SUR LA FONCTION DE DIRECTION DE LAGUERRE

F. ŞEMİN

Dans ce qui suit, on établit la forme la plus générale que peut posséder la fonction de direction de LAGUERRE dans le cas où la surface est rapportée à un système de lignes coordonnées quelconques et on l'applique au cas d'une quadrique en vue d'obtenir le théorème de DARBOUX concernant les lignes de LAGUERRE de celle-ci.

Soient S une surface de E^3 de classe $\overline{C} \geq 3$, C une ligne de celle-ci; k_n, k_g, t_g la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique de C en l'un de ses points réguliers P. Dans ce cas, on sait que l'expression

$$\mathscr{L} = k_n^{\cdot} - 2\, k_g\, t_g\,, \quad \text{avec} \quad k_n^{\cdot} = dk_n/ds$$

s étant l'arc de C, est une *fonction de direction* qui porte le nom de LAGUERRE.

Si S est rapportée à ses lignes de courbure et si k, $\overline{k}$ désignent les courbures principales de S en P, $\mathscr{L}$ a pour expression

$$\mathscr{L}(\nu) = k_1 \cos^3 \nu + 3\, k_2 \cos^2 \nu \sin \nu + 3\, \overline{k}_1 \cos \nu \sin^2 \nu + \overline{k}_2 \sin^3 \nu$$

où ν est l'angle que fait la tangente à C en P avec la première direction principale également en P, les indices inferieurs 1,2 représentant les dérivations invariantes effectuées dans les directions principales [1, 175].

Remarquons en passant que si la dérivation invariante effectuée dans la direction ν est désignée par l'indice 1, $k_n^{\cdot}$ peut s'écrire

$$(k_n)_1 = k_n^{\cdot}\,.$$

Si la surface S est rapportée à un réseau orthogonal quelconque, $\mathscr{L}$ s'écrira alors

$$\mathscr{L}(\nu) = (k_1 - 2\, gt) \cos^3 \nu + 3\, (k_2 - 2\, \overline{g}\overline{t}) \cos^2 \nu \sin \nu + \\ + 3\, (\overline{k}_1 + 2\, gt) \cos \nu \sin^2 \nu + (\overline{k}_2 + 2\, \overline{g}\overline{t}) \sin^3 \nu\,,$$

où k, $\overline{k}$ sont les courbures normales, g, $\overline{g}$ sont les courbures géodésiques, t, $\overline{t}$ sont les torsions géodésiques des lignes du réseau orthogonal en P, tandis que les indices inférieurs 1,2 désignent cette fois les dérivations invariantes effectuées dans les directions des mêmes lignes. Cette dernière forme est également bien connue.

Nous allons maintenant étendre cette formule au cas général, c'est-à-dire au cas où la surface est rapportée à un système quelconque et démontrer que dans ce cas $\mathscr{L}$ aura pour forme

$$\mathscr{L}(\nu) = \frac{1}{\sin^3 \delta} (k_1 - 2\,gt) \sin^3 \bar{\nu} + 3\,\{k_2 - 2t\,(\bar{g} - \delta_2)\} \sin^2 \bar{\nu} \sin \nu +$$

$$+ 3\,\{\bar{k}_1 - 2\bar{t}\,(g + \delta_1)\} \sin \bar{\nu} \sin^2 \nu + (\bar{k}_2 - 2\,\bar{g}\bar{t}) \sin^3 \nu\,, \quad \text{avec} \quad \nu + \bar{\nu} = \delta.$$

Dans cette dernière formule, les quantités $k, \bar{k}, g, \bar{g}, t, \bar{t}$ ont les mêmes significations que tout à l'heure. Quant à δ, c'est l'angle que forment les lignes coordonnées entre elles.

Remarquons que dans le cas où $\delta =$ Constante, cette dernière expression a presque la même forme que celle d'avant.

1. Formules à utiliser. Si $\mathbf{x}$ désigne le vecteur position de P, on aura alors d'après [1, 177]

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{x}_{11} &= -\,[(g/\sin\delta)]\,(\mathbf{x}_1 \cos\delta - \mathbf{x}_2) + k\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{x}_{12} &= -\,[(\bar{g} - \delta_2)\,/\,(\sin\delta)](\mathbf{x}_1 \cos\delta - \mathbf{x}_2) + (\bar{k}\cos\delta - \bar{t}\sin\delta)\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{x}_{21} &= -\,[(g + \delta_1)/(\sin\delta)]\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\cos\delta) + (k\cos\delta + t\sin\delta)\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{x}_{22} &= -\,[(\bar{g}/\sin\delta)]\,(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\cos\delta) + \bar{k}\,\mathbf{n}\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire avec

$$k\cos\delta + t\sin\delta = \bar{k}\cos\delta - \bar{t}\sin\delta\,. \qquad (1.2)$$

D'autre part, l'égalité

$$\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/\sin\delta$$

donne par dérivation à l'aide de (1.1)

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= [(t\cos\delta - k\sin\delta)\,\mathbf{x}_1 - t\,\mathbf{x}_2]\,/\sin\delta\,,\\
\mathbf{n}_2 &= [\bar{t}\,\mathbf{x}_1 - (\bar{t}\cos\delta + \bar{k}\sin\delta)\,\mathbf{x}_2]\,/\sin\delta\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

On en déduit alors facilement

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{n}_{11} &= -\,[k_1 - gt - (t_1 + kg)\operatorname{cotg}\delta]\,\mathbf{x}_1 - [(t_1 + kg)\,\mathbf{x}_2/\sin\delta] - (k^2 + t^2)\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{n}_{12} &= [\,t_2\operatorname{cotg}\delta - k_2 + (\bar{g} - \delta_2)\,(k\cos\delta + t\sin\delta)\,/\sin\delta]\,\mathbf{x}_1 -\\
&\quad -[t_2 + k\,(\bar{g} - \delta_2)\,/\sin\delta]\,\mathbf{x}_2 + (k\bar{t} - t\bar{k})\sin\delta - (k\bar{k} + t\bar{t})\cos\delta]\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{n}_{21} &= \{\,[\bar{k}\,(g + \delta_1) + \bar{t}_1]\,/\sin\delta\}\,\mathbf{x}_1 + [\bar{t} - \bar{k}\operatorname{cotg}\delta)\,(g + \delta_1) -\\
&\quad -(\bar{t}_1\operatorname{cotg}\delta + \bar{k}_1)]\,\mathbf{x}_2 + [(k\bar{t} - t\bar{k})\sin\delta - (k\bar{k} + t\bar{t})\cos\delta]\,\mathbf{n}\,,\\
\mathbf{n}_{22} &= [(t_2 + \bar{k}\bar{g})\,/\sin\delta]\,\mathbf{x}_1 + [(\bar{t} - \bar{k}\operatorname{cotg}\delta)\,(\bar{g} - \delta_2) - (\bar{t}_2\operatorname{cotg}\delta + \bar{k}_2)]\mathbf{x}_2 -\\
&\quad -(\bar{k}^2 + \bar{t}^2)\,\mathbf{n}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Il est à remarquer que comme d'après [1, 177]

$$\left.\begin{aligned} q &= (\bar{g} - \delta_2) \operatorname{cotg} \delta - (g + \delta_1) / \sin \delta , \\ \bar{q} &= -(g + \delta_1) \operatorname{cotg} \delta - (\bar{g} - \delta_2) / \sin \delta , \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

la condition d'intégrabilité

$$\mathbf{n}_{12} + q\, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{21} + \bar{q}\, \mathbf{n}_2 \tag{1.6}$$

appliquée à la fonction vectorielle $\mathbf{n}$ fournit à l'aide de (1.4; 2 et 5) les formules de MAINARDI-CODAZZI sous forme invariante [2, 179].

Soient k_n et t_g la courbure normale et la torsion géodésique correspondant à la direction ν, et appelons k_g la courbure géodésique d'une ligne de S dont la tangente en chaque point P a pour direction ν. Dans ce cas, la fonction de direction de LAGUERRE relative à la direction ν est donnée par

$$\mathscr{L}(\nu) = (k_n)_1 - 2\, k_g\, t_g \tag{1.7}$$

où l'indice 1 désigne la dérivation invariante effectuée dans la direction ν.

2. Démonstration. Comme on a respectivement

$$\left.\begin{aligned} k_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{11} = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1 , \\ t_g &= (\mathbf{x}_1 , \mathbf{n} , \mathbf{n}_1) , \\ k_g &= (\mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_{11} , \mathbf{n}) , \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

on en déduit aisément

$$k_g\, t_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{11} & 1 \\ -k_n & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_{11} & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_{11} . \tag{2.2}$$

(1.7) devient alors

$$\mathscr{L}(\nu) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_{11} - \mathbf{n}_{11} \cdot \mathbf{x}_1 . \tag{2.3}$$

On a d'autre part d'après [1, 179]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (\mathbf{n}_1 \sin \bar{\nu} + \mathbf{n}_2 \sin \nu) / \sin \delta , \\ \mathbf{n}_{11} &= \frac{1}{\sin^2 \delta} [(\mathbf{n}_{11} \sin \bar{\nu} + \mathbf{n}_{21} \sin \nu) \sin \bar{\nu} + (\mathbf{n}_{12} \sin \bar{\nu} + \mathbf{n}_{22} \sin \nu) \sin \nu] / \sin^2 \delta \\ &\qquad + (\sin \bar{\nu} / \sin \delta)_1\, \mathbf{n}_1 + (\sin \nu / \sin \delta)_1\, \mathbf{n}_2 , \\ \mathbf{x}_1 &= (\mathbf{x}_1 \sin \bar{\nu} + \mathbf{x}_2 \sin \nu) / \sin \delta , \\ \mathbf{x}_{11} &= \frac{1}{\sin^2 \delta} [(\mathbf{x}_{11} \sin \bar{\nu} + \mathbf{x}_{21} \sin \nu) \sin \bar{\nu} + (\mathbf{x}_{12} \sin \bar{\nu} + \mathbf{x}_{22} \sin \nu) \sin \nu] / \sin^2 \delta \\ &\qquad + (\sin \bar{\nu} / \sin \delta)_1\, \mathbf{x}_1 + (\sin \nu / \sin \delta)_1\, \mathbf{x}_2 . \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

La relation (2.3) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\sin^3\delta\mathscr{L}(\nu)=&(\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{11}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{11})\sin^3\bar{\nu}+\\&+(\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{21}+\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{12}+\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{11}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{21}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{12}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{11})\sin^2\bar{\nu}\sin\nu+\\&+(\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{21}+\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{12}+\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{22}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{21}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{12}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{22})\sin\bar{\nu}\sin^2\nu+\\&+(\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{22}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{22})\sin^3\nu\,. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

En faisant usage de la condition d'intégrabilité (1.6) on obtient

$$\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{12}=\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{21}+q\,k+\bar{q}\,\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_2\,. \qquad (2.6)$$

La condition d'intégrabilité appliquée à la fonction vectorielle $\mathbf{x}$ fournit de même

$$\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{12}=\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{21}+q\,k+\bar{q}\,\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_2\,. \qquad (2.7)$$

Comme d'après (1.2)

$$\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_2=\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_2\,,$$

la dérivation invariante de cette relation relativement à l'indice 1 fournit

$$\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{21}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{21}=\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{11}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{11}\,; \qquad (2.8)$$

(2.6) et (2.7) donnent alors

$$\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{12}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{12}=\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{21}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{21}=\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{11}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{11}\,. \qquad (2.9)$$

On trouve de la même manière que précédemment

$$\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{12}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{12}=\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{21}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{21}=\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{22}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{22}\,. \qquad (2.10)$$

En se servant alors des formules (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), on obtient finalement

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{11}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{11}=k_1-2gt\,,\\&\mathbf{n}_1\,.\,\mathbf{x}_{12}-\mathbf{x}_1\,.\,\mathbf{n}_{12}=k_2-2t(\bar{g}-\delta_2)=t_1\sin\delta+k_1\cos\delta+[(k-\bar{k})\,g/\sin\delta]\\&\qquad=\bar{k}_1\cos\bar{\delta}-\bar{t}_1\sin\delta+[(k-\bar{k})(g+\delta_1)/\sin\delta]\,,\\&\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{12}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{12}=\bar{k}_1-2\bar{t}(g+\delta_1)=\bar{k}_2\cos\delta-\bar{t}_2\sin\delta+[(k-\bar{k})\bar{g}/\sin\delta]\\&\qquad=k_2\cos\delta+t_2\sin\delta+[(k-\bar{k})(\bar{g}-\delta_2)/\sin\delta]\,,\\&\mathbf{n}_2\,.\,\mathbf{x}_{22}-\mathbf{x}_2\,.\,\mathbf{n}_{22}=\bar{k}_2-2\,\bar{g}\bar{t}\,.\end{aligned}\right\}\quad(2.11)$$

Ce qui montre que (2.5) peut finalement se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\sin^3\delta\,\mathscr{L}(\nu)=&(k_1-2\,gt)\sin^3\bar{\nu}+3\,[k_2-2t(\bar{g}-\delta_2)]\sin^2\bar{\nu}\sin\nu+\\&+3\,[\bar{k}_1-2\bar{t}\,(g+\delta_1)]\sin\bar{\nu}\sin^2\nu+(\bar{k}_2-2\,\bar{g}\bar{t})\sin^3\nu\,; \qquad (2.12)\\&\nu+\bar{\nu}=\delta\,.\end{aligned}$$

Il est d'autre part à remarquer que les différentes valeurs du deuxième et du troisième coefficient de $\mathscr{L}(\nu)$ donnent à l'aide des formules (2.11) des formes variées des formules de MAINARDI-CODAZZI [1, 179].

3. Application. Illustrons ce résultat par un exemple. Considérons le cas d'une quadrique et supposons que ses lignes coordonnées soient constituées par ses génératrices rectilignes. On aura alors tout le long de ces génératrices

$$k = 0 \,,\, g = 0 \,,\, \overline{k} = 0 \,,\, \overline{g} = 0$$

et $\mathscr{L}(\nu)$ s'écrira dans ce cas à l'aide des formules (2.11) et [1, 179]

$$\mathscr{L}(\nu) = 3 \sin \nu \sin \overline{\nu}\, t_1 \,/ \sin \delta \,, \quad \text{avec} \quad K = -\, t^2$$

où K est la courbure totale, l'indice 1 indiquant la dérivation invariante effectuée dans la direction ν. On en déduit le théorème de DARBOUX qui suit :

Les lignes de LAGUERRE d'une quadrique, c'est-à-dire les lignes le long desquelles la fonction de direction de LAGUERRE $\mathscr{L}(\nu)$ est nulle, sont constituées par les deux systèmes de génératrices rectilignes et par une troisième famille de courbes le long desquelles la courbure totale est constante et réciproquement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ŞEMİN, F. : *Note sur les dérivées invariantes,* İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **19** (1954), 175-179.

[2] ŞEMİN, F. : *Généralisation de quelques formules relatives à la théorie des surfaces,* İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **20** (1955), 173-180.

ÖZET

Yüzey üzerinde koordinat çizgilerini en genel biçimde seçmek suretiyle, LAGUERRE doğrultu fonksiyonunun ifadesi bulunmuş ve bu ifade, herhangi bir ikinci derece yüzeyinin, anadoğrularından farklı, LAGUERRE çizgileri üzerinde GAUSS eğriliğinin sabit olduğunu göstermek için kullanılmıştır.