theorem for a sequence of positive linear operators. The major difference from the classical line is that convergence method which is used.

Let ρ be a monotone and finite modular on $X(I)$. Assume that D is a set satisfying $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$. Assume further that $\mathbb{T} := \{T_j\}$ is a sequence of positive linear operators from D into $X(I)$ for which there exists a subset $X_{\mathbb{T}} \subset D$ with $C^\infty(I) \subset X_{\mathbb{T}}$ and an unbounded function $\sigma \in X(I)$ satisfying $\sigma(z) \neq 0$ such that

$$st_P - \lim \sup \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(h)}{\sigma} \right) \right) \leq R\rho(\lambda h), \text{ uniformly in } j, \quad (10)$$

holds for every $h \in X_{\mathbb{T}}$, $\lambda > 0$ and with a constant $R > 0$ where $A_{n,j}^{\mathbb{T}}(h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k h$ as in (3).

The test functions e_i are used throughout the entire paper defined by $e_i(z) = z^i$ ($i = 0, 1, 2$).

Theorem 1. Let $\mathcal{A} = \{A^{(j)}\}$ be a sequence of infinite non-negative real matrices and let ρ be an absolutely continuous, monotone, \mathcal{N} -quasi semiconvex and strongly finite modular on $X(I)$. Let $\mathbb{T} := \{T_k\}$ be a sequence of positive linear operators from D into $X(I)$ satisfying (10) holds for each $f \in D$. Moreover, suppose that σ_i is an unbounded function satisfying $|\sigma_i(z)| \geq b_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$). Suppose that

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0, \text{ uniformly in } j, \quad (11)$$

for every $\lambda > 0$ and $i = 0, 1, 2$. Now let f be any function belonging to $L^\rho(I)$ such that $f - g \in X_{\mathbb{T}}$

for every $g \in C^\infty(I)$. Then we get

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ uniformly in } j, \quad (12)$$

for some $\lambda_0 > 0$ where $\sigma(z) = \max\{|\sigma_i(z)|; i = 0, 1, 2\}$.

Proof. As an auxiliary result, we first prove that

$$st_P - \lim \rho \left(\eta \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(g) - g}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ uniformly in } j, \quad (13)$$

for every $g \in C(I) \cap D$ and $\eta > 0$. Assume that g is a member of $C(I) \cap D$ and η is any positive number. Thanks to continuity of g on I and from the linearity and positivity of the operators T_k , it is readily seen that (see, for instance [26, 46]), for a given $\varepsilon > 0$, there exists a number $\delta > 0$ such that $|g(u) - g(z)| < \varepsilon + \frac{2H}{\delta^2} (u - z)^2$ where $H = \sup_{z \in I} |f'(z)|$. Assume that $0 < \varepsilon \leq 1$. As in the proof of Theorem 1 in [18], because of ρ is \mathcal{N} -quasi semiconvex and strongly finite, we can see that

$$\begin{aligned} \rho \left(\eta \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(g) - g}{\sigma} \right) \right) &\leq \mathcal{N}\varepsilon\rho \left(\frac{4\eta\mathcal{N}}{\sigma} \right) + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(e_0) - e_0}{\sigma_0} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(e_1) - e_1}{\sigma_1} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(e_2) - e_2}{\sigma_2} \right) \right) \end{aligned}$$

where $K := \max \left\{ \varepsilon + H + \frac{2Hs^2}{\delta^2}, \frac{4Hs}{\delta^2}, \frac{2H}{\delta^2} \right\}$, $s := \max |z|$. For a given $r > 0$, choose an $\varepsilon \in (0, 1]$ such that $\mathcal{N}\varepsilon\rho \left(\frac{4\eta\mathcal{N}}{\sigma} \right) < r$. Now we define the following sets:

$$\begin{aligned} G_\eta &:= \left\{ n : \rho \left(\eta \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(g) - g}{\sigma} \right) \right) \geq r \right\}, \\ G_{\eta,i} &:= \left\{ n : \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{n,j}^\mathbb{T}(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) \geq \frac{r - \mathcal{N}\varepsilon\rho \left(\frac{4\eta\mathcal{N}}{\sigma} \right)}{3} \right\}, i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Then, notice that $G_\eta \subseteq \bigcup_{i=0}^2 G_{\eta,i}$. Hence, this allowed us to write

$$\delta_P(G_\eta) \leq \sum_{i=0}^2 \delta_P(G_{\eta,i}).$$

It is evident from hypothesis (11) that

$$\delta_P(G_\eta) = 0,$$

which gives our claim (13). Observe that (13) also holds for every $g \in C^\infty(I)$ since $C^\infty(I) \subset C(I) \cap D$. Now let $f \in L^\rho(I)$ satisfying $f - g \in X_{\mathbb{T}}$ for every $g \in C^\infty(I)$. Since $\mu(I) < \infty$ and ρ is strongly finite and absolutely continuous, it is a simple matter to see that ρ is also absolutely finite on $X(I)$ (see [22]). Using these properties of the modular ρ , it is known from [10, 23] that the space $C^\infty(I)$ is modularly dense in $L^\rho(I)$, i.e., there exists a sequence $\{g_n\} \subset C^\infty(I)$ such that $\lim_n \rho(3\lambda_0^*(g_n - f)) = 0$ for some $\lambda_0^* > 0$. This means that, for every $\varepsilon > 0$, there is a positive number $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so that

$$\rho(3\lambda_0^*(g_n - f)) < \varepsilon \quad \text{for every } n \geq n_0. \quad (14)$$

However, utilizing a well-known process and the positivity and linearity of the operators T_k , we may write that,

$$\begin{aligned} \lambda_0^* \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(f; z) - f(z) \right| &\leq \lambda_0^* \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(f - g_{n_0}; z) \right| \\ &\quad + \lambda_0^* \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(g_{n_0}; z) - g_{n_0}(z) \right| + \lambda_0^* |g_{n_0}(z) - f(z)|, \end{aligned}$$

holds for every $z \in I$ and $j \in \mathbb{N}$. Now, by multiplying both sides of the above inequality by $\frac{1}{|\sigma(z)|}$, using the modular ρ , and moreover considering the monotonicity of ρ , we get

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f - g_{n_0})}{\sigma} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{g_{n_0} - f}{\sigma} \right) \right). \end{aligned}$$

Hence observing that $|\sigma| \geq b > 0$ ($b = \max\{b_i : i = 0, 1, 2\}$) and taking into consideration that ρ is monotone, we can write that

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f - g_{n_0})}{\sigma} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(\frac{3\lambda_0^*}{b} (g_{n_0} - f) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Then, in view of (14) and (15), we have

$$\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f - g_{n_0})}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right). \quad (16)$$

Consequently, assuming that the P -statistical limit superior on both sides of the (16) and noting that

$g_{n_0} \in C^\infty(I)$ and $f - g_{n_0} \in X_{\mathbb{T}}$, we obtained from (10) that

$$st_P - \limsup \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon + R\rho(3\lambda_0^*(f - g_{n_0})) \\ + st_P - \limsup \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right).$$

Referring to (14) in above inequality, we find that

$$st_P - \limsup \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon(R + 1) \\ + st_P - \limsup \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right). \quad (17)$$

Thanks to (13), since $st_P - \lim \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right) = 0$, uniformly in j , we get

$$st_P - \limsup \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(g_{n_0}) - g_{n_0}}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ uniformly in } j. \quad (18)$$

When (17) and (18) are combined, we see that

$$st_P - \limsup \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon(R + 1).$$

From arbitrariness of $\varepsilon > 0$, we find $st_P - \limsup \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0$ uniformly in j . Furthermore, since $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right)$ is non-negative for all $n, j \in \mathbb{N}$, we can easily show that

$$st_P - \lim \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ uniformly in } j,$$

this completes the proof.

Remark 2. We can establish an identical result using a similar method in the space $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ of all continuous real-valued functions on \mathbb{R} of period 2π .

The following conclusion can be derived from Theorem 1 in a direct manner if the modular ρ satisfies the Δ_2 -condition.

Theorem 2. Let $\mathcal{A} = \{A^{(j)}\}$ be a sequence of infinite non-negative real matrices and $\mathbb{T} := \{T_k\}$, ρ and σ be the same as in Theorem 1. If ρ satisfies the Δ_2 -condition, then the following statements are equivalent:

$$(a) \quad st_P - \lim \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0 \quad \text{uniformly in } j, \text{ for every } \lambda > 0 \text{ and } i = 0, 1, 2,$$

- (b) $st_P - \lim \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0$ uniformly in j , for every $\lambda > 0$ provided that f is any function belonging to $L^\rho(I)$ such that $f - g \in X_{\mathbb{T}}$ for every $g \in C^\infty(I)$.

The condition (10) reduces to the following if the identity matrix is used in place of the matrices $A^{(j)}$ and the scale function is assumed to be a non-zero constant

$$st_P - \limsup \rho(\lambda(T_k h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (19)$$

for every $h \in X_{\mathbb{T}}$, $\lambda > 0$ and for an absolute positive constant R . In this case, we obtain the next results from our main theorems, Theorem 1 and Theorem 2.

Corollary 1. Let ρ be an absolutely continuous, monotone, \mathcal{N} -quasi semiconvex and strongly finite modular on $X(I)$. Let $\mathbb{T} := \{T_k\}$ be a sequence of positive linear operators satisfying (19) from D into $X(I)$. If $\{T_k e_i\}$ is P -statistically strongly convergent to e_i for each $i = 0, 1, 2$, then $\{T_k f\}$ is P -statistically modularly convergent to f provided that f is any function belonging to $L^\rho(I)$ such that $f - g \in X_{\mathbb{T}}$ for every $g \in C^\infty(I)$.

Corollary 2. $\mathbb{T} := \{T_k\}$ and ρ be the same as in Corollary 1. The following statements are equivalent if ρ satisfies the Δ_2 -condition:

- (a) $\{T_k e_i\}$ is P -statistically strongly convergent to e_i for each $i = 0, 1, 2$,
 (b) $\{T_k f\}$ is P -statistically strongly convergent to f provided that f is any function belonging to $L^\rho(I)$ such that $f - g \in X_{\mathbb{T}}$ for every $g \in C^\infty(I)$.

An Application

The example in this section demonstrates how our approximation of Korovkin-type results in modular spaces are more powerful than those previously examined.

Example 2. Take $I = [0, 1]$ and let $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous function such that φ is a convex function and $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ for $u > 0$ and $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$. Hence, consider the functional ρ^φ on $X(I)$ defined by

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(z)|) dz \quad \text{for } f \in X(I). \quad (20)$$

In this case ρ^φ is a convex modular on $X(I)$. Consider the Orlicz space created by φ as follows:

$$L_\varphi^\rho(I) := \{f \in X(I) : \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty \text{ for some } \lambda > 0\}.$$

Then take into account the following classic Bernstein-Kantorovich operator $\mathbf{U} := \{U_k\}$ on the space $L_\varphi^\rho(I)$ (see [21]) which is defined by:

$$U_k(f; z) := \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} z^n (1-z)^{k-n} (k+1) \int_{n/(k+1)}^{(n+1)/(k+1)} f(u) du \quad \text{for } z \in I.$$

Keep in mind that the operators U_k map the Orlicz space $L_\varphi^\rho(I)$ into itself. Moreover, the property (19) is satisfied with the choice of $X_U := L_\varphi^\rho(I)$. Then, it can be easily seen that, for any function $f \in L_\varphi^\rho(I)$ such that $f - g \in X_U$ for every $g \in C^\infty(I)$, $\{U_k f\}$ is modularly convergent to f . Due to the regularity of the method, $\{U_k f\}$ is P -statistically modularly convergent to f .

If $\varphi(z) = z^p$ for $1 \leq p < \infty$, $z \geq 0$, then $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$. Moreover we have $\rho^\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_{L_p}^p$. Also assume that $\mathcal{A} := \{A^{(j)}\} = \left\{ \left(a_{nk}^{(j)} \right) \right\}$ is a sequence of infinite matrices defined by $a_{nk}^{(j)} = \frac{1}{n+1}$, for $j \leq k \leq n+j$, ($j = 1, 2, \dots$), and $a_{nk}^{(j)} = 0$ otherwise. It is well-known that, \mathcal{A} -summability reduces to almost convergence ([20]). Then, using the operators U_k , we define the sequence of positive linear operators $\mathbb{V} := \{V_k\}$ on $L_1([0, 1])$ as follows:

$$V_k(f; z) = (1 + h_k(z))U_k(f; z) \quad \text{for } f \in L_1(I), z \in [0, 1] \text{ and } k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

where $\{h_k\}$ is the same as in (7) and we choose $\sigma_i(z) = \sigma(z)$ ($i = 0, 1, 2$),

where $\sigma(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ \frac{1}{z^2}, & 0 < z \leq 1. \end{cases}$ For positive constant C , taking into account that $\|U_k(\cdot)\|_{L_p} \leq C\|\cdot\|_{L_p}$ ([19]), we can easily see that

$$st_P - \limsup \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\mathbb{V}}(f)}{\sigma} \right\|_{L_1} \leq R \|\lambda f\|_{L_1}, \text{ uniformly in } j, \quad (22)$$

where $A_{n,j}^{\mathbb{V}}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} V_k f$ as in (3). We now claim that

$$st_P - \lim \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\mathbb{V}}(e_i) - e_i}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0, \text{ uniformly in } j, i = 0, 1, 2, \quad (23)$$

where $\sigma_i(z) = \sigma(z)$ for $i = 0, 1, 2$. Observe that $U_k(e_0; z) = e_0(z)$, $U_k(e_1; z) = \frac{kz}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)}$ and $U_k(e_2; z) = \frac{k(k-1)z^2}{(k+1)^2} + \frac{2kz}{(k+1)^2} + \frac{1}{3(k+1)^2}$. So, we can see,

$$\left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\mathbb{V}}(e_0) - e_0}{\sigma} \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \frac{\sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{n+1} (1 + h_k) - 1}{\sigma} \right\|_{L_1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \left\| \lambda \frac{h_k}{\sigma} \right\|_{L_1}.$$

It is well known that if a sequence is convergent, its arithmetic mean will also converge to the same value. Thus, by virtue of P -statistical convergence and thanks to (9) it is clear that

$$st_P - \lim \left(\sup_j \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \left\| \lambda \frac{h_k}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) = 0, \quad (24)$$

and we get

$$st_P - \lim \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_0) - e_0}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0, \text{ uniformly in } j,$$

which guarantees that (23) holds true for $i = 0$. Also, we can easily get that

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_1) - e_1}{\sigma} \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{n+1} \frac{(1+h_k)}{\sigma} U_k(e_1) - \frac{e_1}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \\ &< \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{k}{k+1} - 1 \right) \int_0^1 |\lambda z^3| dz \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{2(k+1)} \right) \int_0^1 |\lambda z^2| dz + 2 \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \left\| \lambda \frac{h_k}{\sigma} \right\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Referring to $st_P - \lim \left(\sup_j \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{k}{k+1} - 1 \right) \right) = 0$, $st_P - \lim \left(\sup_j \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{2(k+1)} \right) = 0$ and from (24) we have,

$$st_P - \lim \left(\sup_j \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_1) - e_1}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) = 0$$

which gives $st_P - \lim \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_1) - e_1}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0$, uniformly in j . So (23) holds true for $i = 1$. Finally, since

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_2) - e_2}{\sigma} \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{n+1} \frac{(1+h_k)}{\sigma} U_k(e_2) - \frac{e_2}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \\ &< \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{k(k-1)}{(k+1)^2} - 1 \right) \int_0^1 |\lambda z^4| dz + \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{2k}{(k+1)^2} \right) \int_0^1 |\lambda z^3| dz \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{3(k+1)^2} \right) \int_0^1 |\lambda z^2| dz + 3 \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \left\| \lambda \frac{h_k}{\sigma} \right\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Thanks to $st_P - \lim \left(\sup_j \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{k(k-1)}{(k+1)^2} - 1 \right) = 0$, $st_P - \lim \left(\sup_j \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{2k}{(k+1)^2} \right) = 0$ and

$st_P - \lim \left(\sup_j \frac{1}{n+1} \sum_{k=j}^{j+n} \frac{1}{3(k+1)^2} \right) = 0$ and also from (24) we have,

$$st_P - \lim \sup_j \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\vee}(e_2) - e_2}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0$$

which gives $st_P - \lim \left\| \lambda \frac{A_{n,j}^{\nabla}(e_2) - e_2}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0$, uniformly in j . So, our claim (23) holds true for each $i = 0, 1, 2$ and for any $\lambda > 0$. Now, from (22) and (23), we can say that our sequence $\nabla := \{V_k\}$ defined by (21) satisfy all assumptions of Theorem 1 and we conclude that

$$st_P - \lim \left\| \lambda_0 \frac{A_{n,j}^{\nabla}(f) - f}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0, \text{ uniformly in } j, \text{ for some } \lambda_0 > 0,$$

holds for any $f \in L_1(I)$ such that $f - g \in X_{\nabla}$ for every $g \in C^{\infty}(I)$.

However, it can be easily seen that $\{V_k f\}$ is not P -statistically modularly convergent to f . Hence, Corollary 1 does not work for the sequence $\{V_k f\}$. In addition, in the view of (8), it can be shown that $\{V_k f\}$ is not statistically modularly convergent to f and we can say that the statistical Korovkin type theorem in [42] does not work for the sequence $\{V_k f\}$.

P -Statistical Convergence Rates

We present some estimates of P -statistical convergence rates for theorems of the Korovkin type in the case of modular convergence. We'll start with the definitions listed below:

Definition 5. Let $\{\alpha_k\}$ be a nonincreasing sequence of positive real numbers. A sequence $z = \{z_k\}$ is P -statistically convergent to a number κ with the rate of $o(\alpha_k)$ if, for every $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k \in E_{\varepsilon}} p_k t^k = 0$$

where $E_{\varepsilon} = \{k \in \mathbb{N}_0 : |z_k - \kappa| \geq \varepsilon \alpha_k\}$. In this case, we write

$$z_k - \kappa = st_P - o(\alpha_k).$$

Definition 6. Let $\{\alpha_k\}$ be a nonincreasing sequence of positive real numbers. A sequence $z = \{z_k\}$ is P -statistically bounded with the rate of $O(\alpha_k)$ if there is an $B > 0$ with

$$\lim_{0 < t \rightarrow \mathcal{R}^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{k \in F_{\varepsilon}} p_k t^k = 0$$

where $F_{\varepsilon} = \{k \in \mathbb{N}_0 : |z_k| \geq B \alpha_k\}$. In this case, we write

$$z_k - \kappa = st_P - O(\alpha_k).$$

Using these definitions, let us give the following lemma:

Lemma 1. Let $\{z_k\}$ and $\{y_k\}$ be sequences. Assume that $\{\alpha_k\}$ and $\{\beta_k\}$ be positive non-increasing sequences. If $z_k - \kappa_1 = st_P - o(\alpha_k)$ and $y_k - \kappa_2 = st_P - o(\beta_k)$, then we have

$$(i) (z_k - \kappa_1) \mp (y_k - \kappa_2) = st_P - o(\gamma_k), \text{ where } \gamma_k := \max\{\alpha_k, \beta_k\} \text{ for each } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$(ii) \lambda(z_k - \kappa_1) = st_P - o(\alpha_k) \text{ for any real number } \lambda.$$

Proof. (i) Assume that $z_k - \kappa_1 = st_P - o(\alpha_k)$ and $y_k - \kappa_2 = st_P - o(\beta_k)$. Also, for $\varepsilon > 0$, define

$$K_\varepsilon := \{k \in \mathbb{N}_0 : |(z_k - \kappa_1) \mp (y_k - \kappa_2)| \geq \varepsilon \gamma_k\},$$

$$K_\varepsilon^1 := \left\{k \in \mathbb{N}_0 : |z_k - \kappa_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \alpha_k\right\},$$

$$K_\varepsilon^2 := \left\{k \in \mathbb{N}_0 : |y_k - \kappa_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \beta_k\right\}.$$

Since $\gamma_k = \max\{\alpha_k, \beta_k\}$, then observe that

$$K_\varepsilon \subset K_\varepsilon^1 \cup K_\varepsilon^2,$$

which gives,

$$\delta_P(K_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^2 \delta_P(K_\varepsilon^i)$$

Under the hypothesis, we conclude that

$$\delta_P(K_\varepsilon) = 0,$$

this conclusively demonstrates (i). We omit the proof of (ii) because it is similar.

Additionally, the same results apply when the symbol “ o ” is changed with “ O ”.

We utilize the ordinary modulus of continuity, denoted by $\omega(f; \delta)$ defined as follows:

$$\omega(f; \delta) := \sup\{|f(u) - f(z)| : u, z \in I, |u - z| \leq \delta\}.$$

where $f \in C_b(I)$ and $\delta > 0$. Observe that $\omega(f; \delta)$ is an increasing function of δ ,

$$|f(u) - f(z)| \leq \omega(f; |u - z|) \text{ for each } u, z \in I \text{ and } \omega(f; \delta) \leq 2H \text{ for every } \delta, \text{ where } H = \sup_{u \in I} |f(u)|$$

and $\omega(f; \gamma\delta) \leq (1 + \gamma)\omega(f; \delta)$ for every $\gamma, \delta > 0$ (see also [47]).

The following theorem gives appropriate and very simple sufficient conditions for the rate of P -statistical \mathcal{A} -summation process.

Theorem 3. Let $\mathcal{A} = \{A^{(j)}\}$, $\mathbb{T} = \{T_k\}$ and e_0 be as above, let ρ be a monotone and strongly finite modular. Let $\{\alpha_k\}$ and $\{\beta_k\}$ be two nonincreasing sequences of strictly positive real numbers, and put $\gamma_k := \max\{\alpha_k, \beta_k\}$ for each $k \in \mathbb{N}_0$. Let $\delta_k := \left\|A_{n,j}^{\mathbb{T}}(\varphi)\right\|$ with $\varphi(u) = |u - z|$ ($u, z \in I$) where the symbol $\|\cdot\|$ denotes the sup-norm, the supremum is taken with respect to the support of f and $A_{n,j}^{\mathbb{T}}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k \varphi$ as in (3). Furthermore, let there exists $\gamma > 0$ with

$$(i) \rho\left(\gamma\left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(e_0) - e_0}{\sigma_0}\right)\right) = st_P - o(\alpha_k),$$

$$(ii) \rho\left(\gamma\frac{\omega(f; \delta_k)}{\sigma_1}\right) = st_P - o(\beta_k). \text{ Then, for every } f \in C_c(I) \text{ we get}$$

$$\rho\left(\gamma\left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma}\right)\right) = st_P - o(\gamma_k)$$

where $\sigma(z) = \max\{|\sigma_0(z)|, |\sigma_1(z)|\}$, $|\sigma_i(z)| > 0$ and $\sigma_i(z)$ is unbounded, $i = 0, 1$.

Proof. Let $f \in C_c(I)$ and $H = \sup_{u \in I} |f(u)|$. Using the properties of the modulus of continuity, we get

$$|f(u) - f(z)| \leq \omega(f; \varphi(u)) \leq \left(1 + \frac{\varphi(u)}{\delta}\right) \omega(f; \delta) \quad (25)$$

for every $\delta > 0$ and $u, z \in I$. Let now $\delta = \delta_k$. By applying T_k , keeping fixed z and letting u in I , and from (25), we obtain while accounting for linearity and monotonicity

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(f; z) - f(z) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(|f(u) - f(z)|; z) + |f(z)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k\left(\left(1 + \frac{\varphi(u)}{\delta}\right) \omega(f; \delta); z\right) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z) \right| \\ &\leq \omega(f; \delta) \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z) \right| + \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(\varphi(u); z) \\ &\quad + \omega(f; \delta) e_0(z) + H \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z) \right| \\ &\leq 4H \left(\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z) \right| + \omega(f; \delta) \right) \end{aligned}$$

for each $z \in I$. Now, by multiplying both sides of the above inequality by $\frac{1}{|\sigma(z)|}$ and

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(f; z) - f(z)}{\sigma(z)} \right| \leq 4H \left(\left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(j)} T_k(e_0; z) - e_0(z)}{\sigma_0(z)} \right| + \frac{\omega(f; \delta)}{|\sigma_1(z)|} \right).$$

Let now $\gamma > 0$. By applying the modular ρ , from the above inequality, we obtain

$$\rho\left(\gamma \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma}\right)\right) \leq \rho\left(8H\gamma \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(e_0) - e_0}{\sigma_0}\right)\right) + \rho\left(8H\gamma \frac{\omega(f; \delta)}{\sigma_1}\right). \quad (26)$$

For each $k \in \mathbb{N}_0$ and a given $r > 0$, define the following sets:

$$\begin{aligned} U_k &:= \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \rho\left(\gamma \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(f) - f}{\sigma}\right)\right) \geq r\gamma_k \right\}, \\ U_k^1 &:= \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \rho\left(8H\gamma \left(\frac{A_{n,j}^{\mathbb{T}}(e_0) - e_0}{\sigma_0}\right)\right) \geq \frac{r\alpha_k}{2} \right\}, \\ U_k^2 &:= \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \rho\left(8H\gamma \frac{\omega(f; \delta)}{\sigma_1}\right) \geq \frac{r\beta_k}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Referring to (26), we see that

$$U_k \subset U_k^1 \cup U_k^2.$$

Then, it follows from this inclusion that

$$\delta_P(U_k) \leq \delta_P(U_k^1) + \delta_P(U_k^2)$$

and using (i) and (ii), we obtain

$$\delta_P(U_k) = 0.$$

The theorem's proof is now complete.

Additionally, the same results apply when the symbol “ o ” is changed with “ O ”.

Concluding Remarks

To conclude this paper, in order to highlight the significance of Theorem 1 and Theorem 2 in approximation theory, we present some condensed results:

- ◆ We can derive the Korovkin type theorems of the P -statistical \mathcal{A} -summation process from our Theorem 1 and Theorem 2 by substituting a non-zero constant for the scale function.
- ◆ The P -statistical relative Korovkin type theorems are directly obtained from our Theorem 1 and Theorem 2 if we take $A^{(j)}$ by the identity matrix. We also obtain P -statistical Korovkin type theorems if one replaces a non-zero constant for the scale function.
- ◆ It is a well-known conclusion that $(X, \|\cdot\|)$ is a normed space then, $\rho(\cdot) = \|\cdot\|$ is a convex modular in X . As a result, every theorem in this paper are considered valid on normed spaces as well.

Acknowledgments -

Funding/Financial Disclosure The authors have no received any financial support for the research, authorship, or publication of this study.

Ethics Committee Approval and Permissions The work does not require ethics committee approval and any private permission.

Conflict of Interests The authors stated that there are no conflict of interest in this article.

Authors Contribution Authors contributed equally to the study.

References

- [1] Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons.
- [2] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicae*, 2(3-4), 241-244.
- [3] Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicae*, 2(1), 73-74.

- [4] Ünver, M., & Orhan, C. (2019). Statistical convergence with respect to power series methods and applications to approximation theory. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 40(5), 535-547. <https://doi.org/10.1080/01630563.2018.1561467>
- [5] Kratz, W., & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for Jp-summability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 139(2), 362-371. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90113-3](https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90113-3)
- [6] Stadtmüller, U., & Tali, A. (1999). On certain families of generalized Nörlund methods and power series methods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 238(1), 44-66. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6503>
- [7] Boos, J. (2000). *Classical and modern methods in summability*. Oxford University Press.
- [8] Fridy, J., & Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(12), 3625-3631. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04000-8>
- [9] Demirci, K. (2001). I-limit superior and limit inferior. *Mathematical Communications*, 6(2), 165-172.
- [10] Bardaro, C., Musielak, J., & Vinti, G. (2003). *Nonlinear integral operators and applications*. Volume 9 in the series De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications <https://doi.org/10.1515/9783110199277>
- [11] Musielak, J. (1993). Nonlinear approximation in some modular function spaces I. *Mathematica Japonica*, 38(1), 83-90.
- [12] Kozłowski, W. M. (1988). *Modular function spaces*. Pure Appl. Math. 122 Marcel Dekker, Inc.
- [13] Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1034 Springer-Verlag.
- [14] Yılmaz, B., Demirci, K., & Orhan, S. (2016). Relative modular convergence of positive linear operators. *Positivity*, 20(3), 565-577. <https://doi.org/10.1007/s11117-015-0372-2>
- [15] Bell, H. T. (1973). Order summability and almost convergence. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38(3), 548-552. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0310489-8>
- [16] Stieglitz, M. (1973). Eine verallgemeinerung des begriffs der fastkonvergenz. *Math. Japon*, 18(1), 53-70.
- [17] Orhan, S., & Demirci, K. (2014). Statistical A-summation process and Korovkin type approximation theorem on modular spaces. *Positivity*, 18(4), 669-686. <https://doi.org/10.1007/s11117-013-0269-x>
- [18] Kolay, B., Orhan, S., & Demirci, K. (2018). Statistical Relative A-Summation Process and Korovkin-Type Approximation Theorem on Modular Spaces. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42(2), 683-692. <https://doi.org/10.1007/s40995-016-0137-1>

- [19] Ditzian, Z. & Totik, V. (1987). *Moduli of smoothness*. Springer series in computational mathematics, Springer-Verlag.
- [20] Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, 80(1), 167-190. <https://doi.org/10.1007/BF02393648>
- [21] Bardaro, C. & Mantellini, I. (2007). Korovkin's theorem in modular spaces. *Commentationes Mathematicae*, 47(2), 239-253.
- [22] Bardaro, C., & Mantellini, I. (2006). Approximation properties in abstract modular spaces for a class of general sampling-type operators. *Applicable Analysis*, 85(4), 383-413. <https://doi.org/10.1080/00036810500380332>
- [23] Mantellini, I. (1998). Generalized sampling operators in modular spaces. In *Annales Societatis Mathematicae Polonae. Seria 1: Commentationes Mathematicae*, 38, 77-92.
- [24] Devore, R. A. (1972). *The approximation of continuous functions by positive linear operators*. Lecture Notes in Mathematics, 14 Springer-Verlag, Vol. 293.
- [25] Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. New Delhi, India: Hindustan Publishing Company.
- [26] Altomare, F. (2010). Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators. *Surveys in Approximation Theory*, 5, 92-164. <http://arxiv.org/abs/1009.2601>
- [27] Ansari, K. J., Özger, F., & Ödemiş Özger, Z. (2022). Numerical and theoretical approximation results for Schurer–Stancu operators with shape parameter λ . *Computational and Applied Mathematics*, 41(4), 1-18. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-01877-4>
- [28] Bardaro, C., Boccuto, A., Demirci, K., Mantellini, I., & Orhan, S. (2015). Triangular A -statistical approximation by double sequences of positive linear operators. *Results in Mathematics*, 68(1), 271-291. <https://doi.org/10.1007/s00025-015-0433-7>
- [29] Bardaro, C., Boccuto, A., Demirci, K., Mantellini, I., & Orhan, S. (2015). Korovkin-Type Theorems for Modular Ψ - A -Statistical Convergence. *Journal of Function Spaces*, 2015, Article ID 160401. <https://doi.org/10.1155/2015/160401>
- [30] Bayram, N. Ş. (2016). Strong summation process in locally integrable function spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(3), 683-694.
- [31] Bayram, N. Ş., & Orhan, C. (2020). A -Summation process in the space of locally integrable functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica*, 65(2), 255-268. <https://doi.org/10.24193/subbmath.2020.2.07>
- [32] Cai, Q. B., Ansari, K. J., Temizer Ersoy, M., & Özger, F. (2022). Statistical blending-type approximation by a class of operators that includes shape parameters λ and α . *Mathematics*, 10(7), 1149.
- [33] Demirci, K., Dirik, F., & Yıldız, S. (2022). Approximation via equi-statistical convergence in the sense of power series method. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 116(2), 1-13. <https://doi.org/10.1007/s13398-021-01191-4>

- [34] Demirci, K., & Dirik, F. (2011). Approximation for periodic functions via statistical σ -convergence. *Mathematical Communications*, 16(1), 77-84.
- [35] Demirci, K., & Orhan, S. (2017). Statistical relative approximation on modular spaces. *Results in Mathematics*, 71(3), 1167-1184. <https://doi.org/10.1007/s00025-016-0548-5>
- [36] Demirci, K., & Dirik, F. (2010). Four-dimensional matrix transformation and rate of A -statistical convergence of periodic functions. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(9-10), 1858-1866. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.07.015>
- [37] Demirci, K., Yıldız, S., & Dirik, F. (2020). Approximation via power series method in two-dimensional weighted spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(6), 3871-3883. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-00902-1>
- [38] Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32(1), 129-138.
- [39] Şahin, P. O., & Dirik, F. (2017). Statistical relative uniform convergence of double sequences of positive linear operators. *Applied Mathematics E-Notes*, 17, 207-220.
- [40] Orhan, S., & Demirci, K. (2015). Statistical approximation by double sequences of positive linear operators on modular spaces. *Positivity*, 19(1), 23-36. <https://doi.org/10.1007/s11117-014-0280-x>
- [41] Özger, F., Aljimi, E., & Temizer Ersoy, M. (2022). Rate of weighted statistical convergence for generalized blending-type Bernstein-Kantorovich operators. *Mathematics*, 10(12), 2027. <https://doi.org/10.3390/math10122027>
- [42] Karakuş, S., Demirci, K., & Duman, O. (2010). Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. *Positivity*, 14(2), 321-334. <https://doi.org/10.1007/s11117-009-0020-9>
- [43] Karakuş, S., & Demirci, K. (2010). Matrix summability and Korovkin type approximation theorem on modular spaces. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 79(2), 281-292.
- [44] Nishishiraho, T. (1981). Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 33(1), 109-126. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178229498>
- [45] Nishishiraho, T. (1983). Convergence of positive linear approximation processes. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 35(3), 441-458. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178229002>
- [46] Kolk, E. (1993). Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, 13(1-2), 77-84. <https://doi.org/10.1524/anly.1993.13.12.77>
- [47] Altomare, F., & Campiti, M. (1994). *Korovkin-type approximation theory and its Applications*. Volume 17 in the series De Gruyter Studies in Mathematics.



İleri Oksidasyon Proseslerinin Sızıntı Sularının Arıtımında Kullanımı

Kasım ATMACA¹ ve Nevzat BEYAZIT²

How to cite: Atmaca, K., & Beyazıt, N. (2022). İleri oksidasyon proseslerinin sızıntı sularının arıtımında kullanımı. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 173-187. <https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1162145>

Derleme

Sorumlu Yazar

Kasım ATMACA
katmaca@sinop.edu.tr

Yazarlara ait ORCID

K.A: 0000-0002-6570-4127
N.B: 0000-0002-8396-5996

Received: 15.08.2022

Accepted: 20.10.2022

Öz

Bu çalışmada, ileri oksidasyon prosesleri olarak bilinen, Fenton, elektro-Fenton ve foto-elektro-Fenton'un temel mekanizmaları ve sızıntı suyu arıtımında seçilen deneysel çalışma parametrelerinin bu proseslerin verimliliğine etkileri tartışılmıştır. Sızıntı suyu arıtımı ile ilgili deneysel çalışmalar, organik kirleticilerin hızlı oksidatif bozunmasını sağlamak için ileri oksidasyon proseslerinin kullanılabilceğini göstermiştir. Bu nedenle, sızıntı suyunun arıtımında, Fenton ve ilgili proseslerin kullanımı literatürde yaygın olarak tartışılmaktadır. Fenton reaksiyonu sırasında, asidik ortamda hidroksil radikalleri (OH•) üretmek için hidrojen peroksit (H₂O₂) demir tarafından aktive edilir ve oluşan OH• sızıntı suyundaki dirençli organik bileşikler giderir. Ülkemizde yürürlükte olan Su Kirliliği ve Kontrolü Yönetmeliği'nde ifade edilen deşarj standartları çoğunlukla sağlanmasa da ileri oksidasyon proseslerinin çok yüksek çözünmüş kirletici konsantrasyonlarını azaltmada oldukça etkili olduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle sızıntı suyu arıtımında bu tür tekniklerin ön arıtma veya arıtma sonrası şeklinde başka bir arıtma ile birlikte kullanılması tavsiye edilir.

Anahtar Kelimeler: Fenton, elektro-Fenton, foto-elektro-Fenton, ileri oksidasyon, sızıntı suyu

The Use of Advanced Oxidation Processes in the Treatment of Leachate

¹Sinop Üniversitesi, Mühendislik-
Mimarlık Fakültesi, Çevre
Mühendisliği Bölümü, Sinop,
Türkiye

²Ondokuz Mayıs Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi, Çevre
Mühendisliği Bölümü, Samsun,
Türkiye

Abstract

In this study, the basic mechanisms of Fenton, electro-Fenton and photo-electro-Fenton, known as advanced oxidation processes, and the effects of selected experimental operating parameters on the efficiency of these processes in the treatment of leachate are discussed. Experimental studies on leachate treatment have shown that advanced oxidation processes can be used to achieve rapid oxidative degradation of organic pollutants. Therefore, the use of Fenton and related processes in the treatment of leachate is widely discussed in the literature. During the Fenton reactions, hydrogen peroxide (H₂O₂) is activated by iron to produce hydroxyl radicals (OH•) in the acidic environment, and the formed OH• removes resistant organic compounds in the leachate. Although the discharge standards expressed in the Water Pollution and Control Regulation in force in our country are mostly not met, it is understood that advanced oxidation processes are quite effective in reducing very high dissolved pollutant concentrations. For this reason, it is recommended to use such techniques together with another treatment method in the form of pre-treatment or post-treatment in the treatment of leachate.

Giriş

Sızıntı suları, atıkların aerobik ve anaerobik ayrışması neticesinde oluşan her türlü sıvı atık olarak tanımlanabilir [1]. Yüksek konsantrasyonlu bir organik atık su türü olarak çöp sızıntı suyu, çözülmüş organik maddeler, amonyak azotu, ağır metaller, inorganik tuzlar gibi birçok organik ve inorganik kirletici içerir [2]. Yapılan çalışmalara göre, çöp sahası sızıntı sularında yaklaşık 200 tehlikeli bileşik tanımlanmıştır. Bu tehlikeli kirleticilerin çoğu, suda yaşayan organizmaların, ekolojinin ve besin zincirleri üzerinde birikici, tehdit edici ve zararlı etkilere sahiptir ve bu nedenle, kanserojen etkiler, akut toksisite ve genotoksisite gibi insan sağlığı üzerinde çok büyük sorunlara yol açabilir [3]. Bu nedenle, çöp sızıntı suyuyla etkin bir şekilde mücadele etmek son derece önemlidir [4]. Sızıntı suları, iki önemli faktör ile karakterize edilir: (i) hacim (miktar), (ii) bileşim. Hacim; yağış miktarı, yeraltı suyu seviyesi, yüzey akışı, depolama sahası örtüsü ve atık türü gibi birçok faktörden etkilenir. Sızıntı suyu bileşimini etkileyen faktörler ise; biriken atığın özellikleri, toprak özellikleri, depolama sahasının yaşı, iklim hem depolama sahası içinde hem de depolama sahası ile çevre arasındaki biyokimyasal etkileşimler, atık sıkıştırma oranı, depolama sahası tasarımı ve nem içeriğidir. Faktörler arasında, depolama sahası yaşı en önemli olanlardan biridir ve diğer faktörlerin anında tahmin edilmesi zor olabileceğinden, ilk karar vermede kullanılabilir. Sızıntı suyu bileşimini temsil eden temel parametreler BOİ, KOİ, pH, toplam kjeldahl azotu (TKN), toplam askıda katı madde (TAKM), toplam çözülmüş katı madde (TÇKM), amonyak azotu (NH₃-N), BOİ/KOİ oranı, ağır metaller, kükürt bileşikleri, toplam organik karbon (TOK) ve çözülmüş organik maddedir. Tablo 1 de, depolama sahasının yaşına göre sızıntı sularının bazı özellikleri gösterilmiştir [1].

Tablo 1. Depolama sahası ömrü boyunca sızıntı suyu özellikleri [1]

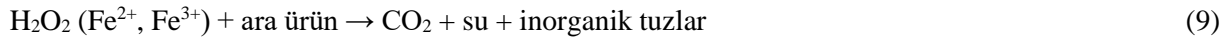
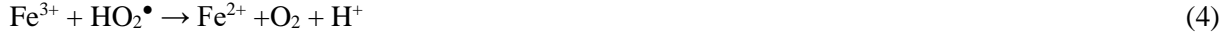
Parametre	Genç	Orta Yaşlı	Stabilize	Yaşlı
Yaş (Yıl)	<5	5-10	10-20	>20
pH	3-7	6-8	>7.5	>7.5
BOİ (mg/L)	2000-50000	500-15000	50-1000	<300
KOİ (mg/L)	400-90000	1000-30000	1000-5000	<3000
BOİ/KOİ	0.5-1.0	0.1-0.5	<0.1	<0.1
TOK/KOİ	<0.3	0.3-0.5	>0.5	>0.5
Ağır metal (mg/L)	>2	-	-	<2
TKN (mg/L)	500-4500	400-2000	50-2000	<2000
NH ₃ -N (mg/L)	<400	-	>400	-
NH ₄ ⁺ -N (mg/L)	500-4500	-	-	<1500

Tablo 1’de görüldüğü üzere; pH, BOİ, KOİ, BOİ/KOİ ve NH₄⁺ -N değerleri deponi sahası yaşı ile birlikte önemli farklılıklar gösterebilmektedir. Örneğin, genç sızıntı suyu oluşumlarında asidik karakterli olabilen sızıntı sularının zamanla bazik hale gelebildiği, biyolojik olarak parçalanabilen organik maddelerin büyük bir kısmının (BOİ olarak değerlendirilen) stabilizasyon safhasında ayrıştığı, fakat biyolojik olarak parçalanamayan organik maddelerin ise (KOİ’ ye katkıda bulunan) bu safhada değişmeden kaldığı düşünülmektedir. Sonuç olarak BOİ/KOİ oranı zamanla azalır. Diğer taraftan, sızıntı suyundaki ağır metal konsantrasyonları, zamanla artan pH’a bağlı olarak deponi sahası yaşı arttıkça azalır. Aksine, NH₃-N konsantrasyonu zamanla azalma eğilimi göstermez. İleri oksidasyon prosesleri (İOP) son yıllarda sızıntı sularının arıtımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde, birçok İOP olmakla birlikte Fenton (Fe²⁺/H₂O₂), foto-Fenton (Fe²⁺/H₂O₂/UV), H₂O₂/UV, ozon esaslı sistemler (O₃, O₃/UV, O₃/H₂O₂), TiO₂/UV ve sülfat radikal bazlı oksidasyon prosesleri en yaygın kullanılanlarıdır [5]. İleri oksidasyon proseslerinde genellikle H₂O₂ veya O₃ gibi güçlü kimyasal oksidantlar, demir iyonları ve bazı diğer metaller katalizör olarak ve UV ışığı, güneş ışığı, ultrason gibi ışınım yöntemleri ayrı ayrı veya kombine bir şekilde kullanılır. Işınım yöntemi ile çalışan İOP lerin atıksu arıtımındaki daha yüksek kirlenim giderim verimliliği nedeniyle daha etkili olduğu bilinmektedir [6]. İOP lerin temel hedefi, atıksu içerisindeki kirlenim maddeleri su, karbondioksit ve inorganik bileşiklere mineralize ederek zararsız son ürünlere dönüştürmek-olup avantajları şöyle sıralanabilir: (i) diğer fiziko-kimyasal arıtma prosesleriyle karşılaştırıldığında organik kirlenim maddelerinin gideriminde daha yüksek verimlilik sağlaması, (ii) biyolojik arıtma prosesleriyle kıyaslandığında daha hızlı kinetik sergilemesi, (iii) çevre dostu bir proses olmasıdır. Prosesin dezavantajları arasında ise pH a karşı hassasiyet ve gerekli düşük pH değerleri ile fazla oksidant miktarı ve yüksek maliyet sayılabilir [3, 5].

Fenton Prosesi

Fenton prosesi, boya atıksuları, fenolik atık sular, farmasötik atık sular, kok atık suları ve çöp sızıntı suları dahil olmak üzere çeşitli atık su türlerinin arıtımında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte, depolama sahası sızıntı suyu arıtımındaki uygulaması son derece kapsamlıdır [2]. Fenton (F) ve ilgili reaksiyonlar, organik veya inorganik bileşikleri oksitleyen aktif oksijen türleri oluşturmak için H₂O₂’in demir iyonlarıyla reaksiyonlarını kapsar. Fenton reaksiyon mekanizması ile ilgili uzun bir araştırma geçmişi vardır. Fenton reaksiyonu, ilk olarak 1894 yılında H.J.H. Fenton tarafından keşfedilmiştir ve tartarik asidi oksitlemek için H₂O₂’ nin Fe²⁺ tuzları tarafından aktive edilebileceğini bildirmiştir [7]. Daha sonra, Fenton sisteminin reaksiyon mekanizması kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Çoğu çalışmada, Fenton oksidasyonu ile çöp sızıntı suyu arıtımı aşağıdaki prensip doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bir yandan, demir iyonları ve hidrojen peroksitler arasındaki katalitik reaksiyon, güçlü bir oksidasyon potansiyeline sahip olan ve çöp sızıntı suyundaki organikleri bozan hidroksil radikalleri üretir. Diğer taraftan, çökeltiler Fe (OH)₃’ün flokülasyon etkisi ile uzaklaştırılır. Fenton reaktifi ile çöp sızıntı suyu arıtma süreci dört adıma ayrılabilir: (i) pH ayarlaması, (ii) oksidasyon

reaksiyonu, (iii) nötralizasyon ve (iv) flokülasyon ve çökeltme. Fenton tepkimeleri ve organik RH bileşiklerinin oksidasyonu, Denklem 1-9 da gösterilmiştir [2].



Fenton ve elektro-Fenton prosesleri ile sızıntı sularından KOİ ve renk giderimi üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları Tablo 2 ve Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 2. Fenton ve elektro-Fenton yöntemleri ile sızıntı sularından KOİ giderim verimleri

Yöntem	KOİ giriş (mg/L)	H ₂ O ₂ (mg/L)	Fe ²⁺ (mg/L)	KOİ Giderimi (%)	Referans
Fenton	1500	1650	500	70	[8]
Fenton	1500	200	300	70	[9]
Fenton	1500	200	300	70	[10]
Fenton	-	1200	1800	85	[11]
Fenton	10540	10000	830	60	[12]
Fenton	1000	2550	2800	70	[13]
Fenton	-	5000	1500	85	[14]
Elektro-Fenton	-	11560	1568	87.2	[15]
Fenton	1100-1300	1360	2240	61	[16]
Fenton	3300-4400	15000	2000	58	[17]
Elektro-Fenton	-	2000	-	72	[18]
Fenton	5700	650	56	66	[19]
Fenton	220	183.6	252	56	[20]
Fenton	743	8160	224	60.9	[21]
Fenton	1396	-	-	70-85	[22]
Fenton	-	3500	3500	82	[23]

Tablo 3. Fenton ve ilgili proseslerle renk giderimi

Proses	Renk giderimi (%)	Referans
Elektro-Fenton	90	[18]
Elektro-Fenton	>90	[24]
Foto-Fenton	>95	[17]

Tablo 4'te ise foto-elektro-Fenton yöntemiyle KOİ ve renk giderimi üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları verilmiştir.

Tablo 4. Sızıntı suyundan foto-elektro-Fenton yöntemiyle KOİ ve renk giderimi üzerine yapılmış çalışmalar

KOİ girişi (mg/L)	H ₂ O ₂ (mg/L)	Fe ²⁺ (mg/L)	UV lambda	KOİ giderimi (%)	Renk giderimi (%)	Referans
-	3000	-	1.4W/cm ²	94	97	[24]
3300-4400	15000	2000	-	77	-	[17]
2000	300	-	32W	97	100	[25]
8150	1000	550	16	83.84	84.46	[26]
1150	1150	56	500	70	-	[27]

Ozon Esaslı Sistemler

Ozon'un atıksudaki organik kirleticileri okside ettiği bilinmektedir ve bunun yanında koku ve renk gideriminde de etkilidir. Ozon, Denklem 10 da verildiği üzere 2.07 V luk yüksek bir oksidasyon potansiyeline sahiptir ve yüksek dirençli atıksuların arıtılmasında kullanılabilir.



Diğer taraftan sızıntı suyundan tek başına ozonlama yönteminin kullanılmasıyla ortalama %35 KOİ ve %50 NH₄-N u giderilebilir. Bu yüzden, daha yüksek kirletici giderim verimine ulaşmak için ozonlama yönteminin H₂O₂, UV veya adsorpsiyon sistemleriyle entegre edilmesi gerekmektedir. Denklem 11 de gösterildiği gibi ozon, amonyak gideriminde de oldukça etkilidir [5].



Literatürde, ozon esaslı prosesler ile yapılmış çalışmalardan bazıları Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Sızıntı suyundan ozon esaslı sistemler ile yapılmış kirletici giderim çalışmaları

Proses	KOİ (mg/L)	pH	O ₃ /KOİ (g/g)	KOİ giderimi (%)	H ₂ O ₂ /O ₃ (g/g)	UV (W)	Referans
O ₃	1585	8.2	1.7	23-32			[28]
O ₃	330	7.5	3.5	35			[29]
O ₃	480	7.7	0.5	>%50			[30]
O ₃	6500	8.1	1.2 g/L O ₃ doz	%15			[31]
O ₃	2300-4970	7.90-9.02	1.3-1.5	30			[32]
O ₃ /H ₂ O ₂	480	7.7	0.05-0.5	40	0.25-1		[30]
O ₃ /UV	1280	2	-	54	-	100	[33]
O ₃ /UV	430 TOK	-	0.1 g/L O ₃ doz	51 TOK	-	300	[34]

Sülfat Radikal Bazlı İleri Oksidasyon Prosesleri (S-İOP)

Sülfat radikali bazlı ileri oksidasyon prosesleri (S-İOP), dirençli mikroorganizmalar, ilaçlar ve biyolojik olarak parçalanamayan organik maddeler gibi kirleticileri gidermek için uygulanabilir. Sülfat radikalleri ($SO_4^{\cdot-}$), hidrojeni doymuş karbondan uzaklaştırarak, hidrojeni çift bağlara ekleyerek veya elektron transferi ile organik maddenin kısmen veya tamamen mineralleşmesine neden olur. Fenton prosesine karşılaştırıldığında, S-İOP kullanımının bazı avantajları şunlardır: (i) Sülfat radikalleri, Fenton prosesinde oluşan hidroksil radikalinden (OH^{\cdot}) daha fazla stabiliteye sahiptir. (ii) Sülfat radikalleri sulu çözeltide OH^{\cdot} den daha yüksek çözünürlüğe sahiptir. (iii) S-İOP lerin kullanımında pH aralığı Fenton prosesine göre daha geniştir [35]. Literatürde S-İOP ile yapılmış çalışmalardan bazıları Tablo 6 da verilmiştir.

Tablo 6. Sızıntı suyundan S-İOP ile yapılmış kirletici giderim çalışmaları

S-İOP Prosesi	Giriş kirletici konsantrasyonu	İşletme koşulları	Kirletici giderim verimi (%)	Referans
Peroksi disülfat (PDS)	19180-20448 mg/L KOİ	PDS: 4.2 g/L, pH. 7, karıştırma hızı: 350 rpm, deneysel süre: 120 dak.	%39 partikül halde KOİ, %60 partikül haldeki KOİ	[36]
PDS	19180-20448 mg/L KOİ	PDS: 5.15 g/L, pH: 7, sıcaklık: 28 °C, deneysel süre: 60 dak.	%45 KOİ, %47 NH ₃ -N	[37]
Mikrodalga/PDS	5000 ± 1000 mg/L TOK	PDS: 50mM, Güç: 450 W, pH: 8.4, deneysel süre: 16 dak.	≈ %50 KOİ	[38]
Mikrodalga/PDS	20-200 mg/L TOK	PDS: 2M, Güç: 550W, sıcaklık: 85°C, deneysel süre: 2 saat	%88.6 TOK	[39]
PDS/H ₂ O ₂	19180-20448 mg/L KOİ	PDS: 5.88 g/50 ml, H ₂ O ₂ : 8.63 g/50 ml, pH: 11, deneysel süre: 120 dak.	%81 KOİ, %83 amonyak	[40]
PDS/Fe ²⁺	9700 mg/L KOİ	PDS: 330 mM, Fe ²⁺ : 66 mM, deneysel süre: 6 saat	%30 KOİ	[41]

Fenton Prosesini Etkileyen Parametreler

Fe²⁺/Fe³⁺ Konsantrasyonu

Fe²⁺ konsantrasyonu, Fenton sistemlerinde önemli bir ön koşuldur. Bu yüzden, demir konsantrasyonu, genel arıtma verimliliği üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Fe²⁺, hidroksil radikallerinin oluşumunu hızlandırdığından, Fenton proseslerinin verimliliği ve hızı, genellikle yüksek demir konsantrasyonu altında artar [7,42]. Diğer taraftan, çok yüksek demir konsantrasyonları, daha yüksek pH değerlerinde demir çökmesine neden olur ve mevcut verimi düşürür. Bu nedenle demir iyonlarının optimum konsantrasyonunu bulmak laboratuvar ölçekli çalışmalara ihtiyaç vardır. Bundan dolayı demir konsantrasyonu optimize edilmelidir.

pH

pH, Fenton proseslerinin sistem performansını etkileyen en önemli parametrelerden biridir. Çözeltinin pH'ı oksidantın aktivitesini ve oluşan demir türlerini etkiler [43, 44]. Bazik pH değerleri Fenton proseslerini olumsuz yönde etkilemesinden dolayı asidik pH değerleri tercih edilmelidir [42]. Fenton sistemlerinde, yapılan birçok çalışmada optimum pH değerinin 3 olduğu bildirilmiştir [45-48]. Diğer bir çalışmada ise optimum pH değeri 2 olarak bulunmuştur [49]. Diğer taraftan, çok düşük pH değerleri de aşağıdaki nedenlerden dolayı sistem performansını olumsuz etkiler. Birinci olarak, düşük pH şartlarında, H₂O₂ oluşturmak için mevcut protonların sayısını azaltan hidrojen oluşumu artar ve H₂O₂ nin ayrışmasını hızlandırır. İkinci olarak, düşük pH şartlarında OH[•] i oluşumunu azaltan demir kompleksleri oluşur [42]. Dolayısıyla, Fenton proseslerinde arıtma verimliliği hem düşük hem de yüksek pH değerlerinde azaldığından pH değerinin optimize edilmesi gerekir.

H₂O₂ Konsantrasyonu

H₂O₂ konsantrasyonu, Fenton sistemlerinin tamamında prosesin verimini etkileyen ortak bir parametredir. Hidrojen peroksit konsantrasyonu, kirleticilerin bozunma sürecinin genel verimliliğine karar vermede çok önemli bir rol oynar [50]. Genellikle, hidrojen peroksit dozajının artmasıyla kirleticinin % bozunmasının arttığı gözlemlenmiştir [51, 52]. Ancak oksidant dozajı seçilirken dikkatli olunmalıdır. Fenton işlemi sırasında kullanılmayan hidrojen peroksit KOİ'ye katkıda bulunur ve bu nedenle fazla miktarı tavsiye edilmez [51]. Aşırı hidrojen peroksitin bir başka olumsuz etkisi de üretilen hidroksil radikalleri üzerine süpürücü etki göstermesidir [42]. Bu nedenle hidrojen peroksit dozajı, miktarın tamamı kullanılacak şekilde ayarlanmalı ve buna laboratuvar ölçekli çalışmalara göre karar verilmelidir.

Elektro-Fenton prosesi

Elektro-Fenton yöntemi, bir elektrokimyasal hücrede anot ve katot arasında bir elektrik akımı uygulayarak elektrotlar ve elektrolitik çözelti arasındaki elektron transferine dayanır [3]. Elektro-Fenton

prosesi, reaktif ilavesine veya oluşumuna bağlı olarak dört kategoride sınıflandırılır. Tip 1’de, hidrojen peroksit ve demir iyonu, sırasıyla çözünebilir anot ve katot kullanılarak elektriksel olarak üretilir [53]. Tip 2’de, hidrojen peroksit harici olarak sisteme eklenirken, demir iyon (Fe^{2+}) kaynağı olarak çözünebilir demir anot kullanılır [54]. Tip 3’te, demir iyonu harici olarak eklenirken katotta hidrojen peroksit üretilir [55, 56]. Tip 4’te ise, Fenton reaktifi elektrolitik bir hücrede hidroksil radikalleri üretmek için kullanılır ve demir iyonu, katotta demir iyonlarının indirgenmesi yoluyla yeniden üretilir [15, 57].

Elektrotlar Arası Mesafe Etkisi

Elektrotlar arası mesafe, elektro-Fenton sistemlerinin verimini etkileyen önemli parametrelerden biridir [58]. Elektrotlar arası mesafenin çok az olması durumunda, elektriksel olarak üretilen Fe^{2+} iyonları Fe^{3+} e oksitlenir, bu da Fenton reaksiyonlarının verimini düşürür. Öte yandan, mesafe çok artarsa, elektrotlar arasındaki artan elektriksel direnç nedeniyle tüketilen elektrik enerjisi artar [42]. Her iki nedenden dolayı da elektrokimyasal arıtma çalışmalarında elektrotlar arası mesafenin incelenmesi çok önemlidir. Atmaca [26], sızıntı suyundan elektro-Fenton yöntemi ile yapmış olduğu KOİ ve renk giderimi çalışmasında optimum koşullar altında (pH: 3, akım yoğunluğu: $100 A/m^2$, H_2O_2 : 2000 mg/L, karıştırma hızı: 250 rpm) elektrotlar arası mesafenin 0.5 cm den 1.5 cm ye çıkarılmasıyla 30 dakikalık arıtım neticesinde KOİ gideriminin %47 den %68 e yükseldiğini, renk gideriminin ise optimum koşullar altında (pH: 3, akım yoğunluğu: $75 A/m^2$, H_2O_2 : 2000 mg/L, karıştırma hızı: 250 rpm) 7.5 dakikalık arıtım sonucunda %40 tan %69 a yükseldiğini bulmuştur. Zhang ve ark. [15], sızıntı suyundan elektro-Fenton yöntemi ile KOİ giderimi üzerine yapmış oldukları çalışmada elektrotlar arası mesafenin 2.1 cm den 2.8 cm ye çıkarılmasıyla KOİ gideriminin %80.8’den %71.8’e düştüğünü bulmuşlardır. Atmaca [18], sızıntı suyundan elektro-Fenton yöntemiyle yapmış olduğu arıtım çalışmasında elektrotlar arası mesafenin 1.8 cm’den 2.8 cm’ye çıkartılmasıyla KOİ gideriminin %10 arttığını bulmuştur.

Foto-elektro-Fenton prosesi

EF işleminin UV ışın kaynağıyla kombine edilmesi foto-elektro-Fenton prosesi olarak adlandırılır [5]. UV ışığı (200–400 nm) sisteme dahil edildiğinde, hipoklorit, elektroliz sisteminin oksidasyon aktivitesini iyileştirmek için hidroksil radikallerine ve klor radikallerine ayrışır (Denklem 12) [59].



UV ışığının varlığında, H_2O_2 parçalanarak Denklem 13 uyarınca hidroksil radikallerine dönüşmektedir.



Literatürde rapor edilen çalışmalar, foto-elektro-Fenton prosesiyle organik kirleticilerin daha yüksek oranda bozunma sağladığını göstermiştir. 4-klorofenol, nitrobenzen ve anizol gibi kirleticiler, herbisitler

ve etilen glikol foto-elektro-Fenton prosesi ile etkili bir şekilde parçalanmıştır. H₂O₂'nin Denklem 13 uyarınca doğrudan fotolizi, organik bileşiklerin bozunması için kullanılabilen hidroksil radikalleri üretir. Ayrıca oluşan demirhidroksitler de UV varlığında parçalanarak hidroksil radikali üretmektedir (Denklem 14) [7].



Sonuç olarak, atıksu UV ile muamele edildiğinde ortamda oluşan OH[•] i miktarı artmaktadır. Bu yüzden, foto-elektro-Fenton prosesinde genel olarak daha yüksek kirletici giderimi sağlanmaktadır. H₂O₂ konsantrasyonu ve elektrotlar arası mesafe foto-elektro-Fenton prosesini etkileyen önemli parametrelerdendir. Beyazıt ve Atmaca [60], sızıntı sularının foto-elektro-Fenton yöntemiyle KOİ ve renk giderimi ile yapmış olduğu çalışmada, H₂O₂ konsantrasyonunun 250 mg/L den 1000 mg/L ye çıkarılmasıyla KOİ gideriminin 90 dakikalık arıtım neticesinde %53.16 dan %83.84 e, renk gideriminin ise 45 dakikalık arıtım neticesinde %56.32 den %84.46 ya yükseldiğini bulmuştur. Diğer taraftan H₂O₂ konsantrasyonunun 1000 mg/L den 1500 mg/L ye çıkarılmasıyla KOİ gideriminin 90 dakikalık arıtım neticesinde %83.84 ten %69.53 e düştüğü, renk gideriminin ise 45 dakikalık arıtım neticesinde %84.46 dan %70.87 ye düştüğü bulunmuştur. Benzer bir korelasyonu Asaithambi ve ark. [25], sızıntı suyundan foto-elektro-Fenton yöntemiyle KOİ ve renk giderimi üzerine yapmış oldukları çalışmada bulmuşlardır. H₂O₂ konsantrasyonunun 75 mg/L den 300 mg/L ye çıkarılmasıyla KOİ gideriminin %58.50 den %97'ye yükseldiğini, diğer taraftan H₂O₂ konsantrasyonunun 300 mg/L den 450 mg/L ye yükseltilmesiyle KOİ gideriminin %97 den %80.50 ye düştüğünü bulmuşlardır. Sonuç olarak H₂O₂ konsantrasyonu hem arıtma maliyetini hem de arıtım performansını direkt olarak etkilediğinden optimize edilmelidir. Asaithambi ve ark [25], foto-elektro Fenton yöntemi ile sızıntı suyundan KOİ ve renk giderimi üzerine yapmış oldukları çalışmada optimum deneysel koşullar altında (KOİ giriş: 2000 mg/L, pH: 3, akım yoğunluğu: 30 A/m², H₂O₂: 300 mg/L, UV lambası: 32W, deney süresi: 4 saat); elektrotlar arası mesafe 0.75 cm'den 3 cm'ye çıkarıldığında KOİ giderimi %97'den %69.50'ye düştüğünü ve elektrik enerjisi tüketiminin 3.1 kWh/m³ ten 6.5 kWh/m³e yükseldiğini bulmuşlardır. Dolayısıyla, foto-elektro-Fenton prosesinde, elektrotlar arası mesafe hem kirletici giderim verimini hem de elektrik enerjisi tüketimini etkilediğinden optimize edilmelidir.

UV Lamba

UV, elektromanyetik dalgaların bir parçasıdır. Ultraviyole ışık elektromanyetik radyasyon 400 ile 10 nm arasında değişir ve birkaç bölgeye ayrılır. Görünmez UV ışık aralığı, 400 nm dalga boylarından aşağıya doğru belirlenir. Kullanılan UV lamba türlerine göre dalga boyu aralıkları şöyledir: UV-A: 400 nm ile 315 nm arası, UV-B: 315 nm ile 280 nm arası, UV-C: 280 nm ile 200 nm dalga boyu arasını kapsar. UV ışığı ile su dezenfeksiyonu uygulaması esas olarak UV-C aralığı ile ilgilidir, bu da optik ekipmanın mümkün olduğunca şeffaf olması gerektiği anlamına gelir. Şeffaf malzeme olarak kuvars

cam kullanılabilir. 300'den 200 nm'ye kadar olan ışığa uzak UV de denir. 10 nm altında, x-ışınları bölgesi başlar [61].

Düşük basınçlı 254 nm'lik cıva buharlı UV lambaları (UV-C) genel olarak UV radyasyonu üretmek için kullanılırlar. UV lamba genellikle reaktöre bir kuvars ceket içerisinde daldırılmaktadır. Atıksu içerisindeki yüksek askıda katı madde veya koloidal maddelerin UV ışımaya öncesi giderilmesi ışık geçirgenliğini arttıracaktır [62].

Sonuç ve Öneriler

Sızıntı sularının arıtılması için ileri oksidasyon proseslerinin uygulanması, son on yılda artan bir ilgi görmüştür. Fenton prosesinin verimliliği büyük ölçüde reaksiyon koşullarına ve sızıntı suyu bileşimine bağlıdır. Fenton prosesi, çöp sızıntı suyu arıtımındaki uygulamalar için umut verici bir teknolojidir. Foto-elektro-Fenton prosesi ile yapılan çalışmalarda genel olarak KOİ ve renk giderimlerinin elektro-Fenton yöntemine göre arttığı gözlemlenmiştir. Diğer taraftan, Fenton sistemleri ile sızıntı suyu arıtımı ile ilgili sorunları çözmek için aşağıdaki konular daha fazla araştırılmalıdır.

- 1) Depolama sahası sızıntı suyunun karmaşık bir bileşimi vardır ve organik kirleticilerin bileşimi ve yapısı, Fenton sistemlerinin oksidasyon verimliliğini ve organik maddelerin bozunma hızını etkileyebilir. Gelecekteki çalışmalarda, organiklerin karmaşık yapısını ve oksidasyon mekanizmalarını belirlemeye odaklanılmalıdır.
- 2) Fenton sistemlerinin diğer arıtma prosesleriyle verimli kombinasyonları belirlenmelidir. Nihai olarak yüksek verimlilik ve maliyet etkinliği göz önünde bulundurularak arıtma alternatiflerinin optimize edilmesi gerekir.
- 3) Fenton sistemlerinin oksidasyon verimliliğini artırmak için ucuz ve çevre dostu katalizörler geliştirilmelidir. Yüksek verimli ve düşük maliyetli oksitleyici ajanların geliştirilmesi ve bunların büyük ölçekli sanayi uygulamalarının gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Bu nedenle oksitleyici madde araştırmalarına ve katalizör geliştirmeye öncelik verilmelidir.
- 4) Fenton sistemleri, genellikle tek başına çöp sızıntı suyu deşarj standartlarını karşılayamadığından ötürü diğer teknolojilerle birlikte kullanılabilir. Örneğin, Fenton, ozonlama ve biyolojik arıtma sistemlerinin verimli entegrasyonu, çöp sızıntı suyu arıtma teknolojisi çalışmalarında önemli bir gelişme yönüdür. Bu entegrasyon sayesinde, sadece işletme maliyetleri düşürülmekle kalmayacak, aynı zamanda çöp sızıntı suyunun verimli bir şekilde arıtılması da sağlanabilecektir. Bu senaryoda, işletim parametrelerinin en iyi nasıl optimize edileceğine, arıtma verimliliğinin nasıl iyileştirileceğine ve işletim maliyetlerinin nasıl azaltılacağına özellikle dikkat edilmelidir.

Teşekkür-

Fon/Finansman bilgileri Bu çalışma, herhangi bir kurum veya kuruluş tarafından desteklenmemiştir.

Etik Kurul Onayı ve İzinler Çalışma, etik kurul izni ve herhangi bir özel izin gerektirmemektedir.

Çıkar Çatışmaları/Çatışan Çıkarlar Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Yazarların Katkısı Çalışmada 1. yazar %60 oranında, 2. yazar %40 oranında katkı sağlamıştır. Tüm yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

Kaynaklar

- [1] Reshadi, M. A. M., Bazargan, A., & McKay, G. (2020). A review of the application of adsorbents for landfill leachate treatment: Focus on magnetic adsorption. *Science of the Total Environment*, 731, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.138863>
- [2] Wu, C., Chen, W., Gu, Z., & Li, Q. (2021). A review of the characteristics of Fenton and ozonation systems in landfill leachate treatment. *Science of the Total Environment*, 762, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.143131>
- [3] Luo, H., Zeng, Y., Cheng, Y., He, D., & Pan, X. (2020). Recent advances in municipal landfill leachate: A review focusing on its characteristics, treatment, and toxicity assessment. *Science of the Total Environment*, 703, 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.135468>
- [4] Bakhshoodeh, R., Alavi, N., Oldham, C., Santos, R. M., Babaei, A. A., Vymazal, J., & Paydary, P. (2020). Constructed wetlands for landfill leachate treatment. *Ecological Engineering*, 146, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2020.105725>
- [5] Mukherjee, S., Mukhopadhyay, S., Hashim, M. A., & Gupta, B. S. (2014). Contemporary environmental issues of landfill leachate: Assessment and remedies. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, 45(5), 472-590. <https://doi.org/10.1080/10643389.2013.876524>
- [6] Ameta, S. C., & Ameta, R. (Ed). (2018). *Advanced Oxidation Processes for Wastewater Treatment Emerging Green Chemical Technology*, Academic Press.
- [7] Babuponnusami, A., & Muthukumar, K. (2012). Advanced oxidation of phenol: A comparison between Fenton, electro-Fenton, sono-electro-Fenton and photo-electro-Fenton processes. *Chemical Engineering Journal*, 183, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2011.12.010>
- [8] Kang, Y. W., & Hwang, K-Y. (2000). Effects of reaction conditions on the oxidation efficiency in the Fenton process. *Water Research*, 34(10), 2786-2790. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(99\)00388-7](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(99)00388-7)
- [9] Wang, P., Lau, I., Fang, H., & Zhou, D. (2000). Landfill leachate treatment with combined uasb and fenton coagulation. *Journal of Environmental Science & Health Part A*, 35(10), 1981-1988. <https://doi.org/10.1080/10934520009377093>
- [10] Lau, I. W. C., Wang, P., & Fang, H. H. P. (2001). Organic removal of anaerobically treated leachate by Fenton coagulation. *Journal of Environmental Engineering*, 127(7), 666-669.
- [11] Gulsen, H., & Turan, M. (2004). Treatment of sanitary landfill leachate using a combined anaerobic fluidized bed reactor and Fentons oxidation. *Environmental Engineering Science*, 21(5), 627-636. <https://doi.org/10.1089/ees.2004.21.627>
- [12] Lopez, A., Pagano, M., Volpe, A., & Di Pinto, A. C. (2004). Fenton's pre-treatment of mature landfill leachate. *Chemosphere*, 54(7), 1005-1010. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2003.09.015>

- [13] Zhang, H., Choi, H. J., & Huang, C-P. (2005). Optimization of Fenton process for the treatment of landfill leachate. *Journal of Hazardous Materials*, 125(1-3), 166-174. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2005.05.025>
- [14] Di Iaconi, C., Ramadori, R., & Lopez, A. (2006). Combined biological and chemical degradation for treating a mature municipal landfill leachate. *Biochemical Engineering Journal*, 31(2), 118-124. <https://doi.org/10.1016/j.bej.2006.06.002>
- [15] Zhang, H., Zhang, D., & Zhou, J. (2006). Removal of COD from landfill leachate by electro-Fenton method. *Journal of Hazardous Materials*, 135(1-3), 106-111. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2005.11.025>
- [16] Deng, Y. (2007). Physical and oxidative removal of organics during Fenton treatment of mature municipal landfill leachate. *Journal of Hazardous Materials*, 146(1-2), 334-340. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2006.12.026>
- [17] Primo, O., Rivero, M. J., & Ortiz, I. (2008). Photo-Fenton process as an efficient alternative to the treatment of landfill leachates. *Journal of Hazardous Materials*, 153(1-2), 834-842. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2007.09.053>
- [18] Atmaca, E. (2009). Treatment of landfill leachate by using electro-Fenton method. *Journal of Hazardous Materials*, 163(1), 109-114. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2008.06.067>
- [19] Kochany, J., & Kochany, E. L. (2009). Utilization of landfill leachate parameters for pretreatment by Fenton reaction and struvite precipitation-A comparative study. *Journal of Hazardous Materials*, 166(1), 248-254. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2008.11.017>
- [20] Wang, X., Chen, S., Gu, X., & Wang, K. (2009). Pilot study on the advanced treatment of landfill leachate using a combined coagulation, fenton oxidation and biological aerated filter process. *Waste Management*, 29(4), 1354-1358. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2008.10.006>
- [21] Cortez, S., Teixeira, P., Oliveira, R., & Mota, M. (2010). Fenton's oxidation as post-treatment of a mature municipal landfill leachate. *International Journal of Environmental Science and Engineering*, 2(1), 40-43.
- [22] Cotman, M., & Gotvajn, A. Z. (2010). Comparison of different physico-chemical methods for the removal of toxicants from landfill leachate. *Journal of Hazardous Materials*, 178(1-3), 298-305. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2010.01.078>
- [23] Carluccio, M., Fiorentino, A., & Rizzo, L. (2020). Multi-barrier treatment of mature landfill leachate: effect of Fenton oxidation and air stripping on activated sludge process and cost analysis. *Journal of Environmental Chemical Engineering*, 8(5), 104444. <https://doi.org/10.1016/j.jece.2020.104444>
- [24] Altin, A. (2008). An alternative type of photoelectro-Fenton process for the treatment of landfill leachate. *Separation and Purification Technology*, 61(3), 391-397. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2007.12.004>
- [25] Asaithambi, P., Govindarajan, R., Yesuf, M. B., & Alemayehu, E. (2020). Removal of color, COD and determination of power consumption from landfill leachate wastewater using an electrochemical advanced oxidation processes. *Separation and Purification Technology*, 233, 115935. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2019.115935>

- [26] Atmaca, K. (2021). *Sızıntı sularının elektrokimyasal olarak arıtımında işletme parametrelerinin belirlenmesi*. (Tez No. 688814) [Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi]
- [27] Kim, S-M., Geissen, S-U., & Vogelpohl, A. (1997). Landfill leachate treatment by a photoassisted Fenton reaction. *Water Science and Technology*, 35(4), 239-248. [https://doi.org/10.1016/S0273-1223\(97\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0273-1223(97)00031-0)
- [28] Baig, S., Coulomb, I., Courant, P., & Liechti, P. (1999). Treatment of landfill leachates: Lapeyrouse and satrod case studies. *Ozone Science & Engineering*, 21, 1-22. <https://doi.org/10.1080/01919519908547255>
- [29] Welander, U., Henrysson, T., & Welander, T. (1998). Biological nitrogen removal from municipal landfill leachate in a pilot scale suspended carrier biofilm process. *Water Research*, 32(5), 1564-1570. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(97\)00351-5](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(97)00351-5)
- [30] Haapea, P., Korhonen, S., & Tuhkanen, T. (2002). Treatment of industrial landfill leachates by chemical and biological methods: Ozonation, ozonation + hydrogen peroxide, hydrogen peroxide and biological post-treatment for ozonated water. *Ozone Science & Engineering*, 24(5), 369-378. <https://doi.org/10.1080/01919510208901627>
- [31] Wu, J. J., Wu, C-C., Ma, H-W., & Chang, C-C. (2004). Treatment of landfill leachate by ozone-based advanced oxidation processes. *Chemosphere*, 54(7), 997-1003. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2003.10.006>
- [32] Rivas, F. J., Beltran, F., Carvalho, F., Acedo, B., & Gimeno, O. (2004). Stabilized leachates: sequential coagulation-flocculation + chemical oxidation process. *Journal of Hazardous Materials*, 116(1-2), 95-102. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2004.07.022>
- [33] İnce, N. H. (1998). Light-enhanced chemical oxidation for tertiary treatment of municipal landfill leachate. *Water Environment Research*, 70(6), 1161-1169. <https://doi.org/10.2175/106143098X123282>
- [34] Wenzel, A., Gahr, A., & Niessner, R. (1999). TOC-removal and degradation of pollutants in leachate using a thin-film photoreactor. *Water Research*, 33(4), 937-946. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(98\)00302-9](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(98)00302-9)
- [35] Domingues, A., Silva, M.J., Vaz, T., Gomes, J., & Martins, R.C. (2022). Sulfate radical based advanced oxidation processes for agro-industrial effluents treatment: A comparative review with Fenton's peroxidation. *Science of the Total Environment*, 832, 155029. <http://dx.doi.org/10.1016/j.scitotenv.2022.155029>
- [36] Hilles, A. H., Abu Amr, S. S., Hussein, R. A., Arafa, A. I., & El-Sebaie, O. D. (2015). Effect of persulfate and persulfate /H₂O₂ on biodegradability of an anaerobic stabilized landfill leachate. *Waste Management*, 44, 172-177. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2015.07.046>
- [37] Hilles, A. H., & Abu Amr, S. S. (2016). Factorial design and optimization of leachate treatment using persulfate oxidation. *Global Nest Journal*, 18(4), 842-854.
- [38] Chen, W., Wang, F., He, C., & Li, Q. (2020). Molecular-level comparison study on microwave irradiation-activated persulfate and hydrogen peroxide processes for the treatment of refractory organics in mature landfill leachate. *Journal of Hazardous Materials*, 397, 122785. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2020.122785>

- [39] Chou, Y-C., Lo, S-L., Kuo, J., & Yeh, C-J. (2013). A study on microwave oxidation of landfill leachate – contributions of microwave-specific effects. *Journal of Hazardous Materials*, 246-247, 79-86. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2012.11.060>
- [40] Hilles, A. H., Abu Amr, S. S., Hussein, R. A., El-Sebaie, O. D., & Arafa, A. I. (2016). Performance of combined sodium persulfate/H₂O₂ based advanced oxidation process in stabilized landfill leachate treatment. *Journal of Environmental Management*, 166, 493-498. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2015.10.051>
- [41] Kattel, E., & Dulova, N. (2017). Ferrous ion-activated persulphate process for landfill leachate treatment: removal of organic load, phenolic micropollutants and nitrogen. *Environmental Technology*, 38(10), 1223-1231. <https://doi.org/10.1080/09593330.2016.1221472>
- [42] He, H., & Zhou, Z. (2017). Electro-Fenton process for water and wastewater treatment. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology*, 47(21), 2100-2131. <https://doi.org/10.1080/10643389.2017.1405673>
- [43] Deng, Y., & Englehardt, J. D. (2006). Treatment of landfill leachate by the Fenton process. *Water Research*, 40(20), 3683-3694. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2006.08.009>
- [44] Wang, Z., Li, J., Tan, W., Wu, X., Lin, H., & Zhang, H. (2019). Removal of COD from landfill leachate by advanced Fenton process combined with electrolysis. *Separation and Purification Technology*, 208, 3-11. <https://doi.org/j.seppur.2018.06.048>
- [45] Hammami, S., Oturan, N., Bellakhal, N., Dachraoui, M., & Oturan, M. A. (2007). Oxidative degradation of direct orange 61 by electro-Fenton process using a carbon felt electrode: Application of the experimental design methodology. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 610(1), 75-84. <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2007.07.004>
- [46] Ma, L., Zhou, M., Ren, G., Yang, W., & Liang, L. (2016). A highly energy-efficient flow-through electro-Fenton process for organic pollutants degradation. *Electrochimica Acta*, 200, 222-230. <https://doi.org/10.1016/j.electacta.2016.03.181>
- [47] Rivas, F. J., Beltran, F. J., Frades, J., & Buxeda, P. (2001). Oxidation of p-hydroxybenzoic acid by Fenton's reagent. *Water Research*, 35(2), 387-396. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(00\)00285-2](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(00)00285-2)
- [48] Babuponnusami, A., & Muthukumar, K. (2011). Degradation of phenol in aqueous solution by Fenton, sono-Fenton and sono-photo-Fenton methods. *Clean-Soil Air Water*, 39(2), 142-147. <https://doi.org/10.1002/clen.201000072>
- [49] Ting, W-P., Lu, M-C., & Huang, Y-H. (2009). Kinetics of 2,6-dimethylaniline degradation by electro-Fenton process. *Journal of Hazardous Materials*, 161(2-3), 1484-1490. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2008.04.119>
- [50] Verma, V., & Chaudhari, P. K. (2020). Optimization of multiple parameters for treatment of coking wastewater using Fenton oxidation. *Arabian Journal of Chemistry*, 13(4), 5084-5095. <https://doi.org/10.1016/j.arabjc.2020.02.008>
- [51] Lin, S. S., & Lo, C. C. (1997). Fenton process for treatment of desizing wastewater. *Water Research*, 31(8), 2050-2056. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(97\)00024-9](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(97)00024-9)
- [52] Lin, S. H., Lin, C. M., & Leu, H. G. (1999). Operating characteristics and kinetic studies of surfactant wastewater treatment by Fenton oxidation. *Water Research*, 33(7), 1735-1741. [https://doi.org/10.1016/S0043-1354\(98\)00403-5](https://doi.org/10.1016/S0043-1354(98)00403-5)

- [53] Ting, W-P., Lu, M-C., & Huang, Y-H. (2008). The reactor design and comparasion of Fenton, electro-Fenton and photoelectro-Fenton processes for mineralization of benzene sulfonic acid (BSA). *Journal of Hazardous Materials*, 156(1-3), 421-427. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2007.12.031>
- [54] Kurt, U., Apaydin, U., & Gonullu, M. T. (2007). Reduction of COD in wastewater from an organized tannery industrial region by electro-Fenton process. *Journal of Hazardous Materials*, 143(1-2), 33-40. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2006.08.065>
- [55] Brillas, E., & Casado, J. (2002). Aniline degradation by electro-Fenton® and peroxi-coagulation processes using a flow reactor for wastewater treatment. *Chemosphere*, 47(3), 241-248. [https://doi.org/10.1016/S0045-6535\(01\)00221-1](https://doi.org/10.1016/S0045-6535(01)00221-1)
- [56] Badellino, C., Rodrigues, C. A., & Bertazzoli, R. (2006). Oxidation of pesticides by in situ electrogenerated hydrogen peroxide: Study for the degradation of 2,4-dichlorophenoxyacetic acid. *Journal of Hazardous Materials*, 137(2), 856-864. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2006.03.035>
- [57] Zhang, H., Fei, C., Zhang, D., & Tang, F. (2007). Degradation of 4-nitrophenol in aqueous medium by electro-Fenton method. *Journal of Hazardous Materials*, 145(1-2), 227-232. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2006.11.016>
- [58] Nidheesh, P. V., & Gandhimathi, R. (2012). Trends in electro-Fenton process for water and wastewater treatment: An overview. *Desalination*, 299, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.desal.2012.05.011>
- [59] Deng, Y., Zhu, X., Chen, N., Feng, C., Wang, H., Kuang, P., & Hu, W. (2020). Review on electrochemical system for landfill leachate treatment: Performance, mechanism, application, shortcoming, and improvement scheme. *Science of the Total Environment*, 745, 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.140768>
- [60] Beyazıt, N., & Atmaca, K. (2021). COD and color removal from landfill leachate by photo-electro-Fenton process. *International Journal of Electrochemical Science*, 16, 1-14. <https://doi.org/10.20964/2021.05.65>
- [61] Masschelein, W. J., & Rice, R. G. (2002). *Ultraviolet Light in Water and Wastewater Sanitation*. A CRC Press Company Washington, D.C.
- [62] Cırık, K (2013). *Boyar madde içeren atıksu arıtma tesislerinin işletilmesine yönelik el kitabı*.