İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat Der. **59** (2000), 89-102

ÜBER EINE KLASSE VERALLGEMEINERTER LÜCKENREIHEN MIT ALGEBRAISCHEN KOEFFIZIENTEN

Halidun Gürses

ON A CLASS OF GENERALIZED LACUNARY POWER SERIES WITH ALGEBRAIC COEFFICIENTS

Abstract

In this work some generalized lacunary power series with algebraic coefficients are considered and it is shown that under certain conditions these series take values belonging to the subclass U_m in Mahler's classification of complex numbers, where m denotes a natural number depending on the given series and the argument, for some algebraic values of the argument.

In dieser Arbeit betrachtet man eine gewisse Klasse verallgemeinerter Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten. Es wird bewiesen, daß eine solche Lückenreihe für gewisse algebraische Argumente Werte aus der Mahlerschen Unterklasse U_m annimmt, wobei m eine natürliche Zahl ist, die von der Reihe und vom Argument abhängt. Das Beweisverfahren folgendes Satzes ist genau so wie das von Satz 1 in [3]. Um den folgenden Satz zu beweisen, werden wir die folgenden Hilfssätze benutzen. Außerdem verweisen wir für nicht eigens erwähnte Begriffe auf die Literatur (etwa [5], [15], [17]) und für Klasseneinteilung von komplexen Zahlen auf [7], [10] und [16].

Hilfssatz 1 (İÇEN) *Es seien α_j $j = 1, \ldots, k$; $(k \geq 1)$ aus einem bestimmten algebraischen Zahlkörper vom Grad g entnommen und die Höhen* *derselben mit* $H(\alpha_j)$ *bezeichnet. Es sei ferner* η *eine weitere algebraische Zahl, die von* α_j $(j = 1, \ldots, k)$ *durch die Relation*

$$F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0$$

abhängt, wobei $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ *ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten in seinen sämtlichen Argumenten bedeutet. Es seien außerdem der Grad von* $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ *nach* y *mindestens 1. Dann ist der Grad von* $\eta \leq dg$, *und es gilt für die Höhe* $H(\eta)$ *von* η *folgende Abschätzung:*

$$H(\eta) \leq 3^{2dg+(\ell_1+\ldots+\ell_k)g} H^g H(\alpha_1)^{\ell_1 g} \ldots H(\alpha_k)^{\ell_k g}$$

Dabei bedeutet d *den Grad von* $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ *nach* y, ℓ_j *den Grad desselben nach* x_j $(j = 1, \ldots, k)$ *und* H *das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von* $F(y, x_1, \ldots, x_k)$.

Beweis : (Siehe [6])

Hilfssatz 2 *Es seien* α_1, α_2 *zwei voneinander verschiedene algebraische und zueinander konjugierte Zahlen,* H *ihre Höhe und* n *ihr Grad. Dann gilt*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq (4n)^{-(n-2)/2} \{(n+1)H\}^{-(2n-1)/2}.$$

Beweis : (Siehe [4])

Hilfssatz 3 *Es seien* γ, δ *zwei nicht zueinander konjugierte algebraische Zahlen mit den jeweiligen Graden* n_1, n_2 *und den jeweiligen Höhen* $H(\gamma)$, $H(\delta)$. *Dann gilt*

$$|\gamma - \delta| \geq \frac{1}{2^{\max(n_1,n_2)-1} [(n_1+1)H(\gamma)]^{n_2} [(n_2+1)H(\delta)]^{n_1}}.$$

Beweis : (Siehe [4])

Satz 1 *Wir betrachten die verallgemeinerte Lückenreihe*

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$$

mit

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \quad (k = 0,1,2,\ldots),$$
$$0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < \ldots,$$

wobei c_h $(h = 0,1,\ldots)$ *algebraische Zahlen aus einem festen Zahlkörper* $\mathbb{Q}\ (\vartheta) := \mathbb{Q}\ (c_0, c_1, \ldots)$ *sind, so daß* $c_h = 0$ *im Falle* $r_n < h < s_n$, *aber* $c_{r_n} \neq 0$, $c_{s_n} \neq 0$ *für* $n = 1,2,\ldots$. *Bezeichnen wir den Konvergenzradius von* $\sum_{n=0}^{\infty} H(c_n) z^n$ *mit* R.
Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:

$$R > 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} H(c_n) < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{s_n} < +\infty.$$

Es sei α *eine algebraische Zahl, die den folgende Bedingungen genügt:*

$$0 < \overline{|\alpha|} < R,$$

$$K := \mathbb{Q}\ (\vartheta, \alpha), \quad [K : \mathbb{Q}\,] = m,$$

$$\exists_\infty h\ :\ \partial P_h(\alpha) = m, \quad P_h(\alpha) \neq 0.$$

Dann ist $F(\alpha) \in U_m$.

Beweis: 1°) Da $c_n \in A$ ist, gilt $\overline{|c_n|} < 2H(c_n)$. Also konvergiert $F(z)$ für $z = \alpha$ mit $0 < \overline{|\alpha|} < R$.

2°) $F(\alpha) := \xi$ läßt sich in der Form

$$\xi \;=\; \eta_{r_n} + \rho_{r_n}$$

schreiben, wobei

$$\eta_{r_n} \;= c_{s_0}\alpha^{s_0} + \ldots + c_{r_1}\alpha^{r_1} + \ldots + c_{s_{n-1}}\alpha^{s_{n-1}} + \ldots + c_{r_n}\alpha^{r_n}, \qquad (1)$$

$$\rho_{r_n} \quad = \quad c_{s_n}\alpha^{s_n} + \ldots + c_{r_{n+1}}\alpha^{r_{n+1}} + \cdots$$

ist. Aus (1) folgt also

$$\eta_{r_n} - c_{s_0}\alpha^{s_0} - \ldots - c_{r_1}\alpha^{r_1} - \ldots - c_{s_{n-1}}\alpha^{s_{n-1}} - \ldots - c_{r_n}\alpha^{r_n} = 0.$$

Setzt man

$$P(y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}) = y - x^{s_0}x_{s_0} - \ldots - x^{r_1}x_{r_1} - \ldots - x^{r_n}x_{r_n},$$

so gilt

$$P(y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}) \in \mathbb{Z}[y, x, x_{s_0}, \ldots, x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}], \quad H(P) = 1$$

und

$$P(\eta_{r_n}, \alpha, c_{s_0}, \ldots, c_{r_1}, \ldots, c_{s_{n-1}}, \ldots, c_{r_n}) = 0.$$

Mit Berücksichtigung von Hilfssatz 1 erhält man also die Ungleichungen $\partial\eta_{r_n} \leq m$ und

$$H(\eta_{r_n}) \leq \{3^{2r_n+3}H(\alpha)^{r_n}H(c_{s_0})\ldots H(c_{r_1})\ldots H(c_{s_{n-1}})\ldots H(c_{r_n})\}^m.$$

Da $\limsup\limits_{n\to\infty} H(c_n) < +\infty$ ist, gibt es eine reelle Zahl $B \geq 1$ mit $H(c_n) \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich

$$H(\eta_{r_n}) \quad \leq \quad \{3^{5r_n}H(\alpha)^{r_n}B^{r_n}\}^m$$

Setzt man $3^{5m}H(\alpha)^m B^m = t_0$ $(t_0 > 1)$, so hat man

$$H(\eta_{r_n}) \leq t_0^{r_n} \qquad (n > k_1). \tag{2}$$

3°) Wir wollen nun $|\xi - \eta_{r_n}| = |\rho_{r_n}|$ nach oben abschätzen.

Nach der Cauchyschen Ungleichung gilt für $i = 0, 1, \ldots$

$$|c_i| \leq \frac{M}{\rho^i} \quad (0 < \overline{|\alpha|} < \rho < R, \;\; M = \max_{|z|=\rho}|F(z)|).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\xi-\eta_{r_n}| &\leq |c_{s_n}|(\overline{|\alpha|})^{s_n}+\ldots+|c_{r_{n+1}}|(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}}+|c_{s_{n+1}}|(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}}+\ldots\\
&\leq \frac{M}{\rho^{s_n}}(\overline{|\alpha|})^{s_n}+\ldots+\frac{M}{\rho^{r_{n+1}}}(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}}+\frac{M}{\rho^{s_{n+1}}}(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}}\ldots\\
&= \frac{M}{\rho^{s_n}}(\overline{|\alpha|})^{s_n}\left[1+\ldots+\frac{(\overline{|\alpha|})^{r_{n+1}-s_n}}{\rho^{r_{n+1}-s_n}}+\frac{(\overline{|\alpha|})^{s_{n+1}-s_n}}{\rho^{s_{n+1}-s_n}}+\ldots\right]\\
&\leq \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} M\frac{1}{1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Setzt man $M\frac{1}{1-\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}=t_1(t_1>0)$, $\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}=t_2$ $(t_2>1)$ und $\frac{\log t_2}{\log t_0}=$ t_3 $(t_3>0)$, so wird

$$|\xi-\eta_{r_n}|\leq\frac{t_1}{t_2^{s_n}}=\frac{t_1}{(t_0^{r_n})^{\frac{s_n}{r_n}\frac{\log t_2}{\log t_0}}}=\frac{t_1}{(t_0^{r_n})^{\frac{s_n}{r_n}t_3}}. \tag{3}$$

Da für $n>k_1$ die Ungleichung $H(\eta_{r_n})\leq t_0^{r_n}$ gilt, erhält man aus (3)

$$|\xi-\eta_{r_n}| \leq \frac{t_1}{H(\eta_{r_n})^{\frac{s_n}{r_n}t_3}},\quad (n>k_1). \tag{4}$$

Offenbar ist $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}t_3=+\infty$.

4°) Nun betrachten wir wieder η_{r_n}, die durch (1) gegeben ist. Im Falle $m=1$ ist der Grad von η_{r_n} für jedes n gleich m. Im Falle $m>1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{r_n} in bezug auf den Körper $\mathbb{Q}$ (ϑ,α) nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden. Damit ist auch in diesem Falle nach einem bestimmten n ab der Grad von η_{r_n} gleich m. Für $m=1$ ist die Behauptung klar. Um die Behauptung im Falle $m>1$ zu beweisen, bestätigen wir zuerst die folgenden Aussagen: Für ein festes Paar (i,j) $(i\neq j)$ gilt :

a) Von einer bestimmten Stelle ab folgt aus $\eta_{r_n}^{(i)}\neq\eta_{r_n}^{(j)}$ die Ungleichheit $\eta_{r_{n+1}}^{(i)}\neq\eta_{r_{n+1}}^{(j)}$.

b) Zu jeder beliebig gewählten natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl $k'>N$, so daß mindestens eine der Ungleichheiten $\eta_{r_{k'}}^{(i)}\neq\eta_{r_{k'}}^{(j)}$

und $\eta^{(i)}_{r_{k'+1}} \neq \eta^{(j)}_{r_{k'+1}}$ gilt.

Beweis von a): Aus den Gleichheiten

$$\left.\begin{array}{l} \eta^{(i)}_{r_{n+1}} = \eta^{(i)}_{r_n} + c^{(i)}_{s_n}(\alpha^{(i)})^{s_n} + \ldots + c^{(i)}_{r_{n+1}}(\alpha^{(i)})^{r_{n+1}} \\ \eta^{(j)}_{r_{n+1}} = \eta^{(j)}_{r_n} + c^{(j)}_{s_n}(\alpha^{(j)})^{s_n} + \ldots + c^{(j)}_{r_{n+1}}(\alpha^{(j)})^{r_{n+1}} \end{array}\right\}$$

erhält man

$$\eta^{(i)}_{r_{n+1}} - \eta^{(j)}_{r_{n+1}} = \eta^{(i)}_{r_n} - \eta^{(j)}_{r_n} - \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left[c^{(i)}_k(\alpha^{(i)})^k - c^{(j)}_k(\alpha^{(j)})^k\right]$$

und daher

$$|\eta^{(i)}_{r_{n+1}} - \eta^{(j)}_{r_{n+1}}| \geq |\eta^{(i)}_{r_n} - \eta^{(j)}_{r_n}| - \sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left|c^{(i)}_k(\alpha^{(i)})^k - c^{(j)}_k(\alpha^{(j)})^k\right|.$$

Der Grad von η_{r_n} sei ν. Da $\nu \leq m$ und $\eta^{(i)}_{r_n} \neq \eta^{(j)}_{r_n}$ ist, folgt aus Hilfssatz 2

$$\begin{aligned} |\eta^{(i)}_{r_n} - \eta^{(j)}_{r_n}| &\geq (4\nu)^{-(\nu-2)/2}\{(\nu+1)H(\eta_{r_n})\}^{-(2\nu-1)/2} \\ &\geq (4m)^{-(m-2)/2}\{(m+1)H(\eta_{r_n})\}^{-(2m-1)/2}. \end{aligned}$$

Daraus folgert man mit Hilfe von $H(\eta_{r_n}) < t_0^{r_n}$ $(n > k_1)$

$$|\eta^{(i)}_{r_n} - \eta^{(j)}_{r_n}| \geq \frac{t_4}{H(\eta_{r_n})^{\frac{2m-1}{2}}} \geq \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2}r_n}} \quad (n > k_1),$$

wobei $(4m)^{-(m-2)/2}(m+1)^{-(2m-1)/2} = t_4$ gesetzt wurde. Da für jedes $\gamma \in A$ die Ungleichung $\overline{|\gamma|} \leq 2H(\gamma)$ gilt, bekommt man dann

$$\begin{aligned} |c^{(i)}_t(\alpha^{(i)})^t - c^{(j)}_t(\alpha^{(j)})^t| &= |c^{(i)}_t(\alpha^{(i)})^t - c^{(j)}_t(\alpha^{(i)})^t + c^{(j)}_t(\alpha^{(i)})^t - c^{(j)}_t(\alpha^{(j)})^t| \\ &= |(\alpha^{(i)})^t(c^{(i)}_t - c^{(j)}_t) + c^{(j)}_t((\alpha^{(i)})^t - (\alpha^{(j)})^t)| \\ &\leq 4(\overline{|\alpha|})^t\overline{|c_t|} \\ &\leq 8(\overline{|\alpha|})^t H(c_t). \end{aligned}$$

Da nach der Cauchyschen Ungleichung für $t = 0, 1, \ldots$

$$|H(c_t)| < \frac{M'}{\rho^t} \quad (\overline{|\alpha|} < \rho < R\,,\ M' = \max_{|z|=\rho} |\sum_{i=0}^{\infty} H(c_i) z^i|)$$

gilt, erhält man

$$|c_t^{(i)}(\alpha^{(i)})^t - c_t^{(j)}(\alpha^{(j)})^t| \leq \frac{8M'}{\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^t}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s_n}^{r_{n+1}} \left|c_k^{(i)}(\alpha^{(i)})^k - c_k^{(j)}(\alpha^{(j)})^k\right| &\leq \frac{8M'}{\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}} + \ldots + \frac{8M'}{\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{r_{n+1}}} \\
&= 8M' \left\{ \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} + \ldots + \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{r_{n+1}} \right\} \\
&\leq 8M' \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{s_n} \frac{1}{1 - \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$|\eta_{r_{n+1}}^{(i)} - \eta_{r_{n+1}}^{(j)}| \geq \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2} r_n}} - \frac{8M'}{\left(1 - \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty$ ist, gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > k_2 > k_1$

$$\frac{8M'}{\left(1 - \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{s_n}} < \frac{t_4}{t_0^{\frac{2m-1}{2} r_n}}$$

gilt. Damit ist der Beweis von a) beendet.

Beweis von b): Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach den Voraussetzungen des Satzes können wir ein $k' \in \mathbb{N}$ wählen, so daß $k' > N$ und $\partial P_{k'}(\alpha) = m$ ist. Wäre für dieses k' sowohl $\eta_{r_{k'}}^{(i)} = \eta_{r_{k'}}^{(j)}$ als auch $\eta_{r_{k'+1}}^{(i)} = \eta_{r_{k'+1}}^{(j)}$ gültig, so würde aus den Gleichheiten

$$\begin{aligned}\eta_{r_{k'+1}}^{(i)} &= \eta_{r_{k'}}^{(i)} + P_{k'}^{(i)}(\alpha) \\ \eta_{r_{k'+1}}^{(j)} &= \eta_{r_{k'}}^{(j)} + P_{k'}^{(j)}(\alpha)\end{aligned}$$

$P_{k'}^{(i)}(\alpha) = P_{k'}^{(j)}(\alpha)$ erhalten. Das ist aber ein Widerspruch zu $\partial P_{k'}(\alpha) = m$. Damit ist auch b) bewiesen.

Wir werden nun beweisen, wenn die natürliche Zahl $k_3 > k_2$ so gewählt wird, daß $\partial P_{k_3}(\alpha) = m$ gilt, ist dann für jedes $k > k_3$ $\partial \eta_{r_k} = m$. Nach b) gilt mindestens eine der Ungleichheiten $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$ und $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Ist $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$, so ist $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$ nach a) . Ist aber $\eta_{r_{k_3}}^{(i)} = \eta_{r_{k_3}}^{(j)}$, so ist wieder $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$ nach b). Also gilt immer $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Da k_3 vom Paar (i,j) unabhängig gewählt wird, gilt für beliebiges Paar (i,j) $(i \neq j)$ auch $\eta_{r_{k_3+1}}^{(i)} \neq \eta_{r_{k_3+1}}^{(j)}$. Also ist der Grad von $\eta_{r_{k_3+1}}$ gleich m. Mit a) erhält man dann $\partial \eta_{r_k} = m$ für jedes $k > k_3$.

Es gibt unendlich viele voneinander verschiedene Glieder in der Folge $\{\eta_{r_n}\}$:

Nach Voraussetzung des Satzes gibt es unendlich viele n, so daß $\partial P_n(\alpha) = m$ und $P_n(\alpha) \neq 0$ ist. Daher existiert eine Teilfolge $\{n_k\}$ der natürlichen Zahlen mit $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, so daß für $j = 1, 2, \ldots$ $\partial P_{n_j}(\alpha) = m$ und $P_{n_j}(\alpha) \neq 0$ gilt. Gäbe es in der Folge $\{\eta_{r_n}\}$ nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder, hätte dann die Folge $\{|\eta_{r_{n_j+1}} - \eta_{r_{n_j}}|\}$ eine positive untere Schranke. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß

$$0 < |\eta_{r_{n_j+1}} - \eta_{r_{n_j}}| = |P_{n_j}(\alpha)| \quad , \quad \lim_{j\to\infty} |P_{n_j}(\alpha)| = 0$$

gilt. Also gibt es eine Teilfolge $\{\eta_{r_{m_j}}\}$ $(m_1 > k_3)$ von $\{\eta_{r_n}\}$, so daß ihre Glieder voneinander und von ξ verschieden sind und $\partial \eta_{r_{m_j}} = m$ für jedes j gilt. Damit folgert man aus (4)

$$0 < |\xi - \eta_{r_{m_j}}| < \frac{t_1}{H(\eta_{r_{m_j}})^{\frac{s_{m_j}}{r_{m_j}} t_3}}.$$

Da t_3 positiv und $\lim_{j\to\infty} \frac{s_{m_j}}{r_{m_j}} = +\infty$ ist, ist auch $\lim_{j\to\infty} \frac{s_{m_j}}{r_{m_j}} t_3 = +\infty$. Also ist $\xi \in \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, d.h.

$$\mu^*(\xi) \quad \leq \quad m. \tag{5}$$

5°) Wir werden nun zeigen, daß $\mu^*(\xi) \geq m$ ist.

1) Da nach der Definition von $\mu^*(\xi)$ die Ungleichung $\mu^*(\xi) \geq 1$ immer richtig ist, gibt es im Falle $m = 1$ nichts zu zeigen.

2) Sei nun $m > 1$ und β eine algebraische Zahl, deren Grad kleiner als m, und deren Höhe $H(\beta)$ größer als später zu erklärender Wert ist. Wir betrachten nun die Ungleichung

$$|\xi - \beta| \quad = \quad |(\eta_{r_n} - \beta) + (\xi - \eta_{r_n})| \geq |\eta_{r_n} - \beta| - |\xi - \eta_{r_n}|. \tag{6}$$

Da $H(\eta_{r_n}) \leq t_0^{r_n}$ $(n > k_1)$ und $\partial\eta_{r_n} = m$ $(n > k_3)$ ist, erhält man dann für $n > k_3$ durch Anwendung von Hilfssatz 3 die Ungleichung

$$|\eta_{r_n} - \beta| \quad \geq \quad \frac{t_5}{H(\beta)^m t_0^{(m-1)r_n}} \quad , \quad t_5 = 2^{1-m} m^{-m} (m+1)^{1-m}. \tag{7}$$

Nach (3) und (7) bekommen wir aus (6)

$$|\xi - \beta| \quad \geq \quad \frac{t_5}{H(\beta)^m t_0^{(m-1)r_n}} - \frac{t_1}{t_0^{t_3 s_n}} \quad (n > k_3). \tag{8}$$

Nun bestimmen wir l, so daß die Ungleichung

$$t_0^{r_l} \leq H(\beta) < t_0^{s_l}$$

gilt. Die Eindeutigkeit von l ist klar. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem $H(\beta)$ zum ersten oder zweiten der folgenden Teilintervallen gehört:

1) $t_0^{r_l} \leq H(\beta) < t_0^{\frac{s_l}{\lambda}}$,

2) $t_0^{\frac{s_l}{\lambda}} \leq H(\beta) < t_0^{s_l}$.

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Im Falle 1): Setzt man in (8) $n = l$ ein und berücksichtigt die Doppelungleichung 1), folgt dann für $l > k_3$

$$|\xi - \beta| \quad > \quad \frac{t_5}{H(\beta)^{2m-1}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{t_3 \lambda}}.$$

Wird die Zahl λ so gewählt, daß sie der Ungleichung $\lambda > \frac{2m-1}{t_3}$ genügt, gilt dann

$$\frac{t_1}{H(\beta)^{t_3\lambda}} < \frac{1}{2}\frac{t_5}{H(\beta)^{2m-1}} \qquad (H(\beta) > H_1),$$

wobei H_1 eine passend groß gewählte positive Zahl ist. Also gilt

$$|\xi - \beta| \ > \ \frac{t_5/2}{H(\beta)^{2m-1}} \qquad (H(\beta) > H_1).$$

Im Falle 2): Setzt man in (8) diesmal $n = l+1$ ein, so erhält man unter Benutzung von 2) in (8)

$$|\xi - \beta| \ > \ \frac{t_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)\frac{r_{l+1}}{s_l}}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{t_3\frac{s_{l+1}}{s_l}}}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty$ und $0 = s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < \ldots$ ist, ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} = +\infty$. Also gibt es ein $k_4 > k_3$, so daß für $l > k_4$ $\frac{s_{l+1}}{s_l} > \mu$ gilt. Dabei ist μ eine später zu erklärende positive Zahl. Da auch $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{s_n} := \theta < +\infty$ gilt, existiert ein $k_5 \in \mathbb{N}$, so daß für $l > k_5 > k_4$ die Ungleichung $\frac{r_{l+1}}{s_l} < \theta + 1$ gilt. Also findet man daher für $l > k_5$

$$|\xi - \beta| \ > \ \frac{t_5}{H(\beta)^{m+(\theta+1)\lambda(m-1)}} - \frac{t_1}{H(\beta)^{\mu t_3}}.$$

Es sei μ so gewählt, daß die Ungleichung

$$\mu > \frac{m + (\theta+1)\lambda(m-1)}{t_3}$$

gilt. Also ist

$$\frac{t_1}{H(\beta)^{\mu t_3}} \ < \ \frac{t_5/2}{H(\beta)^{m+(\theta+1)\lambda(m-1)}}$$

für $H(\beta) > H_2$ und folglich

$$|\xi-\beta| \quad > \quad \frac{t_5/2}{H(\beta)^{m+(\theta+1)\lambda(m-1)}} \quad (H(\beta)>H_2).$$

Dabei ist H_2 eine passend groß gewählte positive Zahl. Ist also $H(\beta) > \max\{t_0^{r_{k_5}}, H_1, H_2\}$, dann gilt

$$|\xi-\beta| \quad > \quad \frac{t_6}{H(\beta)^{m+(\theta+1)\lambda(m-1)}},$$

wobei $t_6 = t_5/2$ gesetzt wurde. Somit erhalten wir endlich

$$\mu^*(\xi) \geq m. \tag{9}$$

Aus (5) und (9) folgt also $\mu^*(\xi) = m$, d.h. $\xi \in U_m^* = U_m$.

Einige Beispiele:

In folgenden fünf Beispiele seien $\{s_n\}$ und $\{r_n\}$ zwei Folgen von ganzen rationalen Zahlen mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{s_n} < +\infty,$$

$$0 = s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < \ldots.$$

(z.B. $s_0 = 0,\ r_1 = 1,\ s_n = (n+1)r_n,\ r_{n+1} = (2n+5)r_n,\ (n = 1, 2, \ldots)$.)

1. Ist $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = 1, \text{ falls } & s_n \leq h \leq r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{a}{b}\right) \in U_1$ für jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$.

2. Eine Verallgemeinerung von Beispiel 1: Sei $\alpha \neq 0$ eine algebraische Zahl vom Grad m. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = \alpha, \text{ falls } & s_n \leq h \leq r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{a}{b}\right) \in U_m$ für jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$.

3. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = 1, \text{ falls } & s_n \leq h \leq r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F(\alpha) \in U_m$ für eine algebraische Zahl $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vom Grad m mit $0 < \overline{|\alpha|} < 1$ (etwa für $\alpha = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ mit $0 < p < q$, p und q sind Primzahlen).

4. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = \sqrt{2}, \text{ falls } & s_n \leq h \leq r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) \in U_4$.

5. Ist $F(z) = \sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ die verallgemeinerten Lückenreihe, deren Koeffizienten durch

$$\begin{cases} c_h = 0, \text{ falls } & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_h = i, \text{ falls } & s_n \leq h \leq r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

erklärt werden, so ist $F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) \in U_4$.

Literatur

[1] **BRAUNE, E.** : Über arithmetische Eigenschaften von Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, Mh. Math., 84(1977), 1-11.

[2] **COHN, H.** : Note on almost-algebraic numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52(1946), 1042-1045.

[3] **GÜRSES, H.** : Über verallgemeinerte Lückenreihen, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der., 59(2000), angenommen.

[4] **GÜTING, R.** : Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers, Michigan Math. J., 8(1961), 149-159.

[5] **HECKE, E.** : Theorie der algebraischen Zahlen, Leibzig (1923).

[6] **İÇEN, O.Ş.** : Anhang zu den Arbeiten " Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II", İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 38(1973), 25-35.

[7] **KOKSMA, J.F.** : Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, Mh. Math. Physik, 48(1939), 176-189.

[8] **LeVEQUE, W. J.** : On Mahler's U-Numbers, J. London Math. Soc., 28(1953), 220-229.

[9] **LeVEQUE, W. J.** : Topics in Number Theory, Volume II, Massachusetts, U.S.A. London England (1961).

[10] **MAHLER, K.** : Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I, J. reine angew. Math. 166(1932), 118-136.

[11] **MAHLER, K.** : An application of Jensen formula to polynomials, Mathematika, 7(1960), 98-100.

[12] **MAHLER, K.** : Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients, J. Australian Math. Soc., 5(1965), 56-64.

[13] **ORYAN, M.H.** : On power series and Mahler's U-numbers, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 47(1983-1986), 117-125.

[14] **ORYAN, M.H.** : On power series and Mahler's U-numbers, Mathematica Scandinavica,65(1989), 143-151.

[15] **SCHNEIDER, Th.** : Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1957).

[16] **WIRSING, E.** : Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, J. reine angew. Math., 206(1961), 67-77.

[17] **ZEREN, B.M.** : Über einige komplexe und p-adische Lückenreihen mit Werten aus den Mahlerschen Unterklassen U_m, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 45(1980), 89-130.

[18] **ZEREN, B.M.** : Über die Transzendenz der Werte einiger schnell konvergenter Potenzreihen für algebraische Argumente, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 38(1985), 473-496.

[19] **ZEREN, B.M.** : Über die Natur der Transzendenz der Werte einer Art verallgemeinerter Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten für algebraische Argumente, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 41(1988), 569-588.

H.Gürses
Department of Mathematics
Faculty of Science
Istanbul University
Vezneciler 34459, Istanbul, Turkey
E-mail: gurses@istanbul.edu.tr