

3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Sabit Eğrilikli Null Olmayan Regle Yüzeyler

Cansu Nevcihan TEKİN^{1*}, İsmail AYDEMİR¹

ÖZET: Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve regle yüzeylerin sabit Gauss ve ortalama eğriliğe sahip olmaları için gerekli koşullar elde edilmiştir. Ayrıca regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olması için denklemlerinin hangi formda olması gerektiği gösterilmiştir. Buna ilaveten teğet vektör alanı tarafından üretilen sabit ortalama eğrilikli null olmayan regle yüzeylerin dayanak eğrisinin Bishop slant helis olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regle yüzey, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Bishop çatısı, Minkowski uzayı.

Non-null Ruled Surfaces with Constant Curvatures According to Bishop Frame in Minkowski 3-space

ABSTRACT: In this study, the Gaussian and mean curvatures of non-null ruled surfaces according to Bishop frame in 3-dimensional Minkowski space are calculated and obtained the necessary conditions for their curvatures to be constant. Moreover, in case the ruled surfaces to be developable and minimal, we find parametric forms. In addition, the base curve of non-null surfaces with constant mean curvares is specified to be Bishop slant helix.

Keywords: Ruled surface, Gaussian curvature, Mean curvature, Bishop frame, Minkowski space.

¹Cansu Nevcihan TEKİN (Orcid ID: 0000-0002-6813-3761), İsmail AYDEMİR (Orcid ID: 0000-0002-0238-2079), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Samsun, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Cansu Nevcihan TEKİN, e-mail: cansutekin35@hotmail.com

Bu çalışma Cansu Nevcihan TEKİN'in Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.

GİRİŞ

Üç boyutlu uzayda regle yüzeylerin bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle oluşan özel yüzeyler olduğu iyi bilinmektedir. Hareket ettirilen doğruya regle yüzeylerin doğrultman doğrusu ve bu doğrunun üzerinde hareket ettiği eğriye dayanak eğrisi adı verilmektedir. Dayanak eğrisi $\Gamma(s)$ ve doğrultman vektörü $X(s)$ olan standart bir regle yüzey $\varphi(s,v)=\Gamma(s)+vX(s)$ şeklinde ifade edilir. Farklı uzaylardaki çeşitli çatılara göre bu firma sahip regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. yapılmıştır (Abdel-All ve ark., 2004; Ali ve ark., 2003; Orbay ve Aydemir, 2010; Önder ve Uğurlu, 2013, Yüksel, 2013). Diğer taraftan, Ahmad Tawfik Ali (2017), 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Γ eğrisinin Frenet vektörleri t , n ve b olmak üzere regle yüzeyin dayanak eğrisini; $c(s)=\int(\alpha t+\beta n+\gamma b)ds$ seçerek elde edilen yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabit olma koşullarını incelemiştir. Ayrıca, Ali çalışmasında sabit eğrilikli regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin bazı durumlarda düzlem eğrisi bazı durumlarda da genel helisler olması gerektiğini karakterize etmiştir. Bir başka deyişle sabit eğrilikli regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin bazı özel eğriler olduğu tespit edilmiştir.

Genel helisler teğet vektörünün sabit bir doğrultuyla sabit açı yapma özelliğindeki özel eğrilerdir. Bu eğrilerin Frenet eğrilikleri arasındaki oranın sabit olmasıyla karakterize edildiği iyi bilinmektedir. Diğer taraftan, Bishop çatısında ξ_1 vektörünün sabit bir doğrultuyla sabit açı yapma özelliğindeki özel eğri ilk kez Bükçü ve Karacan (2008) tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında çalışılmıştır ve bu eğri Bishop slant helis olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, bu eğrilerin Bishop eğrilikleri arasındaki oranın sabit olduğu tespit edilmiştir. Yerlikaya (2019), ilk kez 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre Bishop slant helislerin pozisyon vektörlerinin bulunmasını içeren bir metot ortaya koymuştur. Bishop slant helislerin pozisyon vektörleri 3-boyutlu Öklid uzayında da elde edilmiştir (Yerlikaya ve Aydemir, 2020). Dolayısıyla bu çalışmanın bir benzeri Öklid uzayında da yapılabilir.

Bu çalışmada ise, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Γ eğrisinin Bishop vektörleri t , ξ_1 ve ξ_2 olmak üzere regle yüzeyin dayanak eğrisi $c(s)=\int(\alpha t+\beta\xi_1+\gamma\xi_2)ds$ seçilerek sırasıyla t , ξ_1 ve ξ_2 vektörleri tarafından üretilen yüzeyler bulunmuş ve elde edilen yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabit olma durumu araştırılmıştır. Ayrıca yüzeylerin açılabilir ve minimal olması için gerekli koşullar elde edilmiştir. Buna ilaveten, teğet vektör alanı tarafından üretilen sabit ortalama eğrilikli null olmayan regle yüzeylerin dayanak eğrisinin Bishop slant helis olması gerektiği tespit edilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

R^3 , 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ve $X=(x_1,x_2,x_3)$ ve $Y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ için,

$\langle X,Y\rangle=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ eşitliği ile verilen 1- indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve R_1^3 ile gösterilir (O'Neill, 1983). R_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $X=(x_1,x_2,x_3)$ ve $Y=(y_1,y_2,y_3)$ olmak üzere, $(x_2y_3-x_3y_2,x_1y_3-x_3y_1,x_2y_1-x_1y_2)$ vektörüne X ve Y nin vektörel çarpımı denir (Önder ve Uğurlu, 2013).

Bir yüzeyin pozisyon vektörü $s,v\in U\subset R^2$ olmak üzere $\varphi(s,v)=(f_1(s,v),f_2(s,v),f_3(s,v))$ şeklindedir. Burada f_1 , f_2 ve f_3 ifadeleri reel değerli koordinat fonksiyonlarıdır. Yüzeyin birim normal vektörü

$$U=\frac{\varphi_s\times\varphi_v}{\|\varphi_s\times\varphi_v\|}$$

ve I. ve II. temel formun katsayıları sırasıyla,

$$E=g_{11}=\langle\varphi_s,\varphi_s\rangle, \quad F=g_{22}=\langle\varphi_s,\varphi_v\rangle, \quad G=g_{12}=\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle$$

ve

$$e=h_{11}=\langle\varphi_{ss},U\rangle, \quad f=h_{12}=\langle\varphi_{sv},U\rangle, \quad g=h_{22}=\langle\varphi_{vv},U\rangle$$

olmak üzere $M= \varphi(s,v)$ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$K=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}=\frac{eg-f^2}{|EG-F^2|}$$

ve

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}h_{ij}=\frac{Eg+Ge-2Ff}{2|EG-F^2|}$$

şeklinde verilir. $K=0$ ise yüzeye açılabilir ve $H=0$ ise yüzey minimaldir, denir.

R_1^3 de s yay parametresi ile verilen bir timelike Γ eğrisinin her noktasında tanımlı olan Frenet çatısı $\{t,n,b\}$ olmak üzere Frenet formülleri $t'=\kappa n$, $n'=\kappa t+\tau b$, $b'=-\tau n$ şeklindedir. Burada, κ ve τ , s parametresinin türevlenebilir fonksiyonları olup sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarını ifade eder. Γ timelike eğrisi üzerinde bir başka hareketli çatı, ξ_1 ve ξ_2 , R_1^3 de normları 1 birim ve $\xi_1 \perp \xi_2$ olacak şekilde keyfi iki vektör olmak üzere $\{t,\xi_1,\xi_2\}$ ile verilen Bishop çatısıdır. Bu çatının türev formülleri,

$$\begin{aligned} t' &= k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 \\ \xi_1' &= k_1 t \\ \xi_2' &= k_2 t \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada k_1 ve k_2 eğrinin s parametresine göre türevlenebilir Bishop eğrilik fonksiyonlarıdır. Ayrıca Γ eğrisinin Frenet ve Bishop çatıları arasında aşağıdaki bağlantılar mevcuttur:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos\theta n - \sin\theta b \\ \xi_2 &= \sin\theta n + \cos\theta b \end{aligned}$$

ve $\kappa(s)=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$, $\theta(s)=\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, $\tau(s)=\frac{d\theta(s)}{ds}$ (Karacan ve Bükçü, 2008).

Tanım 1: $\Gamma:I\rightarrow R_1^3$ bir timelike eğri ve ξ_1 spacelike birim vektör alanı olsun. Eğer ξ_1 vektör alanı uzayda sabit bir d doğrultusuyla sabit θ açısı yapıyorsa Γ 'ya bir timelike Bishop slant helis adı verilir. Burada d vektörü Bishop slant helisin eksenidir (Bükçü ve Karacan, 2008).

Teorem 2: $\Gamma:I\rightarrow R_1^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklerine sahip birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde Γ timelike Bishop slant helistir $\Leftrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$ (Bükçü ve Karacan, 2008).

Teorem 3: $\Gamma(s)$, 3-boyutlu Minkowski uzayında ξ_1 Bishop vektör alanı sabit bir spacelike $\vec{u}=(0,\mp 1,0)\in\text{Sp}\{e_2\}$ doğrultusuyla sabit lorentziyen spacelike açı yapan ve Bishop eğrilik fonksiyonları $k_1=k_1(s)$ ve $k_2=k_2(s)=mk_1(s)$ olan timelike bir Bishop slant helis olsun. Bu takdirde, Γ 'nın pozisyon vektör alanının doğal gösterimi,

$$\Gamma(s)=\left(\int \cosh\left[d_1\mp\sqrt{1+m^2}\int k_1(s) ds\right] ds+c_1, c_2, \int \sinh\left[d_1\mp\sqrt{1+m^2}\int k_1(s) ds\right] ds+c_3\right)$$

şeklinde. Burada, c_1, c_2, c_3 ve d_1 sayıları reel sabitlerdir ve ϕ ; \vec{u} ve ξ_1 arasındaki açı olmak üzere $m = \tan \phi$ dır (Yerlikaya, 2019).

Teorem 4: $\Gamma(s)$, 3-boyutlu Minkowski uzayında ξ_1 Bishop vektör alanı sabit bir spacelike

$\vec{u} = (-\sinh n, 0, -\cosh n) \in \text{Sp}\{e_1, e_3\}$ doğrultusuyla sabit lorentziyen spacelike açı yapan ve Bishop eğrilik fonksiyonları $k_1 = k_1(s)$ ve $k_2 = k_2(s) = mk_1(s)$ olan timelike bir Bishop slant helis olsun. Bu takdirde, Γ 'nın pozisyon vektör alanının doğal gösterimi,

$$\Gamma(s) = (\cosh n \int \cosh[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds] ds + c_1, \int \sinh[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds] ds + c_2, \sinh n \int \cosh[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds] ds + c_3)$$

şeklinde. Burada, n, c_1, c_2, c_3 ve d_1 sayıları reel sabitlerdir ve ϕ ; \vec{u} ve ξ_1 arasındaki açı olmak üzere $m = \tan \phi$ dır (Yerlikaya, 2019).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Üç boyutlu Minkowski uzayında bir timelike Γ eğrisinin her noktasında tanımlı olan Bishop çatısının vektör alanları t, ξ_1 ve ξ_2 olsun. α, β ve γ , s parametresinin reel değerli türevlenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds$$

eğrisini tanımlayalım. Bu kısımda $c(s)$ yi dayanak eğrisi ve doğrultmanları sırasıyla teğet vektörü, ξ_1 vektörü ve ξ_2 vektörü olan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri incelenecektir.

Teğet vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin denklemi,

$$G_t: \varphi(s, v) = c(s) + vt(s) \quad (1)$$

şeklinde. Bu regle yüzeyin kısmi türevleri alındığında, birinci temel formun katsayıları,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = -\alpha^2 + (\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle t, t \rangle = -1$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = \langle \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2 + v(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2), t \rangle = -\alpha$$

ve ikinci temel formun katsayıları;

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle$$

veya,

$$e = \frac{v^2(k_2 k_1' + k_1 k_2') + v(-\gamma k_1' + 2\alpha k_1 k_2' + k_2 \beta' + \beta k_2' + k_1 \gamma') - \gamma \alpha k_1 - \gamma \beta' + \alpha \beta k_2 + \beta \gamma'}{\sqrt{(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2}}$$

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \langle 0, \frac{(\beta + vk_1)k_2 - (\gamma + vk_2)k_1}{\sqrt{(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2}} \rangle = 0$$

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = - \frac{(\beta + vk_1)k_2 - (\gamma + vk_2)k_1}{\sqrt{(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2}}$$

bulunur. Burada k_1 ve k_2 , Γ eğrisinin bishop eğrilikleridir. Buradan yüzeyin Gauss eğriliği hesaplanırsa,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = - \frac{(\beta k_2 - \gamma k_1)^2}{[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^{3/2}} \quad (2)$$

elde edilir. Eşitlik 2. den teğet vektör alanı tarafından üretilen regle yüzeyin Gauss eğriliğinin sabit olması için $\beta k_2 - \gamma k_1 = 0$ eşitliğinin sağlanması gerektiği açıktır. Bu ise Gauss eğriliğinin sıfır olduğu anlamına gelir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5: (1) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$ regle yüzeyi açılabilir $\Leftrightarrow \varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t \, ds$

(2) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği K sabit ise $K=0$ dır.

İspat: (1) Kabul edelim ki G_t regle yüzeyi açılabilir yani $K=0$ olsun. Eşitlik 2. den $\beta = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \gamma$ dir. Bu eşitlikte ε bir reel değerli türevlenebilir fonksiyon olmak üzere, $\gamma = k_2 \varepsilon$ seçilirse $\beta = k_1 \varepsilon$ olur. Ayrıca $\alpha = \varepsilon' + \eta$ alınırsa dayanak eğrisinin türevi,

$$c'(s) = (\varepsilon' + \eta)t + \varepsilon k_1 \xi_1 + \varepsilon k_2 \xi_2$$

şeklinde yazılır. Bishop çatısının türev formülleri göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$c(s) = \varepsilon t + \int \eta t \, ds \quad (3)$$

elde edilir. Eşitlik 3., Eşitlik 1. de yerine yazılırsa, G_t regle yüzeyin parametrik formu bulunmuş olur. Tersine G_t regle yüzeyi φ parametrelendirilmesi ile verilsin. Bu takdirde gerekli işlemler yapıldığında Gauss eğriliğinin sıfır olduğu açıktır, yani yüzey açılabilir.

(2) G_t regle yüzeyin Gauss eğriliği sabit olsun. Eşitlik 2. den bu sabitliğin sadece sıfır ile mümkün olacağı açıktır.

Diğer taraftan regle yüzeyin ortalama eğriliği hesaplandığında,

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2|EG - F^2|} = \frac{v^2(-k_1 k_2' + k_1' k_2) + v(\gamma k_1' - k_2' \beta - \beta' k_2 - k_1 \gamma') + \alpha \gamma k_1 + \gamma \beta' - \alpha \beta k_2 - \beta \gamma'}{2[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^2} \quad (4)$$

dır. Eşitlik 4. de bulunan denklem, v parametresinin kuvvetlerine göre yazılırsa,

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[(\beta + vk_1)^2 + (\gamma + vk_2)^2]^2}$$

olur. Burada, $A_0 = -\beta \gamma' + \gamma k_1' + \alpha(-k_1 \gamma + k_2 \beta)$, $A_1 = +\gamma k_1' - k_2' \beta - \beta' k_2 - k_1 \gamma'$

ve $A_2 = -k_1 k_2' + k_1' k_2$ dir. Ortalama eğriliğin sabitliği hakkında yorum yapabilmesi için A_0 , A_1 ve A_2 katsayıları incelenmelidir.

1.hal: $A_2 = 0$ olsun. Bu durumda, $A_2 = -k_1 k_2' + k_1' k_2 = 0$ eşitliği düzenlenirse, $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' k_2^2 = 0$ bulunur. Buradan, $\frac{k_1}{k_2} = m$, $m \in \mathbb{R}$ dir. Teorem 2 göz önüne alınırsa Γ eğrisinin, Bishop slant helis olduğu görülür.

2.hal: $A_1 = 0$ olsun. Bu durumda $A_1 = -\gamma' k_1 + \gamma k_1' - k_2' \beta + \beta' k_2 = 0$ ifadesi düzenlenirse, $\left(\frac{-\gamma m + \beta}{k_2}\right)' k_2^2 = 0$ bulunur. Buradan, $\beta = c_1 k_2 + m\gamma$ olacak şekilde bir $c_1 \in \mathbb{R}$ reel sayısı vardır.

3. hal: $A_0 = 0$ olsun. Bu durumda A_0 eşitliğinde yukarıdaki β ifadesi yerine yazılıp düzenlenirse,

$A_0 = c_1 (k_2 \gamma' - k_2' \gamma - \alpha k_2^2) = 0$ elde edilir. Son eşitlik için aşağıdaki gibi iki durum söz konusudur:

Durum 1: $c_1 = 0$ olsun. $\beta = c_1 k_2 + m\gamma$ denkleminde $c_1 = 0$ ve $\frac{k_1}{k_2} = m$ eşitliklerine yazılırsa, $\beta = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \gamma$ elde edilir. Ayrıca, $\gamma = k_2 \varepsilon$ ve $\alpha = \varepsilon' + \eta$ seçilirse yüzeyin dayanak eğrisi $c(s) = \varepsilon t + \int \eta t ds$ şeklinde bulunur. Böylece regle yüzeyin genel denklemi, $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$ formundadır. (5)

Kabul edelim ki Bishop slant helisin pozisyon vektörü Teorem 3 deki denklem olsun. Bu durumda, Bishop slant helisin teğet vektörü $t(s) = (\cosh[\sigma], 0, \sinh[\sigma])$ ve $\sigma = d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds$ dir. Denklem 3'ün her iki tarafının türevi alınırsa, $c'(s) = (\varepsilon t)' + \eta t$ elde edilir. Bu denklemde, $t(s) = (\cosh[\sigma], 0, \sinh[\sigma])$ eşitliği yerine yazılırsa, dayanak eğrisinin türevinin denklemi,

$$c'(s) = ((\varepsilon(s) \cosh[\sigma])' + \eta(s) \cosh[\sigma], 0, (\varepsilon(s) \sinh[\sigma])' + \eta(s) \sinh[\sigma]) \quad (6)$$

şeklinde bulunur. Burada $\eta(s)$ ve $\varepsilon(s)$ fonksiyonları s değişkeninin keyfi fonksiyonlarıdır. Varsayalım ki, $\chi(s)$ ve $\delta(s)$ nin keyfi türevlenebilir fonksiyonları olmak üzere $c(s) = (\chi(s), 0, \delta(s))$ olsun. Bu durumda $c'(s) = (\chi'(s), 0, \delta'(s))$ yazılır. Bu denklem Eşitlik 6. ile birbirine eşitlenir ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2} k_1(s)} \{ \delta'(s) \cosh[\sigma] - \chi'(s) \sinh[\sigma] \}$$

$$\eta(s) = \cosh[\sigma] \left\{ 2\chi'(s) - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right)' \right\} - \sinh[\sigma] \left\{ 2\delta'(s) + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right)' \right\}$$

bulunur. Sonuç olarak, G_t regle yüzeyinin standart formu,

$$\varphi(s, v) = \left(\chi(s) + v \cosh \left[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], 0, \delta(s) + v \sinh \left[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right] \right)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi Bishop slant helisin pozisyon vektörü Teorem 4 deki denklem olsun. Bu durumda; Bishop slant helisin teğet vektörü,

$t(s) = (\cosh \cosh[\sigma], \sinh[\sigma], \sinh \sinh[\sigma])$ ve $\sigma = d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds$ dir. Denklem 3'ün her iki tarafının türevi alınırsa, $c'(s) = (\varepsilon t)' + \eta t$ elde edilir. Bu denklemde, $t(s) = (\cosh \cosh[\sigma], \sinh[\sigma], \sinh \sinh[\sigma])$ eşitliği yerine yazılırsa, dayanak eğrisinin türevinin denklemi,

$$c'(s) = \begin{pmatrix} (\varepsilon(s)\cosh\sigma\cosh[\sigma])' + \eta(s)\cosh\sigma\cosh[\sigma], (\varepsilon(s)\sinh[\sigma])' + \eta(s)\sinh[\sigma], \\ (\varepsilon(s)\sinh\sigma\cosh[\sigma])' + \eta(s)\sinh\sigma\cosh[\sigma] \end{pmatrix} \quad (7)$$

şeklinde bulunur. Burada $\eta(s)$ ve $\varepsilon(s)$ fonksiyonları s değişkeninin keyfi fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde, $\chi(s)$, $\mu(s)$ ve $\delta(s)$, s nin keyfi türevlenebilir fonksiyonları olmak üzere $c(s) = (\chi(s), \mu(s), \delta(s))$ olsun. Bu durumda $c'(s) = (\chi'(s), \mu'(s), \delta'(s))$ yazılır. Bu denklem Eşitlik 7. ile birbirine eşitlenir ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2} k_1(s)} \{ \mu'(s)\cosh[\sigma] + \sinh[\theta](\delta'(s)\sinh\sigma - \chi'(s)\cosh\sigma) \}$$

$$\eta(s) = 2 \left(\cosh\sigma\cosh[\sigma]\chi'(s) - \sinh\sigma\cosh[\sigma]\delta'(s) - \sinh[\sigma]\mu'(s) - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left\{ \left(\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \right)' \cosh[\sigma] + \sinh\sigma \left(\frac{\delta'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] - \cosh\sigma \left(\frac{\chi'(s)}{k_1(s)} \right)' \sinh[\sigma] \right\} \right)$$

şeklinde bulunur. Böylece Eşitlik 1.den, G_t regle yüzeyinin denklemi,

$$\varphi(s, v) = \left(\chi(s) + v \cosh\sigma \cosh \left[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], \mu(s) + v \sinh \left[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right], \delta(s) + v \sinh\sigma \cosh \left[d_1 \mp \sqrt{1+m^2} \int k_1(s) ds \right] \right)$$

elde edilir.

Durum 2: $k_2\gamma' - k_2'\gamma - \alpha k_2^2 = 0$ olsun. Bu durumda, $\alpha = \frac{k_2\gamma' - k_2'\gamma}{k_2^2} = \left(\frac{\gamma}{k_2} \right)'$ bulunur. Buradan regle yüzeyin dayanak eğrisi, $c(s) = \frac{\gamma}{k_2} t + c_1 \int k_2 \xi_1 ds$ şeklinde elde edilir. Diğer taraftan $\gamma = k_2 \varepsilon$, Eşitlik 5. te yerine yazılırsa G_t regle yüzeyi, $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + c_1 \left(\int k_2 ds \right) \xi_1$ formunu alır. Ayrıca,

$$H = \frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 v + A_2 v^2}{2[(\beta + v k_1)^2 + (\gamma + v k_2)^2]^{3/2}}$$

olmak üzere, H nın sabit olması için,

$$A^2 - H^2 B^2 = 0$$

veya A ve B eşitlikleri yerine yazılarak,

$$A^2 - H^2 B^2 = (A_0 + A_1 v + A_2 v^2)^2 - 4H^2 [(\beta + v k_1)^2 + (\gamma + v k_2)^2]^{3/2} = 0$$

ve sonuç olarak $4H^2(k_1^2 + k_2^2)^3 = 0$ olması gerektiği açıktır. Diğer taraftan Bishop çatısında $k_1, k_2 \neq 0$ olduğundan $H=0$ bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 6: (1) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$ regle yüzeyi minimaldir $\Leftrightarrow \Gamma$ Bishop slant helistir ve regle yüzeyin denklemi $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + \int \eta t ds$ veya $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)t + c_1 \left(\int k_2 ds \right) \xi_1$ formundadır.

(2) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + vt(s)$ regle yüzeyinin ortalama eğriliği H sabit ise $H=0$ dır.

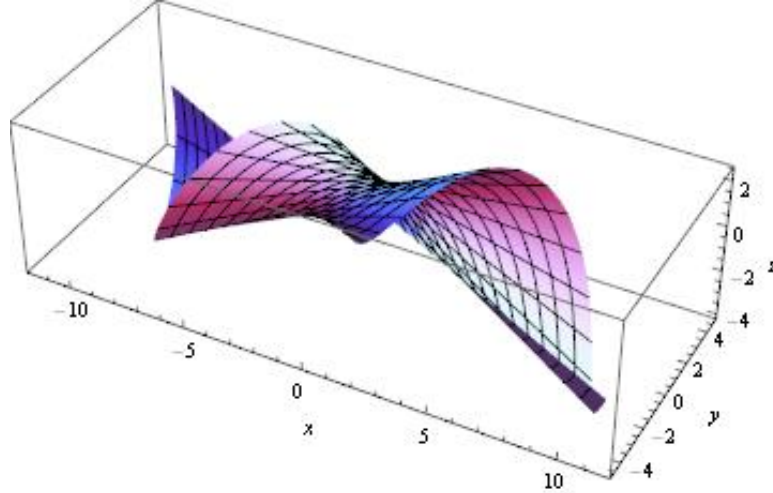
Örnek 1: Üç boyutlu Minkowski uzayında timelike bir $\Gamma(s) = (2s, \cos(s), -\sin(s))$ olsun. Bu eğrinin teğet vektörü,

$$t(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\cos(s)}{\sqrt{3}}, \frac{-\sin(s)}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinindedir. Eğer $\varepsilon = s$ ve $\eta = \sqrt{3}$ seçilirse, G_t timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\phi(s,v)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+s+\cos(s)\right)+\frac{2v}{\sqrt{3}}, \sin(s)+\frac{v\cos(s)}{\sqrt{3}}, -\frac{(s+v)\sin(s)}{\sqrt{3}}+\cos(s)\right)$$

elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 1. de verilmiştir.



Şekil 1. $K=0$, $H=\frac{1}{|\varepsilon+v|}$

Şimdi, dayanak eğrisi $c(s)=\int(\alpha t+\beta\xi_1+\gamma\xi_2) ds$ olan ve ξ_1 vektör alanı tarafından üretilen regle yüzey için benzer işlemleri yapalım. Bu yüzey $G_t:\phi(s,v)=c(s)+v\xi_1(s)$ formundadır. Buradan yüzeyin kısmi türevleri alınır, I. ve II. temel formun katsayıları,

$$E=\langle\phi_s,\phi_s\rangle=-(\alpha+vk_1)^2+\beta^2+\gamma^2$$

$$G=\langle\phi_v,\phi_v\rangle=\langle\xi_1,\xi_1\rangle=+1$$

$$F=\langle\phi_s,\phi_v\rangle=\langle t(\alpha-vk_1)+\beta\xi_1+\gamma\xi_2,\xi_1\rangle=\beta$$

$$e=\frac{v^2(k_1^2k_2)+v^2(k_1^2k_2)+v(\gamma k_1'-2\alpha k_1k_2+k_1\gamma'+\gamma\alpha'+\gamma\beta k_1+\gamma^2k_2-\alpha^2k_2-\alpha\gamma')}{\sqrt{\gamma^2+(\alpha-vk_1)^2}}$$

$$g=\langle\phi_{vv},U\rangle=\left\langle 0,\frac{\gamma t-(\alpha-vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2+(\alpha-vk_1)^2}}\right\rangle=0$$

$$f=\langle\phi_{sv},U\rangle=\left\langle -k_1t,\frac{\gamma t-(\alpha-vk_1)\xi_2}{\sqrt{\gamma^2+(\alpha-vk_1)^2}}\right\rangle=\frac{k_1\gamma}{\sqrt{\gamma^2+(\alpha-vk_1)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan katsayılar yardımıyla regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K=\frac{eg-f^2}{|EG-F^2|}=\frac{-k_1^2\gamma^2}{[\gamma^2+(\alpha-vk_1)^2]^{3/2}}$$

şeklinde bulunur. Gauss eğriliğinin sabit olması için, $k_1^2\gamma^2=0$ olmalıdır. Diğer taraftan Bishop çatısı için $k_1\neq 0$ olduğundan $\gamma=0$ olur. $c(s)=\int(\alpha t+\beta\xi_1+\gamma\xi_2) ds$ denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınır, $c'(s)=\alpha t+\beta\xi_1+\gamma\xi_2$ olur. Bu denklemde $\gamma=0$ eşitliği yerine yazılırsa; $c'(s)=\alpha t+\beta\xi_1$ bulunur. Elde edilen denklemde α ve β türevlenebilir fonksiyonları $\alpha=-k_1\varepsilon$ ve $\beta=-\varepsilon'+\eta$ şeklinde seçilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $c'(s)=-k_1\varepsilon t-\varepsilon'\xi_1+\eta\xi_1$ elde edilir. Buradan Bishop türev formülleri kullanılırsa

$c'(s) = -(\xi_1 \varepsilon)' + \eta \xi_1$ şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın integrali alırsa ξ_1 vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi, $c(s) = -\xi_1 \varepsilon + \int \eta \xi_1 ds$ ve regle yüzeyin denklemi $\varphi(s, v) = (-\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$ formunu alır.

Teorem 7: (1) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$ regle yüzeyi açılabilir $\Leftrightarrow G_t$ regle yüzeyi, $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_1 + \int \eta \xi_1 ds$ formundadır.

(2) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_1(s)$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği K sabit ise $K=0$ dir.

Regle yüzeyin ortalama eğriliği hesaplandığında,

$$H = \frac{\gamma\alpha' - \beta k_1 \gamma + \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 - \gamma' \alpha + v(-2\alpha k_1 k_2 + \gamma' k_1 + \gamma k_1') + v^2(k_1^2 k_2)}{2[\gamma^2 + (\alpha + vk_1)^2]^{3/2}}$$

elde edilir ve bulunan son ifade v parametresinin kuvvetleri şeklinde düzenlenirse, $A_0 = -\gamma\alpha' - \beta k_1 \gamma + \gamma^2 k_2 - k_2 \alpha^2 + \gamma' \alpha$, $A_1 = \gamma k_1' - 2k_1 k_2 \alpha - \gamma' k_1$ ve $A_2 = k_1^2 k_2$ olur.

Ortalama eğriliğin sabit olması için A_0 , A_1 ve A_2 katsayıları incelenmelidir. $A_2 = 0$ ise $k_1^2 k_2 = 0$ olduğu görülür. Fakat Bishop çatısında, $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan A_2 katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden bahsedilemez.

Sonuç 8: ξ_1 vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyler minimal değildir.

Son olarak, dayanak eğrisi $c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds$ olan ve ξ_2 vektör alanı tarafından üretilen regle yüzey için benzer işlemleri yapalım. Bu yüzey $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$ formundadır. Verilen regle yüzeyin kısmi türevleri alınarak, I. ve II. temel formun katsayıları,

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = -(\alpha + vk_1)^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = +1$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = t(\alpha + vk_1) + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2, \xi_1 = \gamma$$

$$e = \langle \varphi_{ss}, U \rangle = \frac{v^2(k_1 k_2^2) + v(-\beta k_2' + 2\alpha k_1 k_2 + k_2 \beta') - \beta \alpha' - \beta^2 k_1 - \beta \gamma k_2 + \alpha^2 k_1 + \alpha \beta'}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

$$g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle = \left\langle 0, \frac{\beta t + (\alpha + vk_1) \xi_2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\rangle = 0$$

$$f = \langle \varphi_{sv}, U \rangle = \left\langle +k_2 t, \frac{\beta t + (\alpha + vk_1) \xi_2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2}} \right\rangle = -\frac{\beta k_2}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan katsayılar kullanılarak regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{|EG - F^2|} = \frac{-k_2^2 \beta^2}{(\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2)^2}$$

şeklinde bulunur. Gauss eğriliğinin sabit olması için $k_2^2 \beta^2 = 0$ ($k_2 \neq 0$) yani $\beta = 0$ olmalıdır.

$c(s) = \int (\alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2) ds$ denkleminde eşitliğin her iki tarafının türevi alınır, $c'(s) = \alpha t + \beta \xi_1 + \gamma \xi_2$ olur. Bu denklemde $\beta = 0$ eşitliği yerine yazılırsa; $c'(s) = \alpha t + \gamma \xi_2$ bulunur. Elde edilen denklemde α ve γ

türevlenebilir fonksiyonları $\alpha = -k_2\varepsilon$ ve $\gamma = -\varepsilon + \eta$ şeklinde seçilirse ve $c'(s) = \alpha t + \gamma \xi_2$ denkleminde yerine yazılırsa, $c'(s) = -k_2\varepsilon t + (-\varepsilon + \eta)\xi_2$ elde edilir. Gerekli düzenlemeler ile $c'(s) = -k_2\varepsilon t - \varepsilon'\xi_2 + \eta\xi_2$ denkleminde bulunur. Buradan Bishop türev formülleri kullanılırsa, denklem $c'(s) = -(\xi_2\varepsilon)' + \eta\xi_2$ şeklinde yazılabilir. Her iki taraftan integral alındığında ξ_2 vektörü tarafından üretilen regle yüzeyin dayanak eğrisi $c(s) = -\xi_2\varepsilon + \int \eta \xi_2 ds$ ve regle yüzeyin denklemi $\varphi(s, v) = (-\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta \xi_2 ds$ şeklinde bulunur.

Teorem 9: (1) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$ regle yüzeyi açılabilirdir $\Leftrightarrow G_t$ regle yüzeyi, $\varphi(s, v) = (\varepsilon + v)\xi_2 + \int \eta \xi_2 ds$ formundadır.

(2) $G_t: \varphi(s, v) = c(s) + v\xi_2(s)$ regle yüzeyinin gauss eğriliği K sabit ise $K=0$ dır.

Regle yüzeyin ortalama eğriliği hesaplandığında,

$$H = \frac{-\beta\alpha' - \beta^2k_1 + \beta\gamma k_2 + \alpha^2k_1 + \alpha\beta' + v(-\beta k_2' + 2\alpha k_1 k_2 + k_2\beta') + v^2(k_1^2 k_2)}{2(\beta^2 + (\alpha + vk_1)^2)^{3/2}}$$

elde edilir ve bu ifade v parametresinin kuvvetleri şeklinde düzenlenirse; $A_0 = -\beta\alpha' - \beta^2k_1 + \beta\gamma k_2 + \alpha^2k_1 + \alpha\beta'$, $A_1 = -\beta k_2' + 2\alpha k_1 k_2 + k_2\beta'$ ve $A_2 = k_1^2 k_2$ bulunur. Ortalama eğriliğin sabit olması için A_0 , A_1 ve A_2 katsayıları incelenmelidir. $A_2 = 0$ ise $k_1^2 k_2 = 0$ olması gerekir. Fakat Bishop çatısında $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ olduğundan A_2 katsayısı sıfır olamaz. Bu durumda ortalama eğriliğin sabitliğinden bahsedilemez. Dolayısıyla ξ_2 vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyler minimal değildir.

Sonuç 10: ξ_2 vektörü tarafından üretilen timelike regle yüzeyler minimal değildir.

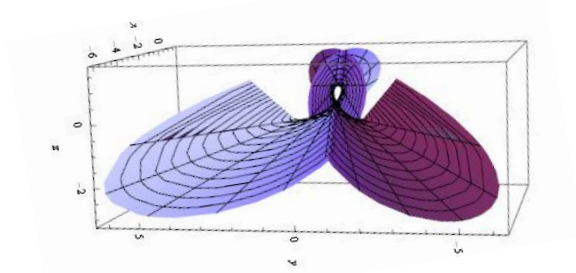
Örnek 2: 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir eğri $\Gamma(s) = (\sinh\sqrt{5}s, \cosh\sqrt{5}s, 2s)$ olsun. Bu eğrinin $\xi_1(s)$ vektörü,

$$\xi_1(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s) - 2\sin(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s), \\ \cos(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s) - 2\sin(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s), \\ -\sqrt{5}\sin(2\sqrt{5}s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Eğer $\varepsilon = s$ ve $\eta = 1$ seçilirse, $\xi_1(s)$ vektörü tarafından üretilen, G_{ξ_1} timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \begin{pmatrix} (s+v)(-\sin(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s) + 2\cos(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s)) + \frac{\cos(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v)(-\sin(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s) + 2\cos(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s)) + \frac{\cos(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v)(\sqrt{5}\cos(2\sqrt{5}s) - \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{5}s)) \end{pmatrix}$$

elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 2. de verilmiştir.



Şekil 2.

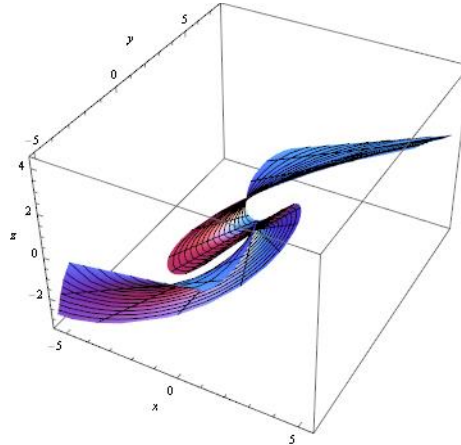
Ayrıca Γ eğrisinin $\xi_2(s)$ vektörü,

$$\xi_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s) - 2\cos(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s), \\ -\sin(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s) + 2\cos(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s), -\sqrt{5}\cos(2\sqrt{5}s) \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Eğer $\varepsilon=s$ ve $\eta=1$ seçilirse, $\xi_2(s)$ vektörü tarafından üretilen, G_{ξ_2} timelike regle yüzeyin parametrik denklemi,

$$\phi(s,v) = \begin{pmatrix} (s+v)(-\sin(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s) + 2\cos(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s)) + \frac{-\sin(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v)(\sin(2\sqrt{5}s)\cosh(\sqrt{5}s) + 2\cos(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s)) + \frac{-\sin(2\sqrt{5}s)\sinh(\sqrt{5}s)}{\sqrt{5}}, \\ (s+v)(\sqrt{5}\cos(2\sqrt{5}s) + \frac{1}{2}\sin(-2\sqrt{5}s)) \end{pmatrix}$$

elde edilir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 3. de verilmiştir.



Şekil 3.

Not: Üç boyutlu Minkowski uzayında Bishop vektör alanları t, ξ_1 ve ξ_2 olan spacelike Γ eğrisi için, benzer sonuçlar elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre null olmayan regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerinin sabitliği incelendi. Teğet vektör alanı tarafından üretilen sabit eğrilikli regle yüzeylerin $\varphi(s,v)=(\varepsilon+v)t+\int \eta t ds$ formuna sahip olduğu belirlendi. Ayrıca, bu regle yüzeylerin Gauss eğrilığının sabit olmasının sadece Gauss eğrilığının sıfır olması ile mümkün olduğu yani yüzeylerin açılabilir olduğu ispatlandı. Yine bu regle yüzeylerin minimal olması için Γ eğrisinin Bishop slant helis ve regle yüzeyin denkleminin $\varphi(s,v)=(\varepsilon+v)t+\int \eta t ds$ formunda olması gerektiği görüldü.

Diğer taraftan ξ_1 ve ξ_2 vektörleri tarafından üretilen sabit eğrilikli regle yüzeylerin denkleminin $\varphi(s,v)=(\varepsilon+v)\xi_1+\int \eta \xi_1 ds$ formuna sahip olduğu ve bu regle yüzeylerin Gauss eğrilığının sabit olmasının sadece Gauss eğrilığının sıfır olması ile mümkün olduğu bir başka deyişle bu yüzeylerin açılabilir olduğu ispatlandı. Ayrıca ξ_1 ve ξ_2 vektörleri tarafından üretilen null olmayan regle yüzeylerin minimal olamayacağı görüldü.

KAYNAKLAR

- Abdel-All NH, Abdel-Baky RA, Hamdon FM, 2004. Ruled Surfaces with Timelike Rulings. Applied Mathematics and Computation, 147: 241-253.
- Ali AT, Aziz HSA, Sorour AH, 2013. Ruled Surfaces Generated by Some Special Curves in Euclidean 3-Space, 21: 285-294.
- Ali AT, 2017. Non-lightlike Ruled Surfaces with Constant Curvatures in Minkowski 3-Space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15 (4): 1850068.
- Karacan MK, Bükçü B, 2008. "Bishop Frame Of The Timelike Curve İn Minkowski 3 Space", S.D.U. Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi (E-Dergi), 3(1), 80-90.
- Bükçü B, Karacan MK, 2008. On the Slant Helices According to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space. Tamkang Journal of Mathematics, 39 (3): 255-262.
- Hacısalıhoğlu HH, 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edeb. Fak. Yayınları, Malatya-Türkiye.
- Masal M, Azak AZ, 2017.3-Boyutlu Öklid Uzayında Bertnard Eğriler ve Bishop Çatısı. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, , 21 (6): 1140-1145.
- O'Neill B, 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic press.
- Orbay K, Aydemir İ, 2010. The Ruled Surfaces Generated by Frenet Vectors of a Curve in \mathbb{R}_1^3 . Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 6 (2): 155-160.
- Önder M, Uğurlu HH, 2013. Frenet Frames and İnvariants of Timelike Ruled Surfaces. Ain Shams Engineering Journal, 4: 507-513.
- Walrave, J. 1995. Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven Faculteit der Wetenschappen, 147, Belgium.
- Yerlikaya F, 2019. Minkowski Uzayında Eğrilerin Elde Edilmesi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi (Basılmış).
- Yerlikaya F, Aydemir İ, 2020. Integrability for the Derivative Formulas of Rotation Minimizing Frame in Euclidean 3-Space and its Applications. International Electronic Journal of Geometry, 13:116-128.
- Yüksel N, 2013. The Ruled Surfaces According to Bishop Frame in Minkowski 3-Space, Abstract and Applied Analysis: 1-5.