İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat Der. **59** (2000), 59-88

ÜBER VERALLGEMEINERTE LÜCKENREIHEN *

Halidun Gürses

ON GENERALIZED LACUNARY POWER SERIES

Abstract

In this paper Theorem 2 in [17] and the Theorem in [20] are generalized by taking a generalized lacunary power series with algebraic coefficients instead of the lacunary power series with rational coefficients in Theorem 2 and a generalized lacunary power series with algebraic coefficients instead of a generalized lacunary power series with rational coefficients in [20].

In der vorliegenden Arbeit sind Satz 2 in [17] und Satz in [20] dadurch verallgemeinert, daß die in Satz 2 auftretende Lückenreihe mit rationalen Koeffizienten durch eine verallgemeinerte Lückenreihe mit algebraischen Koeffizienten und die in [20] auftretende verallgemeinerte Lückenreihe mit rationalen Koeffizienten durch eine verallgemeinerte Lückenreihe mit algebraischen Koeffizienten ersetzt wird. Um die verallgemeinerten Sätze zu beweisen, werden wir die folgenden Hilfssätze und den Satz von Baker benutzen. Außerdem verweisen wir für nicht eigens erwähnte Begriffe auf die Literatur (etwa [5], [15], [17], [20]) und für Klasseneinteilung von komplexen Zahlen auf [7], [10] und [16].

Hilfssatz 1 (İÇEN) *Es seien α_j $j = 1, \ldots, k$; $(k \geq 1)$ aus einem bestimmten algebraischen Zahlkörper vom Grad g entnommen und die Höhen derselben mit $H(\alpha_j)$ bezeichnet. Es sei ferner η eine weitere algebraische Zahl, die von α_j $(j = 1, \ldots, k)$ durch die Relation*

$$F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0$$

*Diese Arbeit ist eine Übersetzung einer Doktorarbeit, der am 12.07.1999 vom wissenschaftlichen Institut der Universität İstanbul akzeptiert wurde. Sie wurde von Frau Prof.Dr. Bedriye M. Zeren betreut, die sie mit stetigem Interesse und durch viele Ratschläge unterstützt hat. Dafür danke ich ihr herzlich.

abhängt, wobei $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten in seinen sämtlichen Argumenten bedeutet. Es seien außerdem der Grad von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ nach y mindestens 1. Dann ist der Grad von $\eta \leq dg$, und es gilt für die Höhe $H(\eta)$ von η folgende Abschätzung:

$$H(\eta) \leq 3^{2dg+(\ell_1+\ldots+\ell_k)g} H^g H(\alpha_1)^{\ell_1 g} \ldots H(\alpha_k)^{\ell_k g}.$$

Dabei bedeutet d den Grad von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ nach y, ℓ_j den Grad desselben nach x_j $(j = 1, \ldots, k)$ und H das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$.

Beweis : (Siehe [6]).

Hilfssatz 2 *Es seien α_1, α_2 zwei voneinander verschiedene algebraische und zueinander konjugierte Zahlen, H ihre Höhe und n ihr Grad. Dann gilt*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq (4n)^{-(n-2)/2}\{(n+1)H\}^{-(2n-1)/2}.$$

Beweis : (Siehe [4]).

Hilfssatz 3 *Es seien γ, δ zwei nicht zueinander konjugierte algebraische Zahlen mit den jeweiligen Graden n_1, n_2 und den jeweiligen Höhen $H(\gamma)$, $H(\delta)$. Dann gilt*

$$|\gamma - \delta| \geq \frac{1}{2^{\max(n_1,n_2)-1}[(n_1+1)H(\gamma)]^{n_2}[(n_2+1)H(\delta)]^{n_1}}.$$

Beweis : (Siehe [4]).

Hilfssatz 4 *Ist $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ein Polynom mit ganzen algebraischen Koeffizienten und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ seine Wurzeln, so ist jedes Produkt*

$$a_0\alpha^{(\nu_1)} \ldots \alpha^{(\nu_k)} \quad (k \geq 1)$$

ganz algebraisch, wobei $\nu_1, \ldots, \nu_k$ k verschiedene aus den Zahlen $1, \ldots, n$ sind.

Beweis : (Siehe [5]).

Hilfssatz 5 *Ist α eine algebraische Zahl und K ein α enthaltender Zahlkörper, so gilt*

$$s_K(\alpha) \leq (s(\alpha))^{m/n},$$

wobei n den Grad von α, m den Grad von K bedeutet.

Beweis : (Siehe [20]).

Folgerung : $H_K(\alpha) \leq (2H(\alpha))^m$.

Beweis : (Siehe [20]).

Hilfssatz 6 *Seien* $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ *beliebige Polynome und* $P(x) = \prod_{\rho=1}^{k} P_\rho(x)$. *Mit* $H(P_\rho)$ *sei die Höhe und* η_ρ *der Grad von* $P_\rho(x)$ *für* $\rho = 1, 2, \ldots, k$ *bezeichnet. Dann gilt zwischen den Höhen* $H(P_\rho)$ $(\rho = 1, 2, \ldots, k)$ *und der Höhe* $H(P)$ *von* $P(x)$ *die Ungleichung*

$$\prod_{\rho=1}^{k} H(P_\rho) < 2^n(n+1)H(P) \qquad (n = \sum_{\rho=1}^{k} \eta_\rho).$$

Beweis : (Siehe [20]).

Folgerung :Ist $P_1(x)|P(x)$, dann gilt

$$H(P_1) < 2^{\partial P}(\partial P + 1)H(P)$$

wobei ∂P den Grad von P nach x bezeichnet ist.

Beweis : (Siehe [20]).

Hilfssatz 7 *Seien* α_j $(j = 1, \ldots, k)$ *Zahlen aus einem festen algebraischen Körper* K *vom Grad* m *mit den jeweiligen Größen* $s_K(\alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, k)$. *Es sei ferner* η *eine weitere algebraische Zahl, die mit* α_j $(j = 1, \ldots, k)$ *durch eine Relation*

$$\eta = \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

verbunden sein möge, wobei $f(x_1, \ldots, x_k)$ *und* $g(x_1, \ldots, x_k)$ *Polynome mit ganzen rationalen Koeffizienten in* $x_1, \ldots, x_k$ *bedeuten. Dann ist der Grad von* $\eta \leq m$, *und es gilt für die Körperhöhe* $H_K(\eta)$ *von* η *folgende Abschätzung:*

$$H_K(\eta) < 2^m(\prod_{j=1}^{k}(l_j + 1))^m H^m \prod_{j=1}^{k} s_K(\alpha_j)^{l_j}.$$

Dabei bedeutet l_j *das Maximum der Grade von* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *und* $g(x_1, \ldots, x_k)$ *nach* x_j $(j = 1, \ldots, k)$, H *das Maximum der Absolutbeträge* *der Koeffizienten von* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *und* $g(x_1, \ldots, x_k)$.

Beweis : (Siehe [20]).

Hilfssatz 8 *Es seien* α *und* β $(\alpha \neq \beta)$ *zwei algebraische Zahlen aus einem festen Zahlkörper* K *vom Grade* g $([K : \mathbb{Q}\,] = g)$ *und mit den jeweiligen Körperhöhen* $H_K(\alpha)$ *und* $H_K(\beta)$. *Dann gibt es eine nur von* g *abhängige Zahl* $\tau(g)$, *so daß die folgende Ungleichung gilt*

$$|\alpha - \beta| \geq \frac{1}{\tau(g) H_K(\alpha) H_K(\beta)}.$$

Beweis : (Siehe [20]).

Satz (Baker) *Es sei* ξ *eine reelle oder komplexe Zahl und* $\chi > 2$. *Es seien ferner* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *eine Folge von verschiedenen Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper* K *mit Körperhöhen* $H_K(\alpha_1), H_K(\alpha_2), \ldots$ *derart, daß gilt*

$$|\xi - \alpha_i| < (H_K(\alpha_i))^{-\chi} \qquad (i)$$

und

$$\limsup_{i \to \infty} \frac{\log H_K(\alpha_{i+1})}{\log H_K(\alpha_i)} < +\infty. \qquad (ii)$$

Dann ist ξ *entweder eine* S- *oder eine* T-*Zahl.*

Beweis : (Siehe [1]).

Satz 1 *Wir betrachten die verallgemeinerte Lückenreihe*

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$$

mit

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$0 = s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < \ldots,$$

wobei c_h $(h = 0, 1, \ldots)$ *algebraische Zahlen aus einem festen Zahlkörper* $\mathbb{Q}(\vartheta) := \mathbb{Q}(c_0, c_1, \ldots)$ *sind, so daß* $c_h = 0$ *im Falle* $r_n < h < s_n$, *aber* $c_{r_n} \neq 0$, $c_{s_n} \neq 0$ *für* $n = 1, 2, \ldots$. *Bezeichnen wir den Konvergenzradius von* $\sum_{n=0}^{\infty} H(c_n) z^n$ *mit* R.

Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

$$R > 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log H(c_n)}{n} < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} (r_{n+1} - s_n) < +\infty.$$

Es sei α *eine algebraische Zahl, die den folgende Bedingungen genügt:*

$$0 < \overline{|\alpha|} < R,$$

$$K := \mathbb{Q}(\vartheta, \alpha), \quad [K : \mathbb{Q}] = m,$$

$$\exists_\infty h \;:\; \partial P_h(\alpha) = m, \quad P_h(\alpha) \neq 0.$$

Dann ist $F(\alpha) \in U_m$.

Beweis: 1°) Da $c_n \in A$ ist, gilt $\overline{|c_n|} < 2H(c_n)$. Also konvergiert $F(z)$ für $z = \alpha$ mit $0 < \overline{|\alpha|} < R$.

2°) $F(\alpha) := \xi$ läßt sich in der Form

$$\xi \;=\; \eta_{r_n} + \rho_{r_n}$$

schreiben, wobei

$$\eta_{r_n} = c_{s_0}\alpha^{s_0} + \ldots + c_{r_1}\alpha^{r_1} + \ldots + c_{s_{n-1}}\alpha^{s_{n-1}} + \ldots + c_{r_n}\alpha^{r_n}, \qquad (1)$$

$$\rho_{r_n} = c_{s_n}\alpha^{s_n} + \ldots + c_{r_{n+1}}\alpha^{r_{n+1}} + \cdots$$

ist. Aus (1) folgt also

$$\eta_{r_n} - c_{s_0}\alpha^{s_0} - \ldots - c_{r_1}\alpha^{r_1} - \ldots - c_{s_{n-1}}\alpha^{s_{n-1}} - \ldots - c_{r_n}\alpha^{r_n} = 0.$$

Setzt man

$$P(y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}) = y - x^{s_0}x_{s_0} - \ldots - x^{r_1}x_{r_1} - \ldots - x^{r_n}x_{r_n},$$

so gilt

$$P(y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}) \in \mathbb{Z}[y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}], \quad H(P) = 1$$

und

$$P(\eta_{r_n}, \alpha, c_{s_0}, \ldots, c_{r_1}, \ldots, c_{s_{n-1}}, \ldots, c_{r_n}) = 0.$$

Mit Berücksichtigung von Hilfssatz 1 erhält man also die Ungleichungen $\partial\eta_{r_n} \leq m$ und

$$H(\eta_{r_n}) \leq \{3^{2r_n+3}H(\alpha)^{r_n}H(c_{s_0})\ldots H(c_{r_1})\ldots H(c_{s_{n-1}})\ldots H(c_{r_n})\}^m.$$

Da $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log H(c_n)}{n} < +\infty$ ist, gibt es eine reelle Zahl $B \geq 1$ mit $H(c_n) \leq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H(\eta_{r_n}) &\leq \{3^{5r_n}H(\alpha)^{r_n}B^{s_0}\cdots B^{r_1}\cdots B^{s_{n-1}}\cdots B^{r_n}\}^m \\ &\leq \{3^{5r_n}H(\alpha)^{r_n}B^{s_0+\ldots+r_1+\ldots+s_{n-1}+\ldots+r_n}\}^m. \end{aligned}$$

Da $\limsup\limits_{n\to\infty} (r_{n+1} - s_n) < +\infty$ ist, gibt es eine natürliche Zahl $\theta \geq 2$, so daß für alle $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $r_{i+1} - s_i + 1 < \theta$ gilt . Also wird daher $s_i + \ldots + r_{i+1} < \theta r_{i+1}$. Damit erhält man

$$H(\eta_{r_n}) \leq \{3^{5r_n}H(\alpha)^{r_n}B^{\theta(r_1+\ldots+r_n)}\}^m. \qquad (2)$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}} = +\infty$ ist, ist auch $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_{n-1}} = +\infty$. Deswegen gibt es eine natürliche Zahl k_1, so daß für alle $n > k_1$ gilt $\frac{r_n}{r_{n-1}} > 2$. Also ist $\sum\limits_{j=k_1}^{n} r_j < 2r_n \quad (n > k_1)$ und daher

$$B^{\theta(r_1+\ldots+r_n)} < B^{\theta(r_1+\ldots+r_{k_1-1}+2r_n)}. \tag{3}$$

Nach (3) folgt aus (2)

$$H(\eta_{r_n}) \leq \{3^{5m}H(\alpha)^m B^{\theta(r_1+\ldots+r_{k_1-1}+2m)}\}^{r_n}.$$

Setzt man $3^{5m}H(\alpha)^m B^{\theta(r_1+\ldots+r_{k_1-1}+2m)} = t_0$ $(t_0 > 1)$, so hat man

$$H(\eta_{r_n}) \leq t_0^{r_n} \qquad (n > k_1). \tag{4}$$

3°) Wir wollen nun $|\xi - \eta_{r_n}| = |\rho_{r_n}|$ nach oben abschätzen.

Nach der Cauchyschen Ungleichung gilt für $i = 0, 1, \ldots$

$$|c_i| \leq \frac{M}{\rho^i} \quad (0 < \overline{|\alpha|} < \rho < R,\ \ M = \max_{|z|=\rho}|F(z)|).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\xi - \eta_{r_n}| &\leq |c_{s_n}|(\overline{|\alpha|})^{s_n} + \ldots + |c_{r_{n+1}}|(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}} + |c_{s_{n+1}}|(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}} + \ldots \\
&\leq \frac{M}{\rho^{s_n}}(\overline{|\alpha|})^{s_n} + \ldots + \frac{M}{\rho^{r_{n+1}}}(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}} + \frac{M}{\rho^{s_{n+1}}}(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}} \ldots \\
&= \frac{M}{\rho^{s_n}}(\overline{|\alpha|})^{s_n}\left[1 + \ldots + \frac{(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}-s_n}}{\rho^{r_{n+1}-s_n}} + \frac{(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}-s_n}}{\rho^{s_{n+1}-s_n}} + \ldots\right] \\
&\leq \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} M\frac{1}{1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Setzt man $M\dfrac{1}{1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}} = t_1 (t_1 > 0)$, $\dfrac{\rho}{\overline{|\alpha|}} = t_2$ $(t_2 > 1)$ und $\frac{\log t_2}{\log t_0} =$

t_3 $(t_3 > 0)$, so wird

$$|\xi - \eta_{r_n}| \leq \frac{t_1}{t_2^{s_n}} = \frac{t_1}{(t_0^{r_n})^{\frac{s_n \log t_2}{r_n \log t_0}}} = \frac{t_1}{(t_0^{r_n})^{\frac{s_n}{r_n} t_3}}. \tag{5}$$

Da für $n > k_1$ die Ungleichung $H(\eta_{r_n}) \leq t_0^{r_n}$ gilt, erhält man aus (5)

$$|\xi - \eta_{r_n}| \leq \frac{t_1}{H(\eta_{r_n})^{\frac{s_n}{r_n} t_3}}, \quad (n > k_1). \tag{6}$$

Offenbar ist $\limsup\limits_{n \to \infty} \frac{s_n}{r_n} t_3 = +\infty$.

4°) Nun betrachten wir wieder η_{r_n}, die durch (1) gegeben ist. Im Falle $m = 1$ ist der Grad von η_{r_n} für jedes n gleich m. Im Falle $m > 1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{r_n} in bezug auf den Körper $\mathbb{Q}(\vartheta, \alpha)$ nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden. Damit ist auch in diesem Falle nach einem bestimmten n ab der Grad von η_{r_n} gleich m. Für $m = 1$ ist die Behauptung klar. Um die Behauptung im Falle $m > 1$ zu beweisen, bestätigen wir zuerst die folgenden Aussagen: Für ein festes Paar (i, j) $(i \neq j)$ gilt :

a) Von einer bestimmten Stelle ab folgt aus $\eta_{r_n}^{(i)} \neq \eta_{r_n}^{(j)}$ die Ungleichheit $\eta_{r_{n+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{n+1}}^{(j)}$.

b) Zu jeder beliebig gewählten natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl $k' > N$, so daß mindestens eine der Ungleichheiten $\eta_{r_{k'}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k'}}^{(j)}$ und $\eta_{r_{k'+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k'+1}}^{(j)}$ gilt.

Beweis von a): Aus den Gleichheiten

$$\left.\begin{aligned} \eta_{r_{n+1}}^{(i)} &= \eta_{r_n}^{(i)} + c_{s_n}^{(i)} (\alpha^{(i)})^{s_n} + \ldots + c_{r_{n+1}}^{(i)} (\alpha^{(i)})^{r_{n+1}} \\ \eta_{r_{n+1}}^{(j)} &= \eta_{r_n}^{(j)} + c_{s_n}^{(j)} (\alpha^{(j)})^{s_n} + \ldots + c_{r_{n+1}}^{(j)} (\alpha^{(j)})^{r_{n+1}} \end{aligned}\right\}$$

erhält man

$$\eta_{r_{n+1}}^{(i)} - \eta_{r_{n+1}}^{(j)} = \eta_{r_n}^{(i)} - \eta_{r_n}^{(j)} - \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left[c_k^{(i)} (\alpha^{(i)})^k - c_k^{(j)} (\alpha^{(j)})^k \right]$$

und daher

$$|\eta_{r_{n+1}}^{(i)} - \eta_{r_{n+1}}^{(j)}| \geq |\eta_{r_n}^{(i)} - \eta_{r_n}^{(j)}| - \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left| c_k^{(i)} (\alpha^{(i)})^k - c_k^{(j)} (\alpha^{(j)})^k \right|.$$

Der Grad von η_{r_n} sei ν. Da $\nu \leq m$ und $\eta_{r_n}^{(i)} \neq \eta_{r_n}^{(j)}$ ist, folgt aus Hilfssatz 2

$$\begin{aligned}|\eta_{r_n}^{(i)} - \eta_{r_n}^{(j)}| &\geq (4\nu)^{-(\nu-2)/2}\{(\nu+1)H(\eta_{r_n})\}^{-(2\nu-1)/2} \\ &\geq (4m)^{-(m-2)/2}\{(m+1)H(\eta_{r_n})\}^{-(2m-1)/2}.\end{aligned}$$

Daraus folgert man mit Hilfe von $H(\eta_{r_n}) < t_0^{r_n}$ $(n > k_1)$

$$|\eta_{r_n}^{(i)} - \eta_{r_n}^{(j)}| \geq \frac{t_4}{H(\eta_{r_n})^{\frac{2m-1}{2}}} \geq \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2}r_n}} \quad (n > k_1),$$

wobei $(4m)^{-(m-2)/2}(m+1)^{-(2m-1)/2} = t_4$ gesetzt wurde. Da für jedes $\gamma \in A$ die Ungleichung $\overline{|\gamma|} \leq 2H(\gamma)$ gilt, bekommt man dann

$$\begin{aligned}|c_t^{(i)}(\alpha^{(i)})^t - c_t^{(j)}(\alpha^{(j)})^t| &= |c_t^{(i)}(\alpha^{(i)})^t - c_t^{(j)}(\alpha^{(i)})^t + c_t^{(j)}(\alpha^{(i)})^t - c_t^{(j)}(\alpha^{(j)})^t| \\ &= |(\alpha^{(i)})^t(c_t^{(i)} - c_t^{(j)}) + c_t^{(j)}((\alpha^{(i)})^t - (\alpha^{(j)})^t)| \\ &\leq 4(\overline{|\alpha|})^t\overline{|c_t|} \\ &\leq 8(\overline{|\alpha|})^t H(c_t).\end{aligned}$$

Da nach der Cauchyschen Ungleichung für $t = 0, 1, \ldots$

$$|H(c_t)| < \frac{M'}{\rho^t} \quad (\overline{|\alpha|} < \rho < R\ ,\ M' = \max_{|z|=\rho} |\sum_{i=0}^{\infty} H(c_i)z^i|)$$

gilt, erhält man

$$|c_t^{(i)}(\alpha^{(i)})^t - c_t^{(j)}(\alpha^{(j)})^t| \leq \frac{8M'}{\left(\dfrac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^t}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left|c_k^{(i)}(\alpha^{(i)})^k - c_k^{(j)}(\alpha^{(j)})^k\right| &\leq \frac{8M'}{\left(\dfrac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}} + \ldots + \frac{8M'}{\left(\dfrac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{r_{n+1}}} \\ &= 8M'\left\{\left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} + \ldots + \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{r_{n+1}}\right\} \\ &\leq 8M'\left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}.\end{aligned}$$

Also ist

$$|\eta_{r_{n+1}}^{(i)} - \eta_{r_{n+1}}^{(j)}| \geq \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2}r_n}} - \frac{8M'}{\left(1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty$ ist, gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > k_2 > k_1$

$$\frac{8M'}{\left(1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}} < \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2}r_n}}$$

gilt. Damit ist der Beweis von a) beendet.

Beweis von b): Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach den Voraussetzungen des Satzes können wir ein $k' \in \mathbb{N}$ wählen, so daß $k' > N$ und $\partial P_{k'}(\alpha) = m$ ist. Wäre für dieses k' sowohl $\eta_{r_{k'}}^{(i)} = \eta_{r_{k'}}^{(j)}$ als auch $\eta_{r_{k'+1}}^{(i)} = \eta_{r_{k'+1}}^{(j)}$ gültig, so würde aus den Gleichheiten

$$\begin{aligned}\eta_{r_{k'+1}}^{(i)} &= \eta_{r_{k'}}^{(i)} + P_{k'}^{(i)}(\alpha)\\ \eta_{r_{k'+1}}^{(j)} &= \eta_{r_{k'}}^{(j)} + P_{k'}^{(j)}(\alpha)\end{aligned}$$

$P_{k'}^{(i)}(\alpha) = P_{k'}^{(j)}(\alpha)$ erhalten. Das ist aber ein Widerspruch zu $\partial P_{k'}(\alpha) = m$. Damit ist auch b) bewiesen.

Wir werden nun beweisen, wenn die natürliche Zahl $k_3 > k_2$ so gewählt wird, daß $\partial P_{k_3}(\alpha) = m$ gilt, ist dann für jedes $k > k_3$ $\partial \eta_{r_k} = m$. Nach b) gilt mindestens eine der Ungleichheiten $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$ und $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Ist $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$, so ist $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$ nach a) . Ist aber $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} = \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$, so ist wieder $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$ nach b). Also gilt immer $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Da k_3 vom Paar (i,j) unabhängig gewählt wird, gilt für beliebiges Paar (i,j) $(i \neq j)$ auch $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Also ist der Grad von $\eta_{r_{k_3+1}}$ gleich m. Mit a) erhält man dann $\partial\eta_{r_k} = m$ für jedes $k > k_3$.

Es gibt unendlich viele voneinander verschiedene Glieder in der Folge $\{\eta_{r_n}\}$:

Nach Voraussetzung des Satzes gibt es unendlich viele n, so daß $\partial P_n(\alpha) = m$ und $P_n(\alpha) \neq 0$ ist. Daher existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen mit $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, so daß für $j = 1, 2, \ldots$ $\partial P_{n_j}(\alpha) = m$ und $P_{n_j}(\alpha) \neq 0$ gilt. Gäbe es in der Folge $\{\eta_{r_n}\}$ nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder, hätte dann die Folge $\{|\eta_{r_{n_j+1}} - \eta_{r_{n_j}}|\}$ eine positive untere Schranke. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß

$$0 < |\eta_{r_{n_j+1}} - \eta_{r_{n_j}}| = |P_{n_j}(\alpha)| \quad , \quad \lim_{j\to\infty} |P_{n_j}(\alpha)| = 0$$

gilt. Also gibt es eine Teilfolge $\{\eta_{r_{m_j}}\}$ $(m_1 > k_3)$ von $\{\eta_{r_n}\}$, so daß ihre Glieder voneinander und von ξ verschieden sind und $\partial\eta_{r_{m_j}} = m$ für jedes j gilt. Damit folgert man aus (6)

$$0 < |\xi - \eta_{r_{m_j}}| < \frac{t_1}{H(\eta_{r_{m_j}})^{\frac{s_{m_j}}{r_{m_j}}t_3}}.$$

Da t_3 positiv und $\lim_{j\to\infty} \frac{s_{m_j}}{r_{m_j}} = +\infty$ ist, ist auch $\lim_{j\to\infty} \frac{s_{m_j}}{r_{m_j}}t_3 = +\infty$. Also ist $\xi \in \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, d.h.

$$\mu^*(\xi) \quad \leq \quad m. \tag{7}$$

5°) Wir werden nun zeigen, daß $\mu^*(\xi) \geq m$ ist.

1) Da nach der Definition von $\mu^*(\xi)$ die Ungleichung $\mu^*(\xi) \geq 1$ immer richtig ist, gibt es im Falle $m = 1$ nichts zu zeigen.

2) Sei nun $m > 1$ und β eine algebraische Zahl, deren Grad kleiner als m, und deren Höhe $H(\beta)$ größer als später zu erklärender Wert ist. Wir betrachten nun die Ungleichung

$$|\xi - \beta| \quad = \quad |(\eta_{r_n} - \beta) + (\xi - \eta_{r_n})| \geq |\eta_{r_n} - \beta| - |\xi - \eta_{r_n}|. \tag{8}$$

Da $H(\eta_{r_n}) \leq t_0^{r_n}$ $(n > k_1)$ und $\partial\eta_{r_n} = m$ $(n > k_3)$ ist, erhält man dann für $n > k_3$ durch Anwendung von Hilfssatz 3 die Ungleichung

$$|\eta_{r_n} - \beta| \quad \geq \quad \frac{t_5}{H(\beta)^m t_0^{(m-1)r_n}} \quad , \quad t_5 = 2^{1-m}m^{-m}(m+1)^{1-m}. \tag{9}$$

Nach (5) und (9) bekommen wir aus (8)

$$|\xi - \beta| \quad \geq \quad \frac{t_5}{H(\beta)^m t_0^{(m-1)r_n}} - \frac{t_1}{t_0^{t_3 s_n}} \quad (n > k_3). \tag{10}$$

Nun bestimmen wir l, so daß die Ungleichung

$$t_0^{r_l} \leq H(\beta) < t_0^{s_l}$$

gilt. Die Eindeutigkeit von l ist klar. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem $H(\beta)$ zum ersten oder zweiten der folgenden Teilintervallen gehört:

1) $t_0^{r_l} \leq H(\beta) < t_0^{\frac{s_l}{\lambda}}$,

2) $t_0^{\frac{s_l}{\lambda}} \leq H(\beta) < t_0^{s_l}$.

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Im Falle 1): Setzt man in (10) $n = l$ ein und berücksichtigt die Doppelungleichung 1), folgt dann für $l > k_3$

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5}{H(\beta)^{2m-1}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{t_3\lambda}}.$$

Wird die Zahl λ so gewählt, daß sie der Ungleichung $\lambda > \frac{2m-1}{t_3}$ genügt, gilt dann

$$\frac{t_1}{H(\beta)^{t_3\lambda}} < \frac{1}{2}\frac{t_5}{H(\beta)^{2m-1}} \qquad (H(\beta) > H_1),$$

wobei H_1 eine passend groß gewählte positive Zahl ist. Also gilt

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5/2}{H(\beta)^{2m-1}} \qquad (H(\beta) > H_1).$$

Im Falle 2): Setzt man in (10) diesmal $n = l + 1$ ein, so erhält man unter Benutzung von 2) in (10)

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)\frac{r_{l+1}}{s_l}}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{t_3\frac{s_{l+1}}{s_l}}}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty$ und $0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < \ldots$ ist, ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} = +\infty$. Also gibt es ein $k_4 > k_3$, so daß für $l > k_4$ $\frac{s_{l+1}}{s_l} > \mu$ gilt.

Dabei ist μ eine später zu erklärende positive Zahl. Da auch $r_{l+1} - s_l + 1 < \theta$ gilt, existiert ein $k_5 \in \mathbb{N}$, so daß für $l > k_5 > k_4$ die Ungleichung $\frac{r_{l+1}}{s_l} < 2$ gilt. Also findet man daher für $l > k_5$

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5}{H(\beta)^{m+2\lambda(m-1)}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{\mu t_3}}.$$

Es sei μ so gewählt, daß die Ungleichung

$$\mu > \frac{m + 2\lambda(m-1)}{t_3}$$

gilt. Also ist

$$\frac{t_1}{H(\beta)^{\mu t_3}} \quad < \quad \frac{t_5/2}{H(\beta)^{m+2\lambda(m-1)}}$$

für $H(\beta) > H_2$ und folglich

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5/2}{H(\beta)^{m+2\lambda(m-1)}} \quad (H(\beta) > H_2).$$

Dabei ist H_2 eine passend groß gewählte positive Zahl. Ist also $H(\beta) > \max\{t_0^{r_{k_5}}, H_1, H_2\}$, dann gilt

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_6}{H(\beta)^{m+2\lambda(m-1)}},$$

wobei $t_6 = t_5/2$ gesetzt wurde. Somit erhalten wir endlich

$$\mu^*(\xi) \geq m. \tag{11}$$

Aus (7) und (11) folgt also $\mu^*(\xi) = m$, d.h. $\xi \in U_m^* = U_m$.

Satz 2 *Wir betrachten die verallgemeinerte Lückenreihe*

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \tag{12}$$

mit

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < \ldots,$$

wobei c_h $(h = 0, 1, \ldots)$ *algebraische Zahlen aus einem festen Zahlkörper* $\mathbb{Q}(\vartheta^\dagger) := \mathbb{Q}(c_0, c_1, \ldots)$ *mit* $[\mathbb{Q}(\vartheta) : \mathbb{Q}] = c$ *sind, so daß* $c_h = 0$ *im Falle* $r_n < h < s_n$, *aber* $c_{r_n} \neq 0$, $c_{s_n} \neq 0$ *für* $n = 1, 2, \ldots$. *Bezeichne* a_h *den Nenner der algebraischen Zahl* c_h, A_h *das kleinste gemeinsame Vielfache von* $a_0, \ldots, a_h$ *und* R *den Konvergenzradius von* $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \overline{|c_h|} z^h$. *Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:*

$$R > 0, \tag{13}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log A_n}{n} := \lambda < +\infty \quad (\lambda \geq 0), \tag{14}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} := \theta > 1, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} < +\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_{n-1}} < +\infty. \tag{15}$$

Es sei α *eine algebraische Zahl, die den folgenden Bedingungen genügt:*

$$0 < |\alpha| < R, \tag{16}$$

$$\text{nur für endlich viele } h \text{ ist} \quad P_h(\alpha) = 0, \tag{17}$$

$^\dagger\vartheta$ ist ganz algebraisch.

$$m\left(\log\left(\frac{1}{R}\right)^{+}+\lambda\right)<\frac{\theta}{2}\log\frac{R}{|\alpha|}-\log s_K(\alpha), \tag{18}$$

wo $K := \mathbb{Q}(\vartheta,\alpha)$, $m := [\mathbb{Q}(\vartheta,\alpha):\mathbb{Q}]$ *und* $\left(\frac{1}{R}\right)^{+} := \max(1,\frac{1}{R})$ *ist. Unter diesen Voraussetzungen ist* $F(\alpha)\in S\cup T$. *Wenn man alle Voraussetzungen bis auf* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}<+\infty$ *beibehält, diese aber durch* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}=+\infty$ *ersetzt, so ist* $F(\alpha)\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_i$.

Beweis : 1°) R' bezeichne den Konvergenzradius von $F(z)$. Dann ist $R\le R'$ und $R<+\infty$:

Da $R'=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[h]{|c_h|}}$, $R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[h]{\overline{|c_h|}}}$ und $|c_h|\le\overline{|c_h|}$ für alle h gilt, ist $R\le R'$. Ferner ist $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[h]{\overline{|c_h|}}\ge\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{\overline{|c_{r_n}|}}$ und $a_{r_n}c_{r_n}:=\eta_{r_n}$ für $n=1,2,\dots$ ganz algebraisch. Also läßt sich $c_{r_n}=\frac{\eta_{r_n}}{a_{r_n}}$ für $n=1,2,\dots$ schreiben. Daher erhält man $\overline{|c_{r_n}|}\ge\frac{1}{a_{r_n}}$ für $n=1,2,\dots$. Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{\overline{|c_{r_n}|}}\ge\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{a_{r_n}}}. \tag{19}$$

Andererseits erhält man aus (14)

$$A_{r_n}<e^{\lambda' r_n} \tag{20}$$

für $\lambda'>\lambda$ und genügend grosse n. Da $a_{r_n}\le A_{r_n}$ ist, ergibt sich hieraus

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{a_{r_n}}\le e^{\lambda'}. \tag{21}$$

Da λ' beliebig nahe an λ gewählt werden kann, folgt hieraus

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{a_{r_n}}\le e^{\lambda}. \tag{22}$$

Dann erhält man aus (19) und (22) $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{\overline{|c_{r_n}|}}\ge e^{-\lambda}$, d.h.

$$R < e^{\lambda} < +\infty. \tag{23}$$

2°) Wir wählen nun drei reelle Zahlen r, θ_1, λ_1, so daß folgende Ungleichungen gelten:

$$|\alpha| < r < R, \tag{24}$$

$$1 < \theta_1 < \theta, \tag{25}$$

$$\lambda_1 > \lambda, \tag{26}$$

$$m\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)^{+} + \lambda_1\right) < \frac{\theta_1}{2}\log\frac{r}{|\alpha|} - \log s_K(\alpha). \tag{27}$$

Diese Wahl ist möglich, da die beiden Seiten von (18) in bezug auf R, θ und λ stetig sind. Da $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} := \theta > 1$ ist, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n > N_1$

$$\frac{s_n}{r_n} > \theta_1$$

gilt.

3°) $F(\alpha) := \beta$ läßt sich in der Form

$$\beta = \beta_n + \rho_n \tag{28}$$

schreiben, wo

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\alpha) = \sum_{h=0}^{r_n} c_h \alpha^h \tag{29}$$

und

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(\alpha) = \sum_{h=s_n}^{\infty} c_h \alpha^h \tag{30}$$

ist. Wenn man die beiden Seiten von (29) mit A_{r_n} multipliziert, erhält man dann

$$A_{r_n}\beta_n = \sum_{h=0}^{r_n} A_{r_n} c_h \alpha^h. \tag{31}$$

Da $A_{r_n} c_h \in \mathbb{Q}\ (\vartheta)$ ganz algebraisch ist, läßt sich

$$A_{r_n} c_h = \frac{\xi_0^{(h)}}{D} + \frac{\xi_1^{(h)}}{D}\vartheta + \ldots + \frac{\xi_{c-1}^{(h)}}{D}\vartheta^{c-1} \quad (h = s_0, \ldots, r_n) \tag{32}$$

schreiben, wobei $\xi_0^h, \ldots, \xi_{c-1}^h$ und $D = |\Delta^2(1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{c-1})| (> 0)$ ganz rational sind. Multipliziert man die beiden Seiten von (31) mit D, so folgt mit (32)

$$DA_{r_n}\beta_n = \sum_{\mu=0}^{c-1} \sum_{h=0}^{r_n} \xi_\mu^{(h)} \vartheta^\mu \alpha^h \tag{33}$$

und daher

$$\beta_n = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{c-1} \sum\limits_{h=0}^{r_n} \xi_\mu^{(h)} \vartheta^\mu \alpha^h}{DA_{r_n}}. \tag{34}$$

Setzt man

$$f(x_1, x_2) \;:=\; \sum_{\mu=0}^{c-1} \sum_{h=0}^{r_n} \xi_\mu^{(h)} x_1^\mu x_2^h, \tag{35}$$

$$g(x_1, x_2) \;:=\; DA_{r_n}, \tag{36}$$

so ist $f(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$, $g(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ und

$$\beta_n = \frac{f(\vartheta, \alpha)}{g(\vartheta, \alpha)}. \tag{37}$$

Da $\alpha, \vartheta \in K$ und $[K : \mathbb{Q}] = m$ ist, erhält man mit Anwendung von Hilfssatz 7

$$H_K(\beta_n) \leq 2^m (c-1)^m (r_n + 1)^m H^m s_K(\vartheta)^{c-1} s_K(\alpha)^{r_n}. \tag{38}$$

Nun wollen wir $H = \max(H(f), H(g))$ nach oben abschätzen.

Aus 35 und 36 folgt $H(f) = \max\limits_{h,\mu} |\xi_\mu^{(h)}|$ und $H(g) = DA_{r_n}$. Deswegen werden wir zuerst $|\xi_\mu^{(h)}|$ nach oben abschätzen. Setzt man

$$DA_{r_n} c_h(\vartheta) = \delta, \tag{39}$$

so erhält man aus (32)

$$\delta = \xi_0^{(h)} + \xi_1^{(h)} \vartheta + \ldots + \xi_{c-1}^{(h)} \vartheta^{c-1}. \tag{40}$$

Wenn man zu den Konjugierten von ϑ übergeht, bekommt man das lineare Gleichungssystem von $\xi_0^{(h)}, \ldots, \xi_{c-1}^{(h)}$

$$\delta^{\{j\}} \quad = \quad \xi_0^{(h)} + \xi_1^{(h)} \vartheta^{\{j\}} + \ldots + \xi_{c-1}^{(h)} (\vartheta^{\{j\}})^{c-1} \quad (j = 1, \ldots, c). \tag{41}$$

Dies ist aber ein Cramersches Gleichungssystem mit der Lösung

$$\xi_\mu^{(h)} = \sum_{j=1}^{c} \frac{\Delta_{\mu j}}{\Delta} \delta^{\{j\}} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, c-1), \tag{42}$$

wobei Δ und alle $\Delta_{\mu j}$ von n und h unabhängig sind. Aus (39) erhält man nun

$$\overline{|\delta|} \leq DA_{r_n} \overline{|c_h|}. \tag{43}$$

Berücksichtigt man (42) und (43), folgt dann

$$|\xi_\mu^{(h)}| \leq C_1 A_{r_n} \overline{|c_h|} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, c-1), \tag{44}$$

wo C_1 eine nur von ϑ abhängige positive Konstante ist. Also gilt

$$H = \max_{h,\mu}(DA_{r_n}, |\xi_\mu^h|) \leq CA_{r_n} \max_{h=0}^{r_n} \overline{|c_h|}, \tag{45}$$

wobei $C = \max(D, C_1)$ gesetzt wurde. Da $|\alpha| < r < R$ gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} \overline{|c_h|} r^h$. Daraus folgt die Beschränkheit der Folge $\{\overline{|c_h|} r^h\}$. Wenn M eine obere Schranke dieser Folge ist, gilt dann

$$\overline{|c_h|} \leq \frac{M}{r^h} \quad (h = 0, 1, \ldots). \tag{46}$$

Folglich wird

$$H \leq CA_{r_n} M^+ \left[\left(\frac{1}{r}\right)^+\right]^{r_n} \tag{47}$$

erhalten. Aus (38) und (47) folgt dann

$$H_K(\beta_n) \leq 2^m (c-1)^m (r_n + 1)^m \left\{CA_{r_n} M^+ \left[\left(\frac{1}{r}\right)^+\right]^{r_n}\right\}^m s_K(\vartheta)^{c-1} s_K(\alpha)^{r_n}.$$

Setzt man

$$B_{r_n} : = 2(c-1)(r_n+1) CA_{r_n} M^+ s_K(\vartheta),$$

gilt dann

$$H_K(\beta_n) \leq B_{r_n}^m \left[\left(\frac{1}{r}\right)^+\right]^{mr_n} s_K(\alpha)^{r_n}. \tag{48}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log B_{r_n}}{r_n} &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{\log(2(c-1)CM^+s_K(\vartheta))}{r_n}+\\ &+\limsup_{n\to\infty}\frac{\log(r_n+1)}{r_n}+\limsup_{n\to\infty}\frac{A_{r_n}}{r_n}\end{aligned}$$

und daher

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log B_{r_n}}{r_n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{A_{r_n}}{r_n} = \lambda. \tag{49}$$

Deshalb gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N_2 > N_1$

$$\frac{\log B_{r_n}}{r_n} < \lambda_1$$

oder anders gesagt

$$B_{r_n} < e^{\lambda_1 r_n} \tag{50}$$

gilt. Unter Benutzung von (50) erhält man aus (48) für $n > N_2$

$$H_K(\beta_n) \leq e^{m\lambda_1 r_n}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^+\right]^{mr_n} s_K(\alpha)^{r_n}$$

und folglich

$$H_K(\beta_n) \leq e^{\left\{m\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)^+ +\lambda_1\right]+\log s_K(\alpha)\right\}r_n}.$$

Mit Hilfe von (27) folgt dann aus der letzten Ungleichung für $n > N_2$

$$H_K(\beta_n) < e^{\left(\frac{\theta_1}{2}\log\frac{r}{|\alpha|}\right)r_n} \tag{51}$$

und daher

$$H_K(\beta_n) < \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_1}{2}r_n} \quad (n > N_2). \tag{52}$$

4°) Wir wollen jetzt $H_K(\beta_n)$ nach unten abschätzen.
Nach den Voraussetzungen des Satzes gibt es ein $N_3 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N_3 > N_2$ $\beta_n - \beta_{n-1} = P_n(\alpha) \neq 0$ ist. Also gilt für alle $n > N_3$

$$\begin{aligned} |\beta_n - \beta_{n-1}| &= |P_n(\alpha)| \leq \sum_{h=s_{n-1}}^{\infty} |c_h||\alpha|^h \\ &\leq \sum_{h=s_{n-1}}^{\infty} \frac{M}{r^h}|\alpha|^h \leq \frac{M}{1-\frac{|\alpha|}{r}} \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Falls wir

$$\frac{M}{1-\frac{|\alpha|}{r}} := C_0(r,\alpha) = C_0 \tag{54}$$

setzen, so ist $C_0 > 0$, und (53) wird zu

$$|\beta_n - \beta_{n-1}| \leq C_0 \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}}. \tag{55}$$

Andererseits folgt aus $\beta_n - \beta_{n-1} \neq 0$ für $n > N_3$ laut Hilfssatz 8

$$|\beta_n - \beta_{n-1}| > \frac{1}{\tau H_K(\beta_n) H_K(\beta_{n-1})}. \tag{56}$$

Dabei ist τ eine nur von m abhängige positive Konstante. Wenn wir nun (55) und (56) verbinden, erhalten wir

$$\frac{1}{\tau H_K(\beta_n) H_K(\beta_{n-1})} < C_0 \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}} \tag{57}$$

für $n > N_3$. Wird die Ungleichung (52) für $n-1 \geq N_3 > N_2$ geschrieben und diese in (57) eingesetzt, so erhält man

$$H_K(\beta_n) \quad > \quad C_2 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{s_{n-1}-\frac{\theta_1}{2}r_{n-1}} \qquad (n > N_3), \tag{58}$$

wobei $C_2 := \frac{1}{C_0 \tau} > 0$ gesetzt wurde. Da $n - 1 \geq N_3 > N_1$ ist, gilt $s_{n-1} > \theta_1 r_{n-1}$. Deshalb folgt aus (58)

$$H_K(\beta_n) \quad > \quad C_2 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{s_{n-1}}{2}} \qquad (n > N_3), \tag{59}$$

was die gesuchte untere Abschätzung für $H_K(\beta_n)$ bildet.

5°) Wir zeigen nun, daß von einer bestimmten Stelle ab die Folge $\{H_K(\beta_n)\}$ streng monoton wachsend ist. Es sei θ_2 so gewählt, daß gilt

$$1 < \theta_1 < \theta_2 < \theta. \tag{60}$$

Da $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} := \theta > 1$ ist, existiert ein $N_4 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N_4 > N_3$

$$\frac{s_n}{r_n} > \theta_2 \tag{61}$$

gilt. Aus (59) und (61) folgt nun

$$H_K(\beta_{n+1}) \quad > \quad C_2 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_2}{2} r_n} \qquad (n > N_4). \tag{62}$$

Andererseits gilt auch nach (52)

$$H_K(\beta_n) \leq \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_1}{2} r_n} \qquad (n > N_4). \tag{63}$$

Da $\frac{r}{|\alpha|} > 1$, $\theta_2 > \theta_1$ und $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$ sind, gibt es ein $N_5 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N_5 > N_4$ die rechte Seite von (62) größer als die rechte Seite von (63) ist. Also gilt

$$H_K(\beta_{n+1}) > H_K(\beta_n) \quad (n > N_5), \tag{64}$$

was zu zeigen war. Somit bekommen wir, daß alle β_n für $n > N_5$ voneinander verschieden sind.

6°) Wir wollen jetzt $|\beta - \beta_n| = |\rho_n|$ nach oben abschätzen. Aus (30) und (46) erhalten wir

$$|\beta - \beta_n| \quad = \quad |\rho_n| \leq \sum_{h=s_n}^{\infty} \frac{M}{r^h}|\alpha|^h \leq \frac{M}{1-\frac{|\alpha|}{r}}\left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und mit (54)

$$|\beta - \beta_n| \leq \frac{C_0}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{s_n}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{65}$$

und folglich aus (65) und (52)

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_0}{H_K(\beta_n)^{\frac{2}{\theta_1}\frac{s_n}{r_n}}} \qquad (n > N_2). \tag{66}$$

Wenn man (60) und (61) mitberücksichtigt, so wird (66) zu

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_0}{H_K(\beta_n)^{\chi}} \qquad (n > N_5), \tag{67}$$

wobei $\chi = 2\frac{\theta_2}{\theta_1}$ gesetzt wurde. Aus $\theta_2 > \theta_1$ folgt $\chi > 2$. Also gilt (67) für unendlich viele voneinander verschiedene algebraische Zahlen $\beta_n \in K$. Wenn wir in der Folgerung von Hilfssatz 6 als $P(x)$ das Körperpolynom von β_n in bezug auf K und als $P_1(x)$ das Minimalpolynom von β_n nehmen, erhalten wir dann

$$H(\beta_n) < C_3(m) H_K(\beta_n), \tag{68}$$

wobei $C_3(m) = 2^m(m+1)$ gesetzt wurde. Aus (67) und (68) bekommt man mit $C_4 = C_0 C_3^{\chi}$

$$|\beta - \beta_n| \quad < \quad \frac{C_4}{H(\beta_n)^{\chi}} \qquad (n > N_5).$$

Da nach der Folgerung von Hilfssatz 5 $H(\beta_n) \geq \frac{1}{2}[H_K(\beta_n)]^{\frac{1}{m}}$ und nach (59) $\lim_{n\to\infty} H_K(\beta_n) = +\infty$ gilt, ist $\lim_{n\to\infty} H(\beta_n) = +\infty$. Deshalb gibt es zu χ' mit $2 < \chi' < \chi$ so ein $N_6 \in \mathbb{N}$, daß für alle $n > N_6 > N_5$ die Ungleichung

$$|\beta - \beta_n| < \frac{1}{H(\beta_n)^{\chi'}} \tag{69}$$

gilt. Da die in (69) aufgetauchten β_n alle voneinander verschieden sind, widerspricht (69) dem Roth-LeVequeschen Satz im Falle der Algebraizität von β. Also ist β transzendent.

7°) $\beta \in SUT$: Um die Behauptung zu zeigen, wenden wir den Satz von Baker (S. 4) auf β und β_n an. Da die Folge $\{H_K(\beta_n)\}$ nach (64) für $n > N_5$ streng monoton wachsend ist, sind alle β_n für $n > N_5$ voneinander verschieden. Nun bilden wir das Verhältnis $\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)}$. Wegen (59) und (63) für $n+1$ statt n erhält man

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \frac{\left(\frac{\theta_1}{2} \log \frac{r}{|\alpha|}\right) r_{n+1}}{\log C_2 + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)\right] s_{n-1}} \quad (n > N_6)$$

oder mit einigen Veränderungen

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \theta_1 \frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} \frac{1}{1 + \frac{C'}{s_{n-1}}} \quad (n > N_6), \tag{70}$$

wobei $C' = \frac{2 \log C_2}{\log \frac{r}{|\alpha|}}$ gesetzt wurde. Das auf der rechten Seite von (70) stehende Verhältnis $\frac{r_{n+1}}{s_{n-1}}$ läßt sich so schreiben:

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} = \frac{r_{n+1}}{s_n} \frac{s_n}{r_n} \frac{r_n}{s_{n-1}}, \tag{71}$$

woraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} = \phi\Theta\phi, \tag{72}$$

wo $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = \Theta$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_{n-1}} = \phi$ gesetzt wurde. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C'}{s_{n-1}} = 0$ ist, folgt aus (70) und (72)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leq \frac{\theta_1 \Theta \phi^2}{2}. \tag{73}$$

Da θ_1 gleich am Anfang beliebig nahe an θ gewählt werden darf, erhalten wir aus (73)

$$\mathop{\mathrm{hm\,sup}}_{n\to\infty} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leq \frac{\theta\Theta\phi^2}{2},$$

woraus laut dem oben genannten Satz von A. Baker angewandet auf β und die Folge $\{\beta_n\}$ mit $n > N_7$ folgt, daß $\beta \in S \cup T$ ist. Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} < +\infty$$

bewiesen.

Nun betrachten wir den zweiten Teil des Satzes betreffend den Fall

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty. \tag{74}$$

Aus der Folge $\left\{\frac{s_n}{r_n}\right\}$ wählen wir eine Teilfolge $\left\{\frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}\right\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_{n_k}}{r_{n_k}} = +\infty,$$

was laut (74) möglich ist. Aus (66) erhält man

$$|\beta - \beta_{n_k}| < \frac{C_0}{H_K(\beta_{n_k})^{\frac{2}{\theta_1}\frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}}} \qquad (n_k > N_5), \tag{75}$$

weil $N_5 > N_2$ ist. Da $H_K(\beta_n) \to +\infty$ ist, gilt auch $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$. Andererseits ist nach der Folgerung von Hilfssatz 5 und Hilfssatz 6

$$\frac{1}{2} H_K(\beta_{n_k})^{\frac{1}{m}} < H(\beta_{n_k}) < 2^m(m+1) H_K(\beta_{n_k}). \tag{76}$$

Da $H_K(\beta_n) \to +\infty$ für $k \to +\infty$ ist, so wird $H(\beta_{n_k}) \to +\infty$ nach der linken Hälfte von (76). Wegen $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$ gibt es ein $N_7 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n_k > N_7 > N_5$ gilt

$$H_K(\beta_{n_k}) > 2^m(m+1). \tag{77}$$

Aus (77) und der rechten Hälfte von (76) folgt für $n_k > N_7$

$$H(\beta_{n_k}) < (H_K(\beta_{n_k}))^2. \tag{78}$$

Wegen (78) folgt aus (75)

$$|\beta - \beta_{n_k}| < \frac{C_0}{H(\beta_{n_k})^{\frac{1}{\theta_1}\frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}}} \qquad (n_k > N_7), \tag{79}$$

wobei $\lim\limits_{k\to\infty} H(\beta_{n_k}) = +\infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{s_{n_k}}{r_{n_k}} = +\infty$ ist. Wir können so eine Teilfolge $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ von $\{\beta_{n_k}\}$ auswählen, daß die Folge $\{H(\beta_{n_{k_j}})\}$ streng monoton wachsend ist. Aus (79) folgert man nun

$$|\beta - \beta_{n_{k_j}}| \;<\; \frac{C_0}{H(\beta_{n_{k_j}})^{\frac{1}{\theta_1}\frac{s_{n_{k_j}}}{r_{n_{k_j}}}}} \qquad (n_{k_j} > N_7),$$

wobei $H(\beta_{n_{k_j}})$ streng monoton wachsend und $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{\theta_1}\frac{s_{n_{k_j}}}{r_{n_{k_j}}} = +\infty$ ist. Also ist
$\beta \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i.$

Einige Beispiele zu Satz 1:

In folgenden fünf Beispiele seien $\{s_n\}$ und $\{r_n\}$ zwei Folgen von ganzen rationalen Zahlen mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty, \quad \limsup_{n\to\infty}(r_{n+1} - s_n) < +\infty,$$
$$0 = s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < \dots.$$

(z.B. $s_0 = 0$, $s_n = (n+k_0)!, (n = 1,2,\dots)$, $r_{n+1} = s_n + k_0$, $(n = 0,1,2,\dots)$, $k_0 \in \mathbb{Z}^+$).

1. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = 1, \text{ falls } & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{a}{b}\right) \in U_1$ für jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$.

2. Eine Verallgemeinerung von Beispiel 1: Sei $\alpha \neq 0$ eine algebraische Zahl vom Grad m. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = \alpha, \text{ falls } & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{a}{b}\right) \in U_m$ für jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$.

3. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = 1, \text{ falls } & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F(\alpha) \in U_m$ für eine algebraische Zahl $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vom Grad m mit $0 < \overline{|\alpha|} < 1$ (etwa für $\alpha = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ mit $0 < p < q$, p und q sind Primzahlen).

4. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = \sqrt{2}, \text{ falls } & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) \in U_4$.

5. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = i, \text{ falls } & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) \in U_4$.

Einige Beispiele zu Satz 2:

1. $\xi = 0,12345678910111213\ldots \in S \cup T$. (Siehe [21]).

2. Sind $\{\nu_n\}$ eine Teilfolge der natürlichen Zahlen und $r, s, a, c, d_{\nu_n} \in \mathbb{Z}$ mit $r \neq 0$, $s > 0$, $(r,s) = 1$, $a \geq 2$, $c \geq 2$, $0 < |d_{\nu_n}| < D^{\nu_n}$, $D > 0$, dann ist

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\nu_n} r^{\nu_n}}{s^{\nu_n}} a^{-c^{\nu_n}} \in \begin{cases} S \cup T, & , \quad \text{falls } \limsup\limits_{n\to\infty}(\nu_{n+1} - \nu_n) < +\infty, \\ U_1, & , \quad \text{falls } \limsup\limits_{n\to\infty}(\nu_{n+1} - \nu_n) = +\infty. \end{cases}$$

(Siehe [21]).

3. Ist $F(z)$ die Porter-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z(1-z)]^{4^n}}{\binom{4^n}{2\cdot 4^{n-1}}},$$

so ist $F(1/b) \in S \cup T$ für $b \geq 2$ und $F((-1)/b) \in S \cup T$ für $b \geq 7$. (Siehe [21]).

Literatur

[1] **BAKER, A.** : On Mahler's Classification of Transcendental Numbers, Acta Math., 111(1964), 97-120.

[2] **BRAUNE, E.** : Über arithmetische Eigenschaften von Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, Mh. Math., 84(1977), 1-11.

[3] **COHN, H.** : Note on almost-algebraic numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), 1042-1045.

[4] **GÜTING, R.** : Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers, Michigan Math. J., 8(1961), 149-159.

[5] **HECKE, E.** : Theorie der algebraischen Zahlen, Leibzig (1923).

[6] **İÇEN, O.Ş.** : Anhang zu den Arbeiten " Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II", İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 38(1973), 25-35.

[7] **KOKSMA, J.F.** : Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, Mh. Math. Physik, 48(1939), 176-189.

[8] **LeVEQUE, W. J.** : On Mahler's U-Numbers, J. London Math. Soc., 28(1953), 220-229.

[9] **LeVEQUE, W. J.** : Topics in Number Theory, Volume II, Massachusetts, U.S.A. London England (1961).

[10] **MAHLER, K.** : Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I, J. reine angew. Math. 166(1932), 118-136.

[11] **MAHLER, K.** : An application of Jensen formula to polynomials, Mathematika, 7(1960), 98-100.

[12] **MAHLER, K.** : Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients, J. Australian Math. Soc., 5(1965), 56-64.

[13] **ORYAN, M.H.** : On power series and Mahler's U-numbers, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 47(1983-1986), 117-125.

[14] **ORYAN, M.H.** : On power series and Mahler's U-numbers, Mathematica Scandinavica,65(1989), 143-151.

[15] **SCHNEIDER, Th.** : Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1957).

[16] **WIRSING, E.** : Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, J. reine angew. Math., 206(1961), 67-77.

[17] **ZEREN, B.M.** : Über einige komplexe und p-adische Lückenreihen mit Werten aus den Mahlerschen Unterklassen U_m, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mee. Seri A, 45(1980), 89-130.

[18] **ZEREN, B.M.** : Über die Transzendenz der Werte einiger schnell konvergenter Potenzreihen für algebraische Argumente, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 38(1985), 473-496.

[19] **ZEREN, B.M.** : Über die Natur der Transzendenz der Werte einer Art verallgemeinerter Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten für algebraische Argumente, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 41(1988), 569-588.

[20] **ZEREN, B.M.** : Über eine Klasse von verallgemeinerten Lückenreihen, deren Werte für algebraische Argumente transzendent, aber keine U-Zahlen sind I, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der., 50(1991), 79-99.

[21] **ZEREN, B.M.** : Über eine Klasse von verallgemeinerten Lückenreihen, deren Werte für algebraische Argumente transzendent, aber keine U-Zahlen sind II, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der., 50(1991), 101-114.

H.Gürses
Department of Mathematics
Faculty of Science
Istanbul University
Vezneciler 34459, Istanbul, Turkey
E-mail: gurses@istanbul.edu.tr