



Görelî yaşâm tabloları ve bir uygulama

Sema Akyol¹

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi,
İstatistik Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
akyolsema17@gmail.com
0000-0003-3360-5164

Nihal Ata Tutkun

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi,
İstatistik Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
nihalata@hacettepe.edu.tr
0000-0001-5204-680X

Öz

Uzun süreli yaşâm çözümlemesi çalışmalarında ölüm nedeni bilgisi bulunmayabilir veya eksik olabilir. Ölüm nedeni belli olmadığında veya eldeki güvenilir olmadığında hastalığa bağlı yaşâm olasılığını doğrudan tahmin etmek mümkün olmayabilir. Bu nedenle hastalığa bağlı yaşâm olasılığı, bazen hastalık teşhisi konulmuş bir grup ile daha geniş bir kitle arasındaki görelî yaşâm olasılığının bir ölçüsü ile değerlendirilmektedir. Görelî yaşâm çözümlemesinde yaşâm tablolarının oluşturulması ve yaşâm olasılıklarının elde edilmesi önemli bir yere sahiptir. Bu olasılıkların tahmini için Ederer I, Ederer II, Hakulinen ve Pohar Perme yöntemleri kullanılmaktadır. Bu yöntemler, literatürde yer alan ve yarışan riskleri içeren prostat kanseri veri kümesi üzerinde uygulanmıştır. Farklı yaş grupları için görelî yaşâm olasılıklarını içeren yaşâm tabloları elde edilmiştir. Görelî yaşâm olasılığı için Ederer I, Ederer II, Hakulinen ve net yaşâm olasılığı için Pohar Perme yöntemleri kullanılmış, elde edilen sonuçlar arasında belirgin bir farklılık görülmemiştir. Tüm yöntemlerde prostat kanserine yakalanmış erkek hastalara ait beş yıllık görelî yaşâm olasılığı 44-59 yaş aralığındaki hastalar için %44, 60-74 yaş aralığındaki hastalar için %49 ve 75 yaş ve üzeri hastalar için %36 olarak elde edilmiştir. Benzer biçimde yaş standartlaştırma kullanılarak da yaşâm tabloları oluşturulmuş, yaş standartlaştırması sonucunda yaşâm olasılıklarında belirgin bir değişiklik gözlenmemiştir. Ayrıca hem prostat kanserine bağlı hem yarışan risklere bağlı kaba ölüm olasılıkları elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Görelî yaşâm, Net yaşâm, Yarışan riskler, Yaşâm tablosu, Aşırı tehlike oranı

Abstract

Relative survival tables and an application

In survival analysis studies with long follow-up periods, cause of death information may not be available or there may be some lack of information. It may not be possible to directly predict the probability of survival due to the disease when the cause of death is unclear or the available information is unreliable. Therefore, the probability of survival due to the disease is sometimes evaluated by a measure of the relative probability of survival between a group diagnosed with the disease and the larger population. Creating life tables and obtaining survival probabilities have an important place in relative survival analysis. For the estimation of these probabilities Ederer I, Ederer II, Hakulinen and Pohar Perme methods are used. In this study, these methods were applied on the prostate cancer dataset in the literature which includes competing risks. Life tables containing relative survival probabilities for

¹ Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

different age groups were obtained. Ederer I, Ederer II, Hakulinen methods were used for the relative survival and Pohar Perme method was used for the net survival and no significant difference was observed between the results obtained. In all methods, the five year relative survival for male patients with prostate cancer was 44% for patients were aged 44-59, 49% for patients were aged 60-74, and 36% for patients were aged 75 or over. Similarly, life tables were created using age standardization, no significant difference was observed in survival probabilities as a result of age standardization. In addition, crude death probabilities due to both prostate cancer and competing risks were obtained and interpreted.

Keywords: *Relative survival, Net survival, Competing risks, Life table, Excess hazard ratio.*

1. Giriş

Bir birimin belirtilen zamana kadar ilgilenilen olayı yaşamamış olma olasılığı olarak ifade edilen yaşam olasılığının hesaplanmasında parametrik ya da parametrik olmayan çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Araştırmacıların çoğu yaşam olasılığı ile ilgili hesaplamalarda adil bir sonuca ulaşabilmek için ilgilenilen hastalık nedeniyle gerçekleşmemiş olan ölümleri ele almamaktadır. Ölüm zamanı hakkında doğru bilgilerin elde edildiği birçok durumda bile ölüm nedeni ile ilgili bilgi genellikle mevcut değildir. Ayrıca, ölüme yol açan durumlarla ilgili bilgiler ölüm belgelerinde eksik veya yanlış olabilmektedir [1-4]. Bilgilerin doğruluğu ile ilgili problemlerin dışında doğru bilgileri yorumlama zorluğu da ayrı bir problem ortaya çıkarmaktadır. Özellikle kanser araştırmalarında, çoğu kanser hastası orta yaşlı geçmiş olduğundan hastaların ilgilenilen hastalık dışındaki nedenlerden ölme risklerinin ihmal edilmemesi ve yapılan analizlerde bu riskin her zaman göz önünde bulundurulması gerekmektedir [1].

Kitleye dayalı kanser araştırmalarında çoğunlukla, nedene-özgü ve kaba olasılıklar yerine göreceli yaşam olasılıkları kullanılmaktadır. Göreceli yaşam olasılığı hesaplamalarında yarışan risklerden kaynaklanan aşırı tehlike düzeltilerek ilgilenilen hastalık için ölüm olasılıkları tahmin edilmektedir. Yani göreceli yaşam çözümlemesi, ilgilenilen hastalık türünden kaynaklanan ölümleri diğer tüm nedenlere bağlı ölümlerden ayrı tutmaya çalışmaktadır. Göreceli yaşam olasılığı, ilgili kuşakta tüm nedenlere bağlı gözlenen yaşam olasılığı ve kitlede karşılaştırma yapmaya uygun bir grup için beklenen yaşam olasılığı kullanılarak hesaplanmaktadır [1, 5].

Birikimli göreceli yaşam olasılığını hesaplamak için Ederer ve ark. [4] tarafından önerilen ve Ederer I yöntemi olarak bilinen bu yöntemde, birikimli gözlenen yaşam olasılığının birikimli beklenen yaşam olasılığına bölünmesiyle hesaplanmaktadır. Diğer bir yöntem ise koşullu göreceli yaşam olasılıklarının çarpımına dayanan ve Ederer ve Heise [6] tarafından önerilmiş olan Ederer II yöntemidir. Takip süresinin on yıl üzerinde olması durumunda bu iki yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar arasında farklılık olduğu görülmüştür [7-9]. Literatürde yaygın kullanılan bir diğer yöntem ise göreceli yaşam olasılığının yıllar içinde sabit kaldığı ve bilgi içeren durdurmanın olduğu durumlarda optimal sonucu veren Hakulinen [8] yöntemidir. Ancak göreceli yaşam olasılığının yıllar içinde sabit kalmadığı kanser araştırmalarında da Hakulinen yönteminin kullanıldığı görülmüştür. Ederer I, Ederer II ve Hakulinen tahmin edicileri, göreceli yaşam olasılığı tahmininde beklenen yaşam olasılığını hesaplamak için önerilmiş olsa da net yaşam olasılığının tahmin edicileri olarak da yorumlanmıştır [1].

Göreceli yaşam çözümlemesinde tehlike kavramı yerine aşırı tehlike kavramı yer almaktadır. Aşırı tehlike, tüm nedenlere bağlı ölüm olasılığı ile kitleden karşılaştırılabilir bir gruba ait beklenen ölüm olasılığı arasındaki fark olarak tahmin edilir [1, 5].

Aşırı tehlikeyi modellemek için kullanılan yaygın yöntemler, orantılı tehlikeler varsayımını [10-15] veya toplamsal bir modelin benimsenmesini [16-18] gerektirmektedir. Modellemeyi içeren herhangi bir yaklaşım, modelde kullanılan varsayımların geçerliliğine bağlı olacaktır. Net yaşam olasılığı için herhangi bir varsayım gerektirmeyen yeni bir net yaşam olasılığı tahmin edicisi Perme, Stare ve

Esteve [19] tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada Ederer I, Ederer II ve Hakulinen tahmin edicilerinin net yaşam olasılığı olarak yorumlanmasının yanlış sonuçlara neden olacağı da belirtilmiştir.

Görelî yaşam çözümlemesi literatürüne ait ilk çalışmalar 20. yüzyılın ortalarında başlamış olsa da bu yöntemleri uygulayabilmek için kullanılan istatistiksel yazılımlar 21. yüzyılın başında geliştirilmeye başlanmıştır. Görelî yaşam çözümlemesi için Pohar ve Stare [20], çeşitli yaklaşımların mevcut olduğunu [13, 21] ve farklı görelî yaşam modelleri için uyumlu bir R paketi önermişlerdir. Görelî yaşam çözümlemesi için kodlar SAS programında Dickman ve ark. [13] ve Stata programında ise Dickman ve Coviello [22] tarafından önerilmiştir.

Bu çalışmada, yaşam tablolarını oluştururken kullanılan yaşam olasılıklarını görelî yaşam çözümlemesi yöntemleri ile elde etmek ve uygulamasını göstermek amaçlanmıştır. Görelî yaşam tablolarını inceleyen uygulamalı çalışmalar literatürde de sınırlıdır ve bu çalışma da Türkçe yazılmış ilk kaynak olma özelliğine sahiptir. Çalışmanın ikinci bölümünde görelî yaşam çözümlemesi açıklanarak gözlenen yaşam olasılığı tahmini, beklenen yaşam olasılığı tahmin yöntemleri kapsamında Ederer I, Ederer II ve Hakulinen yöntemleri ve yaş standartlaştırma yöntemleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, literatürde yer alan ve yarışan riskleri içeren prostat kanseri veri kümesi üzerinde görelî yaşam çözümlemesi yöntemleri uygulanmış ve sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

2. Görelî Yaşam Çözümlemesi

Yaşam çözümlemesinde ilgilenilen olay belirli bir hastalığa bağlı ölüm olduğunda ancak ölüm nedenleri bilinmediğinde veya güvenilmez olduğunda söz konusu hastalığa bağlı ölüm olasılığını doğrudan tahmin etmek mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda nedene özgü yaşam olasılıklarının hesaplanması karmaşık bir hale gelebilir ve görelî yaşam çözümlemesinden faydalanılır. Görelî yaşam çözümlemesinin ana kullanımı, kuşaklar arasındaki (farklı ülkeler, zaman içindeki farklı periyotlar vs.) yaşam olasılıklarını karşılaştırmaktır. İlgili hastalığa bağlı yaşam olasılığı, hastalık teşhisi konulan bir grup ile kitle arasındaki görelî yaşam olasılığının bir ölçüsü olarak değerlendirilir [20, 23].

Birikimli görelî yaşam fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$r(t) = \frac{S_o(t)}{S_P(t)} \quad (1)$$

Burada $S_o(t)$ gözlenen yaşam olasılığını ifade eder. $S_P(t)$ ise, kitle yaşam olasılığı veya beklenen yaşam olasılığı olarak ifade edilir ve kitleye ait yaşam tabloları kullanılarak tahmin edilir. Yöntemler genellikle $r(t)$ 'nin 1'den küçük olduğu verilere uygulanmasına rağmen $r(t)$, negatif olmayan herhangi bir sayı olabilir [1, 20].

Hastalar takip süreleri boyunca ilgilenilen hastalık dışındaki nedenlerden dolayı da ölmektedir. Bu nedenle tahmin edilen yaşam olasılıkları hastaların ilgili kanserden kaynaklı ölüm riskine ilişkin aşırı karamsar bir tablo verebilmektedir. Görelî yaşam çözümlemesi, kanser hastalarını kitle ile karşılaştırıldığında sahip oldukları aşırı ölüm riskinden arındırmak için kullanılmaktadır. Ayrıca ilgilenilen hastalık dışındaki nedenlerden dolayı ölme olasılığı yaşlı hastalarda genç hastalara göre daha yüksek olduğundan farklı yaş yapılarına sahip hasta grupları arasında gözlenen yaşam olasılıkları karşılaştırılabilir durumda olmayabilir. Yaş gruplarında ilgilenilen kanser türünden kaynaklı ölümler ve başka nedenlerden kaynaklı ölümlerin birbirinden bağımsız süreçler olduğu varsayılırsa başka nedenlerden kaynaklı ölümler durdurulmuş olaylar olarak ele alınabilir [24].

Kanser hastaları için yaşam olasılıkları incelenirken ilgilenilen kanser türü dışındaki nedenlerden kaynaklı ölümlerin etkisi için düzeltilmiş bir yaşam olasılığı ölçüsü olan net yaşam olasılığı kullanılır. Net yaşam olasılığının istatistiksel ve epidemiyolojik literatürde tutarlı bir tanımı bulunmamaktadır. Klinik ortamlarda yürütülen yaşam çözümlemesi çalışmalarında net yaşam

olasılığını tahmin etmek için standart olarak nedene özgü yaşam olasılıkları hesaplanır. Hesaplamalar ilgilenilen hastalık dışındaki nedenlerden ölen hastaların yaşam süreleri durdurularak ve aktüeryal yöntemler veya Kaplan-Meier (KM) tahmin edicisi gibi yaşam çözümlemesi yöntemleri kullanılarak elde edilir. Genel olarak kitleye dayalı çalışmalar ölüm nedeni, nüksler, yan etkiler gibi klinik sonuçlar açısından fazla güvenilir olmasa da uzun bir süre takip edilmiş fazla sayıda hastayı içermektedir. Ölüm nedeni hakkında çoğu zaman doğru ve güvenilir bilgiye ulaşılamadığından nedene özgü yaşam olasılıkları sorun yaratabilmektedir [13, 25]. Örneğin kolon kanseri olan bir hastada kolon kanseri karaciğer metastazına neden olursa ve ölüm gerçekleşirse hastanın ölüm nedeni yanlışlıkla karaciğer kanseri olarak belirtilebilir. Bu durum yaşam çözümlemesinde “diğer nedenlere bağlı ölüm” olarak sınıflandırılır ve hastanın yaşam süresi ölüm gerçekleştiği an durdurulur. Ölüm nedeni hakkında doğru bilgi mevcut olsa bile ölümün ilgili kansere bağlı olarak sınıflandırılıp sınıflandırılmayacağını belirlemek genellikle zordur. Örneğin intihar nedeni veya tedavinin ikincil etkilerine bağlı ölümlerin nasıl sınıflandırılması gerektiği açık değildir. Nedene özgü yaşam çözümlemesinde bir ölümü kısmen kansere bağlı olarak sınıflandırmak mümkün değildir. Bir ölüm ya tamamen ilgilenilen kansere bağlı olarak ya da tamamen başka nedenlere bağlı olarak sınıflandırılabilir. Bu zorluklar nedeniyle kitleye dayalı kanser çalışmalarında net yaşam olasılığını tahmin etmenin yaygın bir yolu olarak göreceli yaşam olasılığı kullanılmaktadır. Göreceli yaşam olasılığı genellikle yaşam tablolarından, hastaların gözlenen yaşam olasılıklarının (tüm ölümlerin olay olarak kabul edildiği) kitleden karşılaştırılabilir bir grubun beklenen yaşam olasılığına oranı olarak tahmin edilir. Beklenen yaşam olasılığı ise yaygın olarak ülke çapındaki yaşam tabloları kullanılarak tahmin edilmektedir [1, 4, 13, 26].

Göreceli yaşam çözümlemesinin başlıca avantajı, ölüm nedenine ilişkin bilginin gerekli olmaması ve aşırı ölüm oranının doğrudan veya dolaylı olarak kansere atfedilebilir olup olmadığına bakılmaksızın kanser teşhisi konulan hastaların yaşadığı aşırı ölüm oranının bir ölçüsünü sağlamasıdır [13].

2.1. Gözlenen Yaşam Olasılığı Tahmini

Gözlenen yaşam olasılığını hesaplamak için yaygın olarak aktüeryal yaklaşım ve tehlike fonksiyonunun dönüşüm yöntemi (the method of transforming the hazard) kullanılmaktadır. Aktüeryal yaklaşımda hastaların hangi zaman aralığında öldüğü veya durdurulduğu bilgisi kullanılarak, her bir aralık için aralığa özgü yaşam olasılığı tahmini hesaplanır [27]. i . aralığın başlangıcına kadarki yaşam olasılığı bilindiğinde i aralığına ait yaşam olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_{i,1} = 1 - \frac{d_i}{l_i - \frac{w_i}{2}} \quad (2)$$

Burada d_i ; i aralığındaki ölümlerin sayısı, w_i ; i aralığındaki durdurulmuş hasta sayısı ve l_i ; i aralığında risk altında olan hasta sayısıdır. l'_i ise risk altındaki etkin hasta sayısı (effective number at risk) olarak tanımlanır ve durdurulmuş hastaların ilgili aralığın yarısına kadar risk altında kabul edildiği varsayımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$l'_i = l_i - \frac{w_i}{2} \quad (3)$$

Zaman, her birey için kesin olarak biliniyorsa tehlike fonksiyonunun dönüşüm yöntemi kullanılarak i zaman aralığına özgü yaşam olasılığı,

$$p_{i,1} = \exp\left(-\frac{d_i}{Y_i} k_i\right) \quad (4)$$

biçiminde hesaplanır. Burada Y_i , i aralığında risk altındaki toplam kişi-zaman (total person-time) ve k_i , i aralığının yıl cinsinden uzunluğunu ifade etmektedir. Bu yöntemde tehlike fonksiyonunun zaman içinde sabit olduğu varsayılmaktadır. Eğer veri kümesinde soldan kesilme (left truncation) gibi bir durum yoksa iki yöntem de birbirine çok benzer tahminler sağlamaktadır [27].

i aralığının sonuna kadar olan birikimli gözlenen yaşam olasılığı ise aralığa özgü yaşam olasılıklarının çarpımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_i = \prod_{j \leq i} p_{j,1} \quad (5)$$

Aralığa özgü gözlenen yaşam olasılığı için varyans genellikle risk altındaki etkin hasta sayısı kullanılarak,

$$V_{[p_{i,1}]} = p_{i,1}^2 \left(\frac{d_i}{l'_i(l'_i - d_i)} \right) \quad (6)$$

biçiminde elde edilir. Birikimli gözlenen yaşam olasılığı için varyans tahmini ise aşağıdaki gibidir:

$$V_{[p_i]} = p_i^2 \left(\sum_{j \leq i} \frac{d_j}{l'_j(l'_j - d_j)} \right) \quad (7)$$

[1, 26, 27].

2.2. Beklenen Yaşam Olasılığı Tahmin Yöntemleri

Beklenen yaşam olasılığı çeşitli yöntemlerle hesaplanabilir. Literatürde en yaygın kullanılan üç yöntem Ederer I [4], Ederer II [6] ve Hakulinen [8]'dir. Hakulinen, Seppä ve Lambert [9], Ederer II tahmin edicisinin Hakulinen [8] tahmin edicisine tercih edilmesi gerektiğini vurgulamışlardır. Ederer II tahmin edicisi, görelî yaşam olasılığı tahmin edicileri arasında tercih edilen bir yöntem olmuştur. Bu üç yöntem, beklenen yaşam olasılığını tahmin etmek amacıyla eşleşen her bireyin ne kadar süre risk altında kabul edildiğine göre farklılık göstermektedir [1, 22].

Regresyon modellemesi yapmadan birikimli görelî yaşam olasılığını hesaplamak için kullanılan "altın standart" yaklaşımı, tanı anındaki hasta sayısı ile orantılı olacak şekilde belirlenmiş ağırlıklarla yaşa özgü birikimli görelî yaşam olasılıklarının ağırlıklı ortalamasıdır [9].

$v_a(t)$, a yaş grubundaki tehlike fonksiyonu olmak üzere, a yaş grubu için t zamanına kadar yaşam olasılığı,

$$r_a(t) = \exp \left[- \int_0^t v_a(u) du \right] \quad (8)$$

biçiminde tanımlansın. Hastaların toplam ölüm tehlikesi $\mu_a(t)$ ve karşılaştırılabilir kitledeki beklenen tehlike $\mu_a^*(t)$ olarak verilsin. Hastalar için ilgili kansere bağlı tehlike fonksiyonu $v_a(t)$, $\mu_a(t)$ ile $\mu_a^*(t)$ arasındaki fark olarak tanımlandığı durumda bu fark ilgili kansere bağlı aşırı tehlike olacaktır. Bu fark olasılık ölçeğine dönüştürüldüğünde ise görelî yaşam olasılığını verecektir. Tüm yaşlar için karşılık gelen olasılık aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$r_s(t) = \sum_a w_a r_a(t) \quad (9)$$

Burada w_a , $t=0$ anında a yaş grubuna ait hastaların oranıdır. Bu olasılık, yaş standartlaştırma ile elde edilmiş görelî yaşam olasılığı olarak kabul edilirse tüm yaşlar için aşırı tehlike fonksiyonu;

$$v_s(t) = \sum_a \frac{w_a r_a(t) v_a(t)}{\sum_a w_a r_a(t)} \quad (10)$$

ve karşılık gelen yaşam olasılığı,

$$r_s(t) = \exp \left[- \int_0^t v_s(u) du \right] \quad (11)$$

biçiminde olacaktır. Her yaş grubu için aşırı tehlikeler birbirine eşit olursa, her a değeri için $v_a(t)=v_s(t)=v(t)$ olacaktır [9, 29].

2.2.1. Ederer I Yöntemi

Ederer I yönteminde, beklenen yaşam olasılığı her bireyin kitlenin bir üyesi olacağı varsayımı altında tanının konulmasından belirli bir takip süresine kadar bireye özgü beklenen yaşam olasılıklarının ortalaması olarak hesaplanmaktadır. Bu yöntemde eşleşen bireyler süresiz olarak risk altında kabul edilmektedir. Yani bir bireyin olayı yaşadığı veya durdurulduğu zamanın beklenen yaşam olasılığı üzerinde bir etkisi olmamaktadır [22].

Yaş ile ilgili bilgi içeren durdurmanın olmadığı varsayılınsın. t zamanındaki gözlenen ölüm tehlikesi (observed mortality hazard) t zamanındaki yaşa özgü tehlikelerin ($\mu_a(t)$) ağırlıklı ortalamasıdır:

$$\mu(t) = \sum_a \frac{W_a(t) \mu_a(t)}{\sum_a W_a(t)} \quad (12)$$

Burada $p_a(t)$, t zamanına kadar a yaş grubunda gözlenen birikimli yaşam olasılığı olmak üzere $W_a(t) = w_a p_a(t)$ biçimindedir. t zamanındaki beklenen ölüm tehlikesi ise t zamanındaki yaşa özgü beklenen tehlikelerin ($\mu_a^*(t)$) ağırlıklı ortalamasıdır:

$$\mu_1^*(t) = \sum_a \frac{W_a^*(t) \mu_a^*(t)}{\sum_a W_a^*(t)} \quad (13)$$

Burada, $W_a^*(t) = w_a p_a^*(t)$ olmak üzere $p_a^*(t)$, t zamanına kadar a yaş grubunda kitleye ait beklenen birikimli yaşam olasılığıdır. $\mu_a(t) = \mu_a^*(t) + v_a(t)$ olduğundan aşırı tehlike,

$$v_1(t) = \mu(t) - \mu_1^*(t) = \sum_a \frac{W_a(t) \mu_a^*(t)}{\sum_a W_a(t)} - \sum_a \frac{W_a^*(t) \mu_a^*(t)}{\sum_a W_a^*(t)} + \sum_a \frac{W_a(t) v_a(t)}{\sum_a W_a(t)} \quad (14)$$

biçimindedir. Her a değeri için $r_a(t) = r(t)$ ve $v_a(t) = v(t)$ olursa,

$$p_a(t) = p_a^*(t) r_a(t) = p_a^*(t) r(t)$$

ve

$$\frac{W_a(t)}{\sum_a W_a(t)} = \frac{W_a^*}{\sum_a W_a^*(t)}$$

biçiminde olacaktır ve buradan $v_l(t) = v(t)$ olduğu söylenebilir.

Genellikle a'nın yüksek yaş grubu değerleri için $r_a(t)$ daha düşük olmaktadır. $\mu_a^*(t)$ ise yüksek yaş gruplarında her zaman daha yüksektir. Dolayısıyla $W_a(t)/\sum_a W_a(t)$, $\mu_a^*(t)$ 'ye yüksek yaş grupları için $W_a^*/\sum_a W_a^*(t)$ 'ye kıyasla daha az ağırlık verme eğilimindedir [8]. Bunun bir sonucu olarak her a için $v_a(t) = v(t)$ olsa da $v_l(t) < v(t)$ olacaktır. t zamanından önce ortaya çıkan birikimli görelî yaşam olasılığı farklılıkları, t zamanındaki aşırı tehlike üzerinde bir etkiye sahip olmaktadır ve sonuç olarak aşırı tehlike gerçekte olduğundan daha az tahmin edilmektedir. Birikimli görelî yaşam olasılığı ise $r_s(t)$ 'yi gerçekte olduğundan daha fazla hesaplamaktadır:

$$r_l(t) = \exp \left[- \int_0^t v_l(u) du \right] \quad (15)$$

Hasta grubundaki bireylerin birikimli beklenen yaşam olasılığı bu yöntemle göre her bir hastanın takip süresinin başlangıcında (takip süresi ilk aralıkta durdurulmuş olsa bile) birikimli beklenen yaşam olasılıklarının bir ortalamasıdır.

Ederer I yöntemi ile beklenen yaşam olasılığı tahminlerinde yansız sonuçlara ulaşılmasına rağmen bu yöntem yanlı olma potansiyeline sahip bir gözlenen yaşam olasılığı ile birlikte uygulandığında görelî yaşam olasılığının tahminleri yanlı sonuçlanabilmektedir [1, 8, 22].

2.2.2. Ederer II Yöntemi

Ederer ve Heise [6] tarafından önerilmiş Ederer II yönteminde, her takip noktasında gözlem altındaki bireyler için beklenen ölüm olasılığı hesaplanmaktadır. Bu yöntemde eşleşen bireyler, karşılık gelen birey olayı yaşayana veya durdurulana kadar risk altında kabul edilmektedir [22].

Bilgi içeren durdurmanın olduğu varsayılırsa beklenen tehlike fonksiyonu aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$\mu_{II}^*(t) = \sum_a \frac{W_a(t) \mu_a^*(t)}{\sum_a W_a(t)} \quad (16)$$

Aşırı tehlike fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$v_{II}(t) = \mu(t) - \mu_{II}^*(t) = \sum_a \frac{W_a(t) [\mu_a(t) - \mu_a^*(t)]}{\sum_a W_a(t)} = \sum_a \frac{W_a(t) v_a(t)}{\sum_a W_a(t)} \quad (17)$$

Her a değeri için $v_a(t) = v(t)$ olursa $v_{II}(t) = v(t)$ olacaktır. Bu yöntemde Ederer I yönteminden farklı olarak yaşa özgü birikimli görelî yaşam olasılıklarının eşitliği konusunda hiçbir varsayımı bulunmamaktadır [9]. Teorik ve deneysel çalışmalar, yaş standartlaştırma gerekmedikçe Ederer II yönteminin kullanılmasını desteklemektedir. Bu yöntem özellikle takip süresinin uzun olduğu ve tahminlerin daha çok genç yaş gruplarına dayandığı çalışmalarda önemli olmaktadır [9].

Bilgi içeren durdurmanın olduğu durum için, $c_a(t)$ potansiyel takip süresi t'den fazla olan a grubundaki hastaların oranı olmak üzere Eşitlik 17, $W_a(t) = w_a p_a(t) c_a(t)$ olarak ifade edildiğinde de geçerli olacaktır. Her a değeri için $v_a(t) = v(t)$ olduğu durumda bilgi içeren durdurma olsa da $v_{II}(t) = v(t)$ biçiminde olacaktır ve $r_s(t)$ 'nin de artmasıyla birikimli görelî yaşam fonksiyonu çarpımsal olarak artacaktır:

$$r_{II}(t) = \exp \left[- \int_0^t v_{II}(u) du \right] \quad (18)$$

ve

$$r_S(t) = \exp \left[- \int_{t_1}^{t_2} v(u) du \right] \quad (19)$$

Genellikle yaşa özgü aşırı tehlikeler eşit olmamaktadır ve $W_a r_a(t) / \sum_a W_a r_a(t)$, $W_a(t) / \sum_a W_a(t)$ 'ye kıyasla yüksek yaş gruplarına daha fazla ağırlık vermektedir. Böyle bir durumda Ederer II yöntemi $r_S(t)$ 'yi gerçekte olduğundan fazla hesaplayabilmektedir. Ancak bilgi içeren durdurmanın olması bu durumu değiştirebilmektedir [9].

Bilgi içeren durdurmanın olduğu durumlarla ilgili olarak Ederer II yönteminin uygulanmasında sakıncalar bulunmaktadır ve beklenen yaşam olasılıklarının önceki aralıklarda gözlenen yaşam olasılıklarına bağlı olması prensipte çekişmeli durabilmektedir. Pratikte ise, bu sorunların etkisinin genellikle küçük ölçekte olacağı değerlendirilmektedir [1, 9, 29].

2.2.3. Hakulinen Yöntemi

Hakulinen [8] tarafından önerilen bir diğer yöntem, Ederer I yöntemi ile aynı gibi görünse de bu yöntemde bilgi içeren durdurma hesaba katılmaktadır [8]. Ederer I yönteminden farklı olarak,

$$W_a(t) = w_a p_a(t) c_a(t) \quad (20)$$

ve

$$W_a^*(t) = w_a p_a^*(t) c_a(t) \quad (21)$$

biçimindedir. Her a için $r_a(t) = r(t)$ ve $v_a(t) = v(t)$ olursa bilgi içeren durdurmanın olduğu varsayımıyla $v_I(t) = v(t)$ olacaktır. $r_a(t)$ 'ler eşit olmadığında birikimli görelî yaşam olasılığının gerçekte olduğundan fazla hesaplanma durumu bilgi içeren durdurma ile değişebilmektedir [9]. Bu yöntemde bireylerin potansiyel takip süreleri dikkate alınır ve bireylerin takip edilemediği durumlarda takip sürelerinin durdurulduğu bir beklenen yaşam tablosundan beklenen yaşam olasılıkları üretilir. Bir bireyin yaşam süresi durdurulursa eşleşen bireyin yaşam süresi de durdurulur. Ancak bir birey ilgilenilen olayı yaşarsa eşleşen bireyin çalışmanın bitiş tarihine kadar risk altında olduğu varsayılır [1, 22, 24].

Eğer yalnızca beklenen yaşam olasılığına ihtiyaç duyulsaydı Ederer I yöntemi en iyi sonucu verebilirdi. Çünkü bu yöntem ile elde edilen sonuçlar kitle alt gruplarının potansiyel geri çekilme (withdrawal) modellerinden bağımsızdır. Ancak gözlenen yaşam olasılıkları karşılığı olacak şekilde hesaplanmadığından bağımlılık sorunu ortaya çıkmaktadır. Her bir alt grup için veya en azından aynı potansiyel geri çekilme modellerine sahip her bir alt grup için ayrı bir yaşam tablosu hesabı, gözlenen yaşam olasılıklarını potansiyel geri çekilme modellerinden bağımsız hale getirmek için gerekli olmaktadır. Elde edilen gözlenen yaşam olasılıkları, daha sonra takip süresinin başlangıcında bu olasılıklara karşılık gelen sonuçlarla orantılı olarak ağırlıklandırılmalıdır. Bununla beraber birkaç yaşam tablosunun kullanılması, analizi karmaşıklaştırabilmekte ve yaşa özgü yaşam tablolarının kullanımı, az sayıda hastayı temel aldığından daha az güvenilir tahminler verebilmektedir. Ayrıca bazı alt gruplar için uzun vadeli yaşam olasılığı tahminleri mevcut olmamaktadır. Ederer I yönteminin kullanımı genellikle kitlenin gelecekteki yaşam tablosu hakkında bilgi gerektirmektedir. Bu gibi durumlarda geleceğe dair gerekli olan olasılıklar mevcut olan en güncel yaşam tablosundaki değerlere göre ele alınabilir veya tahmin edilen yaşam tabloları kullanılabilir. Bununla birlikte

hastaların geçmiş deneyimlerine dayanarak elde edilmiş gözlenen yaşam olasılıklarını, kitlenin gelecekteki deneyimlerine dayanarak elde edilen beklenen yaşam olasılıkları ile karşılaştırmak doğru olmayabilir [1, 8, 30].

Bu üç yöntem, görelî yaşam olasılığının paydasını tahmin etmek için önerilmiş olsa da net yaşam olasılığı tahminleri olarak da yorumlanmıştır. Ancak net yaşam olasılığı olarak kullanılmalarının her zaman doğru olmadığı belirtilmiştir [19]. Net yaşam olasılığı, kendi başına kullanılmak üzere değerlendirildiğinde fazla varsayımsal olsa da ülkeler arasında karşılaştırma yapılmak istenen durumlarda kitle ölüm tehlikesinden bağımsız olduğu için çok önemli bir hale gelmektedir. Perme, Stare ve Esteve[19], net yaşam olasılığının tahmini için Ederer I, Ederer II ve Hakulinen tahmin edicilerinin yanlı olduğunu göstermiş ve yeni, yansız bir tahmin edici önermişlerdir. Pohar Perme tahmin edicisi olarak adlandırılan yeni yaklaşımla bir kuşak için net yaşam olasılığı, bireye özgü beklenen yaşam olasılıklarının tersi ile ağırlıklandırılarak tahmin edilmektedir. Bu yöntem, diğer yöntemlerde olduğu gibi karşılaştırılabilir kitle grubundaki beklenen yaşam olasılıkları ile çalışma grubundaki hastaların gözlenen yaşam olasılıklarının doğrudan karşılaştırılmasına dayanmaz. Kitle ölüm olasılıkları, ilgilenilen kanser türü dışındaki nedenlere bağlı ölümlerin tahmini için kullanılmakta ve böylece gerçek ölüm nedenleri hakkında bilgi ihtiyacı olmamaktadır. Diğer yöntemlerden farklı olarak bu yöntemde gözlenen yaşam olasılığı, bilgi içeren bir durdurma olmadığında ve yaşam olasılığı hesaplamalarında zaman sürekli olarak ele alındığında net yaşam olasılığının tarafsız bir tahmin edicisini sağlamaktadır [31]. Pohar Perme tahmin edicisi sürekli yaşam süreleri için geliştirilmiş olsa da yaşam çözümlemesinin sıklıkla kullanıldığı kanser verilerinde yaşam süreleri kesikli olabilmektedir (örneğin tamamlanmış ay veya yıl şeklindedir) [1, 22].

Pohar Perme yönteminde bir hastanın net yaşam olasılığına katkısı, hastanın beklenen yaşam olasılığı temelinde ağırlıklandırılır. Yöntem aynı zamanda Hakulinen, Seppä ve Lambert [9] çalışmasında ele alınan altın standardın bir genellemesi olarak görülebilir.

2.3. Yaş Standartlaştırma Yöntemleri

Epidemiyolojik çalışmalarda çoğunlukla, belirli bir zamanda iki veya daha fazla kitle arasındaki veya aynı kitlenin farklı zaman dilimlerindeki sağlık durumlarını incelemek için insidans, ölüm tehlikesi (mortalite), prevalans ve yaşam olasılığı gibi temel sağlık göstergelerinin karşılaştırılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Kaba ölüm olasılıkları bu tür karşılaştırmalar için bir dereceye kadar yararlı olsa da özellikle altta yatan nüfus yapıları yaş, cinsiyet ve sosyo-ekonomik durumlar gibi bazı faktörler açısından karşılaştırılabilir olmadığında yetersiz kalmaktadır [32]. Yaş standartlaştırma, farklı kitleler arasındaki (veya farklı zaman dilimlerinde teşhisi konulmuş hastalar vs.) görelî yaşam olasılıklarını karşılaştırmak için kullanılabilen bir yöntemdir. Görelî yaşam çözümlemesinde, beklenen yaşam olasılıkları farklı yaş dağılımları göz önünde bulundurularak hesaplanıyor olsa da aşırı tehlikenin yaşa bağlı olma olasılığı hesaba katılmayabilir. Böyle durumlarda yaş standartlaştırma yöntemlerinden yararlanılır. Ayrıca yaş dışında farklı değişkenler için de standartlaştırma kullanılabilir [1, 22].

Epidemiyoloji ve demografide yaş standartlaştırmanın dolaylı ve dolaysız yöntemleri geliştirilmiştir. Dolaysız standartlaştırma, karşılaştırma için hangi kitlenin referans alınacağına bağlı olarak “iç standartlaştırma” veya “dış standartlaştırma” olarak ayrılır. Harici bir kitle standart olarak kabul edilirse bu durum dış standartlaştırma olacaktır. Ancak çalışma kitlesinin kendisi bir standart olarak kabul edilerek farklı zaman noktalarında karşılaştırmalar yapılırsa bu durum, iç standartlaştırma olacaktır [1, 32].

Görelî yaşam çözümlemesinde temel tehlike fonksiyonu ilgilenilen olay dışındaki nedenlerden kaynaklı ölümlerin yarattığı etki nedeniyle düzeltilmektedir. Ancak hastalar arasındaki yaş dağılımı farklılıkları düzeltilmemektedir. Görelî yaşam fonksiyonu yaşa bağlı olduğundan çoğunlukla görelî yaşam olasılığı yaşlı hastalar için genç hastalara kıyasla daha düşük olmaktadır. Bunun bir sonucu olarak yaşlı hastaların oranının genç hastalara göre daha yüksek olduğu bir kitlede, görelî yaşam

olasılıkları daha düşük olma eğilimindedir. Bu nedenle daha yaşlı ve daha genç yaş grupları arasında görelî yaşam olasılıklarının karşılaştırılması yanıltıcı sonuçlara neden olabilmekte ve bu durumu engellemek için bazı düzeltmeler yapılması gerekmektedir [1, 32, 33].

Hakulinen [7], karşılaştırma yapılacak bir grubun olmadığı durumlarda tek bir kitle için görelî yaşam olasılığını tahmin ederken de yaş standartlaştırmanın göz önünde bulundurulması gerektiğini belirtmiştir. Böyle bir durum, “iç standartlaştırma” olacaktır. Örneğin Ederer II tahmin edicisini kullanırken yanlılığı en aza indirmek için böyle bir standartlaştırma önemlidir. Tüm bireylerin aynı beklenen yaşam olasılığına sahip olduğu bir durumda görelî yaşam olasılığı, net yaşam olasılığının yansız bir tahmin edicisi olacaktır. Bu gibi bir durumla pratikte karşılaşılmasa da yanlılığın boyutunun beklenen yaşam olasılığındaki heterojenlik derecesi ile orantılı olduğu bilinmektedir. Yaş standartlaştırma yönteminde olduğu gibi kısıtlı sayıdaki yaş grupları için görelî yaşam olasılıklarının tahmin edilmesinde, hastaların beklenen yaşam olasılıklarının benzer olması beklenir ve bunun bir sonucu olarak da yanlılık azalır [1, 22].

Görelî yaşam fonksiyonu için geleneksel, gözlenen-beklenen ve Brenner yöntemleri olmak üzere farklı yaş standartlaştırma yöntemleri bulunmaktadır.

2.3.1. Geleneksel Yöntem

Görelî yaşam fonksiyonu için yaş standartlaştırmaya ilişkin geleneksel yöntem uzun süredir yaşam çözümlenmesinde kullanılmaktadır [34-36]. Bu yöntem için “geleneksel” terimi Brenner ve Hakulinen [37] tarafından kullanılmıştır.

Takip süresinin başlangıcında standart kitledeki hastaların yaşa özgü oranları u_a olsun. $R_T(t)$ olarak ifade edilen geleneksel yöntemle yaşa göre standardize edilmiş birikimli görelî yaşam fonksiyonu yaşa özgü birikimli görelî yaşam fonksiyonlarının ağırlıklı ortalaması olarak tanımlanır. Ağırlıklar ise takip süresinin başlangıcında standart kitledeki her yaş grubundaki hastaların oranlarıdır:

$$R_T(t) = \frac{\sum_{a=1}^m u_a R_a(t)}{\sum_{a=1}^m u_a} = \sum_{a=1}^m u_a R_a(t) \quad (22)$$

w_a , çalışma kitesindeki hastaların yaşa özgü oranları olmak üzere standart kitledeki hastaların yaşa özgü oranları u_a , w_a 'ya eşit olduğunda $R_T(t)$ aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$R_T(t) = \sum_{a=1}^m w_a R_a(t)$$

Görelî yaşam fonksiyonunun yaştan bağımsız olduğu varsayılırsa yaş standartlaştırmaya gerek olmayacaktır:

$$R_T(t) = \sum_{a=1}^m u_a R_a(t) = R(t)$$

[1, 32].

2.3.2. Gözlenen-Beklenen Yöntemi

Bu yöntemde görelî yaşam fonksiyonu $R_{O-E}(t)$, ağırlıklı gözlenen yaşam fonksiyonunun beklenen yaşam fonksiyonuna oranı olarak ifade edilir. Ağırlıklar ise standart olarak belirlenen kitlede takip süresinin başlangıcındaki hastaların oranlarıdır:

$$R_{O-E}(t) = \frac{\sum_{a=1}^m u_a S_a(t)}{\sum_{a=1}^m u_a S_a^*(t)} = \frac{\sum_{a=1}^m u_a S_a^*(t) R_a(t)}{\sum_{a=1}^m u_a S_a^*(t)} \quad (23)$$

Eğer çalışma kitlesi aynı zamanda standart kitle olarak belirlenirse $R_{O-E}(t)$ aşağıdaki biçimde olacaktır:

$$R_{O-E}(t) = \frac{\sum_{a=1}^m w_a S_a(t)}{\sum_{a=1}^m w_a S_a^*(t)}$$

[1, 32].

2.3.3. Brenner I Yöntemi

Görelî yaşam fonksiyonu için geleneksel yaş standartlaştırma yöntemlerinde takip sürelerine göre sabit ağırlıklar kullanılmaktadır. Brenner ve Hakulinen [37], her bir takip süresi için farklı ağırlıklar kullanan bir yaş standartlaştırma yöntemi önermiştir. $R_{BRI}(t)$, görelî yaşam fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$R_{BRI}(t) = \frac{\sum_{a=1}^m u_a S_{a,u}^*(t) R_a(t)}{\sum_{a=1}^m u_a S_{a,u}^*(t)} \quad (24)$$

Burada $S_{a,u}(t)$ ve $S_{a,u}^*(t)$, t zamanında standart kitledeki kanser hastaları için sırasıyla yaşa özgü gözlenen ve beklenen yaşam olasılıklarını ifade etmektedir. Ağırlıklar, standart kitlede t zamanında hayatta kalması beklenen hastaların oranıdır. $R_{BRI}(t)$, iki koşulda verilen takip noktasına kadar ilgilenilen kansere bağlı aşırı ölüm tehlikesinden kurtulma olasılığı olarak yorumlanabilir. İlk koşul, hastalar standart kitle ile aynı yaş dağılımına sahip olmalıdır. İkinci koşul ise hastalar aynı zaman periyodu boyunca standart genel kitledeki temel ölüm tehlikesinden kurtulmalıdır [32]. İç standartlaştırmada ağırlıklar, çalışma kitlesinin kendisinden alınır. Hakulinen veya Ederer I yöntemi kullanıldığında ve potansiyel gözlem olasılıklarının yaştan bağımsız olduğu kabul edildiğinde Brenner I ve gözlenen-beklenen yöntemleri aşağıdaki eşitlikte görüldüğü gibi teorik olarak aynı olacaktır:

$$R_{BRI}(t) = \frac{\sum_{a=1}^m w_a S_a^*(t) R_a(t)}{\sum_{a=1}^m w_a S_a^*(t)} \quad (25)$$

[1, 32].

2.3.4. Brenner II Yöntemi

Brenner ve ark. [38], yaş standartlaştırma için görelî yaşam fonksiyonlarını türetmeden önce ağırlıkların bireysel olarak hastalara atandığı farklı bir yöntem önermişlerdir [31]. Bu yöntemde ağırlıklar, takip süresinin başlangıcında standart kitledeki her bir yaş grubundaki hastaların çalışma kitlesinde aynı yaş grubundaki hastalara oranı olarak hesaplanır. Örneğin standart kitlede belli bir yaş grubundaki hastaların oranı %12 iken, çalışma popülasyonunda aynı yaş grubundaki hastaların oranı %8 ise analizlerde bu yaş grubundaki her hasta 1.5 hastayı temsil edecek şekilde ağırlıklandırılmalıdır [38].

Çalışma kitlesinden n büyüklüğündeki örnekleme ait i yaş grubundaki hastaların görelî yaşam olasılığı r_i olsun. s_i ise standart kitlede karşılık gelen olasılığı belirtsin. Her bir hastaya ve her hastanın risk altındaki birey ve ölüm sayılarına yaptığı katkıların tümüne s_i/r_i ağırlık ataması yapılır. Bu ağırlıklandırmanın sonucunda i'nin her bir yaş grubu değeri için ağırlıkların toplamı $n r_i (s_i/r_i) = n s_i$ olur ve böylelikle çalışma kitlesi, standart kitle ile aynı yaş dağılımına sahip olur. Ayrıca ağırlıkların toplamı Eşitlik 26'da verildiği gibi çalışma kitlesindeki birey sayısına eşit olur [1, 37]:

$$\sum_i n s_i = n \quad (26)$$

Geleneksel yaş standartlaştırmada farklı yaş grupları için yaşa özgü yaşam olasılıkları hesaplanır ve ağırlıklı ortalama hesabı yapılır. Böyle bir yöntemde temel problem, belirli yaş gruplarındaki

verilerin azlığıdır ve bu durum yaşa özgü yaşam olasılıklarının hesaplanmasını engelleyebilmektedir. Ayrıca standart kitle, çalışma kitlesi ile aynı yaş dağılımına sahip olsa bile geleneksel yaş standartlaştırma yöntemi, görelî yaşam olasılıklarını önemli ölçüde aşağı çekebilmektedir [37, 38, 40]. Alternatif olarak önerilen bu yaklaşımda ağırlıklar farklı yaş grubundaki hastalara bireysel olarak atanır ve daha sonra “ağırlıklandırılmış bireysel veriler” kullanılarak geleneksel yöntem uygulanır. Geleneksel yöntem ile karşılaştırıldığında bu yöntemin en temel avantajı bir veya daha fazla yaş grubunda hiçbir hastanın takip süresi boyunca izlenmediği durumlarda bile uygulanabilmesidir [1, 38].

Açıkça, her yöntem yaşa özgü görelî yaşam olasılıklarının ağırlıklı ortalaması olarak ifade edilebilir ancak ağırlıklar kullanılan yöntemlere bağlıdır. Geleneksel yöntem takip süresi boyunca sabit ağırlıklar kullanırken diğer yöntemlerde ağırlıklar her takip zamanında farklıdır [1, 31].

3. Uygulama

Görelî yaşam çözümlemesinde hastalarla ilgili gözlenen veriler ve bu verilerin karşılaştırılabileceği bir kitleye ait veriler olmak üzere iki veri kümesi kullanılmaktadır. Kitleye ait veri kümesi yaşam ve ölüm olasılıkları, yaş, cinsiyet, dönem vs. gibi değişkenleri içermelidir ve olasılıklar hastaların takip süresini kapsayacak şekilde, takip edildikleri her yıl için verilmelidir [22].

Bu çalışmada kitleye ait veriler için California Üniversitesi merkezli bir proje olan “Human Mortality Database (HMD)” üzerinde bulunan yaşam tablolarından faydalanılmıştır [41]. 1959 ile 2018 yılları arasında kapsayan Amerika Birleşik Devletleri’ne ait yaşam tablosu kullanılmıştır. Yaşam tablosunda “110+” ile ifade edilen yaş aralıkları $x=110$ varsayılarak diğer yaşlarda olduğu gibi bir yıllık aralığı ifade edecek şekilde analize dahil edilmiştir.

Gözlenen veri kümesi olarak da Byar ve Green [42] tarafından kullanılan ve erkeklerde sık görülen bir kanser türü olan prostat kanseri hastalığına yakalanmış 501 bireyi içeren veri kümesi ele alınmıştır [43]. Çözümlemeler, Dickman ve Coviello [22] tarafından kaba ve net ölüm olasılıkları, yaşam tablosu tahminleri gibi çeşitli ölçümlerin görelî yaşam çözümlemesi çerçevesinde tahmin edilmesi ve modellenmesi amacıyla Stata için önerilmiş olan “strs” komutu kullanılarak Stata 17 (Stata/BE 6-month for students) [44] programı kullanılmıştır. Çalışmada yer alan hastaların yaşları 48 ile 89 aralığındadır ve ortalama yaş, 71.46 ± 7.08 olarak elde edilmiştir.

Görelî yaşam çözümlemesinde yaşam tabloları söz konusu olduğunda yaş grupları önemli olmaktadır. Bu çalışmada kanser hastaları için yaş gruplandırması yapılırken Dickman ve Coviello [22] referans olarak kullanılmıştır. 45-59 yaş aralığındaki hastalar “1. grup”, 60-74 yaş aralığındaki hastalar “2. grup” ve 75 yaş ve üzerindeki hastalar “3. grup” olarak ele alınmıştır.

3.1. Görelî Yaşam Yaklaşımıyla Yaşam Tablosu Tahminleri

Tahmin aralıkları bir yıllık periyotlar biçiminde olmak üzere prostat kanseri hastaları için yaşam tabloları tahmin edilmiş ve Çizelge 3.1’de verilmiştir. Çizelge 3.1’de yer alan gösterimler;

- n : başlangıçta risk altındaki hasta sayısı,
- d : ilgili aralıkta meydana gelen ölüm sayısı,
- w : durdurulmuş gözlem sayısı,
- p : aralığa özgü gözlenen yaşam olasılığı,
- p_{star} : aralığa özgü beklenen yaşam olasılığı,
- r : aralığa özgü görelî yaşam olasılığı,
- cp : birikimli gözlenen yaşam olasılığı,
- cp_{e2} : birikimli beklenen yaşam olasılığı (Ederer II),
- cr_{e2} : görelî yaşam olasılığı (Ederer II),

lo_{cr_e2} : görelî yaşam olasılığı için güven aralığı alt sınırı (Ederer II),

hi_{cr_e2} : görelî yaşam olasılığı için güven aralığı üst sınırı (Ederer II)

biçiminde açıklanır [21].

Çizelge 3.1'e göre prostat kanserine yakalanmış erkek hastaların beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığının 0.3255, Ederer II beklenen yaşam olasılığının 0.7383 ve görelî yaşam olasılığının ise 0.4409 olduğu söylenebilir.

Prostat kanseri veri kümesinde yaş grupları da dikkate alınarak yaşam tablosu tahminleri elde edilmek istenmiştir. Çizelge 3.2-3.4'de yaş gruplarına göre elde edilen gözlenen, beklenen ve görelî yaşam olasılıkları verilmiştir. Çizelge 3.2'ye göre prostat kanserine yakalanmış 45-59 yaş aralığındaki erkek hastaların beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığının 0.4104, Ederer II beklenen yaşam olasılığının 0.9286 ve görelî yaşam olasılığının ise 0.4419 olduğu söylenebilir. Çizelge 3.3'e göre prostat kanserine yakalanmış 60-74 yaş aralığındaki erkek hastaların beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığının 0.3750, Ederer II beklenen yaşam olasılığının 0.7683 ve görelî yaşam olasılığının ise 0.4881 olduğu söylenebilir. Çizelge 3.4'e göre prostat kanserine yakalanmış 75 yaş ve üzeri erkek hastaların beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığının 0.2259, Ederer II beklenen yaşam olasılığının 0.6307 ve görelî yaşam olasılığının ise 0.3581 olduğu söylenebilir.

Gözlenen yaşam olasılığının (cp) yıllar geçtikçe beklendiği üzere azaldığı görülmektedir. Ancak görelî yaşam olasılığı (cr_e2) daha az bir düşüş eğilimi göstermektedir.

Ederer I, Ederer II ve Hakulinen yaklaşımları ile elde edilen beklenen görelî yaşam olasılıkları ve Pohar Perme yaklaşımı ile elde edilen net yaşam olasılıkları Çizelge 3.5'de verilmiştir. Çizelge 3.5'de cr_e1 : Ederer I görelî yaşam olasılığı, cr_e2 : Ederer II görelî yaşam olasılığı, cr_hak : Hakulinen görelî yaşam olasılığı, cns_pp : Pohar Perme net yaşam olasılığını ifade etmektedir. Çizelge 3.5'e göre prostat kanserine yakalanmış erkek hastaların beş yıl için Ederer I beklenen görelî yaşam olasılığı 0.4443, Ederer II beklenen görelî yaşam olasılığı 0.4409, Hakulinen görelî yaşam olasılığı 0.4451 ve Pohar Perme net yaşam olasılığı 0.4390'dır. Olasılıklar açısından yöntemler arasında belirgin bir farklılık olmadığı görülmüştür.

Çizelge 3.1. Göreli yaşam yaklaşımı ile elde edilen yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	485	83	0	0.8289	0.9461	0.8761	0.8289	0.9461	0.8761	0.8375	0.9086
1	2	402	81	0	0.7985	0.9443	0.8456	0.6619	0.8934	0.7409	0.6916	0.7859
2	3	321	77	0	0.7601	0.9415	0.8073	0.5031	0.8411	0.5981	0.5443	0.6499
3	4	244	49	0	0.7992	0.9387	0.8513	0.4021	0.7896	0.5092	0.4538	0.5641
4	5	195	32	54	0.8095	0.9350	0.8658	0.3255	0.7383	0.4409	0.3837	0.4989
5	6	109	15	71	0.7959	0.9306	0.8553	0.2591	0.6870	0.3771	0.3129	0.4443
6	7	23	1	22	0.9167	0.9236	0.9925	0.2375	0.6345	0.3742	0.2868	0.4685

Çizelge 3.2. 45-59 yaş grubu için göreli yaşam yaklaşımı ile elde edilen yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	43	4	0	0.9070	0.9870	0.9189	0.9070	0.9870	0.9189	0.7810	0.9767
1	2	39	6	0	0.8462	0.9861	0.8581	0.7674	0.9733	0.7885	0.6277	0.8913
2	3	33	8	0	0.7576	0.9849	0.7692	0.5814	0.9586	0.6065	0.4390	0.7427
3	4	25	5	0	0.8000	0.9846	0.8125	0.4651	0.9438	0.4928	0.3310	0.6404
4	5	20	2	6	0.8824	0.9839	0.8967	0.4104	0.9286	0.4419	0.2817	0.5960
5	6	12	2	7	0.7647	0.9819	0.7788	0.3138	0.9119	0.3442	0.1781	0.5238
6	7	3	0	3	1.0000	0.9904	1.0000	0.3138	0.8940	0.3510	0.1817	0.5342

Çizelge 3.3. 60-74 yaş grubu için göreli yaşam yaklaşımı ile elde edilen yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	271	43	0	0.8413	0.9550	0.8810	0.8413	0.9550	0.8810	0.8295	0.9213
1	2	228	42	0	0.8158	0.9527	0.8563	0.6863	0.9098	0.7544	0.6896	0.8111
2	3	186	35	0	0.8118	0.9493	0.8552	0.5572	0.8637	0.6452	0.5743	0.7109
3	4	151	25	0	0.8344	0.9452	0.8828	0.4649	0.8163	0.5696	0.4957	0.6407
4	5	126	21	35	0.8065	0.9411	0.8569	0.3750	0.7683	0.4881	0.4114	0.5645
5	6	70	10	46	0.7872	0.9363	0.8408	0.2952	0.7193	0.4104	0.3238	0.5004
6	7	14	1	13	0.8667	0.9281	0.9339	0.2558	0.6676	0.3832	0.2556	0.5236

Çizelge 3.4. 75+ yaş grubu için görelî yaşam yaklaşımı ile elde edilen yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	171	36	0	0.7895	0.9217	0.8565	0.7895	0.9217	0.8565	0.7816	0.9150
1	2	135	33	0	0.7556	0.9180	0.8231	0.5965	0.8461	0.7050	0.6134	0.7867
2	3	102	34	0	0.6667	0.9133	0.7300	0.3977	0.7727	0.5146	0.4196	0.6083
3	4	68	19	0	0.7206	0.9076	0.7940	0.2865	0.7013	0.4086	0.3149	0.5068
4	5	49	9	13	0.7882	0.8993	0.8765	0.2259	0.6307	0.3581	0.2622	0.4635
5	6	27	3	18	0.8333	0.8930	0.9332	0.1882	0.5632	0.3342	0.2263	0.4585
6	7	6	0	6	1.0000	0.8849	1.0000	0.1882	0.4983	0.3777	0.2557	0.5182

Çizelge 3.5. Beklenen görelî yaşam ve net yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	485	83	0	0.8289	0.9461	0.8761	0.8289	0.8761	0.8761	0.8764	0.8753
1	2	402	81	0	0.7985	0.9443	0.8456	0.6619	0.7416	0.7409	0.7422	0.7391
2	3	321	77	0	0.7601	0.9415	0.8073	0.5031	0.5999	0.5981	0.6006	0.5955
3	4	244	49	0	0.7992	0.9387	0.8513	0.4021	0.5120	0.5092	0.5129	0.5078
4	5	195	32	54	0.8095	0.9350	0.8658	0.3255	0.4443	0.4409	0.4451	0.4390
5	6	109	15	71	0.7959	0.9306	0.8553	0.2591	0.3807	0.3771	0.3809	0.3788
6	7	23	1	22	0.9167	0.9236	0.9925	0.2375	0.3776	0.3742	0.3758	0.3785

Ederer I, Ederer II, Hakulinen ve Pohar Perme yaklaşımları ile yaş grupları da dikkate alınarak yaşam olasılıkları elde edilmiş ve Çizelge 3.6-3.8'de verilmiştir.

Çizelge 3.6. 45-59 yaş grubu için beklenen göreceli yaşam ve net yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>cr_e1</i>	<i>cr_e2</i>	<i>cr_hak</i>	<i>cns_pp</i>
0	1	43	4	0	0.9189	0.9189	0.9189	0.9190
1	2	39	6	0	0.7885	0.7885	0.7885	0.7891
2	3	33	8	0	0.6062	0.6065	0.6062	0.6054
3	4	25	5	0	0.4929	0.4928	0.4929	0.4915
4	5	20	2	6	0.4424	0.4419	0.4424	0.4413
5	6	12	2	7	0.3445	0.3442	0.3446	0.3440
6	7	3	0	3	0.3513	0.3510	0.3521	0.3509

Çizelge 3.7. 60-74 yaş grubu için beklenen göreceli yaşam ve net yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>cr_e1</i>	<i>cr_e2</i>	<i>cr_hak</i>	<i>cns_pp</i>
0	1	271	43	0	0.8810	0.8810	0.8811	0.8806
1	2	228	42	0	0.7548	0.7544	0.7550	0.7543
2	3	186	35	0	0.6458	0.6452	0.6460	0.6463
3	4	151	25	0	0.5699	0.5696	0.5701	0.5724
4	5	126	21	35	0.4877	0.4881	0.4880	0.4920
5	6	70	10	46	0.4091	0.4104	0.4097	0.4122
6	7	14	1	13	0.3798	0.3832	0.3809	0.3843

Çizelge 3.8. 75+ yaş grubu için göreceli yaşam ve net yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>cr_e1</i>	<i>cr_e2</i>	<i>cr_hak</i>	<i>cns_pp</i>
0	1	171	36	0	0.8565	0.8565	0.8567	0.8559
1	2	135	33	0	0.7055	0.7050	0.7058	0.7023
2	3	102	34	0	0.5164	0.5146	0.5167	0.5123
3	4	68	19	0	0.4111	0.4086	0.4115	0.4091
4	5	49	9	13	0.3607	0.3581	0.3608	0.3542
5	6	27	3	18	0.3377	0.3342	0.3371	0.3347
6	7	6	0	6	0.3830	0.3777	0.3821	0.3784

Çizelge 3.6'ya göre prostat kanserine yakalanmış 45-59 yaş aralığındaki erkek hastaların beş yıl için Ederer I göreceli yaşam olasılığı 0.4424, Ederer II göreceli yaşam olasılığı 0.4419, Hakulinen göreceli yaşam olasılığı 0.4424 ve Pohar Perme net yaşam olasılığı 0.4413'tür. Çizelge 3.7'ye göre prostat kanserine yakalanmış 60-74 yaş aralığındaki erkek hastaların beş yıl için Ederer I göreceli yaşam olasılığı 0.4877, Ederer II göreceli yaşam olasılığı 0.4881, Hakulinen göreceli yaşam olasılığı 0.4880 ve Pohar Perme net yaşam olasılığı 0.4920'dir. Çizelge 3.8'e göre prostat kanserine yakalanmış 75 yaş ve üzerindeki erkek hastaların beş yıl için Ederer I göreceli yaşam olasılığı 0.3607, Ederer II göreceli yaşam olasılığı 0.3581, Hakulinen göreceli yaşam olasılığı 0.3608 ve Pohar Perme net yaşam olasılığı 0.3542'dir. Sonuçlar incelendiğinde Ederer I, Ederer II, Hakulinen ve Pohar Perme yöntemleri arasında önemli farklılıkların olmadığı söylenebilir.

3.2. Yaş Standartlaştırma ile Görelî Yaşam Olasılığı Tahminleri

Bu çalışmada geleneksel yöntem ile iç standartlaştırma yapılmış ve her bir yaş grubu için Çizelge 3.9’da belirtilen ağırlıklar kullanılmıştır [22]. Ağırlıklar her yaş grubundaki hasta sayısının oranını ifade etmektedir. Çizelge 3.10-3.12’de geleneksel yaş standartlaştırma yöntemi kullanılarak elde edilen görelî yaşam tablosu tahminleri verilmiştir.

Çizelge 3.9. Yaş standartlaştırması için kullanılan ağırlıklar

Yaş grupları	n_i	w_i
1	43	0.086
2	279	0.557
3	179	0.357
Toplam	501	

Çizelge 3.10’a göre prostat kanserine yakalanmış 45-59 yaş aralığındaki erkek hastaların yaş standartlaştırma kullanıldığı durumda beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığı 0.4104, birikimli beklenen yaşam olasılığı 0.9286 ve görelî yaşam olasılığı 0.4419’dur. Çizelge 3.11’e göre prostat kanserine yakalanmış 60-74 yaş aralığındaki erkek hastaların yaş standartlaştırma kullanıldığı durumda beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığı 0.3650, birikimli beklenen yaşam olasılığı 0.7683 ve görelî yaşam olasılığı 0.4751’dir. Çizelge 3.12’ye göre prostat kanserine yakalanmış 75 yaş ve üzerindeki erkek hastaların yaş standartlaştırma kullanıldığı durumda beş yıl için birikimli gözlenen yaşam olasılığı 0.2244, birikimli beklenen yaşam olasılığı 0.6311 ve görelî yaşam olasılığı 0.3556’dır.

3.3. Kaba Ölüm Olasılığı Tahminleri

Hem görelî yaşam olasılığı hem de nedene özgü yaşam olasılığı, net yaşam olasılığını tahmin etmeye yani ilgilenilen olayın, tek ölüm nedeni olacağı durumdaki yaşam olasılığını hesaplamaya odaklanmıştır. Nedene özgü yaklaşımda bu olasılık doğrudan tahmin edilirken görelî yaşam yaklaşımında bu olasılık aşırı tehlike üzerinden tahmin edilmektedir. Örneğin 15 yıl için hesaplanmış bir görelî yaşam olasılığı %60 ise bu, ilgilenilen kanser türünün tek ölüm nedeni olduğu varsayımıyla hastaların teşhisten sonra 15 yıl veya daha fazla yaşama olasılığının %60 olduğu anlamına gelecektir. 15 yıl içinde bu kanser türüne bağlı net ölüm olasılığı ise %40 olacaktır ve hastaların başka bir nedenden ölmeyeceği varsayımıyla yorumlanacaktır. Net yaşam olasılığı, etiyolojik çalışmalarda veya halk sağlığı araştırmalarında son derece kullanışlı olabilmektedir. Ancak hastalıklar gerçek hayatta bu varsayımlara göre deneyimlenmediğinden kaba ölüm ve kaba yaşam olasılıklarının da göz önünde bulundurulması önemlidir. Yani 15 yıl içinde kanser nedeniyle ölmenin kaba olasılığı, yarışan risklerin varlığında ölmenin gerçek olasılığıdır ve kanser nedeniyle ölmenin net olasılığından daha düşük olacaktır [22].

Çizelge 3.10. Yaş standartlaştırma ile 45-59 yaş grubu için görelî yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	43	4	0	0.9070	0.9870	0.9189	0.9070	0.9870	0.9189	0.7810	0.9767
1	2	39	6	0	0.8462	0.9861	0.8581	0.7674	0.9733	0.7885	0.6277	0.8913
2	3	33	8	0	0.7576	0.9849	0.7692	0.5814	0.9586	0.6065	0.4390	0.7427
3	4	25	5	0	0.8000	0.9846	0.8125	0.4651	0.9438	0.4928	0.3310	0.6404
4	5	20	2	6	0.8824	0.9839	0.8967	0.4104	0.9286	0.4419	0.2817	0.5960
5	6	12	2	7	0.7647	0.9819	0.7788	0.3138	0.9119	0.3442	0.1781	0.5238
6	7	3	0	3	1.0000	0.9804	1.0000	0.3138	0.8940	0.3510	0.1817	0.5342

Çizelge 3.11. Yaş standartlaştırma ile 60-74 yaş grubu için görelî yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	271	49	0	0.8192	0.9550	0.8578	0.8192	0.9550	0.8578	0.8042	0.9007
1	2	228	38	0	0.8288	0.9527	0.8700	0.6790	0.9098	0.7563	0.6813	0.8035
2	3	186	33	0	0.8207	0.9494	0.8644	0.5572	0.8638	0.6451	0.5742	0.7108
3	4	151	25	0	0.8344	0.9452	0.8828	0.4649	0.8164	0.5695	0.4956	0.6406
4	5	126	23	38	0.7850	0.9411	0.8342	0.3650	0.7683	0.4751	0.3986	0.5516
5	6	65	8	45	0.8118	0.9364	0.8669	0.2963	0.7194	0.4118	0.3247	0.5024
6	7	12	1	11	0.8462	0.9292	0.9107	0.2507	0.6685	0.3750	0.2380	0.5281

Çizelge 3.12. Yaş standartlaştırma ile 75+ yaş grubu için görelî yaşam olasılıklarını içeren yaşam tablosu tahmini

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>w</i>	<i>p</i>	<i>p_star</i>	<i>r</i>	<i>cp</i>	<i>cp_e2</i>	<i>cr_e2</i>	<i>lo_cr_e2</i>	<i>hi_cr_e2</i>
0	1	171	41	0	0.7602	0.9217	0.8248	0.7602	0.9217	0.8248	0.7474	0.8868
1	2	135	29	0	0.7769	0.9185	0.8459	0.5906	0.8466	0.6977	0.6061	0.7797
2	3	101	33	0	0.6733	0.9134	0.7371	0.3977	0.7732	0.5143	0.4193	0.6079
3	4	68	19	0	0.7206	0.9076	0.7940	0.2865	0.7018	0.4083	0.3147	0.5065
4	5	49	9	15	0.7831	0.8993	0.8708	0.2244	0.6311	0.3556	0.2596	0.4612
5	6	25	3	17	0.8182	0.8934	0.9158	0.1836	0.5638	0.3256	0.2167	0.4522
6	7	3	0	5	1.0000	0.8812	1.0000	0.1836	0.4968	0.3695	0.2459	0.5132

İlgilenilen olaya bağlı ve ilgilenilen olay dışındaki nedenlere bağlı ölümlerin kaba olasılıklarının yaşam tablolarından nasıl tahmin edileceği Cronin ve Feuer [45] çalışmasında incelenmiştir. Bu yöntem ile tahmin edilen kaba ölüm olasılıkları Çizelge 3.13-3.15'de verilmiştir. $1-cr_{e2}$, prostat kanserine bağlı ölümün net olasılığıdır. ci_{dc} ve ci_{do} ise sırasıyla prostat kanserine bağlı ve diğer nedenlere bağlı ölümlerin kaba olasılıklarıdır.

Çizelge 3.13'e göre teşhis zamanında 44 yaşından büyük olan hastaların yedi yıllık takip süresinde yaklaşık %55'inin prostat kanserinden, %22'sinin ise başka nedenlerden öleceği tahmin edilmektedir. Hastaların %23'ünün ise yaşamaya devam edeceği tahmin edilmektedir. Hastaların yalnızca prostat kanserinden ölebileceğinin varsayıldığı durumda yedi yıl içerisinde %37'sinin kanserden ölmeyeceği ve %63'ünün kanserden öleceği tahmin edilmektedir. Çizelge 4.14'e göre teşhis zamanında 59 yaşından daha büyük olan hastaların yedi yıllık takip süresinde %54'ünün prostat kanserinden, %23'ünün ise başka nedenlerden öleceği tahmin edilmektedir. Hastaların %23'ünün ise yaşamaya devam edeceği tahmin edilmektedir. Hastaların yalnızca prostat kanserinden ölebileceğinin varsayıldığı durumda yedi yıl içerisinde %37'sinin kanserden ölmeyeceği ve %63'ünün kanserden öleceği tahmin edilmektedir. Çizelge 3.15'e göre teşhis zamanında 75 yaşından daha büyük olan hastaların yedi yıllık takip süresinde %54'ünün prostat kanserinden, %28'inin ise başka nedenlerden öleceği tahmin edilmektedir. Hastaların %18'inin ise yaşamaya devam edeceği tahmin edilmektedir. Hastaların yalnızca prostat kanserinden ölebileceğinin varsayıldığı durumda yedi yıl içerisinde %37'sinin kanserden ölmeyeceği ve %63'ünün kanserden öleceği tahmin edilmektedir.

4. Sonuç ve öneriler

Görelî yaşam çözümlemesi, hastaların ölüm nedenlerinin mevcut olup olmamasından bağımsız olarak, ölüm nedenlerine özgü yaşam çözümlemesi yapılması için kullanılmaktadır. Akciğer kanseri gibi ciddi kanser türleri incelenirken çoğu hasta tanı anından itibaren birkaç yıl içinde ölür ve ölüm nedeni büyük olasılıkla kanserdir. Ancak ölüm oranı yüksek olmayan kanser hastalıklarında, veri kümesindeki tüm hastalar için ölüm nedeni bilgisi mevcut olmayabilir. İlgilenilen kanserin etkisi bilinmek istendiğinde, ölüm nedenine özgü yaşam olasılığını incelemek yerine, görelî yaşam olasılığını incelemek tercih edilmektedir. Ayrıca görelî yaşam çözümlemesi yöntemlerinin geleneksel yöntemlere göre en önemli avantajlarından biri, belli düzenlemeler ve doğru bir kullanım ile aynı hastalığın uluslararası kayıtları arasında karşılaştırma yapılmasını kolaylaştırmasıdır.

Bu çalışmada, görelî yaşam olasılıklarının elde edilmesi için kullanılan Ederer I, Ederer II, Hakulinen ve Pohar Perme yöntemleri incelenmiş ve bu yöntemler yarışan riskleri içeren prostat kanseri veri kümesine uygulanmıştır. Literatürde, görelî yaşam olasılıklarını elde etmek için kullanılan yöntemlerden Ederer II yönteminin kullanılması Hakulinen, Seppä ve Lambert [8] tarafından önerilirken; net yaşam olasılığı için de Pohar Perme yönteminin kullanılması Orrason ve ark. [46] tarafından önerilmiştir. Ayrıca, takip süresinin on yıl ve üzerinde olduğu durumlarda yöntemler arasında belirgin farklılıklar olduğu ortaya koyulmuştur [47]. Ancak, bu çalışmada kullanılan prostat kanseri veri kümesi için takip süresi on yılın altında olduğu için yöntemler arasında önemli farklılıklar bulunmamıştır.

Yaşam tabloları yaş ve cinsiyet değişkenleri dikkate alınarak ve yaşam olasılıkları kullanılarak oluşturulmaktadır. Bu çalışmada prostat kanseri teşhisi konulmuş erkek hastalar yer aldığından cinsiyet değişkeninin etkisi incelenememiştir. Yaş değişkeni, kanser araştırmalarında ciddi bir öneme sahip olduğundan ve çoğu kanser türü için yaşam olasılığı, yaş arttıkça azaldığından kitleler arası yaşam olasılıklarını karşılaştırmak için yaş dağılımındaki farklılıkları düzenlemek önemlidir. Bu düzenlemeyi yapabilmek için yaş standartlaştırma yöntemleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada da yaş standartlaştırması yapılmış ve görelî yaşam olasılığı 44-59 yaş aralığındaki hastalar için %44, 60-74 yaş aralığındaki hastalar için %48, 75 yaş ve üzeri hastalar için %36 olarak elde edilmiştir. Yaş standartlaştırması sonucunda yaşam olasılıklarında belirgin bir değişiklik gözlenmemiştir.

Prostat kanseri erkeklerde en sık görülen ikinci kanser türüdür [48]. Fairley ve ark.[49], İngiltere ve Galler’de prostat kanserine bağlı beş yıllık görelî yaşam olasılığının 1986-1990 yılları arasında teşhis konulan hastalar için %48 iken 1996-1999 yılları arasında teşhis konulan hastalar için %68 olduğunu belirtmişlerdir.

Ulusal Kanser Enstitüsü tarafından yayınlanan monografide, 40-49 yaş aralığında prostat kanseri teşhisi konulmuş hastaların, beş yıl için görelî yaşam olasılıklarının diğêr yaş gruplarına kıyasla en düşük değerde olduğu görülmüştür [50]. Yayınlanan çalışmada, genç erkeklerde prostat kanserinin biyolojik olarak daha agresif olup olmadığını veya sosyal/davranışsal fenomenlerin daha düşük yaşam olasılıklarını açıklayıp açıklamadığını verilerden belirlemek zor olabilir. Ancak prostat kanseri teşhisi konulan genç erkeklerin psikolojik olarak tanılarına uyum sağlamakta zorlandığı ve bu durumun hastaların tedavi seçimlerini etkilediğı öngörülebilir. Bu gibi durumların sonucunda tedaviye başlama süresinin gecikmesi veya tedaviden kaçma gibi durumlarla karşılaşılabilir ve bunun bir sonucu olarak genç erkeklerde prostat kanseri daha şiddetli ve ileri düzeyde görülebilir [51]. Bu durum, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

Çizelge 3.13. Yaşı 44'ten büyük olan hastalar için tahmin edilen kaba ölüm olasılıkları

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>cp</i>	<i>F</i>	<i>cr_e2</i>	<i>ci_dc</i>	<i>lo_ci_dc</i>	<i>hi_ci_dc</i>	<i>ci_do</i>	<i>lo_ci_do</i>	<i>hi_ci_do</i>
0	1	485	94	0.8062	0.1938	0.8521	0.1439	0.1100	0.1821	0.0499	0.0489	0.0509
1	2	391	73	0.6557	0.3443	0.7337	0.2529	0.2092	0.2987	0.0915	0.0885	0.0944
2	3	318	74	0.5031	0.4969	0.5978	0.3707	0.3221	0.4193	0.1262	0.1211	0.1313
3	4	244	49	0.4021	0.5979	0.5089	0.4432	0.3930	0.4922	0.1547	0.1474	0.1621
4	5	195	34	0.3195	0.6805	0.4325	0.5017	0.4502	0.5508	0.1789	0.1693	0.1886
5	6	102	13	0.2579	0.7421	0.3750	0.5427	0.4863	0.5956	0.1994	0.1876	0.2115
6	7	20	1	0.2334	0.7666	0.3668	0.5481	0.4734	0.6166	0.2186	0.2041	0.2334

Çizelge 3.14. Yaşı 59'dan büyük olan hastalar için tahmin edilen kaba ölüm olasılıkları

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>cp</i>	<i>F</i>	<i>cr_e2</i>	<i>ci_dc</i>	<i>lo_ci_dc</i>	<i>hi_ci_dc</i>	<i>ci_do</i>	<i>lo_ci_do</i>	<i>hi_ci_do</i>
0	1	442	90	0.7964	0.2036	0.8453	0.1502	0.1140	0.1911	0.0534	0.0523	0.0546
1	2	352	67	0.6448	0.3552	0.7281	0.2573	0.2111	0.3059	0.0979	0.0945	0.1013
2	3	285	66	0.4955	0.5045	0.5973	0.3695	0.3181	0.4208	0.1350	0.1292	0.1410
3	4	219	44	0.3959	0.6041	0.5113	0.4385	0.3853	0.4903	0.1656	0.1573	0.1742
4	5	175	32	0.3106	0.6894	0.4316	0.4980	0.4436	0.5499	0.1914	0.1805	0.2025
5	6	90	11	0.2527	0.7473	0.3798	0.5339	0.4742	0.5898	0.2134	0.1999	0.2273
6	7	17	1	0.2246	0.7754	0.3690	0.5408	0.4591	0.6154	0.2346	0.2179	0.2517

Çizelge 3.15. Yaşı 75'ten büyük olan hastalar için tahmin edilen kaba ölüm olasılıkları

başlangıç	bitiş	<i>n</i>	<i>d</i>	<i>cp</i>	<i>F</i>	<i>cr_e2</i>	<i>ci_dc</i>	<i>lo_ci_dc</i>	<i>hi_ci_dc</i>	<i>ci_do</i>	<i>lo_ci_do</i>	<i>hi_ci_do</i>
0	1	171	41	0.7602	0.2398	0.8248	0.1683	0.1080	0.2402	0.0714	0.0687	0.0742
1	2	130	29	0.5906	0.4094	0.6977	0.2807	0.2034	0.3630	0.1286	0.1209	0.1367
2	3	101	33	0.3977	0.6023	0.5143	0.4293	0.3444	0.5113	0.1731	0.1600	0.1865
3	4	68	19	0.2865	0.7135	0.4083	0.5074	0.4220	0.5866	0.2060	0.1878	0.2248
4	5	49	9	0.2244	0.7756	0.3556	0.5426	0.4553	0.6218	0.2330	0.2096	0.2572
5	6	25	3	0.1836	0.8164	0.3256	0.5605	0.4655	0.6450	0.2559	0.2272	0.2856
6	7	5	0	0.1836	0.8164	0.3695	0.5372	0.4340	0.6296	0.2792	0.2440	0.3154

Çalışmada ele alınan ve farklı yaş grupları için hesaplanan kaba ölüm olasılıkları bu kapsamda kişisel tedaviyi araştırmak için daha uygun bir ölçü olabilmektedir [50]. Yalnızca prostat kanserine bağlı beş yıllık kaba ölüm olasılığı, 44 yaşından büyük hastalar için %50, 59 yaşından büyük hastalar için %50 ve 75 yaşından büyük hastalar için %54 olarak elde edilmiştir. Diğer nedenlere bağlı beş yıllık kaba ölüm olasılığı ise, 44 yaşından büyük hastalar için %18, 59 yaşından büyük hastalar için %19 ve 75 yaşından büyük hastalar için %23 olarak elde edilmiştir.

Kaynaklar

- [1] Akyol Cengiz, S., Görelî Yaşam Çözümlemesi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2022.
- [2] Erhardt, C.L., 1958, What is the Cause of Death, *The Journal of the American Medical Association*, 13-168:2, 161-168.
- [3] Spiegelman, M., Bellows, M.T., Erhardt, C.L., Keehn, R.J., Moriyama, I.M., Parkhurst, E. and Sellers, A.H., 1958, Problems in the Medical Certification of Causes of Death, *American Journal of Public Health and the Nations Health*, 48, 71-80.
- [4] Ederer, F., Axtell, L.M. and Cutler S.J., 1961, The Relative Survival Rate: A Statistical Methodology, *National Cancer Institute Monograph*, 6, 101-102.
- [5] Nelson, C.P., Lambert, P.C, Squire, I.B. and Jones, D.R., 2008, Relative Survival: What can Cardiovascular Disease Learn from Cancer?, *European Heart Journal*, 29:7, 941-947.
- [6] Ederer, F. and Heise, H., 1959, Instructions to IBM 650 Programmers in Processing Survival Computations, Methodological Note 10. End Results Evaluation Section, National Cancer Institute.
- [7] Hakulinen, T., 1977, On Long-term Relative Survival Rates, *Journal of Chronic Diseases*, 30:7, 431-443.
- [8] Hakulinen, T., 1982, Cancer Survival Corrected for Heterogeneity in Patient Withdrawal, *Biometrics*, 38:4, 933-42.
- [9] Hakulinen, T., Seppä, K. and Lambert, P.C., 2011, Choosing the Relative Survival Method for Cancer Survival Estimation, *European Journal of Cancer*, 47:14, 2202-2210.
- [10] Hakulinen, T. and Tenkanen, L., 1987, Regression Analysis of Relative Survival Rates, *Journal of the Royal Statistical Society Series C (Applied Statistics)*, 36:3, 309-317.
- [11] Esteve, J., Benhamou, E., Croasdale, M. and Raymond L.,1990, Relative Survival and the Estimation of Net Survival: Elements for Further Discussion, *Statistics in Medicine*, 9, 529-538.
- [12] Sasieni, P., 1996, Proportional Excess Hazards, *Biometrika*, 83:1, 127- 141.
- [13] Dickman, P.W., Sloggett, A., Hills, M. and Hakulinen, T., 2004, Regression Models for Relative Survival, *Statistics in Medicine*, 23, 51-64.

- [14] Nelson, C., Lambert, P.C., Squire, I.B., and Jones, D.R., 2007, Flexible Parametric Models for Relative Survival with Application in Coronary Heart Disease, *Statistics in Medicine*, 26:30, 5486–5498.
- [15] Perme, M.P., Henderson, R. and Stare, J., 2009, An Approach to Estimation in Relative Survival Regression, *Biostatistics*, 10:1, 136–146
- [16] Zahl, P.H. and Aalen, O.O., 1998, Adjusting and Comparing Survival Curves by Means of an Additive Risk Model, *Lifetime Data Analysis*, 4:2, 149–168.
- [17] Aalen, O.O., Borgan, O. and Gjessing, H.K., 2008, *Survival and Event History Analysis*, Springer, New York.
- [18] Cortese, G. and Scheike, T.H., 2008, Dynamic Regression Hazards Models for Relative Survival, *Statistics in Medicine*, 27:18, 3563–3548.
- [19] Perme, M.P., Stare J. and Esteve J., 2012, On Estimation in Relative Survival, *Biometrics*, 68, 113-120.
- [20] Pohar M., and Stare, J., 2006, Relative Survival Analysis in R, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 81, 272–278.
- [21] Giorgi, R., Payan, J. and Gouvernet, J., 2005, RSURV: A Function to Perform Relative Survival Analysis with S-PLUS or R, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 78:2, 175-178.
- [22] Dickman, P.W. and Coviello, E., 2015, Estimating and Modeling Relative Survival, *The Stata Journal*, 15:1, 186–215.
- [23] Sasieni, P. and Brentnall, A.R., 2017, On Standardized Relative Survival, *Biometrics*, 73:2, 473-482.
- [24] Hakulinen, T. and Dyba, T.A., 2007, Chapter 3 - Recent Developments in Relative Survival Analysis, Outcome Azzam F.G. Taktak, Anthony C. Fisher (Eds), *Outcome Prediction in Cancer*, Elsevier, 43-64.
- [25] Percy, C., Stanek, E 3rd. and Gloeckler, L., 1981, Accuracy of Cancer Death Certificates and Its Effect on Cancer Mortality Statistics, *American Journal of Public Health*, 71:3, 242-250.
- [26] Berkson, J. and Gage, R.P., 1950, Calculation of Survival Rates for Cancer, *Proceedings of the Staff Meetings of the Mayo Clinic*, 24-25:11, 270-286.
- [27] Sandin, F., 2008, *Analyzing and Modeling the Relative Survival Rate of Patients Diagnosed with Malignant Melanoma*, Master Thesis, Uppsala University, Sweden.
- [28] Klein, J.P. and Moeschberger, M.L., 2003, *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data* Second Edition, Springer, New York.
- [29] Pokhrel, A. and Hakulinen, T., 2008, How to Interpret the Relative Survival Ratios of Cancer Patients. *European Journal of Cancer*, 44, 2661–2667.
- [30] Hakama, M. and Hakulinen, T., 1977, Estimating the Expectation of Life in Cancer Survival Studies with Incomplete Follow-up Information, *Journal of Chronic Diseases*, 30:9, 585-597.
- [31] Seppä, K., Hakulinen, T. and Pokhrel, A., 2015, Choosing the Net Survival Method for Cancer Survival Estimation, *European Journal of Cancer*, 51:9, 1123-1129.

- [32] Pokhrel, A., 2007, Age Standardization of Relative Survival Ratios for Cancer Patients, Doctoral Thesis, Acta Universitatis Tamperensis 1278, Tampere.
- [33] Dickman, P.W., Hakulinen, T., Luostarinen, T., Pukkala, E., Sankila, R., Söderman, B. and Teppo, L., 1999, Survival of Cancer Patients in Finland 1955-1994, *Acta Oncologica*, 38:12, 1-103.
- [34] Bailar, J.C. III, 1964, Survival of Patients with Cancer of the Uterine Cervix and Corpus, Cutler S. (Ed.), National Cancer Institute, Bethesda MD.
- [35] Black, R.J. and Bashir, S.A., 1998, World Standard Cancer Patient Populations: A Resource for Comparative Analysis of Survival Data, IARC Scientific Publications, 145, 9-11.
- [36] Corazziari, I., Quinn, M. and Capocaccia, R., 2004, Standard Cancer Patient Population for Age Standardising Survival Ratios, *European Journal of Cancer*, 40:15, 2307-2316.
- [37] Brenner, H. and Hakulinen, T., 2003, On Crude and Age-adjusted Relative Survival Rates, *Journal of Clinical Epidemiology*, 56:12, 1185-1191.
- [38] Brenner, H., Arndt, V., Gefeller, O. and Hakulinen, T., 2004, An Alternative Approach to Age Adjustment of Cancer Survival Rates, *European Journal of Cancer*, 40:15, 2317-2322.
- [39] Dickman, P., Kişisel Web Sayfası, <https://www.pauldickman.com/>, Son Erişim Tarihi: 26.04.2022.
- [40] Brenner, H. and Hakulinen, T., 2005, Age Adjustment of Cancer Survival Rates: Methods, Point Estimates and Standard Errors, *British Journal of Cancer*, 93, 372-375.
- [41] The Human Mortality Database, <https://www.mortality.org/>, Son Erişim Tarihi: **12.05.2022**.
- [42] Byar, D.P. and Green, S.B., 1980, The Choice of Treatment for Cancer Patients Based on Covariate Information, *Bulletin du Cancer*, 67:4, 477-90.
- [43] Vanderbilt Biostatistics Datasets, <https://hbiostat.org/data/>, Son Erişim Tarihi: **26.04.2022**.
- [44] Stata/BE 6-month for students, <https://www.stata.com/order/>, Sürüm Başlangıç Tarihi: **28.12.2021**.
- [45] Cronin, K.A. and Feuer, E.J., 2000, Cumulative Cause-specific Mortality for Cancer Patients in the Presence of Other Causes: A Crude Analogue of Relative Survival, *Statistics in Medicine*, 19:13, 1729-1740.
- [46] Orrason, A.W., Garmo, H., Styrke, J., Dickman, P.W. and Stattin, P., 2021, Comparison of Relative Survival and Cause-Specific Survival in Men with Prostate Cancer According to Age and Risk Category: A Nationwide, Population-Based Study, *American Journal of Epidemiology*, 190:10, 2053-2063.
- [47] Lambert, P.C., Dickman, P.W. and Rutherford, M.J., 2015, Comparison of Different Approaches to Estimating Age Standardized Net Survival, *BMC Medical Research Methodology*, 15:64, 1-13.
- [48] Bray, F., Ferlay, J., Soerjomataram, I., Siegel, R.L., Torre L.A. and Jemal, A., 2018, Global Cancer Statistics 2018: GLOBOCAN Estimates of Incidence and Mortality Worldwide for 36 Cancers in 185 Countries, *Cancer Journal for Clinicians*, 68:6, 394-424.

- [49] Fairley, L., Forman, D., West, R. and Manda, S., 2018, Spatial Variation in Prostate Cancer Survival in the Northern and Yorkshire Region of England Using Bayesian Relative Survival Smoothing, *British Journal of Cancer*, 99, 1786–1793.
- [50] Stanford, J.L., Stephenson, R.A., Coyle L.M., Cerhan, J., Correa, R., Eley, J.W., Gilliland, F., Hankey, B., Kolonel, L.N., Kosary, C., Ross, R., Severson, R. and West D., 1999, Prostate Cancer Trends 1973–1995. SEER Program, National Cancer Institute, Bethesda, MD: National Institutes of Health Publ. No. 99–4543.
- [51] Merrill, R.M. and Bird, J.S., 2002, Effect of Young Age on Prostate Cancer Survival: A Population-based Assessment (United States), *Cancer Causes and Control*, 13, 435–443.



İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 16, 2023, 1, 26-38

Geliş/Received:07.06.2023, Kabul/Accepted: 22.06.2023

Araştırma Makalesi / Research Article

Dabrowska tahmin yöntemiyle çoklu hayat ürünlerinin fiyatlandırılması

Tuğba Aktaş

Kırıkkale Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü

71452-Yahşihan, Kırıkkale, Türkiye

tugbaaktas@kku.edu.tr

0000-0002-2050-8763

Emel Kızılok Kara

Kırıkkale Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü

71452-Yahşihan, Kırıkkale, Türkiye

emel.kizilok@kku.edu.tr

0000-0001-7580-5709

Meral Sucu

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü

06800-Çankaya, Ankara, Türkiye

msucu@hacettepe.edu.tr

0000-0002-7991-1792

Öz

Bu çalışmada Kaplan-Meier yöntemi kullanılarak, çoklu hayat ürünlerine ilişkin fiyatlandırma yapılmıştır. Bu amaçla, Kanada sigorta verilerinden yararlanılarak ortak yaşamların ölümlülük yapısı incelenmiştir. Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında, annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri ile bireylerin bağımlılık durumuna göre net yıllık prim tutarları elde edilmiştir. Sonuç olarak, bağımlılığın sigorta ürünleri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bağımlılık, Çoklu hayat ürünleri, Dabrowska tahmini, Kaplan-Meier yöntemi, Prim.

Abstract

Pricing of multiple life products by Dabrowska estimation method

In this study, pricing of multiple life products is performed using the Kaplan-Meier method. For this purpose, the mortality structure of joint lives is analysed using Canadian insurance data. Under the assumption that individuals' future life times are dependent and independent, net single premiums of annuities and insurance products and net annual premiums according to the dependency status of individuals are obtained. As a result, the effect of dependency on insurance products is shown.

Keywords: Dependency, Multiple life products, Dabrowska estimation, Kaplan-Meier method, Premium.

*Bu çalışma, birinci yazarın ikinci ve üçüncü yazarların danışmanlıklarında hazırladığı yüksek lisans tezinden üretilmiştir ve 9-10 Mart 2023 tarihleri arasında Konya'da düzenlenen 2. Uluslararası Atlas Uygulamalı Bilimler Kongresi'nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

1. Giriş

Hayat ürünleri, bir bireyin ne kadar süre hayatta kalacağıyla ilgili finansal belirsizliği yönetmek için tasarlanmış ürünlerdir [1]. Bireyin yaşama koşuluna bağlı olarak düzenlenen hayat ürünleri, sigorta sektöründe oldukça önemli bir yere sahiptir. İlk örneklerine 18. yüzyılda rastlanan bu ürünler, zamanla aktüerya bilimlerinin çalışma alanlarından biri haline gelmiştir. Hayat ürünlerine ilişkin yapılan ilk çalışmalarda, yalnızca bir kişinin yaşama durumu ele alınmıştır. İlerleyen zamanlarda ise birden fazla yaşamı dikkate alan çoklu hayat ürünleri geliştirilmiştir. Poliçedeki kişi sayısının artması, ürünlere ilişkin yapılan hesaplamaların değişmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla, tekli hayat ürünlerinden çoklu hayat ürünlerine doğru yapılan bu geçiş, aktüeryal yapının uygun bir şekilde genişletilmesini gerektirmektedir.

Birden fazla bireyin sigortalandığı hayat ürünlerinde, bireylerden birinin vefat etmesi halinde geride kalan bireyin gelecek yaşam süresinin bu durumdan ne ölçüde etkilendiğini belirlemek, sigorta şirketi açısından büyük önem taşımaktadır. Çoklu hayat ürünlerinin fiyatlandırılmasında en önemli unsur bireyler arasındaki bağımlılık yapısıdır. Bu noktada, sigortalılar arasındaki bağımlılığın hesaplamalara dahil edilmesi gerekmektedir. Çoklu yaşam durumunda bireyler arasındaki bağımlılığı ayrıntılı bir şekilde inceleyen ilk çalışma Bowers vd. [2] tarafından sunulmuştur.

Literatürde, parametrik ve parametrik olmayan yaklaşımlar aracılığıyla bağımlılık modellenmesinin yapıldığı çalışmalar mevcuttur. Ancak uygulamada genellikle bireylerin gelecek yaşam süreleri birbirinden bağımsız kabul edilmektedir. Bu varsayım, birleşik yaşam olasılığının tek bir yaşam olasılığına indirgenmesi yoluyla fiyatlandırma hesaplamalarında kolaylık sağlasa da gerçeği yansıtmamaktadır [3]. Norberg [4], bağımlılığın ölümlülük modeline dahil edildiği takdirde çoklu yaşam durumunda oluşturulan sigorta ve annüite ürünlerinin net tek primlerinde değişim olduğunu göstermiştir.

Aktüeryal çalışmalarda bağımlılık modellenirken sıklıkla parametrik yaklaşımlar tercih edilmektedir. Bağımlı ölümlük modellerinin gelişim sürecine öncülük eden kavramların başında “kırık kalp sendromu” gelmektedir. Kırık kalp sendromu, eşlerden birinin ölmesi durumunda geride kalan bireyin ölümlülük oranında geçici bir artışa neden olan kısa süreli bağımlılığın en yaygın şeklidir [5]. İlk olarak, Parkes vd. [6] ve Ward [7] tarafından literatüre kazandırılan bu kavram daha sonları Jagger ve Sutton’un [8] çalışmalarıyla desteklenmiştir. Bunun yanı sıra Hougaard’ın [9], Danimarkalı ikizler üzerine yapmış olduğu çalışmada, ikizlerden birinin ölmesi halinde diğerinin uzun ömürlülük açısından nasıl etkileneceğini araştırılmıştır. Gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılık söz konusu olan bireylerin ölümlüğünü modellemede en popüler parametrik yöntemlerden bir diğeri ise “Kopula” yaklaşımlarıdır. Frees vd. [11], Sklar [10] tarafından tanımlanan kopula fonksiyonu yardımıyla bağımlılığı modellemeye yönelik öncü bir çalışma sunmuşlardır. Kızılok Kara [12,13] kopula yaklaşımını benimsediği çalışmalarında, bağımlılığın aktüeryal primler üzerindeki etkisini incelemiştir. Bakar ve Büyükyazıcı [14], Frank kopula modeliyle çiftlerin bağımlılığını analiz etmiş, uzun ömürlülüğün ve stokastik getiri oranlarının net tek primler üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Erdemir ve Sucu [15] kopula fonksiyonları üzerinde düzenleme yaparak esnek bir bağımlılık modellenmesi elde etmişlerdir. Son zamanlarda, bireylerin gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın stokastik yaklaşımlar aracılığıyla da modellendiği görülmektedir [16, 17, 18].

Parametrik olmayan yöntemler ile prim tahmini üzerine yapılan çalışmalar parametrik yöntemlere kıyasla nispeten daha azdır. Ancak parametrik olmayan yaklaşımlar kullanılarak bireylerin ölümlülüklerine ilişkin önemli çıkarımlar yapılabilir. Buradan hareketle, yaşam analizlerinde Kaplan-Meier ve Dabrowska tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Luciano ve Vigna [19], Kaplan-Meier analiziyle İngiltere nüfusuna ait veriler üzerinde erkek bireylerin yaşama olasılıklarının zaman içindeki gelişimini araştırmışlardır. Zhang ve Brockett [16], Luciano vd. [20] çiftler arasındaki bağımlılığı Dabrowska tahminiyle analiz etmişlerdir.

Bu çalışmada, parametrik olmayan tahmin yöntemlerinden biri olan Kaplan-Meier yöntemi kullanılarak hayat ürünlerinin fiyatlandırılması ele alınmıştır. Çoklu yaşam durumunda bireylerin bağımlılık durumu, Dabrowska tahminiyle incelenmiştir. Uygulamada Kanada sigorta verilerinden yararlanılmıştır. Bireylerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında birleşik yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Ardından her iki durum için tekli ve çoklu yaşam durumunda oluşturulan hayat ürünlerinin net tek primleri elde edilmiştir. Çoklu hayat ürünlerinde hem birleşik yaşayan hem de son yaşayan durumu

dikkate alınmıştır. Son olarak, bireylerin bağımlılık durumuna göre hayat ürünlerinin net yıllık prim tutarları hesaplanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın İkinci Bölümü'nde bireylerin marjinal yaşam olasılıklarının hesaplanmasında kullanılan Kaplan-Meier yöntemi ile birleşik yaşam olasılıklarının hesaplanmasında kullanılan Dabrowska yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde, Kanada sigorta verileri¹ kullanılarak, birleşik ve son yaşayan durumunda elde edilen net tek prim ve net yıllık prim tutarları verilmiştir. Çalışmanın sonucunda elde edilen sonuç ve bulgulara ise Dördüncü Bölüm'de yer verilmiştir.

2. Yaşam fonksiyonunun tahmin edilmesi

2.1. Kaplan-Meier tahmini

Kaplan-Meier tahmini, yaşam analizinin yapıldığı birçok çalışmada uygulama alanı bulmaktadır. Çarpım-Limit tahmini olarak da bilinen bu yöntem 1958 yılında Edward L. Kaplan ve Paul Meier [21] tarafından geliştirilmiştir. Kaplan-Meier tahmini, yaşam verilerinden marjinal yaşam fonksiyonunun tahmin edilmesinde kullanılan parametrik olmayan bir yöntemdir [21]. Bilgisayar kullanımının yaygınlaşması sonucunda bu yöntem zamanla küçük, orta ve büyük örneklem için kullanılır hale gelmiştir [22].

Kaplan-Meier tahmini, analizi yapılan olayın zaman içindeki gelişimini ifade etmektedir. Araştırmaya konu olan olay, elektronik bir cihazın bozulması, şirketin iflas etmesi veya hayat sigortası poliçesi satın alan bir bireyin vefat etmesi olabilir. Bu yöntem, uygulanabilirlik yönünden basit olmakla beraber araştırmacıya oldukça etkili sonuçlar sağlamaktadır. Kaplan-Meier yönteminde, her gözlem zamanı için ilgilenilen olayın gerçekleşme olasılığı tahmin edilir. Analiz sonucunda elde edilen tahmini yaşam olasılıkları bir grafiğe döküldüğünde basamak fonksiyonu şeklinde gözükmektedir. Bunun sebebi, gözlem süresi boyunca olayın ortaya çıkma olasılığının değişmez kabul edilmesi ve ayrıca takip edilen zamanlarda olayın gerçekleşme olasılığının bir öncekinden bağımsız olarak değerlendirilmesidir. İnsan yaşamına ilişkin ölüm oranlarının gelişimi Kaplan-Meier yöntemiyle incelendiğinde, gözlemlenen süre içinde ölüm olasılığının değişmediği, ölüm zamanlarının birbirinden ayırık olduğu ve ardışık ölüm zamanlarında vefat durumunun olmadığı varsayılır.

Kaplan-Meier analizinin uygulanabilmesi için aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekmektedir;

1. Analizin yapılacağı zaman diliminin başlangıç ve bitiş tarihi bilinmelidir.
2. Deneklerin araştırmaya dahil olduğu tarih bilinmelidir.
3. Söz konusu olayın gerçekleşip gerçekleşmediği bilinmelidir. Olay gerçekleştiyse ortaya çıktığı tarih bilinmelidir.

$S(t)$ yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier tahmini aşağıdaki Çarpım-Limit formülüyle hesaplanmaktadır.

$$\hat{S}(t) = \prod_{i:t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right) \quad (1)$$

Burada n_i , t_i zamanına kadar yaşadığı bilinen kişi sayısını ve d_i , t_i zamanında gerçekleşen ölüm sayısını göstermektedir. Ayrıca, T bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken olmak üzere Kaplan-Meier formülü aşağıdaki gibi ifade edilir:

¹ Bu verilerin kullanılmasına imkan sağlayan Edward Fress ve Emiliano Valdez'in izniyle Aktüerler Derneği'ne teşekkür ederiz.

$$\hat{S}(t_i) = \prod \hat{P}(T > t_i | T \geq t) \quad (2)$$

$\hat{P}(T > t_i | T \geq t)$ ifadesi t yaşına kadar yaşadığı bilinen bir bireyin $t_i - t$ yıl kadar yaşaması olasılığına karşılık gelmektedir.

2.2. Dabrowska tahmini

İki değişkenli yaşam fonksiyonunun Kaplan-Meier analizi Dabrowska tahmini olarak bilinmektedir. 1988 yılında Dabrowska [23] tarafından tanıtılan parametrik olmayan bu yöntemde, birleşik yaşam fonksiyonunun tahmini Çarpım-İntegral gösterimi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Ω kesin olay, F olay uzayı ve P olasılık ölçümü olmak üzere (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlı ve negatif olmayan $T = (T_1, T_2)$ rastgele değişken çifti verilsin. İki değişkenli birleşik yaşam fonksiyonu ve vektör değerli kümülatif tehlike fonksiyonu sırasıyla;

$$S(s, t) = P(T_1 > s, T_2 > t)$$

$$\Lambda(s, t) = (\Lambda_{10}(s, t), \Lambda_{01}(s, t), \Lambda_{11}(s, t)) \quad (3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Eş. (3)'te;

$$\Lambda_{11}(ds, dt) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 \in dt)}{P(T_1 \geq s, T_2 \geq t)} = \frac{S(ds, dt)}{S(s^-, t^-)}$$

$$\Lambda_{10}(ds, t) = \frac{P(T_1 \in ds, T_2 > t)}{P(T_1 \geq s, T_2 > t)} = -\frac{S(ds, t)}{S(s^-, t^-)}$$

$$\Lambda_{01}(s, dt) = \frac{P(T_1 > s, T_2 \in dt)}{P(T_1 > s, T_2 \geq t)} = -\frac{S(s, dt)}{S(s^-, t^-)}$$

ve başlangıç koşulları,

$$\Lambda_{10}(0, t) = \Lambda_{01}(s, 0) = \Lambda_{11}(0, 0) = 0$$

biçimindedir.

$T_1 = s^-$ ve $T_2 = t^-$ olması durumunda iki başarısızlığın da gerçekleşmesi olasılığı Λ_{11} ile ifade edilirken birinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı Λ_{10} , ikinci başarısızlığın gerçekleşmesi olasılığı ise Λ_{01} ile gösterilmektedir.

Buradan hareketle, $S(s, t)$ birleşik yaşam fonksiyonun Çarpım-İntegral gösterimi kümülatif tehlike fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$S(s, t) = \prod_{u \leq s} (1 - \Lambda_{10}(du, 0)) \prod_{v \leq t} (1 - \Lambda_{01}(0, dv)) \times \prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} (1 - L(du, dv)) \quad (4)$$

Eş. (4)'te;

$$0 = u_0 < \dots < u_m = s, 0 = v_0 < \dots < v_n = t \text{ olmak üzere;}$$

$$L(du, dv) = \frac{\Lambda_{10}(du, v^-)\Lambda_{01}(u^-, dv) - \Lambda_{11}(du, dv)}{\{1 - \Lambda_{10}(\Delta u, v^-)\}\{1 - \Lambda_{01}(u^-, \Delta v)\}}$$

$$\prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} (1 - L(du, dv)) = \lim_{\substack{\max|u_i - u_{i-1}| \rightarrow 0 \\ \max|v_j - v_{j-1}| \rightarrow 0}} \prod_{i,j} (1 - L((u_{i-1}, u_i] \times (v_{j-1}, v_j]))$$

$$L((u_{i-1}, u_i] \times (v_{j-1}, v_j]) = L(u_i, v_j) - L(u_{i-1}, v_j) - L(u_i, v_{j-1}) + L(u_{i-1}, v_{j-1})$$

$$\prod_{u \leq s} (1 - \Lambda_{10}(du, 0)) = S(s, 0)$$

$$\prod_{v \leq t} (1 - \Lambda_{01}(0, dv)) = S(0, t)$$

biçimindedir.

Diğer taraftan;

$$1 - \Lambda_{10}(du, v^-) = P(T_1 > u | T_1 \geq u, T_2 \geq v) = \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)}$$

$$1 - \Lambda_{01}(u^-, dv) = P(T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v) = \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)}$$

$$\begin{aligned} 1 - \Lambda_{11}(du, dv) &= (1 - \Lambda_{10}(du, v^-)) + (1 - \Lambda_{01}(u^-, dv)) - P(T_1 > u, T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v) \\ &= \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)} + \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)} - \frac{S(u, v)}{S(u^-, v^-)} \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda;

$$1 - L(du, dv) = \frac{P(T_1 > u, T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v)}{P(T_1 > u | T_1 \geq u, T_2 \geq v)P(T_2 > v | T_1 \geq u, T_2 \geq v)} = \frac{S(u, v)S(u^-, v^-)}{S(u, v^-)S(u^-, v)} \tag{5}$$

şeklinde düzenlenebilir.

Sonuç olarak $S(s, t)$ birleşik yaşam fonksiyonunun formülü aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$S(s, t) = \prod_{u \leq s} \frac{S(u, v^-)}{S(u^-, v^-)} \prod_{v \leq t} \frac{S(u^-, v)}{S(u^-, v^-)} \times \prod_{\substack{u \leq s \\ v \leq t}} \frac{S(u, v)S(u^-, v^-)}{S(u, v^-)S(u^-, v)}$$

Eş. (5)'de, ilk iki çarpan marjinal yaşam olasılıklarını ifade ederken, son çarpan marjinal yaşam olasılıkları verildiğinde T_1 ve T_2 rastgele değişkenleri arasındaki bağımlılığı karakterize etmektedir.

Yapılan tanımlamalar doğrultusunda Dabrowska tahmin edicisi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\hat{S}(s, t) = \hat{S}(s, 0)\hat{S}(0, t) \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v)) \tag{6}$$

Eş. (6)'da;

$$\hat{S}(s, 0) = \prod_{u \leq s} (1 - \hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, 0))$$

$$\hat{S}(0, t) = \prod_{v \leq t} (1 - \hat{\Lambda}_{01}(0, \Delta v))$$

$$\hat{L}(\Delta u, \Delta v) = \frac{\hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-) \hat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v) - \hat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)}{\{1 - \hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)\} \{1 - \hat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)\}} \quad (7)$$

biçimindedir.

$\hat{S}(s, 0)$ ve $\hat{S}(0, t)$ tek değişkenli Kaplan-Meier tahminine karşılık gelmektedir. Ayrıca, $\Delta u = u - u^-$ olmak üzere u ile u^- zamanları arasında geçen süreyi göstermektedir. Dabrowska tahmininde başarısızlık, ölüm olayının gerçekleşmesi olarak düşünülebilir. Bu durumda, birinci bireyin u^- , ikinci bireyin ise v^- zamanına kadar yaşadığı bilindiğinde $\hat{\Lambda}_{11}(\Delta u, \Delta v)$ ifadesi iki bireyin (u, v) anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu iken $\hat{\Lambda}_{10}(\Delta u, v^-)$ ve $\hat{\Lambda}_{01}(u^-, \Delta v)$ ifadeleri sırasıyla birinci bireyin u anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonu ve ikinci bireyin v anında ölmesinin tahmini kümülatif tehlike fonksiyonudur.

3. Uygulama: Çoklu hayat ürünlerinin Dabrowska yöntemiyle fiyatlandırılması

Çalışmada yaşam analizi, literatürde sıklıkla tercih edilen ve ortak yaşamlara ilişkin büyük bir veri seti olan Kanada sigorta verileri üzerinden gerçekleştirilmiştir. Veri seti, 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasında düzenlenen ve evli çiftlerin satın aldığı 14947 adet birleşik ve son yaşayan annüite sözleşmesinden oluşmaktadır. Her annüite sözleşmesinin başlangıç tarihi bilinmektedir. Sözleşmeler, her iki sigortalının doğum tarihini ve gözlem süresi içinde çiftlerden herhangi birinin ölmesi durumunda ölüm tarihini içermektedir. Sonuç olarak, Kaplan-Meier tahmininin yapılabilmesi için gerekli olan varsayımlar bu veri seti için sağlanmaktadır.

Uygulama yapılmadan önce veri setinde bazı kısıtlamalara gidilmiştir. Analizde, 1908 ile 1923 yılları arasında doğan ve yaş farkları beşten büyük olmayan çiftler dikkate alınmıştır. Böylece farklı yaş gruplarındaki ölüm trendlerinin zaman içindeki gelişimi incelenmiştir. Veri setindeki çift sayısının sınırlı olması nedeniyle kohort etkisi analize dahil edilmemiştir. Son olarak aynı cinsiyetli evliliklerin çıkarılmasıyla gözlem sayısı 5905 çifte indirgenmiştir. Hesaplamalar bu örneklem üzerinden gerçekleştirilmiştir. Veri setine ilişkin özet istatistikler Çizelge 1 ve Çizelge 2’de sunulmuştur.

Çizelge 1. Kişi sayıları

	Erkek	Kadın
Ölen kişi sayısı	913	371
Yaşayan kişi sayısı	6562	6045
Toplam kişi sayısı	7475	6416

Veri setinde, 1908-1923 yılları arasında doğan 7475 erkek ve 6416 kadın bulunmaktadır. 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasında, yani gözlemlenen beş yıl içerisinde 913 erkek ve 371 kadın vefat etmiştir. Çizelge 2’de yaşam analizinin yapıldığı çiftlerin sayıları özetlenmiştir. Çiftler arasında yaş farkı belirlenirken gün hesabı dikkate alınmıştır. Sonuç olarak, toplam 5905 çift elde edilmiştir.

Çizelge 2. Toplam çift sayısı

		Doğum Yılı (Kadın)															
		1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Doğum Yılı (Erkek)	1908	6	7	3	4	5	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1909	5	8	19	2	9	11	8	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	1910	1	8	13	11	14	9	20	15	8	0	0	0	0	0	0	0
	1911	3	7	12	19	25	20	26	24	14	11	0	0	0	0	0	0
	1912	7	3	4	16	18	34	26	40	23	23	10	0	0	0	0	0
	1913	10	4	10	12	23	27	36	56	37	56	26	13	0	0	0	0
	1914	4	7	1	15	6	23	45	48	52	51	59	56	22	0	0	0
	1915	0	2	1	6	19	19	40	66	84	60	64	67	74	26	0	0
	1916	0	0	0	2	14	10	44	47	71	51	76	74	68	56	42	0
	1917	0	0	0	0	0	14	15	25	44	72	76	86	83	76	47	30
	1918	0	0	0	0	0	1	10	16	39	57	68	77	112	104	71	61
	1919	0	0	0	0	0	0	5	18	28	31	36	64	84	116	76	95
	1920	0	0	0	0	0	0	0	6	17	29	51	85	118	136	105	96
	1921	0	0	0	0	0	0	0	0	10	15	26	35	83	114	128	89
	1922	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	15	28	55	78	110	129
	1923	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	14	34	50	49	98

Marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıklarının hesaplanabilmesi için analizin yapıldığı zaman aralığında gerçekleşen ölüm sayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Çalışmada, çiftlerin doğum yılları 1908-1923 yılları arasındaki 16 yıllık bir dönemi kapsamaktadır. Gözlem süresi de beş yıl olduğundan 21 yıllık periyot için ölüm sayıları belirlenmiştir. 1923 yılında doğmuş bir sigortalı 1988 yılında yani gözlem başlangıç tarihinde 65 yaşındadır. Dolayısıyla her iki cinsiyet için de minimum yaş 65 olup maksimum yaş 85'tir. Erkek birey "E", kadın birey "K" olmak üzere, veri setinden elde edilen ölüm sayıları Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 3. Ölen kişi sayıları

Yaş	d^E	d^K	Yaş	d^E	d^K	Yaş	d^E	d^K
65	5	2	72	54	49	79	42	20
66	13	5	73	84	26	80	43	15
67	15	8	74	71	20	81	34	15
68	56	18	75	86	34	82	24	10
69	44	19	76	77	19	83	17	4
70	57	32	77	60	17	84	4	3
71	75	34	78	51	21	85	1	0

Veriden çıkarılan ölüm istatistikleri Eş. (1)'de yerine yazılarak, erkek ve kadın bireylere ilişkin marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Elde edilen yaşam olasılıkları Çizelge 4'te verilmiştir;

Çizelge 4. Marjinal Kaplan-Meier yaşam olasılıkları

t	${}_t p_{65}^E$	${}_t p_{65}^K$	t	${}_t p_{65}^E$	${}_t p_{65}^K$	t	${}_t p_{65}^E$	${}_t p_{65}^K$
0	0,99933	0,99969	7	0,95732	0,97397	14	0,89431	0,94950
1	0,99759	0,99891	8	0,94609	0,96992	15	0,88856	0,94716
2	0,99559	0,99766	9	0,93659	0,96680	16	0,88401	0,94483
3	0,98809	0,99486	10	0,92508	0,96150	17	0,88080	0,94327
4	0,98221	0,99190	11	0,91478	0,95854	18	0,87853	0,94264
5	0,97458	0,98691	12	0,90676	0,95589	19	0,87799	0,94218
6	0,96455	0,98161	13	0,89993	0,95262	20	0,87786	0,94218

Erkek bireylerin marjinal yaşam olasılıklarında kadın bireylere kıyasla daha hızlı bir azalış olduğu görülmektedir. 65 yaşında olduğu bilinen erkek bireyin bir yıl yaşaması olasılığı 0,99759 iken aynı yaştaki kadın için bu oran 0,99891 olarak hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra, kadın bireylerin yaşama olasılıklarının erkek bireylere göre daha yüksek olduğu net bir şekilde görülmektedir.

Çiftler üzerinden yapılan yaşam analizinde, hem erkek hem de kadın bireylerin gözlemlenmeye başlandığı tarihte minimum yaşı 65 olduğundan yaşam olasılıkları koşullu olarak tahmin edilmiştir. T^K kadın bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken, T^E erkek bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişken olsun. Bu durumda analizde kullanılacak koşullu birleşik yaşam fonksiyonunun Dabrowska tahmini aşağıdaki biçimde ifade edilebilir;

$$\hat{P}(T^E > s, T^K > t | T^E \geq 65, T^K \geq 65) = \hat{P}(T^E > s | T^E \geq 65) \hat{P}(T^K > t | T^K \geq 65) \times \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)) \quad (8)$$

Eş. (8)'deki son çarpan aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65) = \prod_{\substack{0 < u \leq s \\ 0 < v \leq t}} (1 - \hat{L}(\Delta u, \Delta v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)) \quad (9)$$

Burada, $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanının bire eşit olması erkek ve kadın bireylerin gelecek yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğu anlamına gelmektedir. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin arasında bağımlılık söz konusu ise bu çarpan birden büyük değerler almaktadır. Çizelge 5'te Eş. (8) yardımıyla analiz sonucunda ulaşılan $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanına ilişkin değerler verilmiştir;

Çizelge 5. $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanı

		Kadın					
$s \setminus t$		0	1	2	3	4	≥ 5
Erkek	0	1	1	1	1	1	1
	1	1	1,00152	1,00186	1,00271	1,00340	1,00375
	2	1	1,00186	1,00511	1,00699	1,00768	1,00925
	3	1	1,00255	1,00598	1,01027	1,01149	1,01311
	4	1	1,00273	1,00617	1,01047	1,01393	1,01609
	≥ 5	1	1,00308	1,00654	1,01103	1,01502	1,02078

Hesaplamalar, kullanılan veri setine bağlı olarak ampirik bir şekilde yapılmıştır. Söz konusu veri setinde 29 Aralık 1988 ile 31 Aralık 1993 tarihleri arasındaki beş yıllık süre içinde meydana gelen ölüm bilgileri yer aldığından, olası 25 durum için analiz gerçekleştirilmiştir. Veri setinin sağdan sansürlü olması nedeniyle, gözlem süresi bittikten sonra takip edilen yıllar için beşinci yıldaki ölümlülük oranları kabul edilmiştir. Birleşik yaşam olasılıkları bu varsayım doğrultusunda hesaplanmıştır. Çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan ölüm olasılıkları ile veriden elde edilen gerçekleşen ölüm sayılarının dikkate alınarak hesaplandığı birleşik ölüm olasılıkları eşleştirilmiştir. Bu hesaplama sonucunda ortaya çıkan negatif fark, çiftler arasında pozitif yönde bir ilişkinin olduğunu göstermektedir [19]. Yapılan hesaplamaların sonucunda her gözlem aralığına karşılık gelen $H(u, v | T^E \geq 65, T^K \geq 65)$ çarpanının birden büyük bir değer aldığı görülmüştür. Bu durum, çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin birbiriyle bağımlı olduğu anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, Çizelge 5'e bakıldığında zaman ilerledikçe satır ve sütunlardaki çarpan değerlerinin yani çiftler arasındaki bağımlılık düzeyinin de arttığı görülmektedir.

Buradan hareketle, Eş. (8) kullanılarak çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında, birleşik ve son yaşayan durumları için yaşam olasılıkları elde edilmiştir. Hesaplamalar sonucunda ulaşılan olasılık değerleri Çizelge 6’da verilmiştir.

Çizelge 6. Birleşik ve son yaşayan durumunda yaşam olasılıkları

Birleşik Yaşam Durumu					Son Yaşayan Durumu						
Bağımsız		Bağımlı	Bağımsız		Bağımlı	Bağımsız		Bağımlı	Bağımsız		Bağımlı
t	$tP_{65:65}^{E,K}$	$tP_{65:65}^{E,K}$	t	$tP_{65:65}^{E,K}$	$tP_{65:65}^{E,K}$	t	$tP_{65:65}^{E,K}$	$tP_{65:65}^{E,K}$	t	$tP_{65:65}^{E,K}$	$tP_{65:65}^{E,K}$
1	0,99650358	0,99801826	11	0,87685677	0,89507785	1	0,99999737	0,99848269	11	0,99646698	0,97824590
2	0,99325770	0,99833325	12	0,86676023	0,88477151	2	0,99998968	0,99491413	12	0,99588714	0,97787586
3	0,98301149	0,99310702	13	0,85729289	0,87510743	3	0,99993876	0,98984323	13	0,99525868	0,97744413
4	0,97424682	0,98781808	14	0,84915262	0,86679801	4	0,99985580	0,98628454	14	0,99466301	0,97701762
5	0,96182245	0,98180912	15	0,84161323	0,85910196	5	0,99966722	0,97968055	15	0,99411198	0,97662326
6	0,94680898	0,96648367	16	0,83523833	0,85259458	6	0,99934799	0,97967330	16	0,99360049	0,97624424
7	0,93240653	0,95178193	17	0,83083195	0,84809664	7	0,99888921	0,97951380	17	0,99323756	0,97597287
8	0,91762767	0,93669597	18	0,82813902	0,84534775	8	0,99837824	0,97930994	18	0,99303280	0,97582407
9	0,90549552	0,92431172	19	0,82722406	0,84441378	9	0,99789485	0,97907866	19	0,99294506	0,97575535
10	0,88947020	0,90795339	20	0,82709802	0,84428511	10	0,99711591	0,97863272	20	0,99293733	0,97575023

Çizelge 6’dan görüldüğü üzere, bireylerin gelecek yaşam süreleri bağımlı varsayıldığında birlikte yaşamaları olasılığı, bağımsız duruma kıyasla daha yüksektir. Son yaşayan durumunda ise tam tersi söz konusudur. Yani, bağımlı durumda elde edilen yaşam olasılıkları, bağımsız duruma göre daha düşüktür. Sonuç olarak, bireyler arasındaki bağımlılık yapısının değerlendirilmesi birlikte geçirecekleri zamanın uzunluğunu etkilemektedir.

Elde edilen yaşam olasılıklarına bağlı olarak, kesikli hayat ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Hesaplamalarda yıllık efektif faiz oranı (i) %3 olarak alınmıştır. Öncelikle tekli yaşam durumunda annüite ve sigorta ürünlerinin net tek primleri elde edilmiş ve sonuçlar Çizelge 7’de verilmiştir. Buradaki aktüeryal hesaplamalarda kullanılan formüller ayrıntılı olarak Gerber’de [24] yer almaktadır.

Çizelge 7. Tekli yaşam durumunda net tek primler

Vade (n)	$\ddot{a}_{65:n}^E$	$\ddot{a}_{65:n}^K$	$A_{65^1:n}^E$	$A_{65^1:n}^K$	${}_nE_{65}^E$	${}_nE_{65}^K$
5	4,68322579	4,70161585	0,02289294	0,01173538	0,84068294	0,85131528
10	8,57476224	8,67357660	0,06188107	0,03191432	0,68834909	0,71544815
15	11,76400788	12,02835735	0,08700546	0,04170231	0,57033405	0,60794811
20	14,92092967	15,40845463	0,09349758	0,04473506	0,48604954	0,52165990

Erkek bireyler için düzenlenen hayat annüitelerinin net tek primleri kadın bireylere kıyasla daha düşük iken, sigorta ürünlerinin net tek primleri daha yüksektir. Bunun sebebi, erkek bireylerin yaşama olasılıklarının daha düşük olmasıdır. Ardından, tekli yaşam durumunda oluşturulan dönemsel ve karma hayat sigortasına ilişkin net yıllık prim tutarları hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 8’de verilmiştir.

Çizelge 8. Tekli yaşam durumunda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası (${}_mP_{65^1:n}^E$)					Karma Hayat Sigortası (${}_mP_{65:n}^E$)				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,004888	0,013213	0,018578	0,019964	5	0,184398	0,160195	0,140360	0,123750
10	0,002670	0,007217	0,010147	0,010904	10	0,100711	0,087493	0,076660	0,067588
15	0,001946	0,00526	0,007396	0,007948	15	0,073408	0,063773	0,055877	0,049264
20	0,001534	0,004147	0,005831	0,006266	20	0,057877	0,05028	0,044055	0,038841
Dönemsel Hayat Sigortası (${}_mP_{65^1:n}^K$)					Karma Hayat Sigortası (${}_mP_{65:n}^K$)				
m\n	5	10	15	20	m\n	5	10	15	20
5	0,002496	0,006788	0,008870	0,009515	5	0,183565	0,158959	0,138176	0,120468
10	0,001353	0,003679	0,004808	0,005158	10	0,099503	0,086165	0,074900	0,065301
15	0,000976	0,002653	0,003467	0,003719	15	0,071751	0,062133	0,054010	0,047088
20	0,000762	0,002071	0,002706	0,002903	20	0,056011	0,048503	0,042162	0,036759

Dönemsel hayat sigortası poliçesi satın alan erkek bireylerin ödeyecekleri net yıllık prim tutarları, kadın bireylere göre daha yüksek bulunmuştur. Benzer durum karma hayat sigortası için de geçerlidir. Kadın bireylerin ödeyecekleri prim tutarları erkek bireylerden düşüktür.

Çoklu yaşam durumu için birleşik ve son yaşayan durumları ele alınmıştır. Her iki durum için de bireylerin bağımlılık yapısına göre annüite ve sigorta ürünlerinin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 9’da verilmiştir.

Çizelge 9. Birleşik ve son yaşayan durumunda net tek primler

		Vade (n)	5	10	15	20
Birleşik Yaşam Durumu	$\ddot{a}_{65:65:n}^{E,K}$	Bağımsız	4,66793989	8,46705651	11,51545871	14,03701683
		Bağımlı	4,69549138	8,57355364	11,68530163	14,25925774
	$A_{65:65^1:n}^{E,K}$	Bağımsız	0,03094095	0,08811420	0,12097564	0,12978759
		Bağımlı	0,01658929	0,07495060	0,10849490	0,11748996
	${}_nE_{65:65}^{E,K}$	Bağımsız	0,82967649	0,66184936	0,54019951	0,45794412
		Bağımlı	0,84691717	0,67560259	0,55142485	0,46746020
Son Yaşayan Durumu	$\ddot{a}_{65:65:n}^{E,K}$	Bağımsız	4,71690175	8,78128234	12,27690653	16,29236746
		Bağımlı	4,68935026	8,67478521	12,10706360	16,07012656
	$A_{65:65^1:n}^{E,K}$	Bağımsız	0,00368737	0,00568120	0,00773212	0,00844504
		Bağımlı	0,01803903	0,01884480	0,02021286	0,02074267
	${}_nE_{65:65}^{E,K}$	Bağımsız	0,86232173	0,74194788	0,63808265	0,54976532
		Bağımlı	0,84508105	0,72819465	0,62685731	0,54024924

Bireyler arasındaki bağımlılığın hesaplamalara dahil edilmesi birleşik yaşam durumunda annüite ürünlerinin net tek primini artırırken, son yaşayan durumunda azaltmaktadır. Sigorta ürünlerinin net tek primlerinde ise tam tersi bir değişim gözlemlenmektedir. Net tek prim tutarları elde edildikten sonra bireylerin bağımlılık yapısı dikkate alınarak, birleşik ve son yaşayan durumları için net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır. Sonuçlar Çizelge 10 ve Çizelge 11’de verilmiştir.

Çizelge 10. Birleşik yaşam durumunda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası (${}_mP_{65:65^1:n}^{E,K}$)											
Bağımsız					Bağımlı						
m\	n	5	10	15	20	m\	n	5	10	15	20
5		0,006628	0,018876	0,025916	0,027804	5		0,003533	0,015962	0,023106	0,025022
10		0,003654	0,010407	0,014288	0,015329	10		0,001935	0,008742	0,012655	0,013704
15		0,002687	0,007652	0,010505	0,011271	15		0,001420	0,006414	0,009285	0,010055
20		0,002204	0,006277	0,008618	0,009246	20		0,001163	0,005256	0,007609	0,008240
Karma Hayat Sigortası (${}_mP_{65:65:n}^{E,K}$)											
Bağımsız					Bağımlı						
m\	n	5	10	15	20	m\	n	5	10	15	20
5		0,184368	0,160663	0,141642	0,125908	5		0,183901	0,159846	0,140543	0,124577
10		0,101643	0,088574	0,078088	0,069414	10		0,100717	0,087543	0,076972	0,068227
15		0,074736	0,065127	0,057416	0,051038	15		0,073897	0,064231	0,056474	0,050059
20		0,061311	0,053428	0,047102	0,041870	20		0,060558	0,052636	0,046280	0,041022

Çizelge 11. Son yaşayan durumda net yıllık primler

Dönemsel Hayat Sigortası (${}_mP_{65:65^1:n}^{E,K}$)											
Bağımsız					Bağımlı						
m\	n	5	10	15	20	m\	n	5	10	15	20
5		0,000782	0,001204	0,001639	0,001790	5		0,003847	0,004019	0,004310	0,004423
10		0,000420	0,000647	0,000881	0,000962	10		0,002079	0,002172	0,002330	0,002391
15		0,000300	0,000463	0,000630	0,000688	15		0,001490	0,001557	0,001670	0,001713
20		0,000226	0,000349	0,000475	0,000518	20		0,001123	0,001173	0,001258	0,001291
Karma Hayat Sigortası (${}_mP_{65:65:n}^{E,K}$)											
Bağımsız					Bağımlı						
m\	n	5	10	15	20	m\	n	5	10	15	20
5		0,183597	0,158500	0,136915	0,118343	5		0,184060	0,159306	0,137987	0,119631
10		0,098620	0,085139	0,073544	0,063568	10		0,099498	0,086116	0,074592	0,064669
15		0,070540	0,060897	0,052604	0,045468	15		0,071291	0,061703	0,053446	0,046336
20		0,053154	0,045888	0,039639	0,034262	20		0,053710	0,046486	0,040265	0,034909

Çizelge 10'dan görüldüğü üzere, bağımlılık varsayımı altında birleşik yaşam durumundaki dönemsel ve karma hayat sigortalarının net yıllık primleri bağımsız duruma göre daha düşüktür. Son yaşayan durumda ise bağımlılık söz konusu olduğunda, dönemsel ve karma hayat sigortalarına karşılık gelen net yıllık prim tutarları daha yüksektir.

4. Sonuç ve öneriler

Aktüerya Bilimlerinde, hem hayat hem de hayat dışı sigortaları branşlarında riskin yönetilebilmesi için çeşitli yaklaşımlar benimsenmiştir. Hayat sigortalarında söz konusu olan ölüm riski modellenirken, bireyin gelecek yaşam süresini gösteren rastgele değişkenden yararlanılmaktadır. Ayrıca sigortalanan birey sayısının birden fazla olduğu hayat ürünlerinde bu rastgele değişkenler arasındaki ilişkiye göre de fiyatlandırma yapılabilmektedir.

Çoklu yaşam durumunda sigortalılar arasındaki bağımlılık yapısının fiyatlandırmaya yansıtılması, sigorta şirketi açısından son derece önemlidir. Ancak uygulamada çoğu sigorta şirketi, bireylerin gelecek yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğunu kabul etmektedir. Gerçekçi olmayan bu varsayım sigorta sektörü üzerinde potansiyel olarak önemli bir mali etkiye sahiptir. Dolayısıyla, olası finansal etkileri kontrol edebilmek için bağımlılığın göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

Bu çalışmada, bireylerin gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık durumu araştırılmıştır. Bu amaçla ampirik analiz yapılmış ve sonuçlar incelenmiştir. İlk olarak Kanada sigorta verileri üzerine yapılan Kaplan-Meier tahminiyle bireylerin marjinal yaşam olasılıkları hesaplanmıştır. Ardından, Dabrowska tahminiyle çiftlerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlı olduğu gösterilmiş ve bireyler arasındaki bağımlılık düzeyleri hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak, birleşik ve son yaşayan durumunda yaşam olasılıkları hem bağımlı hem de bağımsız durum için elde edilmiştir. Sonrasında, tekli ve çoklu yaşam durumunda oluşturulan annüite ve sigorta ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarları hesaplanmıştır.

Bağımlılığın bireylerin birlikte yaşama olasılığını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca bağımlılık dikkate alındığında, birleşik yaşam durumunda oluşturulan sigorta ürünlerinin net tek primleri azalırken annüite ürünlerinin net tek primleri artmıştır. Dolayısıyla, sigortalının ödemekle yükümlü olduğu net yıllık prim tutarı azalmıştır. Son yaşayan durumunda ise bağımlılık yapısı annüite ürünlerinin net tek primlerinde azalışa, sigorta ürünlerinin net tek primlerinde ise artışa neden olmuştur. Yani, ödenecek net yıllık prim tutarı artmıştır. Sonuç olarak, bağımlılığın birleşik ve son yaşayan durumunda oluşturulan hayat ürünleri üzerine etkisinin farklı olduğu görülmüştür. Bireyler arasındaki bağımlılığın aktüeryal hesaplamalara yansıtılması ödenecek net yıllık prim tutarını etkilemekte olup bu değerlendirmenin sigorta şirketleri açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışma risk ve sigorta alanında potansiyel uygulamalara sahiptir. Model birleşik yaşamların ölümlülüğündeki eğilimlere dikkat çektiğinden hane halkının finansal yönetimi ve emeklilik planlamasına rehberlik etmek için kullanılabilir. Daha sonraki çalışmalarda, modele çiftler arasındaki yaş farkı dahil edilerek sigorta ürünlerine ilişkin net tek prim ve net yıllık prim tutarlarının nasıl değiştiği araştırılabilir.

Kaynaklar

- [1] L. Xiaoming, 2008, Stochastic mortality modelling, PhD Thesis, Department of Statistics University of Toronto, Ontario.
- [2] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt, 1997, Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, New York.
- [3] K. Henshaw, C. Constantinescu and, O. Menoukeu Pamen, 2020, Stochastic Mortality Modelling for Dependent Coupled Lives, Risks, 8(1), 17.
- [4] N. Ragnar, 1989, Actuarial Analysis of Dependent Lives, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 2, 243-254.
- [5] J. Spreeuw, 2006, Types of Dependence and Time-dependent Association Between Two Lifetimes in Single Parameter Copula Models. Scandinavian Actuarial Journal, (5), 286-309.
- [6] C. M. Parkes, B. Benjamin and R. G. Fitzgerald, 1969, Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers, British Medical Journal, 1(5646), 740-743.
- [7] A. Ward, 1976, Mortality of Bereavement, British Medical Journal, 1(6011), 700-702.
- [8] C. Jagger and C. J. Sutton, 1991, Death After Marital Bereavement-is the Risk Increased?, Statistics in Medicine, 10(3), 395-404.
- [9] P. Hougaard, B. Harvald and N. V. Holm, 1992, Measuring the Similarities Between the Lifetimes of Adult Danish Twins Born Between 1881-1930, Journal of the American Statistical Association, 87(417), 17-24.
- [10] A. Sklar, 1959, Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, Public Institution of Statistical University, 8, 229-231.
- [11] E. W. Frees, J. F. Carriere and E. Valdez, 1996, Annuity Valuation with Dependent Mortality, The Journal of Risk and Insurance, 63(2), 229-261.

- [12] E. Kızılok Kara, 2021, On Actuarial Premiums for Joint Last Survivor Life Insurance Based On Asymmetric Dependent Lifetimes. *Current Academic Studies in Science and Mathematics Sciences-II*, D. E. Yıldız, E. Y. Özkan (Eds), Livre de Lyon, France 33.
- [13] E. Kızılok Kara, 2022, On the Impact of Asymmetric Dependence in the Actuarial Pricing of Joint Life Insurance Policies, *Sains Malaysiana*, 51(11), 3807-3817.
- [14] Ö. Bakar, M. Büyükyazıcı, 2022, Stochastic Analysis of Longevity Risk in Dependent Multiple Life Annuities, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 40(2), 235-242.
- [15] Ö. Karadağ Erdemir, M. Sucu, 2020, Eliptik sözde-kopulalar ile esnek bağımlılık modellemesi, *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, 13(2), 61-77.
- [16] Y. Zhang and P. Brockett, 2020, Modeling Stochastic Mortality for Joint Lives Through Subordinators, *Insurance: Mathematics and Economics*, 95, 166-172.
- [17] P. Jevti'c and T. R. Hurd, 2017, The Joint Mortality of Couples in Continuous Time, *Insurance: Mathematics and Economics*, 75, 90–97.
- [18] O. Walter, W. Patrick, 2021, Ottieno J. and Carolyne O., Positive Stable Frailty Approach in the Construction of Dependence Life-Tables, *Open Journal of Statistics*, 11(4), 506–523.
- [19] E. Luciano, E. Vigna, 2005, Non Mean Reverting Affine Processes for Stochastic Mortality, ICER working paper and Proceedings of the XVth International AFIR Colloquium, Zurich.
- [20] E. Luciano, J. Spreeuw, & E. Vigna, 2008, Modeling Stochastic Mortality for Dependent Lives, *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(2), 234–244.
- [21] E. L. Kaplan and P. Meier, 1958, Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, *Journal of the American Statistical Association*, 53(282), 457-481.
- [22] E. T. Lee and, J. Wang, 2003, *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, Vol. 476, John Wiley & Sons.
- [23] D. M. Dabrowska, 1988, Kaplan–Meier Estimate on the Plane, *The Annals of Statistics*, 16(4), 1475–1489.
- [24] H. U. Gerber, 1997, *Life insurance mathematics*, Springer, Tokyo.