İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 48 (1987-1989), 1-66

CHAMPS DE VECTEURS NON TANGENTIELS[1)]

N. URAL

Dans ce travail, les propriétés de la courbure normale, de la courbure géodésique et de la torsion géodésique d'un champ de vecteurs tangentiels relativement à une courbe de la surface sur laquelle le champ est défini, les directions asymptotiques et principales relativement à ces éléments, les paraílles des certaines notions et des relations de la théorie des surfaces et des courbes constituées pour les champs de vecteurs tangentiels est étendu aux champs de vecteurs non tangentiels.

0. Introduction. Si à chaque point régulier P d'une surface S on attache un vecteur v situé dans le plan tangent en ce point, on constitue ainsi ce que l'on appelle *un champ de vecteurs tangentiels.* En 1932 W.C. GRAUSTEIN [4], en 1952 et 1956 T.K. PAN [3] ont respectivement défini *la courbure géodésique, la courbure normale et la torsion géodésique* d'un tel champ, relatives à une courbe C de S passant par P et en ont obtenu quelques propriétés. Plus tard, en 1974 et 1975 F. ŞEMİN [1,2] a exprimé ces propriétés de façon invariante, a rectifié quelques erreurs de T.K. PAN [7], a obtenu l'extension de quelques formules de la théorie des surfaces aux champs de vecteurs tangentiels, a établi certains invariants différentiels et après avoir établi les formules de FRENET d'un champ de vecteurs tangentiels relativement à une courbe de la surface, a surtout défini les courbes de la surface relativement à ce champ qu'il a nommées: droite, courbe plane, hélice, cercle, ligne de BERTRAND et a défini la "développée" et la "développante" du champ.

Dans ce travail nous essayerons d'étendre ce qui a été trouvé par T.K. PAN et F. ŞEMİN pour les champs de vecteurs tangentiels, aux champs de vecteurs non tangentiels. Dans ce que suit nous supposerons que toutes les fonctions scalaires ou vectorielles que l'on va envisager sont des fonctions dérivables et que les points P prissur S sont des points réguliers, à moins que le contraire soit mentionné d'avance.

Rappelons d'abord certaines formules que l'on va utiliser dorénavant.

Soit un espace Euclidien de dimension 3, une surface S donnée par ses lignes de courbures et un point P de cette surface, un vecteur unitaire normal à la

1) Je remercie vivement M. le Professeur F. Şemin qui m'a suggéré la sujet de ce travail et qui m'a aidé de ces conseils judicieux pour l'élaboration de ce dernier.

surface n, les vecteurs unitaires des directions principales t et t*, et θ, θ^* les directions orthogonales déterminées par les vecteurs unitaires des tangentes aux courbes *C*, *C** d'un réseau orthogonal tracé sur *S* au point *P*, à l'aide des relations

$$\mathbf{a} = \mathbf{t} \operatorname{Cos} \theta + \mathbf{t}^* \operatorname{Sin} \theta \,, \quad \mathbf{a}^* = - \mathbf{t} \operatorname{Sin} \theta + \mathbf{t}^* \operatorname{Cos} \theta \,. \tag{0.1}$$

Soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} \operatorname{Cos} \phi + \mathbf{t}^* \operatorname{Sin} \phi \,, \quad \mathbf{v}^* = - \mathbf{t} \operatorname{Sin} \phi + \mathbf{t}^* \operatorname{Cos} \phi \tag{0.2}$$

et ($\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{n}$) le trièdre trirectangle au point *P*.

T.K. PAN et F. ŞEMİN ont étudié les différentes propriétés du champ de vecteurs tangentiels $\mathbf{v}(\phi)$ relativement au trièdre trirectangle (v, v*, n). Par exemple, les dérivations invariantes de direction θ, des vecteurs unitaires constituant le trièdre trirectangle, sont, d'après [1 , (2-9a)] :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= {}_v k_{g\theta} \, \mathbf{v}^* + {}_v k_{n\theta} \, \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_I^* &= - {}_v k_{g\theta} \, \mathbf{v} + {}_v t_{g\theta} \, \mathbf{n} \\ \mathbf{n}_I &= - {}_v k_{n\theta} \, \mathbf{v} - {}_v t_{g\theta} \, \mathbf{v}^* \quad . \end{aligned}\right\} \tag{0.3}$$

Les coefficients ${}_v k_{g\theta}$, ${}_v k_{n\theta}$, ${}_v t_{g\theta}$ *désignent respectivement la courbure géodésique, la courbure normale, la torsion géodésique du champ de vecteurs tangentiels* $\mathbf{v}(\phi)$ *relativement à C au point P* [3,4,5].

Les valeurs de ces coefficients en fonction de ϕ et de θ sont données d'après [1, (4-1)] , par les formules

$$\left.\begin{aligned} {}_v k_{g\theta} &= (g+\phi_1) \operatorname{Cos} \theta + (g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \theta \\ {}_v k_{n\theta} &= k \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \theta + k^* \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \theta \\ {}_v t_{g\theta} &= k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \theta - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \theta \,. \end{aligned}\right\} \tag{0.4}$$

Dans ces formules k, k^*, g, g^* désignent les courbures principales et les courbures géodésiques des lignes de courbure; les indices inférieurs 1, 2 désignent les dérivations invariantes effectuées dans les directions principales.

Comme les relations (0.4) montrent que les coefficients ${}_v k_{g\theta}$, ${}_v k_{n\theta}$, ${}_v t_{g\theta}$ sont des fonctions de direction, *pour toutes les courbes se trouvant sur S et étant tangentes à C au point P, les valeurs de ces coefficients au point P sont les mêmes. Et au lieu de parler de la courbure géodésique, la courbure normale, la torsion géodésique du champ de vecteurs tangentiels* $\mathbf{v}(\phi)$ *relativement à C en P, on parlera de la courbure géodésique, la courbure normale, la torsion géodésique du champ de vecteurs tangentiels* $\mathbf{v}(\phi)$ *relativement à la direction* θ *en P.*

1. La courbure géodésique, la courbure normale, la torsion géodésique d'un champ de vecteurs non tangentiels w d'une surface *S* relativement à une courbe *C*

en un point régulier P. Soit w, le vecteur unitaire du champ de vecteurs généraux de la surface S, au point P. Soit ϕ l'angle que fait le plan (w, n) avec le plan (t, n) et posons

$$\mathbf{w}.\,\mathbf{n} = \operatorname{Cos} \overline{\phi}\,.$$

Soit v, le vecteur unitaire, colinéaire à la projection orthogonale de w sur le plan tangent en P. On peut écrire

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + \mathbf{n} \operatorname{Cos} \overline{\phi}\,. \tag{1.1}$$

Dans le plan tangent considérons, le vecteur unitaire v* orthogonal à v et vérifiant la condition $\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{v}^*} = + \frac{\pi}{2}$ et le vecteur w* défini par

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}^*\,. \tag{1.2}$$

On obtient

$$\mathbf{v}^* = - \mathbf{t} \operatorname{Sin} \phi + \mathbf{t}^* \operatorname{Cos} \phi\ , \quad \mathbf{w}^* = - \mathbf{v} \operatorname{Cos} \overline{\phi} + \mathbf{n} \operatorname{Sin} \overline{\phi}\,. \tag{1.3}$$

Soit (w, v*, w*) le trièdre trirectangle de la surface S au point P. Les dérivations invariantes de direction θ de ces vecteurs unitaires sont, d'après les formules [1, (2-9a)]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{w}_I &= {}_wk_{g\theta}\, \mathbf{v}^* + {}_wk_{n\theta}\, \mathbf{w}^* \\ \mathbf{v}_I^* &= - {}_wk_{g\theta}\, \mathbf{w} + {}_wt_{g\theta}\, \mathbf{w}^* \\ \mathbf{w}_I^* &= - {}_wk_{n\theta}\, \mathbf{w} - {}_wt_{g\theta}\, \mathbf{v}^*\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Les coefficients ${}_wk_{g\theta}$, ${}_wk_{n\theta}$, ${}_wt_{g\theta}$ de ces formules sont definis en remplaçant v par w, n par w*, v* par v* dans [1, (2-6); (2-7); (2-8)]

$${}_wk_{g\theta} = \mathbf{w}_I \,.\, \mathbf{v}^* = - \mathbf{w} \,.\, \mathbf{v}_I^*\ , \ {}_wk_{n\theta} = \mathbf{w}_I \,.\, \mathbf{w}^* = - \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w}_I^*\ , \ {}_wt_{g\theta} = \mathbf{v}_I^* \,.\, \mathbf{w}^* = - \mathbf{v}^* . \mathbf{w}_I^*$$

et sont nommés respectivement, *courbure géodésique, courbure normale et torsion géodésique du champ de vecteurs* w $(\phi, \overline{\phi})$ *relativement à C en P*. En se servant de ce qui a été défini ci-dessus on voit que ces coefficients vérifient les relations

$$\left.\begin{aligned} {}_wk_{g\theta} &= {}_vk_{g\theta} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - {}_vt_{g\theta} \operatorname{Cos} \overline{\phi} \\ {}_wk_{n\theta} &= {}_vk_{n\theta} - \overline{\phi}_I \\ {}_wt_{g\theta} &= {}_vk_{g\theta} \operatorname{Cos} \overline{\phi} + {}_vt_{g\theta} \operatorname{Sin} \overline{\phi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Dans le cas où le champ w est donné, les formules (0.4) et (1.5) montrent que les coefficients de (1.4) dépendent seulement de θ c'est-à-dire que chacun d'eux est une fonction de direction. Donc, *sur S pour toutes les courbes tangentes à C en P, les valeurs de ces coefficients en P sont les mêmes.*

Cas Particuliers.

1) Pour $\bar{\phi} = 0$ on a : $\mathbf{w} = \mathbf{n}$, ${}_w k_{g\theta} = {}_n k_{g\theta} = - {}_v t_{g\theta}$, ${}_w k_{n\theta} = {}_n k_{n\theta} = {}_v k_{n\theta}$,
$${}_w t_{g\theta} = {}_n t_{g\theta} = {}_v k_{g\theta} .$$

2) Pour $\bar{\phi} = \dfrac{\pi}{2}$ on a : $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, ${}_w k_{g\theta} = {}_v k_{g\theta}$, ${}_w k_{n\theta} = {}_v k_{n\theta}$, ${}_w t_{g\theta} = {}_v t_{g\theta}$.

Propriétés.

a) D'après les formules (1.5), on obtient

$$({}_w k_{g\theta})^2 + ({}_w t_{g\theta})^2 = ({}_v k_{g\theta})^2 + ({}_v t_{g\theta})^2 . \tag{1.6.}$$

Comme on peut le voir le côté droit de l'égalité ne dépend pas de $\bar{\phi}$ et on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1. *En un point régulier P d'une surface S, la somme des carrés de la courbure géodésique et de la torsion géodésique du champ de vecteur* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *relativement à la direction* θ *ne change pas quand le vecteur du champ* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *tourne autour de P, en restant dans le plan* $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$, *et est égale à la somme des carrés des mêmes éléments du vecteur* $\mathbf{v}$.

b) D'après la seconde formule de (1.5) :

Théorème 1.2. *Si le long d'une courbe C d'une surface S, le vecteur du champ* $\mathbf{w}$, *fait un angle constant avec la normale à la surface, on a*

$${}_w k_{n\theta} = {}_v k_{n\theta}$$

à chaque point P de C.

c) Si l'on prend la direction $\bar{\phi}^* = \bar{\phi} + \dfrac{\pi}{2}$ orthogonale à $\bar{\phi}$, ou bien $\mathbf{w}^*$ au lieu de $\mathbf{w}$ les formules (1.5) donnent

$${}_{w^*} k_{g\theta} = - {}_w t_{g\theta} \ , \quad {}_{w^*} k_{n\theta} = {}_w k_{n\theta} \ , \quad {}_{w^*} t_{g\theta} = {}_w k_{g\theta} \ .$$

La courbure absolue du champ w relativement à C **au point** P.

$$\mathbf{w}_I = {}_w k_{a\theta} \overline{\mathbf{w}} \ , \quad {}_w k_{a\theta} > 0 \ , \quad \overline{\mathbf{w}}^2 = 1 \tag{1.7}$$

le coefficient ${}_w k_{a\theta}$ défini ci-dessus est *la courbure absolue du champ* $\mathbf{w}$ *relativement à C en P.* On retrouvera cette notion quand on parlera des formules de FRENET d'un champ $\mathbf{w}$.

D'après (1.4;1) et (1.7) on obtient

$$({}_w k_{a\theta})^2 = ({}_w k_{a\theta})^2 + ({}_w k_{a\theta})^2 . \tag{1.8}$$

Le vecteur de DARBOUX d'un champ w relativement au trièdre trirectangle $(\mathbf{w}, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*)$.

On sait que les vecteurs $\mathbf{w}_I, \mathbf{v}_I^*, \mathbf{w}_I^*$ dérivés des vecteurs unitaires constituant un trièdre trirectangle sont *coplanaires* et que le vecteur

$$ {}_w\mathbf{d}_\theta = {}_wt_{g\theta}\,\mathbf{w} - {}_wk_{n\theta}\,\mathbf{v}^* + {}_wk_{g\theta}\,\mathbf{w}^* \tag{1.9}$$

qui leurs est orthogonal est *le vecteur de DARBOUX du champ* **w** *relativement au trièdre trirectangle* **w**, **v***, **w*** *en P.*

Ce vecteur vérifie les relations suivantes :

$$\mathbf{w}_I = {}_w\mathbf{d}_\theta \wedge \mathbf{w} \;,\; \mathbf{v}_I^* = {}_w\mathbf{d}_\theta \wedge \mathbf{v}^* \;,\; \mathbf{w}_I^* = {}_w\mathbf{d}_\theta \wedge \mathbf{w}^* \,, \tag{1.10}$$

$$({}_w\mathbf{d}_\theta)_I = ({}_wt_{g\theta})_I\,\mathbf{w} - ({}_wk_{n\theta})_I\,\mathbf{v}^* + ({}_wk_{g\theta})_I\,\mathbf{w}^* \,. \tag{1.11}$$

2. Expressions invariantes. En se servant des formules [1, 4-1] et (1.5) on obtient

$$\left.\begin{aligned}
{}_wk_{g\theta} &= [(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\bar\phi + k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\bar\phi\,]\operatorname{Cos}\theta + \\
&\quad + [(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\bar\phi - k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\bar\phi\,]\operatorname{Sin}\theta \\
{}_wk_{n\theta} &= (k\operatorname{Cos}\phi - \bar\phi_1)\operatorname{Cos}\theta + (k^*\operatorname{Sin}\phi - \bar\phi_2)\operatorname{Sin}\theta \\
{}_wt_{g\theta} &= [\,(g+\phi_1)\operatorname{Cos}\bar\phi - k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\bar\phi\,]\operatorname{Cos}\theta + \\
&\quad + [(g^*+\phi_2)\operatorname{Cos}\bar\phi + k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\bar\phi\,]\operatorname{Sin}\theta \,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

On voit clairement que ${}_wk_{g\theta}$, ${}_wk_{n\theta}$, ${}_wt_{g\theta}$ *sont des fonctions de direction dépendant de* θ.

En remplaçant θ par $\theta^* = \theta + \dfrac{\pi}{2}$ dans ces formules on obtient

$$\left.\begin{aligned}
{}_wk_{g\theta^*} &= -\,[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\bar\phi + k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\bar\phi\,]\operatorname{Sin}\theta + \\
&\quad + [(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\bar\phi - k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\bar\phi\,]\operatorname{Cos}\theta \\
{}_wk_{n\theta^*} &= -\,(k\operatorname{Cos}\phi - \bar\phi_1)\operatorname{Sin}\theta + (k^*\operatorname{Sin}\phi - \bar\phi_2)\operatorname{Cos}\theta \\
{}_wt_{g\theta^*} &= -\,[(g+\phi_1)\operatorname{Cos}\bar\phi - k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\bar\phi\,]\operatorname{Sin}\theta + \\
&\quad + [(g^*+\phi_2)\operatorname{Cos}\bar\phi + k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\bar\phi\,]\operatorname{Cos}\theta \,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

En se servant de [1, (1-9)], [2, (2-7); (3-7)], d'après (2.1) et (2.2) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}
&({}_wk_{g\theta})^2 + ({}_wk_{g\theta^*})^2 = ({}_vk_{gv_1})^2\operatorname{Sin}^2\bar\phi - \mathscr{B}\operatorname{Sin}2\bar\phi + (M\,k_{n\phi^*} - K)\operatorname{Cos}^2\bar\phi \\
&({}_wk_{g\theta})^2 + ({}_wk_{n\theta^*})^2 = M\,k_{n\phi} - K - 2\,(k\,\bar\phi_1\operatorname{Cos}\phi + k^*\,\bar\phi_2\operatorname{Sin}\phi) + \bar\phi_1^2 + \bar\phi_2^2 \\
&({}_wt_{g\theta})^2 + ({}_wt_{g\theta^*})^2 = ({}_vk_{gv_1})^2\operatorname{Cos}^2\bar\phi + \mathscr{B}\operatorname{Sin}2\bar\phi + (M\,k_{n\phi^*} - K)\operatorname{Sin}^2\bar\phi \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ({}_vk_{gv_1})^2 = k^2_{gc_v} + k^2_{gc_{v^*}} \,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

On peut exprimer ces relations par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *En un point régulier P d'une surface S, la somme des carrés des courbures géodésiques ou des courbures normales, ou des torsions géodésiques d'un champ de vecteur* **w** *par rapport aux directions orthogonales* a (θ) *et* a* (θ*) *ne dépend pas de la direction* θ.

La somme de la première et de la troisième des relations (2.3) donne après avoir remplacé par leurs égales dans [2, (3-7)], [1, (1-9)]

$$({}_wk_{g\theta})^2 + ({}_wt_{g\theta})^2 + ({}_wk_{g\theta^*})^2 + ({}_wt_{g\theta^*})^2 = ({}_vk_{gv^1})^2 + M\,k_{n\phi^*} - K$$
$$= k^2_{gc_v} + k^2_{gc_{v^*}} + k^2_{n\phi^*} + t^2_{g\phi^*}\,. \qquad (2.4)$$

D'où :

Théorème 2.2. *En un point régulier P d'une surface S, la somme des carrés des courbures géodésiques et la somme des carrés des torsions géodésiques d'un champ de vecteur* **w**, *par rapport aux directions orthogonales* a (θ) *et* **a*** (θ*) *du plan tangent en P, ne dépendent pas de ces directions, ni de l'angle* $\overline{\phi}$; *et les carrés des courbures géodésiques des lignes du champ* C_v, C_{v^*} *des champs de vecteurs tangentiels* **v**, **v*** *sont égaux à la somme des carrés de la courbure normale et de la torsion géodésique de* C_{v^*}.

Si $\theta = \phi$ en se servant de [1, (3-1a)] à partir de (1.5) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} {}_wk_{g\phi} &= k_{gc_v}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} - t_{g\phi}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi} \\ {}_wk_{n\phi} &= k_{n\phi} - \overline{\phi}_{I^*} \\ {}_wt_{g\phi} &= t_{g\phi}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} + k_{gc_v}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Ici, l'indice I^* représente la dérivation invariante de direction ϕ.

3. **Certains invariants différentiels.** Dans [2, (2-6), (2-7), (2-8), (2-9)] on a montré que

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{A} &= {}_vk_{g\theta}\,{}_vk_{n\theta} - {}_{v^*}k_{g\theta^*}\,{}_{v^*}t_{g\theta^*} = k_{gc_v}\,k_{n\phi} - k_{gc_{v^*}}\,t_{g\phi^*} \\ &= k\,(g+\phi_1)\,\mathrm{Cos}\,\phi + k^*\,(g^*+\phi_2)\,\mathrm{Sin}\,\phi \\ \mathscr{B} &= {}_vk_{g\theta}\,{}_vt_{g\theta} + {}_{v^*}k_{g\theta^*}\,{}_{v^*}k_{n\theta^*} = k_{gc_v}\,t_{g\phi} + k_{gc_{v^*}}\,k_{n\phi^*} \\ &= -\,k\,(g+\phi_1)\,\mathrm{Sin}\,\phi + k^*\,(g^*+\phi_2)\,\mathrm{Cos}\,\phi \\ \mathscr{C} &= {}_vk_{g\theta}\,{}_{v^*}k_{n\theta^*} - {}_{v^*}k_{g\theta^*}\,{}_vt_{g\theta} = k_{gc_v}\,k_{n\phi^*} - k_{gc_{v^*}}\,t_{g\phi} \\ &= k\,(g+\phi_2)\,\mathrm{Sin}\,\phi + k^*\,(g+\phi_1)\,\mathrm{Cos}\,\phi \\ \mathscr{D} &= {}_vk_{g\theta}\,{}_{v^*}t_{g\theta^*} + {}_{v^*}k_{g\theta^*}\,{}_vk_{n\theta} = k_{gc_v}\,t_{g\phi^*} + k_{gc_{v^*}}\,k_{n\phi} \\ &= k\,(g^*+\phi_2)\,\mathrm{Cos}\,\phi - k^*\,(g+\phi_1)\,\mathrm{Sin}\,\phi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

A partir de [1, (3-1a), (3-1b)] on peut voir facilement que

$$ {}_{v^*}k_{g\theta^*} = {}_{v}k_{g\theta^*} \quad , \quad {}_{v^*}k_{n\theta^*} = {}_{v}t_{g\theta^*} \quad , \quad {}_{v^*}t_{g\theta^*} = - {}_{v}k_{g\theta^*} \, . \tag{3.2} $$

Si l'on utilise ces dernières formules dans les relations (3.1) on obtient une forme plus symétrique

$$ \left. \begin{aligned} \mathscr{A} &= {}_{v}k_{g\theta}\, {}_{v}k_{n\theta} + {}_{v}k_{g\theta^*}\, {}_{v}k_{n\theta^*} \\ \mathscr{B} &= {}_{v}k_{g\theta}\, {}_{v}t_{g\theta} + {}_{v}k_{g\theta^*}\, {}_{v}t_{g\theta^*} \\ \mathscr{C} &= {}_{v}k_{g\theta}\, {}_{v}t_{g\theta^*} - {}_{v}k_{g\theta^*}\, {}_{v}t_{g\theta} \\ \mathscr{D} &= - {}_{v}k_{g\theta}\, {}_{v}k_{n\theta^*} + {}_{v}k_{n\theta^*}\, {}_{v}k_{n\theta} \, . \end{aligned} \right\} \tag{3.3} $$

Ajoutons à ces égalités

$$ K = {}_{v}k_{g\theta}\, {}_{v}t_{g\theta^*} - {}_{v}k_{g\theta^*}\, {}_{v}t_{g\theta} \tag{3.4} $$

que l'on obtient en se servant de (3.2) dans [1, (9-7)] et

$$ M\, t_{g\phi} = {}_{v}t_{g\theta}\, {}_{v}k_{n\theta} + {}_{v}t_{g\theta^*}\, {}_{v}k_{n\theta^*} \tag{3.5} $$

que l'on peut obtenir par calcul.

Pour les champs de vecteurs généraux on peut écrire les six relations semblables à celles citées ci-dessus pour les champs de vecteurs tangentiels.

$$ \left. \begin{aligned} \overline{\mathscr{A}} &= {}_{w}k_{g\theta}\, {}_{w}k_{n\theta} + {}_{w}k_{g\theta^*}\, {}_{w}k_{n\theta^*} \\ \overline{\mathscr{B}} &= {}_{w}k_{g\theta}\, {}_{w}t_{g\theta} + {}_{w}k_{g\theta^*}\, {}_{w}t_{g\theta^*} \\ \overline{\mathscr{C}} &= {}_{w}k_{g\theta}\, {}_{w}t_{g\theta^*} - {}_{w}k_{g\theta^*}\, {}_{w}t_{g\theta} \\ \overline{\mathscr{D}} &= - {}_{w}k_{g\theta}\, {}_{w}k_{n\theta^*} + {}_{w}k_{g\theta^*}\, {}_{w}k_{n\theta} \\ \overline{K} &= {}_{w}k_{n\theta}\, {}_{w}t_{g\theta^*} - {}_{w}k_{n\theta^*}\, {}_{w}t_{g\theta} \\ \overline{\mathscr{E}} &= {}_{w}k_{n\theta}\, {}_{w}t_{g\theta} + {}_{w}k_{n\theta^*}\, {}_{w}t_{g\theta^*} \, . \end{aligned} \right\} \tag{3.6} $$

Pour obtenir les valuers de $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{B}}$, $\overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{D}}$, $\overline{K}$ et $\overline{\mathscr{E}}$ se trouvant dans les relations (3.6) il suffit d'utiliser les égalités

$$ \begin{aligned} &(a \operatorname{Cos} \theta + b \operatorname{Sin} \theta)(\bar{a} \operatorname{Cos} \theta + \bar{b} \operatorname{Sin} \theta) + \\ &+ (b \operatorname{Cos} \theta - a \operatorname{Sin} \theta)(\bar{b} \operatorname{Cos} \theta - \bar{a} \operatorname{Sin} \theta) = a\bar{a} + b\bar{b} \end{aligned} \tag{3.7} $$

$$ \begin{aligned} &(a \operatorname{Cos} \theta + b \operatorname{Sin} \theta)(\bar{a} \operatorname{Cos} \theta - \bar{b} \operatorname{Sin} \theta) - \\ &- (b \operatorname{Cos} \theta - a \operatorname{Sin} \theta)(\bar{b} \operatorname{Cos} \theta + \bar{a} \operatorname{Sin} \theta) = a\bar{a} - b\bar{b} \, . \end{aligned} \tag{3.8} $$

Par exemple pour la valeur de $\mathscr{A}$ dans (3.3) on peut écrire

$$ \mathscr{A} = k\,(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \phi + k^*\,(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \phi \, , $$

car à partir de (3.7) on a

$$a = g + \phi_1 \quad , \quad b = g^* + \phi_2 \quad , \quad \bar{a} = k \operatorname{Cos} \phi \quad , \quad \bar{b} = k^* \operatorname{Sin} \phi \, .$$

Pour $\overline{\mathscr{A}}$ si l'on note

$$a = (g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi} \qquad , \quad \bar{a} = k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1$$

$$b = (g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi} \quad , \quad \bar{b} = k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2$$

et si l'on applique (3.7) on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{A}} = & (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] + \\ & + (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) [(g^* + \phi_2) \sin \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] \end{aligned} \tag{3.9}$$

ou bien après avoir ordonné

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{A}} = & [\mathscr{A} - (g^* + \phi_2) \bar{\phi}_2 - (g + \phi_1) \bar{\phi}_1] \sin \bar{\phi} + \\ & + [k^* \bar{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi - k \bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi - M t_{g\varnothing}] \operatorname{Cos} \bar{\phi} \, . \end{aligned} \tag{3.10}$$

En se servant de (3.7) pour $\overline{\mathscr{B}}$, $\overline{\mathscr{E}}$ et de (3.8) pour $\overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{D}}$, $\overline{K}$ on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{B}} = & [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] [(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \bar{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] + \\ & + [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] [(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{C}} = & [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] [(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] - \\ & - [(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \bar{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}} = & - (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] + \\ & + (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) \; [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{K} = & - (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) [(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \bar{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] + \\ & + (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) [(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{E}} = & (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) [(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \bar{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] + \\ & + (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) [(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}] \end{aligned}$$

ou bien après avoir ordonné on obtient

$$\overline{\mathscr{B}} = - \mathscr{B} \operatorname{Cos} 2 \bar{\phi} + \frac{1}{2} [({}_{\nu}k_{g\nu 1})^2 - M k_{n\phi^*} + K] \operatorname{Sin} 2 \bar{\phi} \, , \tag{3.11}$$

$$\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \, , \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}} = & [\mathscr{D} - (g^* + \phi_2) \bar{\phi}_1 + (g + \phi_1) \bar{\phi}_2] \operatorname{Sin} \bar{\phi} + \\ & + [k \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi + k \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi - K] \operatorname{Cos} \bar{\phi} \, , \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \overline{K} = & [\mathscr{D} - (g^* + \phi_2) \bar{\phi}_1 + (g + \phi_2) \bar{\phi}_2] \operatorname{Cos} \bar{\phi} + \\ & + [K - k^* \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi - k \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Sin} \bar{\phi} \, , \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\overline{\mathscr{E}} = [\,\mathscr{A} - (g^* + \phi_2)\,\overline{\phi}_2 - (g + \phi_1)\,\overline{\phi}_1\,]\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi} + \\ + [Mt_{g\phi} + k\,\overline{\phi}_1\,\mathrm{Sin}\,\phi - k^*\,\overline{\phi}_2\,\mathrm{Cos}\,\phi\,]\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,. \tag{3.15}$$

A partir de (3.12) on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *En un point regulier P d'une surface S, les invariants* $\overline{\mathscr{C}}$ *et* $\mathscr{C}$ *du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *et du champ de vecteurs tangentiels* $\mathbf{v}(\phi)$ *sont égaux c'est-à-dire que* $\overline{\mathscr{C}}$ *ne dépend pas de l'angle* $\overline{\phi}$ *que fait* $\mathbf{w}$ *avec la normale à la surface et l'on a*

$${}_wk_{g\theta}\;{}_wt_{g\theta^*} - {}_wk_{g\theta^*}\;{}_wt_{g\theta} = {}_vk_{g\theta}\;{}_vt_{g\theta^*} - {}_vk_{g\theta^*}\;{}_vt_{g\theta} = k_{gc_v}\,k_{n\phi^*} - k_{gc_v^*}\,t_{g\phi}\,. \tag{3.16}$$

D'autre part en comparant (3.13) et (3.14) avec (3.10) et (3.15) on voit que

$$\overline{\mathscr{D}}^2 + \overline{K}^2 = [\mathscr{D} - (g^* + \phi_2)\overline{\phi}_1 + (g + \phi_1)\,\overline{\phi}_2\,]^2 + [K - k^*\overline{\phi}_1\,\mathrm{Cos}\phi - k\,\overline{\phi}_2\,\mathrm{Sin}\phi]^2, \tag{3.17}$$

$$\overline{\mathscr{A}}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2 = [\mathscr{A} - (g^* + \phi_2)\overline{\phi}_2 - (g + \phi_1)\overline{\phi}_1]^2 + [Mt_{g\phi} + k\overline{\phi}_1\,\mathrm{Sin}\phi - k^*\overline{\phi}_2\,\mathrm{Cos}\phi]^2. \tag{3.18}$$

En éliminant Cos 0 et Sin 0 dans les expressions données par (2.1) pour ${}_wk_{g\theta}$, ${}_wk_{n\theta}$ et ${}_wt_{g\theta}$ on obtient la relation

$$\overline{\mathscr{C}}\;{}_wk_{n\theta} + \overline{\mathscr{D}}\;{}_wt_{g\theta} - \overline{K}\;{}_wk_{g\theta} = 0 \tag{3.19}$$

ce qui est l'extension de la formule [2, (3-64)].

Théorème 3.2. *En un point régulier P d'une surface S, la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique d'un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *relativement à une direction* $\mathbf{a}(\theta)$ *sont liées, quelle que soit la direction* θ *, par la relation* (3.19) *dont les coefficients ne dépendent pas de* θ .

4. Direction asymptotique relative à la courbure géodésique d'un champ de vecteurs w.

La direction $\overline{\gamma}^1$ de 0 pour laquelle

$${}_wk_{g\theta} = 0$$

est appelée direction asymptotique du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ relativement aux courbures géodésiques du champ au point *P*.

Notons $\overline{\gamma}^1$ la direction orthogonale à $\overline{\gamma}^1$, c'est-à-dire

$$\overline{\gamma}^1 = \overline{\nu}^1 - \frac{\pi}{2}\,. \tag{4.1}$$

D'après (2.1; 1) on obtient

$$\mathrm{tg}\,\overline{\gamma} = -\frac{(g + \phi_1)\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} + k\,\mathrm{Sin}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}}{(g^* + \phi_2)\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} - k^*\,\mathrm{Cos}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}}\,. \tag{4.2}$$

D'après (4.2), à l'aide de [1, (7-2)] et [2, (3-3)] on obtient respectivement pour $\overline{\phi} = 0$ et $\overline{\phi} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\bar{\gamma}^1 = \beta^1 \quad , \quad \bar{\gamma}^1 = \gamma^1 . \tag{4.3}$$

Valeurs de $k_{n\bar{\gamma}^1}$, $t_{g\bar{\gamma}^1}$, ${}_v t_{g\bar{\gamma}^1}$, ${}_v k_{n\bar{\gamma}^1}$, ${}_v k_{g\bar{\gamma}^1}$, ${}_w t_{\bar{\gamma}^1}$, ${}_w k_{n\bar{\gamma}^1}$.

Le premier terme du côté gauche de (2.3; 1) étant égal à zéro on obtient

$$({}_w k_{g\bar{v}^1})^2 = ({}_v k_{gv^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\,\overline{\phi} + (M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi} . \tag{4.4}$$

D'après la formule d'EULER [1, (1-6)]

$$k_{n\bar{\gamma}^1} = k \operatorname{Cos}^2 \bar{\gamma}^1 + k^* \operatorname{Sin}^2 \bar{\gamma}^1 .$$

A l'aide de la valeur de $t_{g\bar{\gamma}^1}$ donnée dans (4.2) et en se servant de [1, (1-8), (1-9)], [2, (2-7), (2-45), (3-7)] on obtient

$$k_{n\bar{\gamma}^1} = \frac{K\,(k_{n\varnothing^*} \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi} + k_{gc_v^*} \operatorname{Sin} 2\,\overline{\phi}) + (\mathscr{C}\, k_{gc_v} + \mathscr{D}\, k_{gc_v^*}) \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi}}{({}_w k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{4.5}$$

En se servant encore de la valeur de $t_{g\bar{\gamma}^1}$ donnée dans (4.2) et de la formule de BONNET se trouvant dans [1, (1-7)]

$$t_{g\bar{\gamma}^1} = D \operatorname{Sin} \bar{\gamma}^1 \operatorname{Cos} \bar{\gamma}^1 \quad , \quad D = k^* - k$$

on obtient

$$\begin{aligned} {}_w k_{gv^1} = & - D\,(g + \phi_2)\,(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi} + k\,(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \phi \, - \\ & - k^*\,(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\phi} - K \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi} \,/\, ({}_w k_{g\bar{v}^1})^2 . \end{aligned} \tag{4.6}$$

En comparant la valeur

$${}_w k_{g\bar{v}^1} = \frac{(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \overline{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{\operatorname{Cos} \bar{\gamma}^1} = - \frac{(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{\operatorname{Sin} \bar{\gamma}^1} \tag{4.7}$$

trouvée à l'aide de (2.2; 1), (4.1), (4.2) et (4.4) avec

$${}_v t_{g\bar{\gamma}^1} = \frac{\mathscr{C} \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Sin} \bar{\gamma}^1}{(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \overline{\phi}} = - \frac{\mathscr{C} \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \bar{\gamma}^1}{(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \overline{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \overline{\phi}} \tag{4.8}$$

trouvée à l'aide de (4.2) de [1, (4-1, 3)] et de [2, (2-8)] on obtient

$${}_v t_{g\bar{\gamma}^1} = - \frac{\mathscr{C} \operatorname{Sin} \overline{\phi}}{{}_w k_{g\bar{v}^1}} . \tag{4.9}$$

Le côté gauche de (1.5; 1) étant égal à zéro pour $\bar{\gamma}^1$, à l'aide de la formule (4.9) on obtient

$$ {}_{v}k_{g\bar{\gamma}^1} = - \frac{\mathscr{C} \operatorname{Cos} \bar{\phi}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} . \tag{4.10} $$

En utilisant (4.7) dans les égalités

$$ {}_{v}k_{n\bar{\gamma}^1} = \frac{K \operatorname{Cos} \bar{\phi} - \mathscr{D} \operatorname{Sin} \bar{\phi}}{(g+\phi_1) \operatorname{Sin}\bar{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}} \operatorname{Sin}\bar{\gamma}^1 = - \frac{K \operatorname{Cos} \bar{\phi} - \mathscr{D} \operatorname{Sin} \bar{\phi}}{(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}} \operatorname{Cos}\bar{\gamma}^1 \tag{4.11} $$

trouvées à l'aide de (4.2) de [1, (4-1; 1)] et de [2, (2-9)] on voit que

$$ {}_{v}k_{n\bar{\gamma}^1} = \frac{- K \operatorname{Cos} \bar{\phi} + \mathscr{D} \operatorname{Sin} \bar{\phi}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} . \tag{4.12} $$

A partir de (1.5; 3), (4.9) et (4.10) on trouve

$$ {}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1} = - \frac{\mathscr{C}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} , \quad ({}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1})^2 = \frac{\mathscr{C}^2}{({}_{w}k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{4.13} $$

Pour ${}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1}$ on se sert de (4.2) dans (2.1; 2) à l'aide de [2, (2-9)] et de (3.13) en considérant que

$$ \bar{\mathscr{D}} = [\mathscr{D} + (g + \phi_1)\, \bar{\phi}_2 - (g^* + \phi_2)\, \bar{\phi}_1] \operatorname{Sin} \bar{\phi} + \\ + [k^* \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi + k \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi - K] \operatorname{Cos} \bar{\phi} $$

on obtient

$$ {}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1} = - \frac{\bar{\mathscr{D}} \operatorname{Sin} \bar{\gamma}^1}{(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}} = \frac{\bar{\mathscr{D}}^2 \operatorname{Cos} \bar{\gamma}^1}{(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}} . \tag{4.14} $$

En comparant cette relation avec (4.7) on a

$$ {}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1} = \frac{\bar{\mathscr{D}}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} , \quad ({}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1})^2 = \frac{\bar{\mathscr{D}}^2}{({}_{w}k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{4.15} $$

5. Direction principale relative à la courbure géodésique du champ de vecteurs w.

La direction θ *pour laquelle* ${}_{w}k_{g\theta}$ *est max. est appelée direction principale du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *relativement aux courbures géodésiques au point P.*

Comme cette direction doit vérifier la relation

$$ \frac{\partial}{\partial \theta} {}_{w}k_{g\theta} = 0 \tag{5.1} $$

en dérivant (2.1; 1) par rapport à θ et en l'annulant on remarque que la direction obtenue est la direction $\bar{v}^1$ orthogonale à $\bar{\gamma}^1$, c'est-à-dire

$$t_{g\bar{\nu}^1} = \frac{(g^* + \phi_2)\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}}{(g + \phi_1)\operatorname{Sin}\bar{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}} . \tag{5.2}$$

D'après (5.2) à l'aide de [1, (7-4)] et [2, (3-5)] on remarqué que l'on a respectivement pour $\bar{\phi} = 0$ et $\bar{\phi} = \frac{\pi}{2}$

$$\bar{\nu}^1 = \eta^1 \quad , \quad \bar{\nu}^1 = \nu^1 . \tag{5.3}$$

Valeurs de $k_{n\bar{\nu}^1}$, $t_{g\bar{\nu}^1}$, ${}_\nu t_{g\bar{\nu}^1}$, ${}_\nu k_{n\bar{\nu}^1}$, ${}_\nu k_{g\bar{\nu}^1}$, ${}_w k_{g\bar{\nu}^1}$, ${}_w t_{g\bar{\nu}^1}$, ${}_w k_{n\bar{\nu}^1}$.

D'après la formule d'EULER [1, (1-6)] on a

$$k_{n\bar{\nu}^1} = k \operatorname{Cos}^2 \bar{\nu}^1 + k^* \operatorname{Sin}^2 \bar{\nu}^1 .$$

A l'aide de la valeur de $t_{g\bar{\nu}^1}$ donnée dans (5.2) et en se servant de [2, (1-11)], [2, (2-40), (2-46)] on obtient

$$k_{\bar{n}\bar{\nu}^1} = \frac{(\mathscr{A} k_{gc_\nu} + \mathscr{B} k_{gc_{\nu^*}})\operatorname{Sin}^2\bar{\phi} + (K k_{gc_{\nu^*}} - M\mathscr{B}) \operatorname{Sin} 2\bar{\phi} + [(M^2 - K) k_{n\varnothing^*} - MK] \operatorname{Cos}^2\bar{\phi}}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} . \tag{5.4}$$

ou, à l'aide de [1, (1-4)] on peut écrire

$$k_{n\bar{\nu}^1} = M - k_{n\bar{\gamma}^1} .$$

De même en remplaçant $\bar{\nu}^1 = \bar{\gamma}^1 + \frac{\pi}{2}$ dans la valeur de [1, (1-7)] écrite pour $0 = \bar{\nu}^1$, on obtient

$$t_{g\bar{\nu}^1} = - t_{g\bar{\gamma}^1} . \tag{5.5}$$

En se servant de (5.2) de [1, (4-1; i)] et à l'aide dé (4.7), (4.1), [1, (1-7)], [2, (2-5)] on trouve

$${}_\nu k_{n\bar{\nu}^1} = \frac{\mathscr{A} \operatorname{Sin}\bar{\phi} - M t_{g\varnothing} \operatorname{Cos}\bar{\phi}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}} . \tag{5.6}$$

De même, en se servant de (5.2), (4.7), (4.1), [2, (2-7)], [1, (1-9)] dans [1, (4-1; 3)] on obtient

$${}_\nu t_{g\bar{\nu}^1} = \frac{\mathscr{B} \operatorname{Sin}\bar{\phi} - (M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}\bar{\phi}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}} . \tag{5.7}$$

Encore à l'aide de (5.2), (4.7), (4.1), [2, (2-7), (3-7)] dans [2, (4-1; 2)] on a

$${}_\nu k_{g\bar{\nu}^1} = \frac{({}_\nu k_{g\nu^1})^2 \operatorname{Sin}\bar{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Cos}\bar{\phi}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}} . \tag{5.8}$$

En utilisant (5.7) et (5.8) de (1.5; 3) et en considérant à partir de (3.11) que

$$\overline{\mathscr{B}} = -\mathscr{B} \operatorname{Cos} 2\,\overline{\phi} + [({}_{v}k_{gv^1})^2 + K - Mk_{n\varnothing^*}] \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\phi}$$

on obtient

$$ {}_{w}t_{g\bar{v}^1} = \frac{\overline{\mathscr{B}}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} \quad , \quad ({}_{w}t_{g\bar{v}^1})^2 = \frac{\overline{\mathscr{B}}^2}{({}_{w}k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{5.9}$$

Il résulte de (5.7) et (5.8) de (1.5; 1) que

$$ {}_{w}k_{g\bar{v}^1} = \frac{({}_{v}k_{g\bar{v}^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\,\overline{\phi} + (Mk_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} . \tag{5.10}$$

Ce résultat se trouve dans (4.4).

En dernier, en utilisant (5.2), (4.1), (4.7), [1, (1-7)], [2, (2-5)] dans (2.1; 2) et en considérant à partir de (3.10) que

$$\overline{\mathscr{A}} = [\mathscr{A} - (g+\phi_1)\,\overline{\phi}_1 - (g^*+\phi_2)\,\overline{\phi}_2] \operatorname{Sin} \overline{\phi} + [Mt_{g\varnothing^*} - k\,\overline{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi + k^*\overline{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Cos} \overline{\phi}$$

on obtient

$$ {}_{w}k_{n\bar{v}^1} = \frac{\overline{\mathscr{A}}}{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} \quad , \quad ({}_{w}k_{n\bar{v}^1})^2 = \frac{\overline{\mathscr{A}}^2}{({}_{w}k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{5.11}$$

Résultats obtenus à partir des relations des paragraphes 4 et 5 .

a) En comparant (4.11), (4.15), (5.9) et (5.11) on remarque que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{{}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1}} = -\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{\mathscr{C}}}, \quad \frac{{}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}k_{n\bar{v}^1}} = \frac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{\mathscr{A}}}, \quad \frac{{}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}k_{n\bar{v}^1}} = -\frac{\overline{\mathscr{C}}}{\overline{\mathscr{A}}} \\ &\frac{{}_{w}k_{n\bar{v}^1}}{{}_{w}t_{g\bar{v}^1}} = \frac{\overline{\mathscr{A}}}{\overline{\mathscr{B}}}, \quad \frac{{}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}t_{g\bar{v}^1}} = \frac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{\mathscr{B}}}, \quad \frac{{}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}t_{g\bar{v}^1}} = -\frac{\overline{\mathscr{C}}}{\overline{\mathscr{B}}} . \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

b) D'après (4.9), (4.10) et (4.13) on peut écrire

$$({}_{v}t_{g\bar{\gamma}^1})^2 + ({}_{v}k_{g\bar{\gamma}^1})^2 = \frac{\overline{\mathscr{C}}^2}{({}_{w}k_{g\bar{v}^1})^2} = ({}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1})^2 . \tag{5.13}$$

c) En comparant les angles $\bar{\gamma}^1$, $\bar{v}^1$, γ^1, v^1 on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.1. *La condition necessaire et suffisante pour que les directions asymptotiques ou les directions principales relatives aux courbures géodésiques du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *et du champ de vecteurs tangentiels* $\mathbf{v}(\phi)$ *soient égales est que la relation*

$$\mathscr{C} = k\,(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \phi + k^*(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \phi = 0$$

soit verifiée en P.

d) On peut écrire les relations suivantes

$$\frac{\overline{\mathscr{D}}^2 + \mathscr{C}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w k_{n\bar{\gamma}^1})^2 + ({}_w t_{g\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (4.13) et (4.15)} \tag{5.14}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{A}}^2 + \overline{\mathscr{B}}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w k_{n\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w t_{g\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (5.9) et (5.11)} \tag{5.15}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{B}}^2 + \mathscr{C}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w t_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w t_{g\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (4.13) et (5.9)} \tag{5.16}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{A}}^2 + \mathscr{C}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w k_{n\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w t_{g\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (4.13) et (5.11)} \tag{5.17}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{B}}^2 + \overline{\mathscr{D}}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w t_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w k_{n\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (4.15) et (5.9)} \tag{5.18}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{A}}^2 + \overline{\mathscr{D}}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} = ({}_w k_{n\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w k_{n\bar{\gamma}^1})^2 \quad \text{d'après (4.15) et (5.11).} \tag{5.19}$$

Dans ces relations on a

$$({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 = ({}_v k_{g\nu^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\, \overline{\phi} + (M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi}\,. \tag{4.4}$$

6. Directions asymptotiques relatives à la courbure normale d'un champ de vecteurs w.

La direction $\bar{\alpha}^1$ de 0 pour laquelle ${}_w k_{n_0} = 0$ est appelée direction asymptotique du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *relativement à la courbure normale du champ au point P.*

D'après (2.1; 2) cette direction est déterminée par la relation

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}^1 = -\frac{k \operatorname{Cos} \phi - \overline{\phi}_1}{k^* \operatorname{Sin} \phi - \overline{\phi}_2}\,. \tag{6.1}$$

Notons $\bar{\theta}^1$ la direction orthogonale à $\bar{\alpha}^1$, c'est-à-dire

$$\bar{\alpha}^1 = \bar{\theta}^1 + \frac{\pi}{2}\,. \tag{6.2}$$

D'après (6.1), en se servant de [1, (6-2)] si $\overline{\phi} =$ cte. tout le long d'une courbe C de la surface S, on remarque que $\bar{\alpha}^1 = \alpha^1$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Si tout le long d'une courbe C de la surface S, le champ* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *fait un angle constant avec la normale* à *la surface, les directions asymptotiques relatives aux courbures normales des champs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *et* $\mathbf{v}(\phi)$ *sont les mêmes le long de C.*

Valeurs de $k_{n\bar{\alpha}^1}$, $t_{g\bar{\alpha}^1}$, ${}_v t_{g\bar{\alpha}^1}$, ${}_v k_{n\bar{\alpha}^1}$, ${}_v k_{g\bar{\alpha}^1}$, ${}_w k_{g\bar{\alpha}^1}$, ${}_w t_{g\bar{\alpha}^1}$.

D'abord, le premier terme du côté gauche de (2-3; 2) étant égal à zéro on trouve

$$({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 = M k_{n\varnothing} - K - 2\,(k\,\bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi + k^*\,\bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi) + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 . \qquad (6.3)$$

Avec la méthode utilisée dans le paragraphe 4 on obtient les valeurs suivantes

$$k_{n\bar{\alpha}^1} = \frac{K k_{n\varnothing} - 2K(\bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi + \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi) + k\,\bar{\phi}_2^2 + k^*\,\bar{\phi}_1^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2}, \qquad (6.4)$$

$$t_{g\bar{\alpha}^1} = -\frac{(k^* - k)\,(K \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \phi - k\bar{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi - k^*\bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi + \bar{\phi}_1\,\bar{\phi}_2)}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2}, \qquad (6.5)$$

$${}_w k_{n\bar{\theta}^1} = \frac{k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2}{\operatorname{Cos} \bar{\alpha}^1} = -\frac{k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1}{\operatorname{Sin} \bar{\alpha}^1}, \qquad (6.6)$$

$${}_v t_{g\bar{\alpha}^1} = \frac{k\bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi + k^*\bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi - K}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}, \qquad (6.7)$$

$${}_v k_{n\bar{\alpha}^1} = \frac{k^*\bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi - k\bar{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}, \qquad (6.8)$$

$${}_v k_{g\bar{\alpha}^1} = \frac{(g^* + \phi_2)\,\bar{\phi}_1 - (g + \phi_1)\,\bar{\phi}_2 - \mathscr{D}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}, \qquad (6.9)$$

$${}_w k_{g\bar{\alpha}^1} = -\frac{\bar{\mathscr{D}}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} \qquad (6.10)$$

et d'après (3.14) en considérant que

$$\bar{K} = [\mathscr{D} + (g+\phi_1)\bar{\phi}_2 - (g^*+\phi_2)\bar{\phi}_1] \operatorname{Cos}\bar{\phi} + [K - k^*\,\bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi - k\bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} \qquad (6.11)$$

on a

$${}_w t_{g\bar{\alpha}^1} = -\frac{\bar{K}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}. \qquad (6.12)$$

7. Direction principale relative à la courbure normale d'un champ de vecteurs w.

La valeur de θ *pour laquelle* ${}_w k_{n\theta}$ *est max. au point P, est appelée direction principale du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *relativement aux courbures normales au point P.*

Cette direction devant vérifier la relation

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\,{}_w k_{n\theta} = 0 \qquad (7.1)$$

en dérivant par rapport à θ (2.1; 2) et en annulant on remarque que la direction obtenue est la direction $\bar{\theta}^1$ orthogonale à $\bar{\alpha}^1$. C'est-à-dire que on a

$$\operatorname{tg} \bar{\theta}^1 = \frac{k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2}{k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1} . \tag{7.2}$$

Si, tout le long d'une courbe C de S, $\bar{\phi} =$ cte., d'après [1, (6-9)] on a

$$\bar{\theta}^1 = \theta^1 .$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.1. *Si tout le long d'une courbe C de la surface S, le champ* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *fait un angle constant avec la normale à la surface, les directions principales relatives aux courbures normales des champs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *et* $\mathbf{v}(\phi)$ *sont les mêmes le long de C.*

Valeurs de $k_{n\bar{\theta}^1}$, $t_{g\bar{\theta}^1}$, ${}_v t_{g\bar{\theta}^1}$, ${}_v k_{n\bar{\theta}^1}$, ${}_v k_{g\bar{\theta}^1}$, ${}_w k_{g\bar{\theta}^1}$, ${}_w t_{g\bar{\theta}^1}$.

Avec la méthode utilisée dans le paragraphe 5 on obtient

$$\begin{aligned} k_{n\bar{\theta}^1} &= M - k_{n\bar{\alpha}^1} = \\ &= \frac{(M^2 - K) k_{n\varnothing} - MK - 2(k^2 \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi + k^{*2} \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi) + k \bar{\phi}_1^2 + k^* \bar{\phi}_2^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2} , \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$t_{g\bar{\theta}^1} = - t_{g\bar{\alpha}^1} , \tag{7.4}$$

$${}_v t_{g\bar{\theta}^1} = \frac{M t_{g\varnothing} + k \bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi - k^* \bar{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} , \tag{7.5}$$

$${}_v k_{n\bar{\theta}^1} = \frac{M k_{n\varnothing} - K - (k \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi + k^* \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin} \phi)}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} . \tag{7.6}$$

$${}_v k_{g\bar{\theta}^1} = \frac{\mathscr{A} - (g + \phi_1) \bar{\phi}_1 - (g^* + \phi_2) \bar{\phi}_2}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} . \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} {}_w t_{g\bar{\theta}^1} = \frac{\bar{\mathscr{E}}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} , \quad \bar{\mathscr{E}} &= [\mathscr{A} - (g^* + \phi_2) \bar{\phi}_2 - (g + \phi_1) \bar{\phi}_1] \operatorname{Cos}\phi + \\ &+ [M t_{g\varnothing} + k \bar{\phi}_1 \operatorname{Sin}\phi - k^* \bar{\phi}_2 \operatorname{Cos}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} , \end{aligned} \tag{7.8}$$

$${}_w k_{g\bar{\theta}^1} = \frac{\bar{\mathscr{A}}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}} . \tag{7.9}$$

Résultats obtenus à partir des paragraphes 6 et 7.

a) D'après (6.12), (6.10), (7.8) et (7.9) on remarque que :

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{{}_wt_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_wk_{g\bar{\alpha}^1}} = \dfrac{\overline{K}}{\overline{\mathscr{D}}}, & \dfrac{{}_wt_{g\bar{\theta}^1}}{{}_wk_{g\bar{\theta}^1}} = \dfrac{\overline{\mathscr{E}}}{\overline{\mathscr{A}}}, & \dfrac{{}_wt_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_wt_{g\bar{\theta}^1}} = -\dfrac{\overline{K}}{\overline{\mathscr{E}}} \\ \dfrac{{}_wt_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_wk_{g\bar{\theta}^1}} = -\dfrac{\overline{K}}{\overline{\mathscr{A}}}, & \dfrac{{}_wk_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_wt_{g\bar{\theta}^1}} = -\dfrac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{\mathscr{E}}}, & \dfrac{{}_wk_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_wk_{g\bar{\theta}^1}} = -\dfrac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{\mathscr{A}}}.\end{array}\right\} \qquad (7.10)$$

b) On peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{\overline{K}^2 + \overline{\mathscr{D}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wt_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\alpha}^1})^2 \qquad (6.10) \text{ et } (6.12) \qquad (7.11)$$

$$\frac{\overline{\mathscr{E}}^2 + \overline{\mathscr{A}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wt_{g\bar{\theta}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\theta}^1})^2 \qquad (7.8) \text{ et } (7.9) \qquad (7.12)$$

$$\frac{\overline{K}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wt_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wt_{g\bar{\theta}^1})^2 \qquad (6.12) \text{ et } (7.8) \qquad (7.13)$$

$$\frac{\overline{K}^2 + \overline{\mathscr{A}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wt_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\theta}^1})^2 \qquad (6.12) \text{ et } (7.9) \qquad (7.14)$$

$$\frac{\overline{\mathscr{D}}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wk_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wt_{g\bar{\theta}^1})^2 \qquad (6.10) \text{ et } (7.8) \qquad (7.15)$$

$$\frac{\overline{\mathscr{D}}^2 + \overline{\mathscr{A}}^2}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} = ({}_wk_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\theta}^1}) \qquad (6.10) \text{ et } (7.9). \qquad (7.16)$$

Dans ces relations on a

$$({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2 = Mk_{n\varnothing} - K - 2\,(k\overline{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi + k^*\overline{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi) + \overline{\phi}_1^2 + \overline{\phi}_2^2 .$$

8. Direction asymptotique relative à la torsion géodésique du champ de vecteurs w.

La direction $\bar{\beta}^1$ *de* θ *pour laquelle*

$${}_wt_{g\theta} = 0$$

est appelée direction asymptotique du champ de vecteurs **w** $(\phi, \bar{\phi})$ *relativement aux torsions géodésiques du champ au point P.*

D'après (2.1; 3) cette direction est déterminée par la relation

$$\operatorname{tg}\bar{\beta}^1 = -\frac{(g + \phi_1)\operatorname{Cos}\overline{\phi} - k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\overline{\phi}}{(g^* + \phi_2)\operatorname{Cos}\overline{\phi} + k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\overline{\phi}}. \qquad (8.1)$$

Notons $\bar{\eta}^1$ la direction orthogonale à $\bar{\beta}^1$. C'est-à-dire

$$\bar{\beta}^1 = \bar{\eta}^1 - \frac{\pi}{2}. \qquad (8.2)$$

Dans les cas où $\bar{\phi} = 0$ et $\bar{\phi} = \frac{\pi}{2}$, d'après [2, (3-3)] et [1, (7-2)] on a respectivement

$$\bar{\beta}^1 = \bar{\gamma}^1 , \quad \bar{\beta}^1 = \beta^1 . \tag{8.3}$$

Valeurs de $k_{n\bar{\beta}^1}$, $t_{g\bar{\beta}^1}$, ${}_v t_{g\bar{\beta}^1}$, ${}_v k_{n\bar{\beta}^1}$, ${}_v k_{g\bar{\beta}^1}$, ${}_w k_{g\bar{\beta}^1}$, ${}_w k_{n\bar{\beta}^1}$.

D'abord, le premier terme du côté gauche de (2.3; 3) étant égal à zéro on trouve

$$({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2 = ({}_v k_{gv^1})^2 \operatorname{Cos}^2 \bar{\phi} + \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\bar{\phi} + (M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi} . \tag{8.4}$$

Avec la méthode utilisée dans les paragraphes précédents on obtient les valeurs suivantes :

$$k_{n\bar{\beta}^1} = \frac{K k_{n\varnothing^*} \operatorname{Sin}^2\bar{\phi} + 2\, K k_{gc_{v^*}} \operatorname{Sin}\bar{\phi} \operatorname{Cos}\bar{\phi} + (\mathscr{C} k_{gc_v} + \mathscr{D} k_{gc_{v^*}}) \operatorname{Cos}^2\bar{\phi}}{({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2} , \tag{8.6}$$

$$t_{g\bar{\beta}^1} = - D \frac{(g + \phi_1)(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos}^2 \bar{\phi}}{({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2} -$$

$$- D \frac{[k^* (g+\phi_1) \operatorname{Cos}\phi - k (g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \phi] \frac{\operatorname{Sin} 2\bar{\phi}}{2} - \frac{K}{2} \operatorname{Sin} 2\phi \operatorname{Sin}^2\bar{\phi}}{({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2} , \tag{8.7}$$

$${}_w t_{g\bar{\eta}^1} = \frac{(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\bar{\phi}}{\operatorname{Cos} \bar{\beta}^1} = - \frac{(g + \phi_1) \operatorname{Cos}\bar{\phi} - k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Sin}\bar{\phi}}{\operatorname{Sin} \bar{\beta}^1} , \tag{8.8}$$

$${}_v t_{g\bar{\beta}^1} = - \frac{\mathscr{C}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} \operatorname{Cos}\bar{\phi} , \tag{8.9}$$

$${}_v k_{n\bar{\beta}^1} = \frac{\mathscr{D} \operatorname{Cos} \bar{\phi} + K \operatorname{Sin} \bar{\phi}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} , \tag{8.10}$$

$${}_v k_{g\bar{\beta}^1} = \frac{\mathscr{C}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} \operatorname{Sin} \bar{\phi} , \tag{8.11}$$

$${}_w k_{g\bar{\beta}^1} = \frac{\mathscr{C}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} , \tag{8.12}$$

$${}_w k_{n\bar{\beta}^1} = \frac{\bar{K}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} . \tag{8.13}$$

9. **Direction principale relative à la torsion géodésique du champ de vecteurs w.**

La valeur de θ *pour laquelle* ${}_w t_{g\theta}$ *est max. au point P, est appelée direction asymptotique du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *relativement aux torsions géodésiques du champ au point P.* Cette direction devant vérifier la relation

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\, {}_w t_{g\theta} = 0$$

en dérivant (2.1; 3) par rapport à θ et en l'annulant, on remarque que la direction obtenue est la direction $\overline{\eta}^1$ orthogonale à $\overline{\beta}^1$. C'est-à-dire qu'on a

$$\operatorname{tg} \overline{\eta}^1 = \frac{(g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \overline{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \overline{\phi}}{(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \overline{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \overline{\phi}}. \tag{9.1}$$

D'après [2, (3-5)] et [1, (7-4)], pour $\overline{\phi} = \theta$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ on a respectivement

$$\overline{\eta}^1 = \nu^1 \ , \quad \overline{\eta} = \eta^1 .$$

Valeurs de $k_{n\overline{\eta}^1}$, $t_{g\overline{\eta}^1}$, ${}_\nu t_{g\overline{\eta}^1}$, ${}_\nu k_{n\overline{\eta}^1}$, ${}_\nu k_{g\overline{\eta}^1}$, ${}_w k_{g\overline{\eta}^1}$, ${}_w k_{n\overline{\eta}^1}$.

Avec la méthode utilisée jusqu'à présent on obtient les valeurs suivantes :

$$k_{n\overline{\eta}^1} = \\ = \frac{(\mathscr{A} k_{gc_\nu} + \mathscr{B} k_{gc_{\nu^*}}) \operatorname{Cos}^2 \overline{\phi} + (M\mathscr{B} - K k_{gc_{\nu^*}}) \operatorname{Sin} 2\overline{\phi} + |(M^2 - K) k_{n\varnothing^*} - MK| \operatorname{Sin}^2 \overline{\phi}}{({}_w t_{g\overline{\eta}^1})^2} \tag{9.2}$$

$$t_{g\overline{\eta}^1} = -\, t_{g\overline{\beta}^1}, \tag{9.3}$$

$${}_\nu t_{g\overline{\eta}^1} = \frac{(M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Sin} \overline{\phi} + \mathscr{B} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{{}_w t_{g\overline{\eta}^1}}, \tag{9.4}$$

$${}_\nu k_{n\overline{\eta}^1} = \frac{\mathscr{A} \operatorname{Cos} \overline{\phi} + M t_{g\varnothing} \operatorname{Sin} \overline{\phi}}{{}_w t_{g\overline{\eta}^1}}, \tag{9.5}$$

$${}_\nu k_{g\overline{\eta}^1} = \frac{({}_\nu k_{g\nu^1})^2 \operatorname{Cos} \overline{\phi} + \mathscr{B} \operatorname{Sin} \overline{\phi}}{{}_w t_{g\overline{\eta}^1}}, \tag{9.6}$$

$${}_w k_{g\overline{\eta}^1} = \frac{\overline{\mathscr{B}}}{{}_w t_{g\overline{\eta}^1}}, \tag{9.7}$$

$${}_w k_{n\overline{\eta}^1} = \frac{\overline{\mathscr{E}}}{{}_w t_{g\overline{\eta}^1}}. \tag{9.8}$$

Résultats obtenus à partir des paragraphes 8 *et* 9.

a) En comparant (8.12), (8.13), (9.7), (9.8) on remarque que

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{{}_w k_{g\bar\beta^1}}{{}_w k_{n\bar\beta^1}} = \frac{\mathscr{C}}{\overline{K}}\,, \quad \frac{{}_w k_{g\bar\beta^1}}{{}_w k_{g\bar\eta^1}} = \frac{\mathscr{C}}{\overline{\mathscr{B}}}\,, \quad \frac{{}_w k_{g\bar\beta^1}}{{}_w k_{n\bar\eta^1}} = \frac{\mathscr{C}}{\overline{\mathscr{E}}}\,, \\
&\frac{{}_w k_{g\bar\eta^1}}{{}_w k_{n\bar\eta^1}} = \frac{\overline{\mathscr{B}}}{\overline{\mathscr{E}}}\,, \quad \frac{{}_w k_{g\bar\eta^1}}{{}_w k_{n\bar\beta^1}} = \frac{\overline{\mathscr{B}}}{\overline{K}}\,, \quad \frac{{}_w k_{n\bar\beta^1}}{{}_w k_{n\bar\eta^1}} = \frac{\overline{K}}{\overline{\mathscr{E}}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

b) D'après (8.9), (8.11) et (8.12) on peut écrire

$$({}_v t_{g\bar\beta^1})^2 + ({}_v k_{g\bar\beta^1})^2 = \frac{\mathscr{C}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{g\bar\beta^1})^2\,. \tag{9.10}$$

c) En comparant les angles $\bar\beta^1$, $\bar\eta^1$, β^1, η^1 on obtient le théorème suivant:

Théorème 9.1. *En un point régulier* P *d'une surface* S, *la condition nécessaire et suffisante pour que les directions asymptotiques ou les directions principales des champs de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar\phi)$ *et* $\mathbf{v}(\phi)$ *relativement aux torsions géodésiques soient les mêmes est que la relation*

$$\mathscr{C} = k\,(g^* + \phi_2)\,\mathrm{Sin}\,\phi + k^*\,(g + \phi_1)\,\mathrm{Cos}\,\phi = 0$$

soit verifiée en P.

d) On peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{\mathscr{C}^2 + \overline{K}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{g\bar\beta^1})^2 + ({}_w k_{n\bar\beta^1})^2 = ({}_w k_{n\bar\beta^1})^2 \qquad (8.12),\ (8.13)\ \text{et}\ (1.8) \tag{9.11}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{B}}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{g\bar\eta^1})^2 + ({}_w k_{n\bar\eta^1})^2 = ({}_w k_{a\bar\eta^1})^2 \qquad (9.7),\ (9.8)\ \text{et}\ (1.8) \tag{9.12}$$

$$\frac{\overline{\mathscr{B}}^2 + \mathscr{C}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{g\bar\eta^1})^2 + ({}_w k_{g\bar\beta^1})^2 \qquad (8.12)\ \text{et}\ (9.7) \tag{9.13}$$

$$\frac{\mathscr{C}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{g\bar\beta^1})^2 + ({}_w k_{n\bar\eta^1})^2 \qquad (8.12)\ \text{et}\ (9.8) \tag{9.14}$$

$$\frac{\overline{K}^2 + \overline{\mathscr{B}}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{n\bar\beta^1})^2 + ({}_w k_{g\bar\eta^1})^2 \qquad (8.13)\ \text{et}\ (9.7) \tag{9.15}$$

$$\frac{\overline{K}^2 + \overline{\mathscr{E}}^2}{({}_w t_{g\bar\eta^1})^2} = ({}_w k_{n\bar\beta^1})^2 + ({}_w k_{n\bar\eta^1})^2 \qquad (8.13)\ \text{et}\ (9.8)\,. \tag{9.16}$$

Dans ces relations on a

$$({}_w t_{g\bar\eta^1})^2 = ({}_v k_{gv^1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\bar\phi + \mathscr{B}\,\mathrm{Sin}\,2\,\bar\phi + (M\,k_{n\varpi^*} - K)\,\mathrm{Sin}^2\,\bar\phi\,.$$

Résultats obtenus en comparant les relations des paragraphes 4, 5, 6, 7, 8, 9 .

1)

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathscr{A}} &= {}_{w}k_{g\bar{\theta}^1} \cdot {}_{w}k_{n\bar{\theta}^1} = {}_{w}k_{n\bar{\nu}^1} \cdot {}_{w}k_{g\bar{\nu}^1} \quad (7.9),\ (5.11)\\
\overline{\mathscr{B}} &= {}_{w}t_{g\bar{\nu}^1} \cdot {}_{w}k_{g\bar{\nu}^1} = {}_{w}k_{g\bar{\eta}^1} \cdot {}_{w}t_{g\bar{\eta}^1} \quad (5.9),\ (9.7)\\
\overline{\mathscr{C}} &= {}_{w}k_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_{w}t_{g\bar{\eta}^1} = - {}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_{w}k_{g\bar{\nu}^1} \quad (8.12),\ (4.11)\\
\overline{\mathscr{D}} &= - {}_{w}k_{g\bar{\alpha}^1} \cdot {}_{w}k_{n\bar{\theta}^1} = {}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1} \cdot {}_{w}k_{g\bar{\nu}^1} \quad (6.10),\ (4.15)\\
\overline{\mathscr{E}} &= {}_{w}k_{n\bar{\eta}^1} \cdot {}_{w}t_{g\bar{\eta}^1} = {}_{w}t_{g\bar{\theta}^1} \cdot {}_{w}k_{n\bar{\theta}^1} \quad (9.8),\ (7.8)\\
\overline{K} &= {}_{w}k_{n\bar{\beta}^1} \cdot {}_{w}t_{g\bar{\eta}^1} = - {}_{w}t_{g\bar{\alpha}^1} \cdot {}_{w}k_{n\bar{\theta}^1} \quad (8.13),\ (6.12).
\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Ces résultats peuvent être énoncés directement en utilisant les directions orthogonales $\bar{\alpha}^1$ et $\bar{\theta}^1$, $\bar{\beta}^1$ et $\bar{\eta}^1$, γ^1 et $\bar{\nu}^1$ dans la définition des invariants $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{B}}$, $\overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{D}}$, $\overline{\mathscr{E}}$, $\overline{K}$ donnée dans le paragraphe 3.

2) En comparant $\overline{\mathscr{A}}$ et $\overline{\mathscr{D}}$, $\overline{\mathscr{B}}$ et $\overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{E}}$ et $\overline{K}$ dans (9.17) on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{{}_{w}k_{n\bar{\gamma}^1}}{{}_{w}k_{g\bar{\alpha}^1}} = \frac{{}_{w}k_{n\bar{\nu}^1}}{{}_{w}k_{g\bar{\theta}^1}} = \frac{{}_{w}k_{n\bar{\theta}^1}}{{}_{w}k_{g\bar{\nu}^1}}\\
&-\frac{{}_{w}k_{g\bar{\beta}}}{{}_{w}t_{g\bar{\gamma}^1}} = \frac{{}_{w}k_{g\bar{\eta}^1}}{{}_{w}t_{g\bar{\nu}^1}} = \frac{{}_{w}k_{g\bar{\nu}^1}}{{}_{w}t_{g\eta^1}}\\
&-\frac{{}_{w}t_{g\bar{\alpha}^1}}{{}_{w}k_{n\bar{\beta}^1}} = \frac{{}_{w}t_{g\bar{\theta}^1}}{{}_{w}k_{n\bar{\eta}^1}} = \frac{{}_{w}t_{g\bar{\eta}^1}}{{}_{w}k_{n\bar{\theta}^1}} .
\end{aligned}\right\} \qquad (9.18)$$

3) En comparant les relations (4.4), (6.3) et (8.4), (2.3) on obtient

$$\left.\begin{aligned}
({}_{w}k_{g\bar{\nu}^1})^2 &= ({}_{w}k_{g\theta})^2 + ({}_{w}k_{g\theta^*})^2\\
({}_{w}k_{n\bar{\theta}^1})^2 &= ({}_{w}k_{n\theta})^2 + ({}_{w}k_{n\theta^*})^2\\
({}_{w}t_{g\bar{\eta}^1})^2 &= ({}_{w}t_{g\theta})^2 + ({}_{w}t_{g\theta^*})^2
\end{aligned}\right\} \qquad (9.19)$$

et l'énoncé du théorème 2.1 peut s'écrire alors sous la forme suivante :

Théorème 2.1′. *En un point régulier P d'une surface S, la somme des carrés des courbures géodésiques, la somme des carrés des courbures normales, la somme des carrés des torsions géodésiques d'un champ de vecteurs* **w** *relativement à deux directions orthogonales ne dépendent pas de la direction* θ *et sont égales respectivement au carré de la courbure géodésique maximale, au carré de la courbure normale maximale, au carré de la torsion géodésique maximale en ce point.*

En prenant pour directions orthogonales $\bar{\alpha}^1$ et $\bar{\theta}^1$, $\bar{\beta}^1$ et $\bar{\eta}^1$, $\bar{\gamma}^1$ et $\bar{\nu}^1$ d'après (9.19) on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}({}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 &= ({}_wk_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\theta}^1})^2 = ({}_wk_{g\bar{\beta}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\eta}^1})^2\\ ({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2 &= ({}_wk_{n\bar{\beta}^1})^2 + ({}_wk_{n\bar{\eta}^1})^2 = ({}_wk_{g\bar{\gamma}^1})^2 + ({}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2\\ ({}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 &= ({}_wt_{g\bar{\gamma}^1})^2 + ({}_wt_{g\bar{\nu}^1})^2 = ({}_wt_{g\bar{\alpha}^1})^2 + ({}_wt_{g\bar{\theta}^1})^2.\end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

4) On peut écrire les relations suivantes :

$${}_vk_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1} = {}_vt_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1} = -\mathscr{C}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} \qquad \text{d'après (4.10) et (8.9)} \tag{9.21}$$

$${}_vt_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1} = {}_wk_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1} = \mathscr{C}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} \qquad \text{d'après (4.9) et (8.11)} \tag{9.22}$$

$$({}_vk_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 - ({}_vk_{n\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 = \mathscr{D}^2 + K^2 \qquad \text{d'après (4.13) et (8.19)} \tag{9.23}$$

$$({}_vt_{g\bar{\nu}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_vt_{g\bar{\eta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 = \mathscr{B}^2 + (Mk_{n\varnothing*} - K)^2 \qquad \text{d'après (5.7) et (9.4)} \tag{9.24}$$

$$({}_vk_{n\bar{\nu}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_vk_{n\bar{\eta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 = \mathscr{A}^2 + (Mt_{g\varnothing})^2 \qquad \text{(5.6), (9.5)} \tag{9.25}$$

$$({}_vk_{g\bar{\nu}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_vk_{g\bar{\eta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 = ({}_vk_{g\nu^1})^4 + \mathscr{B}^2\,. \qquad \text{(5.8), (9.6)} \tag{9.26}$$

En se servant de (9.20; 1) dans (9.3), (9.20; 2) dans (9.16), (9.20; 1) dans (7.16) on obtient

$$({}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2\,({}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 = \mathscr{C}^2 + \bar{\mathscr{B}}^2\,, \tag{9.27}$$

$$({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2\,({}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 = \bar{K}^2 + \bar{\mathscr{E}}^2\,, \tag{9.28}$$

$$({}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2\,({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2 = \bar{\mathscr{D}}^2 + \bar{\mathscr{A}}^2 \tag{9.29}$$

et à partir de (9.21) et (9.22) on obtient

$$\left.\begin{aligned}({}_vt_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 + ({}_vk_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 &= \mathscr{C}^2\\ ({}_vt_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_vk_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 &= \mathscr{C}^2\\ ({}_vt_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 + ({}_vt_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 &= \mathscr{C}^2\\ ({}_vk_{g\bar{\beta}^1} \cdot {}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2 + ({}_vk_{g\bar{\gamma}^1} \cdot {}_wk_{g\bar{\nu}^1})^2 &= \mathscr{C}^2.\end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

5) Cas particuliers de la relation $\mathscr{C}\,{}_wk_{n\theta} + \bar{\mathscr{D}}\,{}_wt_{g\theta} - \bar{K}\,{}_wk_{g\theta} = 0$ de (3.19) :

a) Si $\theta = \bar{\alpha}^1$, on a ${}_wk_{n\bar{\alpha}^1} = 0$ et

$$\bar{\mathscr{D}}\,{}_wt_{g\bar{\alpha}^1} - \bar{K}\,{}_wt_{g\bar{\alpha}^1} = 0\,. \tag{9.31}$$

Cette relation peut aussi être obtenue à partir de (6.10) et (6.12) .

b) Si $\theta = \bar{\beta}^1$, on a ${}_wt_{g\bar{\beta}^1} = 0$ et

$$\mathscr{C}\,{}_wk_{g\bar{\beta}^1}\,.\,\bar{K}\,{}_wk_{g\bar{\beta}^1} = 0\,. \tag{9.32}$$

Cette relation peut aussi être obtenue à partir de (8.12) et (8.13)

c) Si $0 = -1$, on a ${}_w k_{g\bar{\gamma}^1} = 0$ et

$$\mathscr{C}\, {}_w k_{n\bar{\gamma}^1} + \overline{\mathscr{D}}\, {}_w t_{g\bar{\gamma}^1} = 0\,. \tag{9.33}$$

Cette relation peut aussi être obtenue à partir de (4.11) et (4.15).

6) Pour faciliter les calculs on peut se servir des valeurs suivantes de $({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2$, $({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2$, $({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2$:

$$({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 = (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2)^2 + (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1)^2\,, \tag{9.34}$$

$$({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 = [(g+\phi_1) \operatorname{Sin}\bar{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}]^2 + [(g^*+\phi_2) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}]^2\,, \tag{9.35}$$

$$({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2 = [(g+\phi_1) \operatorname{Cos}\bar{\phi} - k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Sin}\bar{\phi}]^2 + [(g^*+\phi_2) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\bar{\phi}]^2\,. \tag{9.36}$$

10. Indicatrices.

Sur le plan tangent en P à S, le lieu géométrique du point Q défini par

$$\mathbf{PQ} = \frac{1}{{}_w k_{g\theta}}\, \mathrm{a}(\theta) \tag{10.1}$$

sera appelé *indicatrice des courbures géodésiques* du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ en P, le lieu géométrique du point Q défini par

$$\mathbf{PQ} = \frac{1}{{}_w k_{n\theta}}\, \mathrm{a}(\theta) \tag{10.2}$$

sera appelé *indicatrice des courbures normales* du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ en P, le lieu géométrique du point Q défini par

$$\mathbf{PQ} = \frac{1}{{}_w t_{g\theta}}\, \mathbf{a}(0) \tag{10.3}$$

sera appelé *indicatrice des torsions géodésiques* du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ en P. Et elles seront notées respectivement par $\bar{I}_g$, $\bar{I}_k$, $\bar{I}_t$.

Les axes de coordonnées étant les axes principaux de S en P, on obtient, en utilisant (10.1), (10.2) et (10.3) dans les formules (0.1; 1) et (2.1), les équations

$$\text{pour } \bar{I}_g : \quad [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}]\, X^1 + \\ + [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}]\, X^2 - 1 = 0 \tag{10.4}$$

$$\text{pour } \bar{I}_k : \quad (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1)\, X^1 + (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2)\, X^2 - 1 = 0 \tag{10.5}$$

$$\text{pour } \bar{I}_t : \quad [(g + \phi_1) \operatorname{Cos} \bar{\phi} - k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}]\, X^1 + \\ + (g^* + \phi_2) \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \bar{\phi}]\, X^2 - 1 = 0\,. \tag{10.6}$$

On remarque que ces indicatrices sont des droites ne passant pas par P et que les points où elles coupent les axes principaux sont

$$
\begin{aligned}
\overline{E}_g &= \left(1/[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\overline{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\overline{\phi}]\,,0\right), \\
\overline{F}_g &= \left(0\,,1/[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\overline{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\overline{\phi}]\right), \\
\overline{E}_k &= \left(1/[k \operatorname{Cos}\phi - \overline{\phi}_1]\,,0\right), \\
\overline{F}_k &= \left(0\,,1/[k^* \operatorname{Sin}\phi - \overline{\phi}_2]\right), \\
\overline{E}_t &= \left(1/[(g+\phi_1)\operatorname{Cos}\overline{\phi} - k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Sin}\overline{\phi}]\,,0\right), \\
\overline{F}_t &= \left(0\,,1/[(g^*+\phi_2)\operatorname{Cos}\overline{\phi} + k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\overline{\phi}]\right).
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

A partir des formules de $\overline{I}_g$, $\overline{I}_k$, $\overline{I}_t$, on voit que ces indicatrices sont parallèles aux directions asymptotiques et orthogonales aux directions principales de même nom.

Soit Q_g, Q_k, Q_t les pieds des perpendicularies abaissées de P sur ces indicatrices, d'après les définitions des indicatrices et des trois directions principales on a

$$\frac{1}{\mathbf{PQ}_g} = {}_w k_{g\bar{v}^1}\,, \quad \frac{1}{\mathbf{PQ}_k} = {}_w k_{n\bar{\theta}^1}\,, \quad \frac{1}{\mathbf{PQ}_t} = {}_w t_{g\bar{\eta}^1}\,. \tag{10.8}$$

Soit $Q_{g\theta}$, $Q_{k\theta}$, $Q_{t\theta}$ les points où une direction quelconque θ coupe les indicatrices, à partir des triangles $PQ_g\,Q_{g\theta}$, $PQ_k\,Q_{k\theta}$, $PQ_t\,Q_{t\theta}$ on a respectivement

$${}_w k_{g\theta} = {}_w k_{g\bar{v}^1} \operatorname{Cos}(\theta - \bar{v}^1)\,, \tag{10.9}$$

$${}_w k_{n\theta} = {}_w k_{n\bar{\theta}^1} \operatorname{Cos}(\theta - \bar{\theta}^1)\,, \tag{10.10}$$

$${}_w t_{g\theta} = {}_w t_{g\bar{\eta}^1} \operatorname{Cos}(\theta - \bar{\eta}^1)\,. \tag{10.11}$$

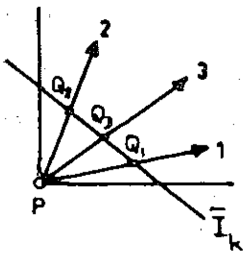
En écrivant ces relations pour deux directions orthogonales θ et 0^* et en effectuant les calculs nécessaires, ou bien, en appliquant aux triangles rectangles obtenus à partir des indicatrices et des directions 0 et θ^*, l'égalité $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$ où b, c sont les côtés orthogonaux et h est la hauteur relative à l'hypoténuse on peut écrire directement les équations (9.13) déjà obtenues.

On peut facilement voir à partir des indicatrices que, *les courbures géodésiques du champ de vecteurs* $\mathbf{w}\,(\phi,\overline{\phi})$ *pour deux directions symétriques par rapport* *à la direction principale des courbures géodésiques, les courbures normales du champ de vecteurs* **w** $(\phi,\bar{\phi})$ *pour deux directions symétriques par rapport à la direction principale des courbures normales, les torsions géodésiques du champ de vecteurs* **w** $(\phi,\bar{\phi})$ *pour deux directions symétriques par rapport à la direction principale des torsions géodésiques sont égales entre elles.*

11. Courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique d'un champ de vecteurs relativement à une troisième direction, en fonction des éléments de deux directions quelconques.

Nous pouvons effectuer facilement les calculs en nous servant des indicatrices.

Soit P_1, P_2, P_3 les trois droites passant par P du plan tangent ou point régulier P à S. Soit Q_j $(j = 1, 2, 3)$ les points où ces droites coupent $\bar{I}_k$. La somme des surfaces algébriques des triangles Q_1PQ_3, Q_3PQ_2 est égale à la surface du triangle Q_1PQ_2. D'après la définition de $\bar{I}_k$ on a



$$\overline{PQ_1} = \frac{1}{{}_wk_{n\theta_1}}, \overline{PQ_2} = \frac{1}{{}_wk_{n\theta_2}}, \overline{PQ_3} = \frac{1}{{}_wk_{n\theta_3}}; \tag{11.1}$$

$$\widehat{tP_p} = \theta_p \ (p = 1, 2, 3)$$

et

$$(\text{Sin}\ \widehat{1,2})\ {}_wk_{n\theta_3} + (\text{Sin}\ \widehat{2,3})\ {}_wk_{n\theta_1} + \text{Sin}\ (\widehat{3,1})\ {}_wk_{n\theta_2} = 0 \tag{11.2}$$

ou bien si l'on note

$${}_wk_{n\theta_3} = {}_wk_{n\theta} \quad , \quad \widehat{1,2} = \mathrm{v} \quad , \quad \widehat{3,2} = \mathrm{v}_1 \quad , \quad \widehat{1,3} = \mathrm{v}_2 \tag{11.3}$$

on trouve

$${}_wk_{n\theta} = \frac{{}_wk_{n\theta_1}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_1 + {}_wk_{n\theta_2}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_2}{\text{Sin}\ \mathrm{v}}. \tag{11.4}$$

De même on peut écrire

$${}_wk_{g\theta} = \frac{{}_wk_{g\theta_1}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_1 + {}_wk_{g\theta_2}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_2}{\text{Sin}\ \mathrm{v}} \tag{11.5}$$

et

$${}_wt_{g\theta} = \frac{{}_wt_{g\theta_1}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_1 - {}_wt_{g\theta_2}\ \text{Sin}\ \mathrm{v}_2}{\text{Sin}\ \mathrm{v}}. \tag{11.6}$$

12. Certaines fonctions de directions et certains invariants différentiels qu'elles définissent.

Les fonctions de directions étudiées par F. ŞEMİN dans [2, (2-14), (2-16), (2-25)] peuvent s'écrire, en considérant que

$$\left.\begin{aligned} {}_{\nu^*}t_{g\theta^*} &= {}_{\nu}k_{n\theta^*} \\ {}_{\nu^*}k_{n\theta^*} &= {}_{\nu}t_{g\theta^*} \\ {}_{\nu^*}k_{g\theta^*} &= {}_{\nu}k_{g\theta^*} \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

dans (3.2), sous une forme plus symétrique

$$\left.\begin{aligned} {}_{\nu}\bar{k}_{n\theta} &= ({}_{\nu}k_{n\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{\nu}k_{n\theta^*} \\ {}_{\nu}\bar{t}_{g\theta} &= ({}_{\nu}t_{g\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{\nu}t_{g\theta^*} \\ {}_{\nu}\bar{k}_{g\theta} &= ({}_{\nu}k_{g\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{\nu}k_{g\theta^*} \,. \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

En utilisant de nouveau (12.1), à partir de [2, (2-17), (2-18), (2-27)] on obtient

$$\left.\begin{aligned} {}_{\nu^*}\bar{k}_{n\theta^*} = {}_{\nu}\bar{t}_{g\theta^*} &= ({}_{\nu}t_{g\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_{\nu}t_{g\theta} \\ -\,{}_{\nu^*}\bar{t}_{g\theta^*} = {}_{\nu}\bar{k}_{n\theta^*} &= ({}_{\nu}k_{n\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_{\nu}k_{n\theta} \\ {}_{\nu^*}\bar{k}_{g\theta^*} = {}_{\nu}\bar{k}_{g\theta^*} &= ({}_{\nu}k_{g\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_{\nu}k_{g\theta} \,. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Les invariants [2, (2-21), (2-23), (2-29)] prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} & {}_{\nu}\bar{k}_{n\theta} - {}_{\nu^*}\bar{t}_{g\theta^*} = {}_{\nu}\bar{k}_{n\theta} + {}_{\nu}\bar{k}_{n\theta^*} = (k \operatorname{Cos} \phi)_1 + (k^* \operatorname{Sin} \phi)_2 + \\ & \qquad + k g^* \operatorname{Cos} \phi - k^* g \operatorname{Sin} \phi = M_{I^*} + \mathscr{B} \\ & {}_{\nu}\bar{t}_{g\theta} + {}_{\nu^*}\bar{k}_{n\theta^*} = {}_{\nu}\bar{t}_{g\theta} + {}_{\nu}\bar{t}_{g\theta^*} = (k^* \operatorname{Cos} \phi)_2 - (k \operatorname{Sin} \phi)_1 - \\ & \qquad - k g^* \operatorname{Sin} \phi - k^* g \operatorname{Cos} \phi = M_{II^*} - \mathscr{A} \\ & {}_{\nu}\bar{k}_{g\theta} + {}_{\nu^*}\bar{k}_{g\theta^*} = {}_{\nu}\bar{k}_{g\theta} + {}_{\nu}\bar{k}_{g\theta^*} = (g + \phi_1)_1 + (g^* + \phi_2)_2 + \\ & \qquad + g^* \phi_1 - g\, \phi_2 \,. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Les indices I^* et II^* designent les derivations invariantes de directions ϕ et $\phi^* = \phi + \dfrac{\pi}{2}$.

Dans [2], la dépendance des fonctions de direction ${}_{\nu}\bar{k}_{n\theta}$, ${}_{\nu}\bar{t}_{g\theta}$, ${}_{\nu^*}\bar{k}_{n\theta^*}$, ${}_{\nu^*}\bar{t}_{g\theta^*}$ à θ et ϕ a été sous entendue. Soit $\delta = \varphi - \theta$, $\mathscr{L}_\theta$ la fonction de direction de LAGUERRE, $\mathscr{D}_\theta$ la fonction de direction de DARBOUX, dans [2, (12-15) et (2-16')] on a

$$\left.\begin{aligned} {}_{v}\bar{k}_{n\theta} &= \mathscr{L}_{\theta} \operatorname{Cos} \delta + \mathscr{D}_{\theta} \operatorname{Sin} \delta + {}_{v}k_{g\theta} \cdot {}_{v}t_{g\theta} \\ {}_{v}\bar{t}_{g\theta} &= - \mathscr{L}_{\theta} \operatorname{Sin} \delta + \mathscr{D}_{\theta} \operatorname{Cos} \delta - {}_{v}k_{g\theta} \cdot {}_{v}k_{n\theta} \,. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

et de même on écrit

$$\left.\begin{aligned} {}_{v^*}\bar{k}_{n\theta^*} &= \mathscr{L}_{\theta^*} \operatorname{Cos} \delta + \mathscr{D}_{\theta^*} \operatorname{Sin} \delta + {}_{v^*}k_{g\theta^*} \cdot {}_{v^*}t_{g\theta^*} \\ {}_{v^*}\bar{t}_{g\theta^*} &= - \mathscr{L}_{\theta^*} \operatorname{Sin} \delta + \mathscr{D}_{\theta^*} \operatorname{Cos} \delta - {}_{v^*}k_{g\theta^*} \cdot {}_{v^*}k_{n\theta} \,. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

La dépendance de $\mathscr{L}_{\theta}$ et $\mathscr{D}_{\theta}$ à θ est déterminée par [[1], (9-31) et (9-32)] .

D'abord on peut écrire les expressions de ${}_{v}\bar{k}_{n\theta}$, ${}_{v}\bar{t}_{g\theta}$, ${}_{v^*}\bar{k}_{n\theta^*}$, ${}_{v^*}\bar{t}_{g\theta^*}$ dépendant directement de θ et de ϕ , pour pouvoir s'en servir quand il le sera nécessaire.

Par exemple en utilisant [[1], (4-1; 1)] et la formule de LIOUVILLE on trouve pour ${}_{v}\bar{k}_{n\theta}$

$$\begin{aligned} {}_{v}\bar{k}_{n\theta} = {} & [(k \operatorname{Cos} \phi)_1 - k^* g \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Cos}^2 \theta + [(k^* \operatorname{Sin} \phi)_2 + kg^* \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Sin}^2 \theta + \\ & + [(k \operatorname{Cos} \phi)_2 + (k^* \operatorname{Sin} \phi)_1 + kg \operatorname{Cos} \phi - k^* g^* \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta \,. \end{aligned} \tag{12.7}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} {}_{v}\bar{t}_{g\theta} = {} & - [(k \operatorname{Sin} \phi)_1 + k^* g \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Cos}^2 \theta + [(k^* \operatorname{Cos} \phi)_2 - kg^* \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Sin}^2 \theta + \\ & + [(k^* \operatorname{Cos} \phi)_1 - (k \operatorname{Sin} \phi)_2 - kg \operatorname{Sin} \phi - k^* g^* \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta \,. \end{aligned} \tag{12.8}$$

En remplaçant θ par $\theta = \theta^* + \frac{\pi}{2}$ dans (12.7) et (12.8) on trouve

$$\begin{aligned} {}_{v}\bar{k}_{n\theta^*} = {} & [(k \operatorname{Cos} \phi)_1 - k^* g \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Sin}^2 \theta + [(k^* \operatorname{Sin} \phi)_2 + kg^* \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Cos}^2 \theta - \\ & - [(k \operatorname{Cos} \phi)_2 + (k^* \operatorname{Sin} \phi)_1 + kg \operatorname{Cos} \phi - k^* g^* \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta \,, \end{aligned} \tag{12.9}$$

$$\begin{aligned} {}_{v}\bar{t}_{g\theta^*} = {} & - [(k \operatorname{Sin} \phi)_1 + k^* g \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Sin}^2 \theta + [(k^* \operatorname{Cos} \phi)_2 - kg^* \operatorname{Sin} \phi] \operatorname{Cos}^2 \theta - \\ & - [(k^* \operatorname{Cos} \phi)_1 - (k \operatorname{Sin} \phi)_2 - kg \operatorname{Sin} \phi - k^* g^* \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta \,. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Extension.

En s'inspirant de (12.2) et (12.3) on peut écrire pour les champs de vecteurs généraux

$$\left.\begin{aligned} {}_{w}\bar{k}_{n\theta} &= ({}_{w}k_{n\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{w}k_{n\theta^*} \\ {}_{w}\bar{t}_{g\theta} &= ({}_{w}t_{g\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{w}t_{g\theta^*} \\ {}_{w}\bar{k}_{g\theta} &= ({}_{w}k_{g\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_{w}k_{g\theta^*} \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

$$\left.\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta^*} &= ({}_wk_{n\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_wk_{n\theta} \\ {}_w\bar{t}_{g\theta^*} &= ({}_wt_{g\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_wt_{g\theta} \\ {}_w\bar{k}_{g\theta^*} &= ({}_wk_{g\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_wk_{g\theta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

En remplaçant dans (12.11; 1) les valeurs de ${}_wk_{n\theta}$ et ${}_wk_{n\theta^*}$ obtenues dans (1.5; 2) on obtient

$${}_w\bar{k}_{n\theta} = [({}_vk_{n\theta})_I - k_{gc} \cdot {}_vk_{n\theta^*}] - (\bar{\phi}_I)_I + k_{gc}\,\bar{\phi}_{II} = {}_v\bar{k}_{n\theta} - \bar{\phi}_{I,I} + k_{gc}\,\bar{\phi}_{II}\,. \tag{12.13}$$

En utilisant la condition d'intégrabilité et pour calculer $-\bar{\phi}_{I,I} + k_{gc}\bar{\phi}_{II}$ on a

$$\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta} = {}_v\bar{k}_{n\theta} &+ (g\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_{11}) \operatorname{Cos}^2\theta - (g^*\,\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{22}) \operatorname{Sin}^2\theta - \\ &- 2(g\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{21}) \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \end{aligned} \tag{12.14}$$

ou avec la valeur de ${}_v\bar{k}_{n\theta}$ dans (12.7) on a

$$\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta} = {} & [(k \operatorname{Cos}\phi)_1 - k^*\, g \operatorname{Sin}\phi + g\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_{11}] \operatorname{Cos}^2\theta + \\ & + [(k^* \operatorname{Sin}\phi)_2 + kg^* \operatorname{Cos}\phi - g^*\,\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_{22}] \operatorname{Sin}^2\theta + \\ & + [(k \operatorname{Cos}\phi)_2 + (k^* \operatorname{Sin}\phi)_1 + kg \operatorname{Cos}\phi - k^*g^* \operatorname{Sin}\phi - 2(g\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{21}) \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \end{aligned} \tag{12.15}$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 12.1. *En un point régulier P d'une surface S, l'expression ${}_w\bar{k}_{n0} = ({}_wk_{n0})_I - k_{gc} \cdot {}_wk_{n0^*}$ relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathrm{a}(\theta)$, $\mathrm{a}^*(\theta^*)$ *est une fonction de direction, c'est-à-dire que cette expression est la même pour les courbes C tangentes entre elles au point P de la surface S et elle est déterminée par* (12.15).

De même on a

$$\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta^*} &= [({}_vk_{n\theta^*})_{II} + k_{gc^*} \cdot {}_vk_{n\theta}] - \bar{\phi}_{II,II} - k_{gc^*}\,\bar{\phi}_I = \\ &= {}_v\bar{k}_{n\theta^*} - \bar{\phi}_{II,II} - k_{gc^*}\,\bar{\phi}_I\,. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Ou en remplaçant θ par $\theta^* = \theta + \dfrac{\pi}{2}$ dans (12.14) et (12.15) on obtient

$$\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta^*} = {}_v\bar{k}_{n\theta^*} &+ (g\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_{11}) \operatorname{Sin}^2\theta - (g^*\,\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{22}) \operatorname{Cos}^2\theta + \\ &+ 2(g\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{21}) \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta, \end{aligned} \tag{12.17}$$

$$\begin{aligned} {}_w\bar{k}_{n\theta^*} = {} & [(k \operatorname{Cos}\phi)_1 - k^*\, g \operatorname{Sin}\phi + g\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_{11}] \operatorname{Sin}^2\theta + , \\ & + [(k^* \operatorname{Sin}\phi)_2 + kg^* \operatorname{Cos}\phi - g^*\,\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_{22}] \operatorname{Cos}^2\theta + \\ & - [(k \operatorname{Cos}\phi)_2 + (k^* \operatorname{Sin}\phi)_1 + kg \operatorname{Cos}\phi - k^*g^* \operatorname{Sin}\phi - 2(g\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_{21})] \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta. \end{aligned} \tag{12.18}$$

D'après (12.14) et (12.17) on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{w}\bar{k}_{n\theta} + {}_{w}\bar{k}_{n\theta^*} &= {}_{v}\bar{k}_{n\theta} + {}_{v}\bar{k}_{n\theta^*} + g\,\bar{\phi}_2 - g^*\,\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_{11} - \bar{\phi}_{22} = \\
&= M_{I^*} + \mathscr{B} + g\,\bar{\phi}_2 - g^*\,\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_{11} - \bar{\phi}_{22}
\end{aligned}
\tag{12.19}
$$

qui ne dépend pas de θ. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 12.2. *En un point régulier P d'une surface S, la somme* ${}_{w}\bar{k}_{n\theta}+{}_{w}\bar{k}_{n\theta^*}$ *relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{a}^*(\theta)$, *ne dépend pas de la direction* θ. *Sa valeur donnée par* (12.19) *ne dépend que du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *c'est-à-dire que cette expression est une fonction de champ ou un invariant différentiel.*

Si le champ $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ fait un angle constant avec la normale à la surface d'après (12.19) on a

$$
{}_{w}\bar{k}_{n\theta} + {}_{w}\bar{k}_{n\theta^*} = {}_{v}\bar{k}_{n\theta} + {}_{v}\bar{k}_{n\theta^*}\,.
$$

Si l'on applique la méthode utilisée pour ${}_{w}\bar{k}_{n\theta}$ à (12.11; 2) et (12.12; 2) on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{w}\bar{t}_{g\theta} &= {}_{v}\bar{k}_{g\theta}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} + {}_{v}\bar{t}_{g\theta}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - {}_{w}k_{g\theta}\,\bar{\phi}_I = \\
&= ({}_{v}\bar{k}_{g\theta} + {}_{v}t_{g\theta}\bar{\phi}_I)\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} + ({}_{v}\bar{t}_{g\theta} - {}_{v}k_{g\theta}\,\bar{\phi}_I)\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\,,
\end{aligned}
\tag{12.20}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{w}\bar{t}_{g\theta^*} &= {}_{v}\bar{k}_{g\theta^*}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} + {}_{v}\bar{t}_{g\theta^*}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - {}_{w}k_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II} = \\
&= ({}_{v}\bar{k}_{g\theta^*} + {}_{v}\bar{t}_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II})\,\mathrm{Cos}\,\phi + ({}_{v}\bar{t}_{g\theta^*} - {}_{v}\bar{k}_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II})\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}
\end{aligned}
\tag{12.21}
$$

ou en utilisant (12.8) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
{}_{w}\bar{t}_{g\theta} = {} & \{[-(k\,\mathrm{Sin}\,\phi)_1 - k^*\,g\,\mathrm{Cos}\,\phi - (g+\phi_1)\bar{\phi}_1]\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} + \\
& + [(g+\phi_1)_1 - g\,(g^*+\phi_2) - k\,\bar{\phi}_1\,\mathrm{Sin}\,\phi]\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\}\,\mathrm{Cos}^2\,\theta + \\
& + \{[(k^*\,\mathrm{Cos}\,\phi)_2 - kg^*\,\mathrm{Sin}\,\phi - (g^*+\phi_2)\,\bar{\phi}_2]\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} + \\
& + [(g^*+\phi_2)_2 + g^*\,(g+\phi_1) + k^*\,\bar{\phi}_2\,\mathrm{Cos}\,\phi]\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\}\,\mathrm{Sin}^2\,\theta + \\
& + \{[(k^*\,\mathrm{Cos}\phi)_1 - (k\,\mathrm{Sin}\phi)_2 - k\,g\,\mathrm{Sin}\phi - k^*g^*\,\mathrm{Cos}\phi - (g+\phi_1)\bar{\phi}_2 - \\
& - (g+\phi_2)\,\bar{\phi}_1]\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} + [(g+\phi_1)_2 + (g^*+\phi_2)_1 + g\,(g+\phi_1) - \\
& - g^*\,(g^*+\phi_2) + k^*\bar{\phi}_1\,\mathrm{Cos}\,\phi - k\,\bar{\phi}_2\,\mathrm{Sin}\,\phi]\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta\,.
\end{aligned}
\tag{12.22}
$$

Théorème 12.3. *En un point régulier P d'une surface S, l'expression* ${}_{w}\bar{t}_{g\theta} = ({}_{w}t_{g\theta})_I - k_{gc^*}\cdot{}_{w}t_{g\theta^*}$ *relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{a}^*(\theta^*)$ *est une fonction de direction, c'est-à-dire que cette expression est la même pour les courbes C tangentes entre elles au point P de S; et elle est déterminée par* (12.22).

En écrivant ${}_w\bar{t}_{g\theta}$ de (12.22) sons la forme

$$ {}_w\bar{t}_{g\theta} = a \operatorname{Sin}^2\theta + b \operatorname{Cos}^2\theta + c \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \tag{12.23}$$

on a

$$ {}_w\bar{t}_{g\theta^*} = a \operatorname{Cos}^2\theta + b \operatorname{Sin}^2\theta - c \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . \tag{12.24}$$

D'après (12.20) et (12.21) on obtient

$$\begin{aligned}
{}_w\bar{t}_{g\theta} + {}_w\bar{t}_{g\theta^*} &= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - {}_wk_{g\theta}\,\bar{\phi}_I - {}_wk_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II} = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - \\
&\quad - [(g+\phi_1)\,\bar{\phi}_1 + (g^*+\phi_2)\,\bar{\phi}_2] \operatorname{Sin}\bar{\phi} - [k \operatorname{Sin}\phi\,\bar{\phi}_1 - k^* \operatorname{Cos}\phi\,\bar{\phi}_2] \operatorname{Cos}\bar{\phi} = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \bar{\mathscr{A}} - \mathscr{A} \operatorname{Sin}\bar{\phi} + Mt_{g\varnothing} \operatorname{Cos}\bar{\phi} = \\
&= [M_{II^*} - \mathscr{A} - \bar{\phi}_1 (g+\phi_1) - \bar{\phi}_2 (g^*+\phi_2)] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \qquad (12.25)\\
&\quad + [(g+\phi_1)_1 + (g^*+\phi_2)_2 + g^*\phi_1 - g\phi_2 - k \operatorname{Sin}\phi\,\bar{\phi}_1 + k^* \operatorname{Cos}\phi\,\bar{\phi}_2] \operatorname{Cos}\bar{\phi} = \\
&= [M_{II^*} - 2\mathscr{A}] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + [(g+\phi_1)_1 + (g^*+\phi_2)_2 + g^*\phi_1 - g\phi_2 + Mt_{g\varnothing}] \operatorname{Cos}\bar{\phi} + \bar{\mathscr{A}} .
\end{aligned}$$

Le même résultat peut être également obtenu d'après (12.23) et (12.24) sous la forme ${}_w\bar{t}_{g\theta} + {}_w\bar{t}_{g\theta^*} = a + b$.

Théorème 12.4. *En un point régulier P d'une surface S, la somme* ${}_w\bar{t}_{g\theta} + {}_w\bar{t}_{g\theta^*}$ *relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathrm{a}(\theta)$, $\mathrm{a}^*(\theta^*)$, *ne dépend pas de la direction* θ. *Sa valeur donnée par* (12.25) *ne dépend que du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$; *c'est-à-dire que cette expression est une fonction de champ ou un invariant différentiel.*

En dernier, d'après (12.11; 3) et (12.12; 3) on a

$$\begin{aligned}
{}_w\bar{k}_{g\theta} &= {}_v\bar{k}_{g\theta} \operatorname{Sin}\bar{\phi} - {}_v\bar{t}_{g\theta} \operatorname{Cos}\bar{\phi} + {}_wt_{g\theta}\,\bar{\phi}_I = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta}\,\bar{\phi}_I) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - ({}_v\bar{t}_{g\theta} - {}_vk_{g\theta}\,\bar{\phi}_I) \operatorname{Cos}\bar{\phi} ,
\end{aligned} \tag{12.26}$$

$$\begin{aligned}
{}_w\bar{k}_{g\theta^*} &= {}_v\bar{k}_{g\theta^*} \operatorname{Sin}\bar{\phi} - {}_v\bar{t}_{g\theta^*} \operatorname{Cos}\bar{\phi} + {}_wt_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II} = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta^*} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}\,\phi_{II}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - ({}_v\bar{t}_{g\theta^*} - {}_vk_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{II}) \operatorname{Cos}\bar{\phi}_1
\end{aligned} \tag{12.27}$$

ou à l'aide des valeurs obtenues ci dessus, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_w\bar{k}_{g\theta} = \{ & [(g+\phi_1)_1 - g(g^*+\phi_2) - k\,\bar{\phi}_1 \operatorname{Sin}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \\
& + [(k \operatorname{Sin}\phi)_1 + k^* g \operatorname{Cos}\phi + (g+\phi_1)\,\bar{\phi}_1] \operatorname{Cos}\bar{\phi}\} \operatorname{Cos}^2\theta + \\
& + \{[(g^*+\phi_2)_2 + g^*(g+\phi_1) + k^*\,\bar{\phi}_2 \operatorname{Cos}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \\
& + [-(k^*\operatorname{Cos}\phi)_2 + kg^* \operatorname{Sin}\phi + (g^*+\phi_2)\,\bar{\phi}_2] \operatorname{Cos}\bar{\phi}\} \operatorname{Sin}^2\theta + \qquad (12.28)\\
& + \{[(g+\phi_1)_2 + (g^*+\phi_2)_1 + g(g+\phi_1) - g^*(g^*+\phi_2) + \\
& + k^*\bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi - k\bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} - [(k^*\operatorname{Cos}\phi)_1 - (k\operatorname{Sin}\phi)_2 - \\
& - kg \operatorname{Sin}\phi - k^* g^* \operatorname{Cos}\phi - (g+\phi_1)\bar{\phi}_2 - (g^*+\phi_2)\,\bar{\phi}_1] \operatorname{Cos}\bar{\phi}\} \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta.
\end{aligned}
$$

Théorème 12.5. *En un point régulier P d'une surface S, l'expression ${}_w\bar{k}_{g\theta} = ({}_wk_{g\theta})_l - k_{gc} \cdot {}_wk_{g\theta^*}$ relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{a}^*(\theta^*)$ *est une fonction de direction, c'est-à-dire que sa valeur est la même pour les courbes C tangentes entre elles ou point P de la surface S; et elle est déterminée par* (12.28).

Si l'on note

$$
{}_w\bar{k}_{g\theta} = \bar{a} \operatorname{Sin}^2\theta + \bar{b} \operatorname{Cos}^2\theta + \bar{c} \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta
$$

${}_w\bar{k}_{g\theta^*}$ est de la forme

$$
{}_w\bar{k}_{g\theta^*} = \bar{a} \operatorname{Cos}^2\theta + \bar{b} \operatorname{Sin}^2\theta - \bar{c} \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta
$$

on a

$$
\begin{aligned}
{}_w\bar{k}_{g\theta} + {}_w\bar{k}_{g\theta^*} &= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + {}_wt_{g\theta}\,\bar{\phi}_l + {}_wt_{g\theta^*}\,\bar{\phi}_{2l} = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} + \\
&+ [(g+\phi_1)\bar{\phi}_2 + (g^*+\phi_2)\bar{\phi}_2] \operatorname{Cos}\bar{\phi} - [k \operatorname{Sin}\phi\ \bar{\phi}_1 - k^* \operatorname{Cos}\phi\ \bar{\phi}_2] \operatorname{Sin}\bar{\phi} = \\
&= ({}_v\bar{k}_{g\theta} + {}_v\bar{k}_{g\theta^*}) \operatorname{Sin}\bar{\phi} - ({}_v\bar{t}_{g\theta} + {}_v\bar{t}_{g\theta^*}) \operatorname{Cos}\bar{\phi} - \mathscr{E} + \mathscr{A} \operatorname{Cos}\bar{\phi} + Mt_{g\theta} \operatorname{Sin}\bar{\phi} = \\
&= [(g+\phi_1)_1 + (g^*+\phi_2)_2 + g^*\phi_1 - g\phi_2 - k\bar{\phi}_1 \operatorname{Sin}\phi + k^*\bar{\phi}_2 \operatorname{Cos}\phi] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \\
&+ [-M_{ll^*} + \mathscr{A} + (g+\phi_2)\,\bar{\phi}_1 + (g^*+\phi_2)\,\bar{\phi}_2] \operatorname{Cos}\bar{\phi} = \\
&= [(g+\phi_1)_1 + (g^*+\phi_2)_2 + g^*\phi_1 - g\phi_2 + Mt_{g\theta}] \operatorname{Sin}\bar{\phi} + \\
&+ [-M_{ll^*} + 2\mathscr{A}] \operatorname{Cos}\bar{\phi} - \bar{\mathscr{E}}. \qquad (12.29)
\end{aligned}
$$

Théorème 12.6. *En un point régulier P d'une surface S, la somme ${}_w\bar{k}_{g\theta} + {}_w\bar{k}_{g\theta^*}$ relative à un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *par rapport à un système de directions orthogonales* $\mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{a}^*(\theta^*)$ *ne dépend pas de la direction θ. Sa valeur donnée par* (12.29) *ne dépend que du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *c'est-à-dire que cette expression est une fonction de direction ou un invariant différentiel.*

13. Formules de FRENET d'un champ de vecteurs.

Soit $\mathbf{w}$ le vecteur unitaire défini dans (1.7) en un point régulier P d'une surface S, le trièdre trirectangle constitué par les vecteurs unitaires $\mathbf{w}$, $\overline{\mathbf{w}}$, $\overline{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w} \wedge \overline{\mathbf{w}}$ est appelé *le trièdre de FRENET* du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à la courbe C.

Avec la formule (1.7) nous avions vu que

$$\mathbf{w}_I = {}_w k_{a\theta}\, \overline{\mathbf{w}}$$

où l'indice I désigne la dérivation invariante effectuée dans la direction θ de la tangente à C, ${}_w k_{a\theta}$ étant la courbure absolue du champ en P relativement à C.

Les formules de FRENET du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ en P relativement à C seront donc de la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{w}_I &= {}_w k_{a\theta}\, \overline{\mathbf{w}} \\ \overline{\mathbf{w}}_I &= -\,{}_w k_{a\theta}\, \mathbf{w} + n\, \overline{\mathbf{w}}^* \\ \overline{\mathbf{w}}_I^* &= -\,n\, \overline{\mathbf{w}} \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

où n est une valeur qui sera déterminée dans la suite.

Si l'on note

$$\widehat{\overline{\mathbf{w}}, \mathbf{w}^*} = \overline{\omega}$$

on a

$$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^* \operatorname{Sin} \overline{\omega} + \mathbf{w}^* \operatorname{Cos} \overline{\omega}\,, \tag{13.2}$$

$$\overline{\mathbf{w}}^* = -\,\mathbf{v}^* \operatorname{Cos} \overline{\omega} + \mathbf{w}^* \operatorname{Sin} \overline{\omega}\,. \tag{13.3}$$

En dérivant (13.3) par rapport à I et en utilisant les formules (1.4) on trouve

$$\overline{\mathbf{w}}_I^* = ({}_w k_{g\theta} \operatorname{Cos} \overline{\omega} - {}_w k_{n\theta} \operatorname{Sin} \overline{\omega})\, \mathbf{w} - ({}_w t_{g\theta} - \overline{\omega}_I)\, \overline{\mathbf{w}}\,.$$

En comparant cette dernière relation avec (13.1; 3) on obtient

$$n = {}_w t_{g\theta} - \overline{\omega}_I\,, \quad {}_w k_{g\theta} \operatorname{Cos} \overline{\omega} - {}_w k_{n\theta} \operatorname{Sin} \overline{\omega} = 0\,. \tag{13.4}$$

${}_w t_{g\theta} - \overline{\omega}_I$ est appelée *la courbure absolue* du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ en P relativement à C; en la notant par ${}_w t_{a\theta}$ on peut écrire les formules de FRENET

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{w}_I &= {}_w k_{n\theta}\, \overline{\mathbf{w}} \\ \overline{\mathbf{w}}_I &= -\,{}_w k_{a\theta}\, \mathbf{w} + {}_w t_{a\theta}\, \overline{\mathbf{w}}^* \\ \overline{\mathbf{w}}_I^* &= -\,{}_w t_{a\theta}\, \overline{\mathbf{w}} \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

où on a

$$\left.\begin{aligned} ({}_w k_{a\theta})^2 &= ({}_w k_{g\theta})^2 + ({}_w k_{n\theta})^2 \\ {}_w t_{a\theta} &= {}_w t_{g\theta} - \overline{\omega}_I \\ \operatorname{tg} \overline{\omega} &= \frac{{}_w k_{g\theta}}{{}_w k_{n\theta}} . \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Dans le paragraphe 1, nous avions vu que ${}_w k_{g\theta}$ et ${}_w k_{n\theta}$ étaient des fonctions de direction. Donc d'après (13.2), (13.3) et (13.6) les éléments ${}_w k_{a\theta}$, $\overline{\omega}$, $\overline{\mathbf{w}}$, $\overline{\mathbf{w}}^*$ sont aussi des fonctions de direction. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 13.1. *Etant données les courbes C tangentes entre elles en un point régulier P de la surface S, la courbure absolue d'un champ* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *relativement à ces courbes, l'angle* $\overline{\omega}$, *les vecteurs unitaires* $\overline{\mathbf{w}}$ *et* $\overline{\mathbf{w}}^*$ *sont les mêmes; c'est-à-dire que chacun d'eux est une fonction de direction.*

On n'a pas la même propriété pour la torsion absolue ${}_w t_{a\theta}$, parce que généralement $\overline{\omega}_I$ n'est pas une fonction de direction. D'après (13.6), (12.11), (3.6; 4) on trouve

$$\overline{\omega}_I = \frac{{}_w k_{n\theta} \cdot {}_w \overline{k}_{g\theta} - {}_w k_{g\theta} \cdot {}_w \overline{k}_{n\theta} + \overline{\mathscr{D}}\, k_{gc}}{({}_w k_{a\theta})^2}\,, \quad k_{gc} = {}_v k_{g\theta} - \delta_I$$

et l'on voit qu'il n'est pas une fonction de direction.

Certaines propriétés et cas particuliers.

1) En effectuant le produit scalaire de l'équation (13.5; 1) avec $\mathbf{v}^*$ et $\mathbf{w}^*$ à l'aide de (1.4; 1) et (13.2) on obtient

$${}_w k_{a\theta} = {}_w k_{a\theta} \operatorname{Sin} \overline{\omega} \quad , \quad {}_w k_{n\theta} = {}_w k_{a\theta} \operatorname{Cos} \overline{\omega} . \tag{13.7}$$

A partir des deux relations de (13.7) on peut trouver (13.6; 3).

2) Si la tangente à C en P est parallèle à la direction asymptotique relative à la courbure normale du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$; $\theta = \bar{\alpha}^1$ et d'après (13.7), (13.5;1), (6.10), (13.6; 2), (6.12), (6.3), (13.2), (13.3)

$$\begin{aligned} &{}_w k_{n\bar{\alpha}^1} = 0\,, \quad \overline{\omega} = \frac{\pi}{2}\,, \quad {}_w k_{a\bar{\alpha}^1} = {}_w k_{g\bar{\alpha}^1} = -\frac{\overline{\mathscr{D}}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}\,, \\ &{}_w t_{a\bar{\alpha}^1} = {}_w t_{g\bar{\alpha}^1} = -\frac{\overline{K}}{{}_w k_{n\bar{\theta}^1}}\,, \end{aligned} \tag{13.8}$$

$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^*$, $\overline{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}^*$, $({}_w k_{n\theta^1})^2 = M\, k_{n\varnothing} - K - 2\,(k \overline{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi + k^* \overline{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi) + \overline{\phi}_1^2 + \overline{\phi}_2^2$, qui est l'extension de [2, (4-18)].

On voit que, si la courbe C est une asymptotique relative à la courbure normale du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$, le deuxième vecteur du trièdre trirectangle de

FRENET du champ relativement à la courbe C, reste tangent à la surface S, tout le long de C. C'est le même cas, le long d'une ligne asymptotique de S.

3) Si la tangente à C en P est parallèle à la direction asymptotique relative à la courbure géodésique du champ $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, $\theta = \bar{\gamma}^1$ et d'après (13.7), (13.6; 1), (4.15), (13.6; 2), (4.11), (4.4), (13.3) on a

$$
{}_w k_{g\bar{\gamma}^1} = 0\,,\ \bar{\omega} = 0\,,\ {}_w k_{a\bar{\gamma}^1} = {}_w k_{n\bar{\gamma}^1} = \frac{\bar{\bar{\mathscr{D}}}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}}\,,\ \ {}_w t_{a\bar{\gamma}^1} = {}_w t_{g\bar{\gamma}^1} = -\frac{\mathscr{C}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}}\,, \tag{13.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 = ({}_\nu k_{g\nu^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\bar{\phi} + (M\, k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2 \bar{\phi}\,,\\
&\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^*\,,\ \bar{\mathbf{w}}^* = -\,\mathbf{v}^*\,.
\end{aligned}
$$

(13.9) est l'extension de [2, (4-19)].

4) D'après les formules (2.3), à l'aide de (13.6; 1) et en considérant (4.4), (6.3) on trouve

$$
\begin{aligned}
({}_w k_{a\theta})^2 + ({}_w k_{a\theta^*})^2 &= ({}_w k_{g\nu^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi} - \mathscr{B} \operatorname{Sin} 2\bar{\phi} + (M\, k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2 \bar{\phi} +\\
&\quad + M k_{n\varnothing} - K - 2\,(k \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos} \phi + k^* \bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi) + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2 =\\
&= ({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2\,.
\end{aligned} \tag{13.10}
$$

Théorème 13.2. E*n un point régulier P d'une surface S, la somme des carrés des courbures absolues relative à un champ* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$, *par rapport aux directions orthogonales* $\mathbf{a}(\theta)$, $\mathbf{a}^*(\theta^*)$ *du plan tangent en P à S, ne dépend pas de ces directions et sa valeur est donnée par* (13.10).

5) En utilisant les relations (2.1) dans (13.6; 3) on voit que $\operatorname{tg}\theta$ et $\operatorname{tg}\bar{\omega}$ sont liées homographiquement.

On a

$$
\begin{aligned}
&(k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \bar{\omega} - [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] \operatorname{tg} \theta +\\
&+ (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) \operatorname{tg} \bar{\omega} - [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] = 0\,.
\end{aligned} \tag{13.11}
$$

Ou bien

$$
\operatorname{tg} \theta = \frac{-\,(k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1) \operatorname{tg} \bar{\omega} + [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}]}{(k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2) \operatorname{tg} \bar{\omega} - [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}]}\,. \tag{13.12}
$$

En notant par ω^* l'angle $\bar{\omega}$ correspondant à $\theta^* = \theta + \dfrac{\pi}{2}$, et en considérant (3.10), (4.4), (6.3), si l'on calcule le produit $\operatorname{tg}\theta \,.\, \operatorname{tg}\theta^* = -1$ on trouve

$$
({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 \operatorname{tg} \bar{\omega} \,.\, \operatorname{tg} \omega^* - \mathscr{A}\,(\operatorname{tg} \bar{\omega} + \operatorname{tg} \omega^*) + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 = 0 \tag{13.13}
$$

qui est l'extension de [2, (4-23)]. On voit dans [1, (6-13)] que $Mk_{n\varnothing} - K = ({}_\nu k_{n\theta^1})^2$ dans [2, (4-23)].

Théorème 13.3. *Etant donnés une surface S et un champ* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *défini sur celle-ci,* $\operatorname{tg}\overline{\omega}$ *et* $\operatorname{tg}\overline{\omega}^*$ *correspondant à deux directions orthogonales* $\mathrm{a}(\theta)$, $\mathrm{a}^*(\theta^*)$ *sont liées involutivement et les coefficients de cette relation involutive ne dépendent que du champ.*

Notons par θ et θ^* les angles θ correspondant aux directions $\overline{\omega}, \overline{\omega}^*=\overline{\omega}+\dfrac{\pi}{2}$; comme $\operatorname{tg}\overline{\omega}\,.\operatorname{tg}\overline{\omega}^* = -1$, à l'aide de

$$\operatorname{tg}\overline{\omega} = -\frac{[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\overline{\phi}+k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]+[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\overline{\phi}-k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]\operatorname{tg}\theta}{(k\operatorname{Cos}\phi-\overline{\phi}_1)+(k^*\operatorname{Sin}\phi-\overline{\phi}_2)\operatorname{tg}\theta} \qquad (13.14)$$

obtenu à partir de (13.11) ou (13.6; 3), (2.1) on trouve

$$\begin{aligned}&\{[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\overline{\phi}-k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]^2+(k^*\operatorname{Sin}\phi-\overline{\phi}_2)^2\}\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\overline{\theta}^*+\\ &\quad+\{[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\overline{\phi}+k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]\,[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\overline{\phi}-k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]+\\ &\quad+(k\operatorname{Cos}\phi-\overline{\phi}_1)(k^*\operatorname{Sin}\phi-\overline{\phi}_2)\}(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\overline{\theta}^*)+\\ &\quad+[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\overline{\phi}+k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]^2+(k\operatorname{Cos}\phi-\overline{\phi}_1)^2=\theta \qquad (13.15)\end{aligned}$$

qui est l'extension de [2, (4-24)] .

Théorème 13.4. *Etant donnés une surface S et un champ* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *défini sur celle-ci,* $\operatorname{tg}\theta$ *et* $\operatorname{tg}\overline{\theta}^*$ *correspondant à deux directions orthogonales* $\overline{\omega},\overline{\omega}^*$ *sont liées involutivement, et les coefficients de cette relation involutive ne dépendent que du champ.*

6) A l'aide des formules (13.6; 1), (13.6; 3), (2.1; 2), (13.12) et en considérant (4.4), (3.10), (3.13), (6.3) on peut écrire

$$\frac{1}{({}_wk_{a\theta})^2} = \frac{({}_wk_{g\bar{v}^1})^2\operatorname{Cos}^2\overline{\omega}+({}_wk_{n\bar{0}^1})^2\operatorname{Sin}^2\overline{\omega}-\mathscr{A}\operatorname{Sin}2\overline{\omega}}{\mathscr{D}^2} \qquad (13.16)$$

qui est l'extension de [2, (4-25)] .

A l'aide de (13.16) on peut obtenir

$$\frac{1}{({}_wk_{a\theta})^2}+\frac{1}{({}_wk_{a\bar{\theta}^*})^2}=\frac{({}_wk_{g\bar{v}^1})^2+({}_wk_{n\bar{0}^1})^2}{\mathscr{D}^2} \qquad (13.17)$$

qui est l'extension de [2, (4-26)] .

Théorème 13.5. *Etant donnés une surface S et un champ* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *défini sur celle-ci, la somme des carrés des inverses des courbures absolues du champ correspondant à deux directions orthogonales* $\overline{\omega}$ *et* $\overline{\omega}^*$ *ne dépend pas de ces directions, et sa valeur donnée par* (13.17) *ne dépend que du champ.*

En utilisant (13.10) on peut écrire (13.17) sous la forme

$$\frac{({}_w k_{a\theta})^2 + ({}_w k_{a\theta^*})^2}{(1/{}_w k_{a\theta})^2 + (1/{}_w k_{a\bar{\theta}^*})^2} = \bar{\bar{\mathscr{D}}}^2 . \tag{13.18}$$

Théorème 13.6. *Etant donnés une surface S et un champ* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *défini sur celle-ci la somme des carrés des courbures absolues du champ correspondant à deux directions orthogonales* θ, θ^*, *divisée par la somme des carrés des inverses des courbures absolues du champ correspondant à deux directions orthogonales* $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}^*$ *est égale à* $\bar{\bar{\mathscr{D}}}^2$.

7) Cherchons deux directions orthogonales $\bar{\bar{\theta}}$, $\bar{\bar{\theta}}^* = \bar{\bar{\theta}} + \pi/2$ telles que les deux directions $\bar{\bar{\omega}}$, $\bar{\bar{\omega}}^*$ leurs correspondant soient aussi orthogonales. Pour cela, il faut que

$$\operatorname{tg} \bar{\bar{\theta}} \, . \operatorname{tg} \bar{\bar{\theta}}^* = -1 \quad , \quad \operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}} \, . \operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}}^* = -1 \, .$$

En remplaçant $\bar{\omega}$ par $\bar{\bar{\omega}}$, ω^* par $\bar{\bar{\omega}}^*$ dans (13.13) et θ par $\bar{\bar{\theta}}$, θ^* par $\bar{\bar{\theta}}^*$ dans (13.15) et en considérant les conditions ci-dessus et les égalités $\operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}} + \operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}}^* - 2/\operatorname{tg} 2\bar{\bar{\omega}}$, $\operatorname{tg} \bar{\bar{\theta}} + \operatorname{tg} \bar{\bar{\theta}}^* = -2 / \operatorname{tg} 2 \bar{\bar{\theta}}$ après avoir effectué les calculs on trouve

$$\operatorname{tg} 2 \bar{\bar{\omega}} = \frac{2 \bar{\mathscr{A}}}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 - ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} \, , \tag{13.19}$$

$$\operatorname{tg} 2 \bar{\bar{\theta}} = U_1 / U_2 \, , \tag{13.2θ}$$

$$\operatorname{tg} 2 \bar{\bar{\theta}} = U_3 / U_2 \, , \tag{13.2θ'}$$

où

$$U_1 = 2 \{ [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}] + \\ + (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1)(k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_1) \} \, ,$$

$$U_2 = [(g + \phi_1) \operatorname{Sin} \bar{\phi} + k \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}]^2 - [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \bar{\phi}]^2 + \\ + (k \operatorname{Cos} \phi - \bar{\phi}_1)^2 - (k^* \operatorname{Sin} \phi - \bar{\phi}_2)^2 \, ,$$

$$U_3 = 2 \left\{ \left[(g + \phi_1)(g^* + \phi_2) + \frac{1}{2} K \operatorname{Sin} 2\phi \right] \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi} + \frac{1}{2} [k (g^* + \phi_2) \operatorname{Sin} \phi - \right. \\ \left. - k^* (g + \phi_1) \operatorname{Cos} \phi] \operatorname{Sin} 2 \bar{\phi} - k \bar{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi - k^* \bar{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi + \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_1 \right\} \, ,$$

qui sont l'extension de [2, (4-28), (4-29)], et qui déterminent les couples $(\bar{\bar{\theta}}, \bar{\bar{\theta}}^*)$, $(\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{\omega}}^*)$ orthogonaux et homologues deux à deux.

8) Si l'on prend pour directions θ, les directions isotropes de P du plan tangent à S, d'après (13.6; 3) et (2.1), les directions $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$ qui leurs correspondent sont données par

$$\operatorname{tg} \bar{\omega} = \frac{[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\bar{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}] + \varepsilon\,[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\bar{\phi}]\, i}{(k \operatorname{Cos}\phi - \bar{\phi}_1) + \varepsilon\,(k^* \operatorname{Sin}\phi - \bar{\phi}_2)\, i}$$

ou en utilisant (3.10), (3.13) et (6.3) par

$$\operatorname{tg} \bar{\omega} = \frac{\bar{\mathscr{A}} + \varepsilon\, \bar{\mathscr{D}}\, i}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{13.21}$$

qui est l'extension de [2, (4-30)] .

Les directions $\bar{\omega}'$ et $\bar{\omega}''$ sont symétriques par rapport à la direction

$$\underline{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}' + \bar{\omega}''}{2} . \tag{13.22}$$

D'où l'on peut écrire

$$\operatorname{tg} 2\underline{\bar{\omega}} = \frac{\operatorname{tg}\bar{\omega}' + \operatorname{tg}\bar{\omega}''}{1 - \operatorname{tg}\bar{\omega}' . \operatorname{tg}\bar{\omega}''}$$

et en utilisant les valeurs de $\operatorname{tg}\bar{\omega}'$, $\operatorname{tg}\bar{\omega}''$ dans (13.21) on obtient

$$\operatorname{tg} 2\underline{\bar{\omega}} = \frac{2\bar{\mathscr{A}}}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 - \dfrac{\bar{\mathscr{A}}^2 + \bar{\mathscr{D}}^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2}} . \tag{13.23}$$

En considérant que

$$\bar{\mathscr{A}}^2 + \bar{\mathscr{D}}^2 = ({}_w k_{g\bar{v}^1})^2 \, ({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2$$

(13.23) prend la forme

$$\operatorname{tg} 2\underline{\bar{\omega}} = \frac{2\bar{\mathscr{A}}}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 - ({}_w k_{g\bar{v}^1})^2} . \tag{13.24}$$

En comparant cette équation à (13.19) on obtient comme résultat

$$2\underline{\bar{\omega}} = 2\bar{\bar{\omega}} . \tag{13.25}$$

(13.25) est l'extension de [2, (4-31)] .

Théorème 13.17. *Etant donnés une surface S et un champ* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *défini sur celle-ci, en un point P de S, les angles formés par les directions* $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}''$ *correspondant aux directions isotropes de P du plan tangent à S ont des axes de symétrie parallèles aux directions* $\bar{\bar{\omega}}$, $\bar{\bar{\omega}}^*$. *Ce théorème est l'extension de* [2, Théorème 4-7] .

9) Si l'on prend pour direction $\bar{\omega}$, les directions isotropes du plan $\bar{\mathbf{w}}$, $\bar{\mathbf{w}}^*$, les directions $\bar{\theta}'$, $\bar{\theta}''$ leurs correspondant sont données par

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{[(g+\phi_1)\operatorname{Sin}\bar{\phi} + k\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\bar{\phi}] - \varepsilon\,(k\operatorname{Cos}\phi - \bar{\phi}_1)\, i}{-[(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\bar{\phi}] + \varepsilon\,(k^*\operatorname{Sin}\phi - \bar{\phi}_2)\, i} , \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{13.26}$$

ou en multipliant le numérateur et le dénominateur de (13.26) par le conjugué du dénominateur et en utilisant (3.13) on trouve

$$\operatorname{tg}\theta = U_4/U_5\,, \tag{13.27}$$

où

$$U_4 = -[(g+\phi_1)(g^*+\phi_2) + K\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\phi]\operatorname{Sin}^2\overline{\phi} -$$

$$-\frac{1}{2}[k(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\phi - k^*(g+\phi_1)\operatorname{Cos}\phi]\operatorname{Sin}2\overline{\phi} +$$

$$+ k\overline{\phi}_2\operatorname{Cos}\phi + k^*\overline{\phi}_1\operatorname{Sin}\phi - \overline{\phi}_2\overline{\phi}_2 + \varepsilon\overline{\mathscr{D}}\,i\,,$$

$$U_5 = [(g^*+\phi_2)\operatorname{Sin}\overline{\phi} - k^*\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\overline{\phi}]^2 + [k^*\operatorname{Sin}\phi - \overline{\phi}_2]^2\,,$$

qui est l'extension de [2, (4-32)] .

Les directions $\bar{\theta}'$ et $\bar{\theta}''$ sont symétriques par rapport à la direction

$$\underset{\sim}{\bar{\theta}} = \frac{\bar{\theta}' + \bar{\theta}''}{2}\,. \tag{13.28}$$

D'où, à l'aide de la méthode utilisée pour la formule (13.23) c'est-à-dire en remplaçant dans

$$\operatorname{tg}2\underset{\sim}{\bar{\theta}} = \frac{\operatorname{tg}\bar{\theta}' + \operatorname{tg}\bar{\theta}''}{1 - \operatorname{tg}\bar{\theta}'.\operatorname{tg}\bar{\theta}''}$$

les valeurs de $\operatorname{tg}\bar{\theta}'$ et $\operatorname{tg}\bar{\theta}''$ de (13.27), et en effectuant les calculs nécessaires on obtient

$$\operatorname{tg}2\underset{\sim}{\bar{\theta}} = U_3/U_2\,. \tag{13.29}$$

En le comparant à (13.20') on obtient le résultat

$$2\bar{\bar{\theta}} = 2\underset{\sim}{\bar{\theta}}\,. \tag{13.30}$$

Théorème 13.8. *Etant donnés une surface S et un champ $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ défini sur celle-ci, en un point P de S, les angles formés par les directions $\bar{\theta}'$, $\bar{\theta}''$ correspondant aux directions isotropes de P du plan $\overline{\mathbf{w}}, \overline{\mathbf{w}}^*$ ont des axes de symétrie parallèles aux directions $\bar{\bar{\theta}}$, $\bar{\bar{\theta}}^*$. Ceci est l'extension de* [2, Théorème 4-8] .

Note. Pour le calcul du dénominateur de (13.29), on obtient facilement le résultat, en écrivant sous forme de produit de facteurs la somme en dehors de $\mathscr{D}$ et $\overline{\mathscr{D}}$, se trouvant au numérateur de (13.27).

10) Considérons les directions $\bar{\omega}$, $\underset{\sim}{\bar{\omega}}$ correspondant aux directions conjuguées θ, $\tilde{\theta}$ on aura alors d'après [1, (1-14)] , [2, (12-45)] et d'après les valeurs de (13.12) écrites pour θ et $\tilde{\theta}$

$$[Kk_{n\varnothing} - 2K\overline{\phi}_1 + k^*\overline{\phi}_1^2 + k\overline{\phi}_2^2]\,\mathrm{tg}\,\overline{\omega}\,.\,\mathrm{tg}\,\underset{\sim}{\overline{\omega}} +$$
$$+\{[-Kk_{gc_\nu} + k^*(g+\phi_1)\overline{\phi}_1 + k(g^*+\phi_2)\overline{\phi}_2]\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} + (Mt_{g\varnothing} - K\overline{\phi}_{II})\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\}(\mathrm{tg}\overline{\omega} + \mathrm{tg}\underset{\sim}{\overline{\omega}}) +$$
$$+[Kk_{n\varnothing^*}\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\phi} - Kk_{gc_\nu^*}\,\mathrm{Sin}\,2\overline{\phi} + (\mathscr{C}k_{gc_\nu} + \mathscr{D}k_{gc_\nu^*})\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\phi}] = 0\,. \tag{13.31}$$

Ceci est l'extension de [2, (4-33)] .

Théorème 13.9. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur celle-ci,* $\mathrm{tg}\,\overline{\omega}$ *et* $\mathrm{tg}\,\underset{\sim}{\overline{\omega}}$ *correspondant aux directions conjuguées* θ *et* $\tilde{\theta}$ *sont liées involutivement et d'après* (13.31), *les coefficients de cette relation involutive ne dépendent que du point choisi de S et du champ en ce point.*

Note. Le 2 du deuxième terme de [2, (4-33)] est une erreur d'imprimerie.

14. Lignes d'un champ de vecteurs que l'on peut appeler droites.

Nous allons voir que ces lignes ont des propriétés rappelant celles des droites d'une surface. C'est pour cette raison que nous les appelerons droites bien qu'elles ne soient pas des droites proprement dites.

Définition. Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, les lignes de S vérifiant la condition

$${}_{w}k_{a\theta} = 0 \tag{14.1}$$

seront appelées droites du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S.

Propriétés.

1) Le long d'une telle ligne, d'après la formule (13.5; 1), on aura

$$\mathbf{w}_I = \mathbf{0}\,. \tag{14.2}$$

D'où

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_d$ *de la surface S soit une droite du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *relativement à S, est que* $\mathbf{w}$ *reste le même le long de* $\overline{C}_d$.

Autrement-dit,

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_d$ *de S soit une droite du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ *relativement à S, est que la ligne d'action du vecteur* $\mathbf{w}$ *engendre un cylindre tout le long de* $\overline{C}_d$.

2) Si la droite $\overline{C}_d$ d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi,\overline{\phi})$ relativement à la surface S est réelle, d'après la formule (13.6; 1) on doit avoir

$$ {}_{w}k_{g0} = 0, \quad {}_{w}k_{n0} = 0 \tag{14.3} $$

ou d'après les paragraphes 4 et 5, on doit avoir

$$ \theta = \overline{\gamma}^1 = \bar{\alpha}^1 \tag{14.4} $$

tout le long de $\overline{C}_d$. En égalisant les valeurs de $\operatorname{tg}\overline{\gamma}^1$ et $\operatorname{tg}\bar{\alpha}^1$ de (4.2) et (6.1) et en considérant [2, (2-9)] et (3.13) on obtient

$$ \overline{\mathscr{D}} = 0\,. \tag{14.5} $$

Ceci est l'extension de [2, (5-4)] . On peut exprimer ces résultats comme suit :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_d$ d'une surface S, soit une droite réelle d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur S; et relativement à S, est qu'elle soit à la fois une géodésique et une asymptotique du champ par rapport à S. Tout le long d'une telle droite $\overline{\mathscr{D}} = 0$ et réciproquement.*

3) En utilisant les formules [1, (3.1a; 1,2,3)] on peut écrire les relations (1.5; 1,2) sous la forme :

$$ \left.\begin{aligned} {}_{w}k_{n\theta} &= (k_{n\theta}\operatorname{Cos}\delta + t_{g\theta}\operatorname{Sin}\delta) - \overline{\phi}_I \\ {}_{w}k_{n\theta} &= (k_{gc} + \delta_I)\operatorname{Sin}\overline{\phi} + (k_{n\theta}\operatorname{Sin}\delta - t_{g\theta}\operatorname{Cos}\delta)\operatorname{Cos}\overline{\phi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14.6} $$

Si une ligne réelle $\overline{C}_d$ est une droite de S, on a

$$ k_{n\theta} = 0\,, \quad k_{gc} = 0\,, \quad {}_{w}k_{n\theta} = 0\,, \quad {}_{w}k_{g\theta} = 0 \tag{14.7} $$

tout le long de $\overline{C}_d$, et à partir des équations (14.6), on peut écrire

$$ t_{g0}\operatorname{Sin}\delta - \overline{\phi}_I = 0\,, \tag{14.8} $$

$$ \delta_I \operatorname{Sin}\overline{\phi} - t_{g\theta}\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\overline{\phi} = 0\,. \tag{14.9} $$

D'où

$$ (\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\overline{\phi})_I = 0\,. \tag{14.10} $$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 14.1. *Si une droite réelle $\overline{C}_d$ d'un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur une surface S est une droite proprement dite, tout long de cette droite* $\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\overline{\phi} = \text{cte}$.

4) Si une droite $\overline{C}_d$ d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur une surface S n'est par réelle, (14.1) et (13.6; 1,3) montrent que

$$ \operatorname{tg}\overline{\omega} = \varepsilon\, i \quad (\varepsilon = \pm 1)\,. \tag{14.11} $$

Les directions correspondantes sont les directions isotropes du plan $\overline{\mathbf{w}}, \overline{\mathbf{w}}^*$. Dans ce cas, les directions tangentes des $\overline{C}_d$ sont les directions $\overline{\theta}'$, $\overline{\theta}'$ déterminées par (13.27).

Théorème 14.2. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur celle-ci, il y a en général deux droites imaginaires* $\overline{C}_d$ *du champ relativement à S et passant par P de S dont les directions tangentes en ce point* $\overline{\theta}'$, $\overline{\theta}'$ *données par* (13.27) *sont symétriques par rapport aux directions* $\overline{\overline{\theta}}, \overline{\overline{\theta}}^*$ *définies par* (13.2θ).

15. Lignes d'un champ de vecteurs que l'on peut appeler lignes planes.

Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, une ligne $\overline{C}_p$ de S vérifiant la condition

$$ {}_w t_{a\theta} = \theta \tag{15.1}$$

sera appelée ligne plane du champ relativement à S.

Nous allons voir que ces lignes ont des propriétés rappelant celles des lignes planes de S.

Propriétés.

1) D'après (13.5; 3) et (15.1) on peut dire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_p$ *de S soit une ligne plane du champ relativement à S est que la ligne d'action du vecteur* $\overline{\mathbf{w}}^*$ *reste parallèle à elle-même le long de* $\overline{C}_p$.

Dans ce cas, quand P décrit $\overline{C}_p$, le vecteur du champ $\mathbf{w}$ reste parallèle à un plan orthogonal à $\overline{\mathbf{w}}^*$. Autrement-dit :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_p$ *d'une surface S soit une ligne plane d'un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur S, relativement à S, est que la ligne d'action du vecteur* $\overline{\mathbf{w}}^*$ *engendre un cylindre ayant pour directrice* $\overline{C}_p$, *tandis que celles de* $\mathbf{w}$ *et* $\overline{\mathbf{w}}$ *engendrent une surface réglée à plan directeur.*

2) D'après (13.6; 2) et (15.1) on voit que

$$\overline{\omega}_I = {}_w t_{g\theta} \tag{15.2}$$

et on peut écrire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne $\overline{C}_p$ *d'une surface S soit une ligne plane d'un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ *défini sur S et relativement à S, est que l'on ait* $\overline{\omega}_I = {}_w t_{g\theta}$.

3) Si le long d'une ligne plane $\overline{C}_p$ d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ on a

$$_w k_{g\theta} = 0$$

on aura alors d'après (13.6; 3) et (15.2)

$$\overline{\omega} = 0\,, \quad _w t_{g\theta} = 0\,.$$

En utilisant ces valeurs dans (3.6; 3) et (3.12) on obtient

$$\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{C} = 0$$

tout le long de $\overline{C}_p$. En annulant la valeur de $\mathscr{C}$ dans [2, (2-8)] on obtient une relation à l'aide de laquelle on trouve l'expression de $\operatorname{tg} \gamma^1$ donnée dans [2, (3-3)] et celle de $\operatorname{tg} \overline{\gamma}^1$ donnée dans (3.2). On peut dire de même pour les conjuguées γ^1 et $\overline{\gamma}^1$ (Ce cas a été exprimé dans le Théorème 5.1).

Théorème 15.1. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, si le long d'une ligne plane $\overline{C}_p$ d'un champ de vecturs $\mathbf{w}$ relativement à S, la courbure géodésique est nulle, tout le long de cette ligne $\overline{\mathscr{C}} = \mathscr{C} = 0$ et comme $\gamma^1 = \overline{\gamma}^1$, le champ tangentiel $\mathbf{v}(\phi)$, d'où le champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ est orthogonal à la direction conjuguée $\overline{\overline{\gamma}}^1$ de la direction asymptotique $\overline{\gamma}^1$ du champ et le vecteur $\mathbf{v}^*$ reste le même le long de $\overline{C}_p$.*

4) Si le long d'une ligne C_p d'un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à la surface S on a

$$_w k_{n\theta} = 0$$

d'après (1.3; 6; 3.2) et (15.2) on aura

$$\overline{\omega} = \frac{\pi}{2}\,, \quad _w t_{g\theta} = 0\,.$$

En utilisant ces valeurs dans (3.6; 5) on obtient

$$\overline{K} = 0\,.$$

En remplaçant la valeur de $\mathscr{D}$ obtenue dans [2, (2-9)] et $K = kk^* \operatorname{Cos}^2 \phi + kk^* \operatorname{Sin}^2 \phi$ dans (3.14), on obtient après calcul, d'après (8.1) et (6.1)

$$\bar{\alpha}^1 = \overline{\beta}^1$$

tout le long de $\overline{C}_p$. On peut obtenir directement ce résultat, en remarquant que l'angle qui vérifie en même temps les relations $_w k_{n\theta} = 0$ et $_w t_{g\theta} = 0$ est $\theta = \bar{\alpha}^1 = \overline{\beta}^1$.

Théorème 15.2. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, si le long d'une ligne plane $\overline{C}_p$ de $\mathbf{w}$ relativement à S, la courbure normale est nulle, l'invariant $\overline{K}$ est nul tout le long de cette ligne.*

16. Centre de courbure et axe de courbure d'un champ de vecteurs.

1) *Centre de courbure.* Soit une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}\,(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci. Le *centre de courbure* $\overline{M}_c$ de $\mathbf{w}$ au point P relativement à la courbe C de S est un point situé sur le deuxième axe portant $\overline{\mathbf{w}}$ du trièdre de FRENET du champ en P, de sorte que la tangente en $\overline{M}_c$ au lieu géométrique de $\overline{M}_c$ soit orthogonale au champ $\mathbf{w}$.

Le vecteur $\mathbf{x}$, étant le vecteur de position du point P décrivant C, le vecteur de position de $\overline{M}_c$ sera

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\,\overline{\mathbf{w}}\,, \tag{16.1}$$

où la valeur de λ est définie de telle façon que $\mathbf{y}_I \,.\, \mathbf{w} = 0$. En considérant que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_I &= \mathbf{a} = \mathbf{v}\,\mathrm{Cos}\,\delta - \mathbf{v}^*\,\mathrm{Sin}\,\delta && [^1, (2\text{-}3;\,1)] \\ \mathbf{w} &= \mathbf{v}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} + \mathbf{n}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\,, \quad \delta = \phi - \theta && (1.1) \\ \overline{\mathbf{w}}_I &= -\,{}_w k_{a\theta}\,\mathbf{w} + {}_w t_{a\theta}\,\overline{\mathbf{w}}^* && (13.5) \end{aligned}$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{y}_I = \mathbf{x}_I + \lambda_I\,\overline{\mathbf{w}} + \lambda\,\overline{\mathbf{w}}_I \\ &\mathbf{y}_I \,.\, \mathbf{w} = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{w} + \lambda\,\overline{\mathbf{w}}_I \,.\, \mathbf{w} \\ &\mathbf{x}_I = \mathbf{a} = \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\mathbf{w} - (\mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega} + \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega})\,\overline{\mathbf{w}} + \\ &\quad + (\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega} - \mathrm{Cos}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega})\,\overline{\mathbf{w}}^* \\ &\mathbf{y}_I \,.\, \mathbf{w} = \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\delta - \lambda\,{}_w k_{a\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

ou bien

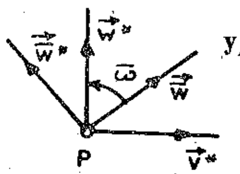
$$\lambda = \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_w k_{a\theta}} \tag{16.3}$$

et le centre de courbure $\overline{M}_c$ vérifie l'égalité vectorielle

$$\overline{\mathbf{PM}}_c = \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_w k_{a\theta}}\,\overline{\mathbf{w}}\,. \tag{16.4}$$

Cette définition est l'extension de celle de PAN [6, 294] .

D'après (16.2), pour le centre de courbure de $\mathbf{y}_I$ par rapport au système orthogonal $\mathbf{w}$, $\overline{\mathbf{w}}$, $\overline{\mathbf{w}}^*$ on voit que



$$\begin{aligned} \mathbf{y}_I = &\left[\left(\mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\delta}{{}_w k_{a\theta}}\right)_I - \mathrm{Cos}\overline{\phi}\mathrm{Cos}\overline{\omega}\mathrm{Cos}\delta - \mathrm{Sin}\overline{\omega}\mathrm{Sin}\delta\right]\overline{\mathbf{w}} + \\ &+ \left(\mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\delta}{{}_w k_{a\theta}}\,{}_w t_{a\theta} - \mathrm{Cos}\overline{\phi}\mathrm{Sin}\overline{\omega}\mathrm{Cos}\delta + \mathrm{Cos}\overline{\omega}\mathrm{Sin}\delta\right)\overline{\mathbf{w}}^*. \end{aligned} \tag{16.5}$$

En effectuant les calculs ci-dessus, on a considéré

$$\left.\begin{aligned} v^* &= \overline{w} \operatorname{Sin} \overline{\omega} - \overline{w}^* \operatorname{Cos} \overline{\omega} , \\ v &= w \operatorname{Sin} \overline{\phi} - w^* \operatorname{Cos} \overline{\phi} , \\ w^* &= \overline{w} \operatorname{Cos} \overline{\omega} + \overline{w}^* \operatorname{Sin} \overline{\omega} \end{aligned}\right\} \tag{16.6}$$

et pour le centre de courbure on a considéré que y_l est orthogonal à w, c'est-à-dire que sa composante sur w est nulle.

En se basant sur la formule (16.3) et le Théorème (13.1) on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 16.1. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs* w $(\phi, \overline{\phi})$ *defini sur celle-ci, le centre de courbure* $\overline{M}_c$ *du champ en un point régulier P de S relativement à deux courbes tangentes entre elles en P est le même, c'est-à-dire, ne dépend que de la direction* θ *de la tangente commune à ces courbes.*

Cas Particuliers.

1) Si au point P, $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si le champ w est orthogonal à la direction θ , $\overline{M}_c \equiv P$. Si en un tel point, on a de plus

$${}_{w}k_{a\theta} = 0 ,$$

$\overline{M}_c$ est alors indéterminé.

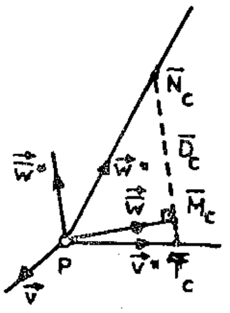
2) Si le vecteur du champ w est normal à S en P, quelle que soit la direction θ, on a $\overline{M}_c \equiv P$.

3) Pour une droite $\overline{C}_d$ du champ de vecteurs w $(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S le centre de courbure est en général à l'infini. Si Cos δ et ${}_{w}k_{a\theta}$ sont en même temps nuls ily a indétermination.

2) *Axe de courbure.* La droite passant par le centre de courbure M_c et orthogonale au plan w, $\overline{w}$, ou parallèle au vecteur $\overline{w}^*$ sera nommée *axe de courbure* ou *axe plaire* du champ de vecteurs w $(\phi, \overline{\phi})$ en P relativement à la courbe C de S passant par P.

D'après les théorèmes 16.1 et 13.1, cette droite ne dépend que de la direction θ, c'est-à-dire de la direction tangente à C en P. On peut donc parler de l'axe de courbure relatif à une direction a (θ).

Soit $\overline{T}_c, \overline{N}_c$ les points où $\overline{D}_c$ coupe respectivement le plan tangent en P à S - ou ce qui revient au même, l'axe v* - et l'axe w*. A l'aide des relations existant pour le triangle rectangle $P\overline{T}_c\,\overline{N}_c$, on obtient les égalités suivantes :



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P\overline{T}}_c &= \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_w k_{g\theta}}\,\mathbf{v}^*\,, \\ \mathbf{P\overline{N}}_c &= \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_w k_{n\theta}}\,\mathbf{w}^*\,. \end{aligned}\right\} \qquad (16.7)$$

Définitions.

Le point $\overline{T}_c$ est appelé le *centre de courbure géodésique* du champ $\mathbf{w}\,(\phi, \overline{\phi})$ relativement à la courbe C de la surface S en P.

Le point $\overline{N}_c$ est appelé le *centre de courbure normale* du champ $\mathbf{w}\,(\phi, \overline{\phi})$ relativement à la courbe C de la surface S en P.

D'après les relations (16.7), l'axe de courbure $\overline{D}_c$ passant par les points $\overline{T}_c$ et $\overline{N}_c$, aura pour équation, relativement aux axes de coordonnées $P\,(\mathbf{v}^*\,, \mathbf{w}^*)$

$${}_w k_{g\theta}\, x^1 + {}_w k_{n\theta}\, x^2 - \mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\delta = 0\,. \qquad (16.8)$$

Les équations [2, (1-4), (1-5), (1-6)] sont les valeurs de la courbure normale, de la courbure géodésique et de la torsion géodésique écrites pour les champs de vecteurs tangentiels par rapport à un système orthogonal θ, θ^*, pour une direction différente $\overline{\theta}$, en prenant $\alpha = \overline{\theta} - \theta$. En remplaçant $\overline{\theta}$ par θ et en prenant pour système orthogonal ϕ, ϕ^*, c'est-à-dire les directions $\mathbf{v}, \mathbf{v}^*$, à l'aide de [1, (3-1a)] et en considérant que

$$\left.\begin{aligned} &{}_w k_{n\varnothing} = k_{n\varnothing}\,, \quad {}_v k_{n\varnothing^*} = -\,t_{g\varnothing^*} = t_{g\varnothing} \\ &{}_v k_{g\varnothing} = k_{gc_v}\,, \quad {}_v k_{g\varnothing^*} = k_{gc_v^*} \qquad\qquad \theta - \phi = \delta \\ &{}_v t_{g\varnothing} = t_{g\varnothing}\,, \quad {}_v t_{g\varnothing^*} = k_{n\varnothing^*} \end{aligned}\right\} \qquad (16.8')$$

on peut écrire ces équations sous la forme

$$\left.\begin{aligned} {}_v k_{n\theta} &= k_{n\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\delta - t_{g\varnothing}\,\mathrm{Sin}\,\delta \\ {}_v k_{g\theta} &= k_{gc_v}\,\mathrm{Cos}\,\delta - k_{gc_v^*}\,\mathrm{Sin}\,\delta \\ {}_v t_{g\theta} &= t_{g\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\delta - k_{n\varnothing^*}\,\mathrm{Sin}\,\delta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (16.9)$$

En utilisant ces valeurs dans (1.5), on obtient

$$\left.\begin{aligned} {}_w k_{g\theta} &= (k_{gc_v}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi} - t_{g\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi})\,\mathrm{Cos}\,\delta + (k_{n\varnothing^*}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi} - k_{gc_v^*}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi})\,\mathrm{Sin}\,\delta \\ {}_w k_{n\theta} &= (k_{n\varnothing} - \overline{\phi}_{I^*})\,\mathrm{Cos}\,\delta + (\overline{\phi}_{II^*} - t_{g\varnothing})\,\mathrm{Sin}\,\delta \end{aligned}\right\} \qquad (16.10)$$

ou I^*, $\mathbf{v}$; II^*, $\mathbf{v}^*$ sont les dérivations invariantes calculées relativement à la directions θ et on a considéré que $\overline{\phi}_I = \overline{\phi}_{I^*}\,\mathrm{Cos}\,\delta - \overline{\phi}_{II^*}\,\mathrm{Sin}\,\delta$.

En mettant ces valeurs dans (16.8) et en notant $t = \operatorname{tg}\delta$ on trouve

$$\begin{aligned}&[(k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi} - k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi})\,x^1 + (\bar{\phi}_{II^*} - t_{g\varnothing})\,x^2]\,t + \\ &+ [(k_{gc_v}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - t_{g\varnothing}\operatorname{Cos}\bar{\phi})\,x^1 + (k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_{I^*})\,x^2 - \operatorname{Sin}\bar{\phi}] = 0\,.\end{aligned} \tag{16.11}$$

Comme l'équation (16.11) est linéaire par rapport à t, l'axe de courbure $\bar{D}_c$ passe par le point d'intersection $\bar{P}_c$ des directions

$$\left.\begin{aligned}&(k_{gc_v}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - t_{g\varnothing}\operatorname{Cos}\bar{\phi})\,x^1 + (k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_{I^*})\,x^2 - \operatorname{Sin}\bar{\phi} = 0 \\ &(k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi} - k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi})\,x^1 + (\bar{\phi}_{II^*} - t_{g\varnothing})\,x^2 = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

A l'aide d'une forme particulière de (16.8′), (1.5) et (3.6; 4) on obtient la relation

$$\begin{aligned}&-(k_{gc_v}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - t_{g\varnothing}\operatorname{Cos}\bar{\phi})\,(t_{g\varnothing} - \bar{\phi}_{II^*}) + (k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi})\,(k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_{I^*}) = \\ &\qquad = -{}_wk_{g\varnothing}\cdot{}_wk_{n\varnothing^*} + {}_wk_{g\varnothing^*}\cdot{}_wk_{n\varnothing} = \bar{\mathscr{D}}\end{aligned}$$

qui sert à trouver les coordonnées de ce point d'intersection

$$x^1 = \frac{(t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*})\operatorname{Sin}\bar{\phi}}{\bar{\mathscr{D}}}\,,\quad x^2 = \frac{k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\bar{\mathscr{D}}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}\,. \tag{16.13}$$

Ceci est l'extension de [2, (7-9)] et on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 16.2. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *défini sur celle-ci, l'axe de courbure du champ en P relativement à la direction* a (0), *passe en général par un point fixe* $\bar{P}_c$, *quand* a (0) *tourne autour de P.*

Lieu géométrique du point M_c.

Comme l'angle $P\bar{M}_c\bar{P}_c$ est droit on a le résultat suivant :

Théorème 16.3. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ *défini sur celle-ci, le lieu des centres de courbure du champ relativement aux courbes C passant par un point régulier P de S est en général une circonférence de diamètre* $P\bar{P}_c$ *située dans le plan* P (v*, w*).

Centre de courbure M_c *dans les cas particuliers.*

1) Si ${}_wk_{n0} = 0$ on aura d'après le paragraphe 6, $0 = \bar{\alpha}^1$ et d'après (13.6; 3) dans ce cas particulier, $\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}$ et le centre de courbure $\bar{M}_c$ se trouvera sur la ligne d'action du vecteur v*. On aura, pour λ, qui dans (16.3) déterminait la distance de $\bar{M}_c$ à P

$$\lambda = \operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\alpha}^1)}{{}_w k_{g\bar{\alpha}^1}}\,. \tag{16.14}$$

A l'aide de (6.1) on a

$$\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\alpha}^1) = \operatorname{Sin}\bar{\alpha}^1\,\frac{t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}}{k\operatorname{Cos}\phi - \bar{\phi}_1} \tag{16.15}$$

et en se servant de (6.6), (6.10) on obtient

$$\lambda = \operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}}{\bar{\mathscr{D}}} \tag{16.16}$$

qui est l'extension de [2, (7-12)].

2) Si ${}_w k_{g\theta} = 0$, d'après le paragraphe 4, $\theta = \bar{\gamma}^1$ et d'après (13.6; 3) dans ce cas particulier, $\bar{\omega} = 0$, le centre de courbure $\bar{M}_c$ se trouvera sur la ligne d'action du vecteur w*. On aura pour λ qui dans (16.3) déterminait la distance de $\bar{M}_c$ à P

$$\lambda = \operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\gamma}^1)}{{}_w k_{n\bar{\gamma}^1}}\,. \tag{16.17}$$

En se servant de (4.2), (4.7), [2, (4-3; 2)], [1, (1-6)], [2, 180] on obtient

$$\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\gamma}^1) = \frac{k_{gc_\nu^*}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}} \tag{16.18}$$

et en utilisant (4.15) on peut écrire

$$\lambda = \operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{k_{gc_\nu^*}\operatorname{Sin}\bar{\phi} - k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\bar{\mathscr{D}}} \tag{16.19}$$

qui est l'extension de [2, (7-15)].

3) Si ${}_w t_{g\theta} = 0$ d'après le paragraphe 8, $\theta = \bar{\beta}^1$, et d'après (13.6; 3), (9.9; 1), dans ce cas particulier on aura

$$\operatorname{tg}\bar{\omega} = \frac{\mathscr{C}}{\bar{K}}\,. \tag{16.20}$$

Pour la distance λ on aura

$$\lambda = \operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\beta}^1)}{{}_w k_{a\bar{\beta}^1}}\,. \tag{16.21}$$

En utilisant (8.1), (8.8), [1, (4-3; 2), (1-6)], [2, 180] on peut écrire

$$\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\beta}^1) = \frac{k_{gc_\nu^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi} + k_{\bar{n}\varnothing^*}\operatorname{Sin}\bar{\phi}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}} \tag{16.22}$$

et à l'aide de la relation

$$({}_wk_{a\bar{\beta}^1})^2 = ({}_wk_{g\bar{\beta}^1})^2 + ({}_wk_{n\bar{\beta}^1})^2 = \frac{\mathscr{C}^2 + \bar{K}^2}{({}_wt_{g\bar{\eta}^1})^2} \tag{16.23}$$

trouvée d'après (8.12) et (8.13), et en se servant de (16.22) on obtient

$$\lambda^2 = \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi}\, \frac{(k_{gc_\nu *} \operatorname{Cos} \bar{\phi} + k_{n\varnothing *} \operatorname{Sin} \bar{\phi})^2}{\mathscr{C}^2 + \bar{K}^2}\,. \tag{16.24}$$

(16.20) et (16.24) sont l'extension de [2, (7-13)] et (16.23) est l'extension de [2, (7-14)] .

4) Si $0 = \bar{\theta}^1$, en utilisant la valeur de ${}_wk_{g\bar{\theta}^1}$ dans (7.9) on trouve

$$\operatorname{tg} \bar{\omega} = \frac{\bar{\mathscr{A}}}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2}\,, ({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2 = M\, k_{n\varnothing} - K - 2\,(k\bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi + k^* \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi) + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\phi}_2^2\,. \tag{16.25}$$

Pour la distance λ on aura

$$\lambda = \operatorname{Sin} \bar{\phi}\, \frac{\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\theta}^1)}{{}_wk_{a\bar{\theta}^1}}\,. \tag{16.26}$$

En utilisant (7.2), (6.6), [1, (1-6)] on peut écrire

$$\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\theta}^1) = \frac{k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi - \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi}{{}_wk_{n\bar{\theta}^1}}\,. \tag{16.27}$$

A l'aide de la relation

$$({}_wk_{a\bar{\theta}^1})^2 = ({}_wk_{g\bar{\theta}^1})^2 + ({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2 = \frac{\bar{\mathscr{A}}^2 + ({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^4}{({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^2} \tag{16.28}$$

trouvée d'après la valeur (7.9) et de (16.27) on obtient

$$\lambda^2 = \operatorname{Sin}^2 \bar{\phi}\, \frac{(k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_1 \operatorname{Cos}\phi - \bar{\phi}_2 \operatorname{Sin}\phi)^2}{\bar{\mathscr{A}}^2 + ({}_wk_{n\bar{\theta}^1})^4}\,. \tag{16.29}$$

(16.25) et (16.29) sont l'extension de [2, (7-16)] et (16.28) est l'extension de [2, (7-17)] .

5) Si $\theta = \bar{\eta}^1$, en utilisant les valeurs de ${}_wk_{g\bar{\eta}^1}$ et ${}_wk_{n\bar{\eta}^1}$ dans (9.7) et (9.8) on trouve

$$\operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\bar{\mathscr{B}}}}{\bar{\mathscr{E}}}\,. \tag{16.30}$$

Pour la distance λ on aura

$$\lambda = \operatorname{Sin} \bar{\phi}\, \frac{\operatorname{Cos}(\phi - \bar{\eta}^1)}{{}_wk_{a\bar{\eta}^1}}\,. \tag{16.31}$$

En utilisant (9.1), (8.8), [1, (4-1; 2), (1-7)] , [2, 180] on peut écrire

$$\mathrm{Cos}\,(\phi - \bar{\eta}^1) = \frac{k_{gc_\nu}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} + t_{g\varnothing}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}}{{}_w t_{g\bar{\eta}^1}}\,. \tag{16.32}$$

A l'aide de la relation

$$({}_w k_{a\bar{\eta}^1})^2 = ({}_w k_{g\bar{\eta}^1})^2 + ({}_w k_{n\bar{\eta}^1})^2 = \frac{\bar{\mathscr{B}}^2 + \bar{\mathscr{E}}^2}{({}_w t_{g\bar{\eta}^1})^2} \tag{16.33}$$

trouvée d'après (9.7) et (9.8) et de (16.32) on obtient

$$\lambda^2 = \mathrm{Sin}^2\,\bar{\phi}\,\frac{(k_{gc_\nu}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} + t_{g\varnothing}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi})^2}{\bar{\mathscr{B}}^2 + \bar{\mathscr{E}}^2}\,. \tag{16.34}$$

(16.30) et (16.34) sont l'extension de [2, (7-18)] et (16.33) est l'extension de [2, (7-19)] .

6) Si $\theta = \bar{\nu}^1$, en utilisant la valeur de ${}_w k_{n\bar{\nu}^1}$ dans (5.11) on trouve

$$\mathrm{tg}\,\bar{\varpi} = \frac{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2}{\bar{\mathscr{A}}}\,,\quad ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 = ({}_\nu k_{g\nu^1})^2\,\mathrm{Sin}^2\bar{\phi} - \mathscr{B}\,\mathrm{Sin}\,2\,\bar{\phi} + (M\,k_{n\varnothing *} - K)\,\mathrm{Cos}^2\bar{\phi}\,. \tag{16.35}$$

Pour la distance λ on aura

$$\lambda = \mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\,\frac{\mathrm{Cos}\,(\phi - \bar{\nu}^1)}{{}_w k_{a\bar{\nu}^1}}\,. \tag{16.36}$$

En utilisant (5.2), (4.7), [1, (4-1; 2), (1-7)] , [2, 180] on peut écrire

$$\mathrm{Cos}\,(\phi - \bar{\nu}^1) = \frac{k_{gc_\nu}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - \mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}}{{}_w k_{g\bar{\nu}^1}}\,. \tag{16.37}$$

A l'aide de la relation

$$({}_w k_{a\bar{\nu}^1})^2 = ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 + ({}_w k_{n\bar{\nu}^1})^2 = \frac{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^4 + \bar{\mathscr{A}}^2}{({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2} \tag{16.38}$$

trouvée d'après (5.11) et de (16.36) on obtient

$$\lambda^2 = \mathrm{Sin}^2\,\bar{\phi}\,\frac{(k_{gc_\nu}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - t_{g\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi})^2}{\bar{\mathscr{A}}^2 + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^4}\,. \tag{16.39}$$

(16.35) et (16.39) sont l'extension de [2, (7-20)] et (16.38) est l'extension de [2, (7-21)] .

7) Si $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, on a dejà vu que $\bar{M}_c$ coincide avec P. En utilisant (1.5) et [1, (3-1a)] , et en considérant que pour $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour $0 = \phi - \dfrac{\pi}{2}$ on a

$$k_{gc} = - k_{gc_v*}\,, \quad k_{n\theta} = k_{n\varnothing*}\,, \quad t_{g0} = t_{g\varnothing*}\,, \quad \overline{\phi}_I = \overline{\phi}_{II*}$$

dans ce cas particulier, on trouve

$$\operatorname{tg}\overline{\omega} = \frac{-k_{gc_v*}\operatorname{Sin}\overline{\phi}+k_{n\varnothing*}\operatorname{Cos}\overline{\phi}}{t_{g\varnothing*} + \overline{\phi}_{II*}} \qquad (16.40)$$

qui est l'extension de [2, (7-31)] .

17. Les valeurs de ${}_wk_{a0}$, ${}_wk_{n\theta}$, ${}_wk_{g\theta}$, ${}_vk_{a\theta}$, ${}_vk_{n0}$, ${}_vk_{g\theta}$, $k_{n\theta}$ et $t_{g\theta}$ **en fonction de tg** ω .

Nous avons vu que l'axe de courbure du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement aux différentes directions θ, passe par un point $\overline{P}_c$ et que les coordonnées de ce point par rapport au système de coordonnées P (v*, w*) sont définies par

$$x^1 = \frac{(t_{g\varnothing*} + \overline{\phi}_{II*})\operatorname{Sin}\overline{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}}\,, \quad x^2 = \frac{k_{gc_v*}\operatorname{Sin}\overline{\phi} - k_{n\varnothing*}\operatorname{Cos}\overline{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}}\operatorname{Sin}\overline{\phi}$$

dans (16.13).

Les composantes scalaires du vecteur w par rapport au même système étant $(\operatorname{Sin}\overline{\omega}\,,\ \operatorname{Cos}\overline{\omega})$ on a

$$\lambda = \operatorname{Sin}\overline{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}\delta}{{}_wk_{a0}} = \mathbf{P\overline{P}}_c.\overline{\mathbf{w}} =$$

$$= \frac{(t_{g\varnothing*} + \overline{\phi}_{II*})\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Sin}\overline{\omega} + (k_{gc_v*}\operatorname{Sin}\overline{\phi} - k_{n\varnothing*}\operatorname{Cos}\overline{\phi})\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\overline{\omega}}{\overline{\mathscr{D}}}\,. \qquad (17.1)$$

Cette équation est l'équation polaire de la circonférence de diamètre $P\overline{P}_c$, située dans le plan orthogonal à w et d'équation

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - \operatorname{Sin}\overline{\phi}\,\frac{(t_{g\varnothing*} + \overline{\phi}_{II*})\,x^1 + (k_{gc_v*}\operatorname{Sin}\overline{\phi} - k_{n\varnothing*}\operatorname{Cos}\overline{\phi})\,x^2}{\overline{\mathscr{D}}} = 0 \qquad (17.2)$$

par rapport à l'axe polaire w* et à l'angle polaire $\overline{\omega}$. Ces équations sont l'extension de [2, (8-1) , (7-1θ)] .

En prenant $\delta = \phi - \theta$ à l'aide de (13.12) et en utilisant [1, (1-6), (4-1;2), (1-7), (4-3;2)] , [2, 18θ] on trouve

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{(-\overline{\phi}_{I*} + k_{n\varnothing})\operatorname{Sin}\overline{\omega} + (t_{g\varnothing}\operatorname{Cos}\overline{\phi} - k_{gc_v}\operatorname{Sin}\overline{\phi})\operatorname{Cos}\overline{\omega}}{-(t_{g\varnothing*} + \overline{\phi}_{II*})\operatorname{Sin}\overline{\omega} + (k_{n\varnothing*}\operatorname{Cos}\overline{\phi} - k_{gc_v*}\operatorname{Sin}\overline{\phi})\operatorname{Cos}\overline{\omega}}\,. \qquad (17.3)$$

D'après (17.1) on a

$$\frac{\operatorname{Cos}\delta}{{}_w k_{a\theta}} = \frac{(t_{g\varnothing^*} + \overline{\phi}_{II^*}) \operatorname{Sin}\overline{\varpi} + (k_{gc_\nu^*} \operatorname{Sin}\overline{\phi} - k_{n\varnothing^*} \operatorname{Cos}\overline{\phi}) \operatorname{Cos}\overline{\varpi}}{\overline{\mathscr{D}}} \tag{17.4}$$

et en le multipliant par (17.3) on obtient

$$\frac{\operatorname{Sin}\delta}{{}_w k_{a\theta}} = \frac{(\overline{\phi}_{I^*} - k_{n\varnothing}) \operatorname{Sin}\overline{\varpi} + (k_{gc_\nu} \operatorname{Sin}\overline{\phi} - t_{g\varnothing} \operatorname{Cos}\overline{\phi}) \operatorname{Cos}\overline{\varpi}}{\overline{\mathscr{D}}} . \tag{17.5}$$

D'après (17.4) et (17.5) en se servant de (13.7) on trouve

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}} \operatorname{Cos}\delta &= (t_{g\varnothing^*} + \overline{\phi}_{II^*})\, {}_w k_{g\theta} + (k_{gc_\nu^*} \operatorname{Sin}\overline{\phi} - k_{n\varnothing^*} \operatorname{Cos}\overline{\phi})\, {}_w k_{n\theta} \\ \overline{\mathscr{D}} \operatorname{Sin}\delta &= (\overline{\phi}_{I^*} - k_{n\varnothing})\, {}_w k_{g\theta} + (k_{gc_\nu} \operatorname{Sin}\overline{\phi} - t_{g\varnothing} \operatorname{Cos}\overline{\phi})\, {}_w k_{n\theta} . \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

En utilisant [1, (1-7), (1-6), (1-9), (1-4), (1-8)], [2, (3-7), (2-7), (2-6)], (6.3), (4.4), (3.10) on obtient à partir de (17.6)

$$\overline{\mathscr{D}}^2 = ({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2\, {}_w k_{g\theta}^2 + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2\, {}_w k_{n\theta}^2 - 2\, \mathscr{A}^2\, {}_w k_{g_0}\, {}_w k_{n\theta} . \tag{17.7}$$

(17.3), (17.5), (17.6) et (17.7) sont respectivement les extensions de [2, (8-2)], [2, (8-3)], [2, (8-4)] et [2, (8-5)].

D'après (13.12) en se servant des expressions (6.3), (4.4), (3.10) sous la forme de produit de facteurs on peut écrire

$$\operatorname{Cos}^2\theta = \frac{\{(k^* \operatorname{Sin}\phi - \overline{\phi}_2) \operatorname{Sin}\overline{\varpi} - [(g^* + \phi_2) \operatorname{Sin}\overline{\phi} - k^* \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\overline{\phi}] \operatorname{Cos}\overline{\varpi}\}^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 \operatorname{Sin}^2\overline{\varpi} - 2\, \mathscr{A} \operatorname{Sin}\overline{\varpi} \operatorname{Cos}\overline{\varpi} + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 \operatorname{Cos}^2\overline{\varpi}} \tag{17.8}$$

$$\operatorname{Sin}^2\theta = \frac{\{-(k \operatorname{Cos}\phi - \overline{\phi}_1) \operatorname{Sin}\overline{\varpi} + [(g + \phi_1) \operatorname{Sin}\overline{\phi} + k \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\overline{\phi}] \operatorname{Cos}\overline{\varpi}\}^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 \operatorname{Sin}^2\overline{\varpi} - \mathscr{A} \operatorname{Sin} 2\overline{\varpi} + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 \operatorname{Cos}^2\overline{\varpi}} . \tag{17.9}$$

(17.8) et (17.9) sont les extensions de [2, (8-6) et (8-7)].

En remplaçant (17.8) et (17.9) dans la relation

$$k_{n_\theta} = k \operatorname{Cos}^2\theta + k^* \operatorname{Sin}^2\theta$$

on trouve

$$k_{n_\theta} = U_8 / U_9 , \tag{17.10}$$

où

$$\begin{aligned} U_8 = {} & [K(k_{n\varnothing} - 2\overline{\phi}_{I^*}) + k\overline{\phi}_2^2 + k^* \overline{\phi}_1^2] \operatorname{Sin}^2\overline{\varpi} + \\ & + \{[-K k_{gc_\nu} + k\, \overline{\phi}_2 (g^* + \phi_2) + k^* \overline{\phi}_1 (g + \phi_1)] \operatorname{Sin}\overline{\phi} + \\ & + K(t_{g\varnothing} - \overline{\phi}_{II^*}) \operatorname{Cos}\overline{\phi}\} \operatorname{Sin} 2\overline{\varpi} + \\ & + [(\mathscr{C} k_{gc_\nu} + \mathscr{D} k_{gc_\nu^*}) \operatorname{Sin}^2\overline{\phi} - K k_{gc_\nu^*} \operatorname{Sin} 2\overline{\phi} + \\ & + K(M k_{n\varnothing^*} - K) \operatorname{Cos}^2\overline{\phi}] \operatorname{Cos}^2\overline{\varpi} , \\ U_9 = {} & ({}_w k_{n\bar{\theta}^1})^2 \operatorname{Sin}^2\overline{\varpi} - \mathscr{A} \operatorname{Sin} 2\overline{\varpi} + ({}_w k_{g\bar{\nu}^1})^2 \operatorname{Cos}^2\overline{\varpi} , \end{aligned}$$

qui est l'extension de [2, (8-8)].

On peut aussi calculer $k_{n\theta^*}$ à partir de $M = k_{n\theta} + k_{n\theta^*}$.

Dans l'expression de ${}_w t_{g\theta}$ donnée dans (2.1; 3) en se servant de (13.12) et en considérant que $\theta = \phi - \delta$, à l'aide de (17.3), en remplaçant la valeur de $\mathrm{tg}\,\delta$, après avoir effectué les calculs nécessaires on obtient

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_w t_{g\theta}} = \frac{(t_{g\varnothing} - \overline{\phi}_{II^*})\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} + (k_{n\varnothing^*}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi} - k_{gc_\nu^*}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi})\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega}}{-\overline{K}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} + \mathscr{C}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega}} \tag{17.11}$$

et en multipliant par $\mathrm{tg}\,\delta$ on obtient

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\delta}{{}_w t_{g\theta}} = \frac{(k_{n\varnothing} - \overline{\phi}_{I^*})\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} + (t_{g\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi} - k_{gc_\nu}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\phi})\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega}}{-\overline{K}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} + \mathscr{C}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega}} \tag{17.12}$$

qui est l'extension de [2, (8-10), (8-11)].

D'après (17.4) et (17.11) on a

$$\frac{{}_w t_{g\theta}}{{}_w k_{a\theta}} = \frac{\overline{K}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} - \mathscr{C}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega}}{\overline{\mathscr{D}}} \tag{17.13}$$

qui est l'extension de [2, (8-12)].

D'après (17.4) et (17.5) ou directement d'après (13.16) on peut écrire

$$({}_w k_{a\theta})^2 = \frac{\overline{\mathscr{D}}^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}_1})^2\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}}\,\mathrm{Sin}\,2\,\overline{\omega} + ({}_w k_{g\bar{\nu}_1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\omega}}\,. \tag{17.14}$$

D'après (17.13) et (17.14) on a

$$({}_w t_{g\theta})^2 = \frac{(\overline{K}\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} - \mathscr{C}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\omega})^2}{({}_w k_{n\bar{\theta}_1})^2\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}}\,\mathrm{Sin}\,2\,\overline{\omega} + ({}_w k_{g\bar{\nu}_1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\omega}}\,. \tag{17.15}$$

D'après (13.7) et (17.14) on obtient

$$({}_w k_{g\theta})^2 = \frac{\overline{\mathscr{D}}^2\,\mathrm{Sin}^2\,\omega}{({}_w k_{n\bar{\theta}_1})^2\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}}\,\mathrm{Sin}\,2\,\overline{\omega} + ({}_w k_{g\bar{\nu}_1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\omega}}\,, \tag{17.16}$$

$$({}_w k_{n\theta})^2 = \frac{\overline{\mathscr{D}}^2\,\mathrm{Cos}^2\,\omega}{({}_w k_{n\bar{\theta}_1})^2\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}}\,\mathrm{Sin}\,2\,\overline{\omega} + ({}_w k_{g\bar{\nu}_1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\omega}}\,. \tag{17.17}$$

(17.14), (17.15), (17.16), (17.17) sont respectivement les extensions de [2, (8-16), (8-13), (8-14), (8-15)].

A l'aide de (13.12) et (17.3) des formules [1, (4-1)] on trouve ${}_\nu t_{g\theta}/\mathrm{Cos}\,\delta$, ${}_\nu t_{g\theta}/\mathrm{Sin}\,\delta$, ${}_\nu k_{n\theta}/\mathrm{Cos}\,\delta$, ${}_\nu k_{n\theta}/\mathrm{Sin}\,\delta$, ${}_\nu k_{g\theta}/\mathrm{Cos}\,\delta$, ${}_\nu k_{g\theta}/\mathrm{Sin}\,\delta$ et en se servant de ces derniers on peut écrire

$$({}_\nu t_{g\theta})^2 = \frac{[(-K + k^*\,\overline{\phi}_1\,\mathrm{Cos}\phi + k\,\overline{\phi}_2\,\mathrm{Sin}\phi)\,\mathrm{Sin}\,\overline{\omega} + \mathscr{C}\,\mathrm{Sin}\overline{\phi}\,\mathrm{Cos}\overline{\phi}\,]^2}{({}_\nu k_{n\bar{\theta}_1})^2\,\mathrm{Sin}^2\,\overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}}\,\mathrm{Sin}\,2\,\overline{\omega} + ({}_\nu k_{g\bar{\nu}_1})^2\,\mathrm{Cos}^2\,\overline{\omega}}\,, \tag{17.18}$$

$$({}_{v}k_{g\theta})^2 = \frac{\{[-\mathscr{D} - \overline{\phi}_2 (g + \phi_2) + \overline{\phi}_2 (g^* + \phi_2)] \operatorname{Sin} \overline{\omega} + \mathscr{C} \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\omega}\}^2}{({}_{w}k_{n\overline{\theta}^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}} \operatorname{Sin} 2\overline{\omega} + ({}_{w}k_{g\overline{\gamma}^1})^2 \operatorname{Cos}^2 \overline{\omega}}, \tag{17.19}$$

$$({}_{v}k_{n\theta})^2 = \frac{[(k^* \overline{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi - k \overline{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Sin} \overline{\omega} + (K \operatorname{Cos} \overline{\phi} - \mathscr{D} \operatorname{Sin} \overline{\phi}) \operatorname{Cos} \overline{\omega}]^2}{({}_{w}k_{n\overline{\theta}^1})^2 \operatorname{Sin}^2 \overline{\omega} - \overline{\mathscr{A}} \operatorname{Sin} 2\overline{\omega} + ({}_{w}k_{g\overline{\gamma}^1})^2 \operatorname{Cos}^2 \overline{\omega}}, \tag{17.20}$$

$$({}_{w}k_{a\theta})^2 = U_{10}/U_9 , \tag{17.21}$$

où

$$U_{10} = \{[-\mathscr{D} - \overline{\phi}_2 (g + \phi_2) + \overline{\phi}_1 (g^* + \phi_2)] \operatorname{Sin} \overline{\omega} + \mathscr{C} \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\omega}\}^2 + \\ + [(k^* \overline{\phi}_1 \operatorname{Sin} \phi - k \overline{\phi}_2 \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Sin} \overline{\omega} + (K \operatorname{Cos} \overline{\phi} - \mathscr{D} \operatorname{Sin} \overline{\phi}) \operatorname{Cos} \overline{\omega}]^2 .$$

18. Centre de courbure sphérique d'un champ de vecteurs.

Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, le centre de courbure sphérique $\overline{M}_s$ du champ $\mathbf{w}$ relativement à la courbe C de S au point P, est un point situé sur l'axe de courbure $\overline{D}_c$ du champ relativement à la courbe C, et dont la tangente au lieu géométrique en ce point est l'axe de courbure $\overline{D}_c$.

Si le vecteur $\mathbf{y}$ est le vecteur de position du centre de courbure $\overline{M}_c$ donné dans (16.1), le vecteur de position de $\overline{M}_s$ sera

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + m^* \overline{\mathbf{w}}^* , \tag{18.1}$$

où la valeur de m^* est telle que $\mathbf{z}_l = \overline{m}^* \overline{\mathbf{w}}^*$.

En se servant de (16.5) et (13.5; 3), en dérivant (18.1), la condition ci-dessus donne

$$m^* = \frac{\lambda_l - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \overline{\omega} - \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \overline{\omega} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{{}_{w}t_{a\theta}}, \tag{18.2}$$

$$\overline{m}^* = m_l^* + \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \overline{\omega} + {}_{w}t_{a\theta} \operatorname{Sin} \overline{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_{w}k_{a\theta}} - \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \overline{\omega} \operatorname{Cos} \overline{\phi} . \tag{18.3}$$

A partir de (18.2) on voit que m^* n'est pas une fonction de direction.

Cas Particuliers.

1) Si la courbe C est une géodésique du champ, on aura

$${}_{w}k_{g\theta} = 0 \quad (\overline{\omega} = 0 , \theta = \overline{\gamma}^1) \tag{18.4}$$

tout le long de C. Dans ce cas, $\overline{\mathbf{w}}$ est égal au vecteur $\mathbf{w}^*$ qui est au point P, et le centre de courbure $\overline{M}_c$ est la projection orthogonale de $\overline{P}_c$ sur $\mathbf{w}^*$.

D'après (18.2), (18.4), (16.19), (13.6; 2), (4.11), (18.3), (17.1) et (4.15) on a

$$\left.\begin{aligned}
m^* &= -\frac{{}_{w}k_{g\bar{v}^1}}{\mathscr{C}}\left(\operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}}\right)_I - \\
&\quad -\operatorname{Cos}\bar{\phi}\,\frac{k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\mathscr{C}} \\
m^* &= m_I{}^* - \frac{\mathscr{C}\operatorname{Sin}\bar{\phi}\,(k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi})-\overline{\mathscr{D}}\,(k_{gc_v}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-t_{g\varnothing}\operatorname{Cos}\bar{\phi})}{\overline{\mathscr{D}}\;{}_{w}k_{g\bar{v}^1}} \\
\mathbf{z} &= \mathbf{x}+\operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}} - m^*\,\mathrm{v}\,,\quad \mathbf{z}_I = -\,\overline{m}^*\,\mathrm{v}^*\,.
\end{aligned}\right\}\tag{18.5}$$

Si tout le long de C, $\overline{M}_c$ est à une distance constante de P, c'est-à dire si

$$\operatorname{Sin}\bar{\phi}\,\frac{k_{gc_{v^*}}\operatorname{Sin}\bar{\phi}-k_{n\varnothing^*}\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}} = c = \text{cte.}$$

on aura

$$m^* = -\,c\,\frac{\operatorname{Cos}\bar{\phi}}{\operatorname{Sin}\bar{\phi}}\cdot\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\mathscr{C}}\,.$$

Si tout le long de C, la direction $\bar{\phi}$ vérifie la relation

$$\operatorname{tg}\bar{\phi} = \frac{k_{n\varnothing^*}}{k_{gc_{v^*}}}$$

le centre de courbure sphérique $\overline{M}_s$ du champ relativement à C et le centre de courbure $\overline{M}_c$ coincident avec le point P et $(\bar{\omega}=0)$ d'après (17.3) on obtient $\delta=\dfrac{\pi}{2}$. D'où $\bar{\gamma}^1=\phi-\dfrac{\pi}{2}$. On a donc :

Théorème 18.1. *Si une courbe C d'une surface S est une géodésique du champ de vecteurs* $\mathbf{w}(\phi,\bar{\phi})$ *et si de plus elle est une ligne de champ du champ* $\mathrm{v}^*(\phi^*)$, *le centre de courbure sphérique de* $\mathbf{w}$ *relativement à C et le centre de courbure coincident en P et la normale principale de C a pour direction* $\mathbf{w}^*$.

2) Si la courbe C est une asymptotique du champ, on aura

$$ {}_{w}k_{n\theta}=0\quad\left(\bar{\omega}=\frac{\pi}{2}\,,\ \theta=\bar{\alpha}^1\right)\tag{18.6}$$

tout le long de C. Dans ce cas, $\overline{\mathbf{w}}$ est égal au vecteur v^* et le centre de courbure $\overline{M}_c$ est la projection orthogonale de $\overline{P}_c$ sur v^*.

D'après (18.2), (18.3), (16.16), (13.6; 2), (6.12), (17.12), (17.11) on a

$$\left.\begin{aligned} m^* &= \left[- {}_w k_{n\theta}^{-1} \left(\operatorname{Sin} \bar{\phi} \frac{t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}}{\bar{\mathscr{D}}} \right)_I + k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_{I^*} \right] / \bar{K} \\ \bar{m}^* &= m_{I^*} + \frac{-\bar{K} \operatorname{Sin} \bar{\phi} \, (t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}) - \bar{\mathscr{D}} \operatorname{Cos} \bar{\phi} \, (t_{g\varnothing} - \bar{\phi}_{II^*})}{\bar{\mathscr{D}} \, {}_w k_{n\theta}^{-1}} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x} + \operatorname{Sin} \bar{\phi} \frac{t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}}{\bar{\mathscr{D}}} \mathbf{v}^* + m^* \mathbf{w}^* . \end{aligned} \right\} \qquad (18.7)$$

Si de plus tout le long de C, $\bar{M}_c$ est à une distance constante de P, c'est-à-dire si

$$\operatorname{Sin} \bar{\phi} \frac{t_{g\varnothing^*} + \bar{\phi}_{II^*}}{\bar{\mathscr{D}}} = \text{cte.}$$

on a

$$m^* = \frac{k_{n\varnothing} - \bar{\phi}_{I^*}}{\bar{K}} . \qquad (18.8)$$

Si $\bar{\phi} = \text{cte.}$ on a

$$m^* = \frac{k_{n\varnothing}}{\bar{K}} .$$

Théorème 18.2. *Si une courbe C d'une surface S est une asymptotique du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ défini sur celle-ci, le centre de courbure $\bar{M}_c$ du champ relativement à C en P, qui se trouve sur le plan tangent à S en P, est à une distance constante de P tout le long de C et si $\bar{\phi} = \text{cte.}$ on a la relation*

$$\overline{\bar{M}_c \bar{M}_s} . \overline{PM}_{n\varnothing} = \frac{1}{\bar{K}} ,$$

où $M_{n\varnothing}$ est le centre de courbure normale de C_v en P.

3) Si C est une ligne plane du champ de vecteurs relativement à S, on aura

$${}_w t_{a\theta} = 0$$

tout le long de C. Si de plus,

$$\operatorname{Sin} \bar{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_w k_{a0}} = 0$$

le centre de courbure sphérique $\bar{\mathbf{M}}_s$ est à l'infini.

4) Si ${}_{w}t_{a\theta} = 0$, $\operatorname{Sin} \overline{\phi} \dfrac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_{w}k_{a\theta}} = \text{cte.}$ tout le long de C, C est un cercle du champ.

5) Si la courbe C est une trajectoire orthogonale du champ, c'est-à-dire si $C \equiv C_{\nu^*}$, d'après (2.1; 3), (16.40), [2, (4-16)] , (1.5; 3), (13.6; 2) on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg} \overline{\omega} = \frac{- k_{gc_{\nu^*}} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{n\varnothing^*} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{t_{g\varnothing^*} + \overline{\phi}_{II^*}} , \quad \operatorname{Sin} \overline{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_{w}k_{a\theta}} = 0 , \\
&\qquad {}_{w}t_{g0} = - k_{gc_{\nu^*}} \operatorname{Cos} \overline{\phi} - k_{n\varnothing^*} \operatorname{Sin} \overline{\phi}, \\
&\lambda = 0 , \\
&m^* = \frac{\operatorname{Sin} \overline{\omega}}{- (k_{n\varnothing^*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{gc_{\nu^*}} \operatorname{Cos} \overline{\phi}) + \overline{\omega}_{II^*}} , \quad \overline{m}^* = m^*_{II^*} + \operatorname{Cos} \overline{\omega} , \\
&\qquad \mathbf{z} = \mathbf{x} + m^* \overline{\mathbf{w}}^*.
\end{aligned}\right\} \tag{18.9}$$

Si

$$\operatorname{tg} \overline{\omega} = \frac{- k_{gc_{\nu^*}} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{n\varnothing^*} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{t_{g\varnothing^*} + \overline{\phi}_{II^*}} = \text{cte.}$$

on a

$$m^* = \frac{- \operatorname{Sin} \overline{\omega}}{k_{n\varnothing^*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{gc_{\nu^*}} \operatorname{Cos} \overline{\phi}} . \tag{18.10}$$

Théorème 18.3. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, le centre de courbure sphérique $\overline{M}_s$ du champ relativementa à la trajectoire orthogonale du champ C_{ν^*} se trouve sur le troisième axe $\overline{\mathbf{w}}^*$ du trièdre de FRENET du champ en P. De plus comme $\overline{P}_c$ se trouve aussi sur cet axe, la circonférence, dont il a été question dans le Théorème* (16.3) *et qui a été donnée dans* (17.2)*, est tangente au deuxième axe $\overline{\mathbf{w}}$ du trièdre de FRENET du champ en P. Le lieu de M_s sur $\overline{\mathbf{w}}$ a été donné par* (18.10).

Lieu géométrique du centre de courbure sphérique.

Le lieu géométrique $\overline{C}_s$ de $\overline{M}_s$ quand P décrit C se comporte comme le lieu géométrique du centre de la sphère osculatrice de C. Si l'on note respectivement par $\overline{\overline{s}}$, $\overline{\overline{\delta}}$, $\overline{\overline{\tau}}$, l'arc, la courbure et la torsion de $\overline{C}_s$ en P et par $\overline{\mathbf{b}}_p$ ($p = 1, 2, 3$) les vecteurs unitaires de son trièdre de FRENET au même point, on trouve les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\bar{s}}_I = \bar{m}^*, \bar{\mathbf{b}}^1 = \bar{\mathbf{w}}^*, \bar{\mathbf{b}}^2 = -\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{b}}^3 = \mathbf{w} \\ \bar{\bar{\rho}} = \dfrac{{}_w t_{a\theta}}{\bar{\bar{s}}_I}, \quad \bar{\bar{\tau}} = \dfrac{{}_w k_{a\theta}}{\bar{\bar{s}}_I}, \quad \bar{\bar{\rho}}\, {}_w k_{a\theta} = \bar{\bar{\tau}}\, {}_w t_{a0}\,. \end{array}\right\} \tag{18.11}$$

Si C est une géodésique du champ, (13.6), (4.15), (4.11) montrent que

$$\frac{\bar{\bar{\rho}}}{\bar{\bar{\tau}}} = -\frac{\mathscr{C}}{\bar{\mathscr{D}}}\,. \tag{18.12}$$

Si C est une asymptotique du champ, (13.6), (6.10), (6.12) montrent que

$$\frac{\bar{\bar{\rho}}}{\bar{\bar{\tau}}} = \frac{\bar{K}}{\bar{\mathscr{D}}}\,. \tag{18.13}$$

19. Developpées d'un champ de vecteurs.

Soit une surface S, et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ défini sur celle-ci. Considérons les droites Γ coupant une courbe C de S, en restant en chaque point P de celle-ci orthogonales au champ $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$. Si ces droites engendrent une développable, l'arête de rebroussement $\bar{C}_e$ sera appelée une développée du champ $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ relativement à C.

Soit

$$\underline{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}} \operatorname{Cos} \bar{\alpha} + \bar{\mathbf{w}}^* \operatorname{Sin} \bar{\alpha} \tag{19.1}$$

le vecteur unitaire définissant la direction des droites Γ. Appelons Q le point de contact de Γ avec la développée $\bar{C}_e$; si $\mathbf{x}$ est le vecteur de position de C et n^* désigne la distance $\overline{PQ}$ le vecteur de position de Q sera

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + n^* \underline{\mathbf{w}}\,. \tag{19.2}$$

D'après (19.2), (16.2), (19.1), (13.5; 2,3) pour que $\mathbf{x}_I$ soit parallèle à $\mathbf{w}$ on doit avoir les relations

$$n^* \operatorname{Cos} \bar{\alpha} = \operatorname{Sin} \bar{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_w k_{a\theta}} = \lambda \tag{19.3}$$

$$\bar{\beta}_I = {}_w t_{g\theta} + \frac{\operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \bar{\beta} - \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \bar{\phi} \operatorname{Sin} \bar{\beta}}{n^*}, \quad \bar{\beta} = \bar{\omega} - \bar{\alpha} \tag{19.4}$$

$$\mathbf{X}_1 = (n_I^* - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \bar{\beta} - \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \bar{\phi} \operatorname{Cos} \bar{\beta})\, \underline{\mathbf{w}}\,. \tag{19.5}$$

Théorème 19.1. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \bar{\phi})$ défini sur celle-ci, il y a une infinité de développées du champ envisagé relativement à une courbe C de S, déterminées par les relations* (19.3), (19.4). *La valeur de n^* montre que les points de contact Q avec la développée relative à un même point P de C se trouvent sur l'axe de courbure $\bar{D}_c$, du champ en P par rapport à C.*

Cas Particuliers.

1) Si C est une géodésique du champ, on a

$$_{w}k_{g\theta} = 0 \quad (\overline{\omega} = 0\ ,\quad \theta = \overline{\gamma}^{1}). \tag{19.6}$$

D'après (17.4), (19.3), (19.6) et (19.4), (17.12), (4.11), (17.11), (19.7) et en considérant que $\overline{\beta} = -\overline{\alpha}$ on trouve

$$n^{*} \operatorname{Cos} \overline{\alpha} = \operatorname{Sin} \overline{\phi}\ \frac{k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - k_{n\varnothing *} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{\overline{\mathscr{D}}}\ , \tag{19.7}$$

$$\overline{\beta}_{I} = \left[-\mathscr{C} - \overline{\mathscr{D}} \operatorname{Cos} \overline{\beta} \operatorname{Sin} \overline{\beta}\ \frac{\operatorname{Cos} \overline{\phi}}{\operatorname{Sin} \overline{\phi}} + \frac{\overline{\mathscr{D}} \operatorname{Cos}^{2} \overline{\beta}\, (k_{gc_{\nu}} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - t_{g\varnothing} \operatorname{Cos} \overline{\phi})}{\operatorname{Sin} \overline{\phi}\, (k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - k_{n\varnothing *} \operatorname{Cos} \overline{\phi})} \right] / {_{w}k_{g\overline{\nu}^{1}}}\, . \tag{19.8}$$

2) Si C est une asymptotique du champ on a

$$_{w}k_{n\theta} = 0 \left(\overline{\omega} = \frac{\pi}{2}\ , \ \theta = \overline{\alpha}^{1} \right). \tag{19.9}$$

D'après (17.4), (19.3), (19.9) et (19.4), (17.12), (6.12), (17.11) on trouve

$$n^{*} \operatorname{Cos} \overline{\alpha} = \operatorname{Sin} \overline{\phi}\ \frac{t_{g\varnothing *} + \overline{\phi}_{II*}}{\overline{\mathscr{D}}}\ , \tag{19.10}$$

$$\overline{\beta}_{I} = \left[-\overline{K} + \overline{\mathscr{D}} \operatorname{Sin}^{2} \overline{\beta}\ \frac{\operatorname{Cos} \overline{\phi}}{\operatorname{Sin} \overline{\phi}} + \frac{\overline{\mathscr{D}} \operatorname{Cos} \overline{\beta} \operatorname{Sin} \overline{\beta}\, (k_{n\varnothing} - \overline{\phi}_{I*})}{\operatorname{Sin} \overline{\phi}\, (t_{g\varnothing *} + \overline{\phi}_{II*})} \right] / {_{w}k_{n\overline{\theta}^{1}}}\, . \tag{19.11}$$

3) Si C est une trajectoire orthogonale du champ, autrement-dit si $C \equiv C_{\nu *}$ d'après (19.3) et (19.4) on trouve

$$n^{*} \operatorname{Cos} \overline{\alpha} = 0\ , \quad n^{*} (\overline{\beta}_{I} - {_{w}t_{g0}}) = \operatorname{Cos} \overline{\beta}\, . \tag{19.12}$$

a) Si $\overline{\alpha} = \dfrac{\pi}{2}$ $\underline{w} = \overline{w}^{*}$, $n^{*} \to \infty$. Dans ce cas, d'après (19.4), (1.5), (4.16) on a

$$\left. \begin{aligned} &\overline{\beta}_{I} = - k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Cos} \overline{\phi} - k_{n\varnothing *} \operatorname{Sin} \overline{\phi}\, , \\ &\operatorname{tg} \overline{\omega} = - \operatorname{Cotg} \overline{\beta} = \frac{-k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{n\varnothing *} \operatorname{Cos} \overline{\phi}}{t_{g\varnothing *} - \overline{\phi}_{I}}\, , \\ &\left[\operatorname{Arctg} \frac{t_{g\varnothing *} - \overline{\phi}_{I}}{k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - k_{n\varnothing *} \operatorname{Cos} \overline{\phi}} \right]_{II*} + (k_{n\varnothing *} \operatorname{Sin} \overline{\phi} + k_{gc_{\nu}*} \operatorname{Cos} \overline{\phi}) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{19.13}$$

II^* désigne la dérivation invariante effectuée dans la direction $\mathbf{v}^*$. Le point Q est à l'infini, sur la ligne d'action du vecteur $\overline{\mathbf{w}}^*$.

b) Si $n^* = 0$ d'après (19.12; 2) $\overline{\beta} = \dfrac{\pi}{2}$. Dans ce cas $\underline{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^*$. Les droites Γ sont tangentes en P à C_{v^*}.

20. Développantes d'un champ de vecteurs.

Soit une surface S, un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci et une courbe C de S. Les trajectoires orthogonales des lignes d'action des vecteurs du champ $\mathbf{w}$ en chaque point P de C, sont appelées les *développantes* du champ $\overline{\mathbf{w}}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à C. Soit $\overline{C^e}$ une telle développante. $\mathbf{Y}$, étant le vecteur de position de $\overline{C^e}$; $\mathbf{x}$ celui de C, on a

$$\mathbf{Y} = \mathbf{x} + q^* \mathbf{w} \tag{20.1}$$

où q^* est un scalaire déterminé tel que l'on ait $\mathbf{Y}_I \, . \, \mathbf{w} = 0$. La condition pour que la tangente de $\overline{C^e}$

$$\mathbf{Y}_I = \mathbf{x}_I + q_I^* \, \mathbf{w} + q^* \, \mathbf{w}_I \tag{20.2}$$

soit orthogonale à $\mathbf{w}$ est d'après (16.2), (13.5; 1), (20.2)

$$q_I^* + \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta = 0$$

ou , l'on peut écrire

$$q^* = [\, - \textstyle\int \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta \, ds \,] + \text{cte} \, . \tag{20.3}$$

où s est l'arc de C.

Théorème 20.1. *Etant donnés une surface S et un champ de vecteurs défini sur celle-ci, le champ possède une infinité de développantes relativement à une courbe C de S. Toutes ces développantes déterminées par* (20.3) *sont des courbes parallèles.*

21. Les hélices d'un champ de vecteurs.

Soit une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci, si le long d'une ligne $\overline{C_h}$ de S on a la relation

$$\mathbf{w} \, . \, \mathbf{k} = \operatorname{Cos} \overline{\eta} = \text{cte}. \tag{21.1}$$

où le vecteur unitaire $\mathbf{k}$ définit une direction fixe, $\overline{C_h}$ est appelée une hélice du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S.

Nous allons voir que ces lignes se comportent comme les hélices proprement-dites.

1) Chaque droite du champ peut-être considérée comme une hélice de ce dernier.

En dérivant (21.1) on obtient d'après (13.5; 1)

$$ {}_{w}k_{a\theta}\,\overline{\mathbf{w}}\,.\,\mathbf{k} = 0\,. \tag{21.2}$$

D'après (14.1) on voit que la relation (21.2) est vérifiée pour chaque droite du champ. On peut donc dire que, quelle que soit la direction du vecteur unitaire **k**, chaque droite du champ relativement à S est une hélice du champ par rapport à S.

2) Il en est de même pour une ligne plane $\overline{C}_p$ du champ :

D'après (13.5; 3) et (15.1) on trouve que le vecteur $\overline{\mathbf{w}}^*$ est fixe pour une ligne plane du champ. En prenant $\overline{\mathbf{w}}^*$ au lieu de **k**, on trouve un vecteur unitaire de direction fixe, orthogonal à **w** tout le long de $\overline{C}_p$, et la ligne plane $\overline{C}_p$ du champ relativement à S est une hélice du champ par rapport à S.

3) D'après (21.2): Le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ relativement à S et différente d'une droite du champ, le second vecteur unitaire $\overline{\mathbf{w}}$ du trièdre de FRENET du champ par rapport à $\overline{C}_h$ reste orthogonal à la direction fixe **k** et réciproquement, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{k} = \mathbf{w}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\eta} + \overline{\mathbf{w}}^*\,\mathrm{Sin}\,\overline{\eta}\,. \tag{21.3}$$

4) En dérivant (21.3), d'après (13.5; 1,3) et en considérant que $\overline{\eta}$ est constant on obtient

$$\frac{{}_{w}k_{a\theta}}{{}_{w}t_{a\theta}} = \mathrm{tg}\,\overline{\eta} = \mathrm{cte.} \tag{21.4}$$

D'où il résulte que :

Le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ relativement à S, le rapport de la courbure absolue à la torsion absolue du champ par rapport à $\overline{C}_h$ reste le même.

Cas Particuliers.

1) Si $\overline{C}_h$ est une géodésique du champ, ${}_{w}k_{g0} = 0$, d'après ($\overline{\varpi} = 0\,,\, 0 = \overline{\gamma}^1$) on a $\overline{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{w}^*$. En utilisant (13.6), (5.12; 1) dans (21.4) on trouve que

$$-\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\mathscr{C}} = \mathrm{tg}\,\overline{\eta} = \mathrm{cte.} \tag{21.5}$$

tout le long de $\overline{C}_h$.

2) Si $\overline{C}_h$ est une asymptotique du champ, ${}_{w}k_{n\theta} = 0$, d'après $\left(\overline{\omega} = \frac{\pi}{2}, \theta = \alpha^1\right)$ on a $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^*$, $\overline{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}^* . \mathbf{k}$ est parallèle au plan $(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)$ ou $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$.

En utilisant (13.6), (7.10; 1) dans (21.4) on obtient

$$\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{K}} = \operatorname{tg} \overline{\eta} = \text{cte.} \tag{21.6}$$

tout le long de $\overline{C}_h$.

3) Si le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ, on a la relation

$$\operatorname{Sin} \overline{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_{w}k_{a0}} = \frac{1}{c}, \tag{21.7}$$

c étant une constante, $\overline{C}_h$ sera appelée *hélice circulaire* du champ relativement à S.

D'après (21.7) et (21.4) on trouve

$$\operatorname{Sin} \overline{\phi} \frac{\operatorname{Cos} \delta}{{}_{w}t_{a0}} = \frac{\operatorname{tg} \overline{\eta}}{c} .$$

Le point central et le paramètre de la surface réglée engendrée par la ligne d'action $G_{\overline{w}}$ du vecteur $\overline{\mathbf{w}}$ qui se déplace le long d'une hélice circulaire $\overline{C}_h$ du champ relativement à S sont donnés d'après (13.5; 2), (16.2), (21.4) et (21.7), respectivement par

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{\overline{w}} &= -\frac{\mathbf{x}_I . \overline{\mathbf{w}}_I}{\overline{\mathbf{w}}_I^2} = \\
&= \frac{\operatorname{Sin} \overline{\eta} (\operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \overline{\eta} - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \overline{\eta} \operatorname{Cos} \overline{\omega} + \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \overline{\eta} \operatorname{Sin} \overline{\omega})}{c \operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta} \\
P_{\overline{w}} &= \frac{(\mathbf{x}_I , \overline{\mathbf{w}}_I , \overline{\mathbf{w}})}{\overline{\mathbf{w}}_I^2} = \\
&= \frac{-\operatorname{Sin} \overline{\eta} (\operatorname{Sin} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \overline{\eta} + \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \overline{\eta} \operatorname{Cos} \overline{\omega} - \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \overline{\eta} \operatorname{Sin} \overline{\omega})}{c \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cos} \delta} .
\end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

Le vecteur de position de la ligne de striction de la surface réglée définie ci-dessus est

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \lambda_{\overline{w}} \overline{\mathbf{w}} \tag{21.9}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur de position de l'hélice $\overline{C}_h$. Pour la tangente à la ligne de striction, on trouve

$$\mathbf{X}_I = (\mathrm{Sin}\bar{\phi}\ \mathrm{Cos}\,\delta - \lambda_{\bar{w}}\,{}_wk_{a\theta})\,\mathbf{w} + [-\mathrm{Cos}\bar{\phi}\ \mathrm{Cos}\,\bar{\varpi}\ \mathrm{Cos}\,\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Sin}\,\bar{\varpi} + (\lambda_{\bar{w}})_I]\,\bar{\mathbf{w}} +$$
$$+ (\mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\bar{\varpi} - \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\ \mathrm{Sin}\,\bar{\varpi}\ \mathrm{Cos}\,\delta + \lambda_{\bar{w}}\,{}_wt_{a0})\bar{\mathbf{w}}^*. \tag{21.10}$$

Pour que cette tangente soit parallèle à (21.3) il faut et il suffit que

$$(\lambda_{\bar{w}})_I = \mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Sin}\,\bar{\varpi} + \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\bar{\varpi}\ \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\,, \tag{21.11}$$

$$\mathrm{Sin}\,\eta\,(\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\ \mathrm{Cos}\,\delta - \lambda_{\bar{w}}\,{}_wk_{a0}) = \mathrm{Cos}\,\eta\,(\mathrm{Sin}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\bar{\varpi} - \mathrm{Cos}\,\delta\ \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\ \mathrm{Sin}\,\bar{\varpi} + \lambda_{\bar{w}}\,{}_wt_{a\theta})\,.$$

Si l'hélice $\bar{C}_h$ considérée est en même temps une asymptotique du champ relativement à S et si $\lambda_{\bar{w}}$ reste constant tout le long de $\bar{C}_h$ on trouve les valeurs

$${}_wk_{n\theta} = 0\ \left(\bar{\varpi} = \frac{\pi}{2}\right),\ (\lambda_{\bar{w}})_I = \mathrm{Sin}\,\delta = 0 \rightarrow \delta = 0\ \ (\bar{C}_h = C_v)\,. \tag{21.12}$$

D'après (1.5; 2), (3.1a; 1), (21.12) on a

$$k_{n\theta} = \bar{\phi}_I \tag{21.13}$$

et dans ce cas les expressions (21.8) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{\bar{w}} &= \frac{\mathrm{Sin}\,\bar{\eta}}{c}\,(\mathrm{Cos}\,\bar{\eta} - \mathrm{Cotg}\,\bar{\phi}\ \mathrm{Sin}\,\bar{\eta}) \\ p_{\bar{w}} &= -\frac{\mathrm{Sin}\,\bar{\eta}}{c}\,(\mathrm{Cos}\,\bar{\eta} - \mathrm{Cotg}\,\bar{\phi}\ \mathrm{Sin}\,\bar{\eta})\,. \end{aligned}\right\} \tag{21.14}$$

$\lambda_{\bar{w}}$ étant considéré constant tout le long de l'hélice $\bar{C}_h$, la première de ces relations donne

$$\bar{\phi} = \mathrm{cte}\,. \tag{21.15}$$

et il résulte de (21.13), (21.14; 2) que

$$k_{n\theta} = 0,\ p_{\bar{w}} = \mathrm{cte}\,. \tag{21.16}$$

tout le long de $\bar{C}_h$. $k_{n\theta}$ est la courbure normale de $\bar{C}_h$ en P. On en déduit que la courbure géodésique et la torsion géodésique en P de l'hélice circulaire en question sont d'après (21.16), (21.7), (21.15), (1.5; 1,3), [[1], (3-1a; 1,3)]

$$k_{gc} = \mathrm{cte.}\ ,\quad t_{g0} = \mathrm{cte}\,. \tag{21.17}$$

et que d'après (21.16; 1) et (21.17) la courbure k et la torsion t de $\bar{C}_h$ sont constantes tout le long de $\bar{C}_h$, c'est-à dire que $\bar{C}_h$ est une hélice circulaire de S.

22. Les cercles d'un champ de vecteurs.

Soit une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}\ (\phi, \bar{\phi})$ défini sur celle-ci. Si tout le long d'une ligne $\bar{C}_c$ de S on a à la fois

$$\mathrm{Sin}\,\overline{\phi}\ \frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{{}_{w}k_{a\theta}} = \frac{1}{c}\,, \quad {}_{w}t_{a\theta} = {}_{w}t_{g\theta} - \overline{\varpi}_{I} = 0 \tag{22.1}$$

$\overline{C}_c$ sera appelée un cercle du champ de vecteurs $\mathbf{w}\,(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S.

Nous allons voir que ces courbes se comportent comme les cercles ordinaires de S.

1) D'après la définition $\overline{C}_c$ est une ligne plane du champ et le centre de courbure $\overline{M}_c$ du champ relativement à $\overline{C}_c$ est à une distance constante des points du cercle.

2) D'après (18.2) la courbure sphérique du champ relativement à $\overline{C}_c$ est en général à l'infini.

3) Si le cercle $\overline{C}_c$ du champ est en même temps une trajectoire orthogonale et une géodésique du champ, le centre de courbure sphérique est indéterminé.

4) En considérant que chaque ligne plane est une hélice du champ et d'après la définition de l'hélice circulaire du champ, la définition de cette ligne montre que, $\overline{C}_c$ est une hélice circulaire particulière du champ.

5) Il résulte de la troisième formule de FRENET, que le vecteur $\overline{\mathbf{w}}^*$ reste le même tout le long d'un cercle $\overline{C}_c$ du champ.

6) La tangente au lieu géométrique du centre de courbure donnée dans (16.5) devient pour le cercle $\overline{C}_c$ du champ

$$\mathbf{y}_I = (-\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\ \mathrm{Cos}\,\overline{\varpi}\ \mathrm{Cos}\,\delta - \mathrm{Sin}\,\overline{\varpi}\ \mathrm{Sin}\,\delta)\,\overline{\mathbf{w}} + (-\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\ \mathrm{Sin}\,\overline{\varpi}\ \mathrm{Cos}\,\delta + \mathrm{Cos}\,\overline{\varpi}\ \mathrm{Sin}\,\delta)\,\overline{\mathbf{w}}^*. \tag{22.2}$$

Cette tangente est orthogonale au champ $\mathbf{w}$. Si $\delta = \frac{\pi}{2}$ tout le long de $\overline{C}_c$ on a

$$\mathbf{y}_I = -\,\mathbf{v}^*\,. \tag{22.3}$$

Si $\delta = 0$ tout le long de $\overline{C}_c$ on a

$$\mathbf{y}_I = -\,\mathrm{Cos}\,\overline{\phi}\ \mathbf{w}^*\,. \tag{22.4}$$

7) Pour $\delta = 0$ et $\overline{\phi} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{C}_c$ est un cercle ordinaire (champ de vecteurs tangentiels).

8) Pour $\overline{\phi} = 0$ et $\overline{\varpi} - \delta = \mathrm{cte.}$, le lieu géométrique du centre de courbure $\overline{M}_c$ de $\overline{C}_c$ relativement au champ est une droite.

Nous allons voir que ces lignes se comportent comme les hélices proprement-dites.

1) Chaque droite du champ peut-être considérée comme une hélice de ce dernier.

En dérivant (21.1) on obtient d'après (13.5; 1)

$$ {}_{w}k_{a\theta}\,\overline{\mathbf{w}}\,.\,\mathbf{k} = 0\,. \tag{21.2}$$

D'après (14.1) on voit que la relation (21.2) est vérifiée pour chaque droite du champ. On peut donc dire que, quelle que soit la direction du vecteur unitaire **k**, chaque droite du champ relativement à S est une hélice du champ par rapport à S.

2) Il en est de même pour une ligne plane $\overline{C}_p$ du champ :

D'après (13.5; 3) et (15.1) on trouve que le vecteur $\overline{\mathbf{w}}^*$ est fixe pour une ligne plane du champ. En prenant $\overline{\mathbf{w}}^*$ au lieu de **k**, on trouve un vecteur unitaire de direction fixe, orthogonal à **w** tout le long de $\overline{C}_p$, et la ligne plane $\overline{C}_p$ du champ relativement à S est une hélice du champ par rapport à S.

3) D'après (21.2): Le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ relativement à S et différente d'une droite du champ, le second vecteur unitaire $\overline{\mathbf{w}}$ du trièdre de FRENET du champ par rapport à $\overline{C}_h$ reste orthogonal à la direction fixe **k** et réciproquement, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{k} = \mathbf{w}\,\mathrm{Cos}\,\overline{\eta} + \overline{\mathbf{w}}^*\,\mathrm{Sin}\,\overline{\eta}\,. \tag{21.3}$$

4) En dérivant (21.3), d'après (13.5; 1,3) et en considérant que $\overline{\eta}$ est constant on obtient

$$\frac{{}_{w}k_{a\theta}}{{}_{w}t_{a\theta}} = \mathrm{tg}\,\overline{\eta} = \mathrm{cte.} \tag{21.4}$$

D'où il résulte que :

Le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ relativement à S, le rapport de la courbure absolue à la torsion absolue du champ par rapport à $\overline{C}_h$ reste le même.

Cas Particuliers.

1) Si $\overline{C}_h$ est une géodésique du champ, ${}_{w}k_{g\theta} = 0$, d'après $(\overline{\omega} = 0\,,\, \theta = \overline{\gamma}^1)$ on a $\overline{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{w}^*$. En utilisant (13.6), (5.12; 1) dans (21.4) on trouve que

$$-\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\mathscr{C}} = \mathrm{tg}\,\overline{\eta} = \mathrm{cte.} \tag{21.5}$$

tout le long de $\overline{C}_h$.

2) Si $\overline{C}_h$ est une asymptotique du champ, ${}_{w}k_{n\theta}=0$, d'après $\left(\overline{\omega}=\frac{\pi}{2}, \theta=\alpha^1\right)$ on a $\overline{\mathbf{w}}=\mathbf{v}^*$, $\mathbf{w}^*=\mathbf{w}^*.\mathbf{k}$ est parallèle au plan $(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)$ ou $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$.

En utilisant (13.6), (7.10; 1) dans (21.4) on obtient

$$\frac{\overline{\mathscr{D}}}{\overline{K}}=\operatorname{tg}\overline{\eta}=\text{cte.} \tag{21.6}$$

tout le long de $\overline{C}_h$.

3) Si le long d'une hélice $\overline{C}_h$ du champ, on a la relation

$$\operatorname{Sin}\overline{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}\delta}{{}_{w}k_{a\theta}}=\frac{1}{c}, \tag{21.7}$$

c étant une constante, $\overline{C}_h$ sera appelée *hélice circulaire* du champ relativement à S.

D'après (21.7) et (21.4) on trouve

$$\operatorname{Sin}\overline{\phi}\,\frac{\operatorname{Cos}\delta}{{}_{w}t_{a\theta}}=\frac{\operatorname{tg}\overline{\eta}}{c}.$$

Le point central et le paramètre de la surface réglée engendrée par la ligne d'action $G_{\overline{w}}$ du vecteur $\overline{\mathbf{w}}$ qui se déplace le long d'une hélice circulaire $\overline{C}_h$ du champ relativement à S sont donnés d'après (13.5; 2), (16.2), (21.4) et (21.7), respectivement par

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{\overline{w}} &= -\frac{\mathbf{x}_I.\overline{\mathbf{w}}_I}{\overline{\mathbf{w}}_I^2}=\\
&=\frac{\operatorname{Sin}\overline{\eta}\,(\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\overline{\eta}-\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Cos}\overline{\eta}\operatorname{Cos}\overline{\omega}+\operatorname{Cos}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\overline{\eta}\operatorname{Sin}\overline{\omega})}{c\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta}\\
P_{\overline{w}} &= \frac{(\mathbf{x}_I, \overline{\mathbf{w}}_I, \overline{\mathbf{w}})}{\overline{\mathbf{w}}_I^2}=\\
&=\frac{-\operatorname{Sin}\overline{\eta}\,(\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}\overline{\eta}+\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}\overline{\eta}\operatorname{Cos}\overline{\omega}-\operatorname{Cos}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Sin}\overline{\eta}\operatorname{Sin}\overline{\omega})}{c\operatorname{Sin}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\delta}.
\end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

Le vecteur de position de la ligne de striction de la surface réglée définie ci-dessus est

$$\mathbf{X}=\mathbf{x}+\lambda_{\overline{w}}\overline{\mathbf{w}} \tag{21.9}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur de position de l'hélice $\overline{C}_h$. Pour la tangente à la ligne de striction, on trouve

$$\mathbf{X}_I = (\operatorname{Sin}\bar\phi \operatorname{Cos}\delta - \lambda_{\bar w}\, {}_w k_{a\theta})\, \mathbf{w} + [-\operatorname{Cos}\bar\phi \operatorname{Cos}\bar\omega \operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\bar\omega + (\lambda_{\bar w})_I]\, \bar{\mathbf{w}} +$$
$$+ (\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\bar\omega - \operatorname{Cos}\bar\phi \operatorname{Sin}\bar\omega \operatorname{Cos}\delta + \lambda_{\bar w}\, {}_w t_{a\theta})\bar{\mathbf{w}}^* . \tag{21.10}$$

Pour que cette tangente soit parallèle à (21.3) il faut et il suffit que

$$(\lambda_{\bar w})_I = \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\bar\omega + \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\bar\omega \operatorname{Cos}\bar\phi , \tag{21.11}$$

$$\operatorname{Sin}\eta\, (\operatorname{Sin}\bar\phi \operatorname{Cos}\delta - \lambda_{\bar w}\, {}_w k_{a\theta}) = \operatorname{Cos}\eta\, (\operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\bar\omega - \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\bar\phi \operatorname{Sin}\bar\omega + \lambda_{\bar w}\, {}_w t_{a\theta}) .$$

Si l'hélice $\bar C_h$ considérée est en même temps une asymptotique du champ relativement à S et si $\lambda_{\bar w}$ reste constant tout le long de $\bar C_h$ on trouve les valeurs

$${}_w k_{n\theta} = 0 \left(\bar\omega = \frac{\pi}{2}\right),\ (\lambda_{\bar w})_I = \operatorname{Sin}\delta = 0 \rightarrow \delta = 0\ (\bar C_h = C_v) . \tag{21.12}$$

D'après (1.5; 2), (3.1a; 1), (21.12) on a

$$k_{n\theta} = \bar\phi_I \tag{21.13}$$

et dans ce cas les expressions (21.8) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{\bar w} &= \frac{\operatorname{Sin}\bar\eta}{c}\, (\operatorname{Cos}\bar\eta\ -\ \operatorname{Cotg}\bar\phi \operatorname{Sin}\bar\eta) \\ p_{\bar w} &= -\ \frac{\operatorname{Sin}\bar\eta}{c}\, (\operatorname{Cos}\bar\eta\ -\ \operatorname{Cotg}\bar\phi \operatorname{Sin}\bar\eta) . \end{aligned}\right\} \tag{21.14}$$

$\lambda_{\bar w}$ étant considéré constant tout le long de l'hélice $\bar C_h$, la première de cés relations donne

$$\bar\phi = \text{cte} . \tag{21.15}$$

et il résulte de (21.13), (21.14; 2) que

$$k_{n0} = 0,\ p_{\bar w} = \text{cte} . \tag{21.16}$$

tout le long de $\bar C_h$. k_{n0} est la courbure normale de $\bar C_h$ en P. On en déduit que la courbure géodésique et la torsion géodésique en P de l'hélice circulaire en question sont d'après (21.16), (21.7), (21.15), (1.5; 1,3), [[1], (3-1a; 1,3)]

$$k_{gc} = \text{cte.}\ ,\quad t_{g\theta} = \text{cte} . \tag{21.17}$$

et que d'après (21.16; 1) et (21.17) la courbure k et la torsion t de $\bar C_h$ sont constantes tout le long de $\bar C_h$, c'est-à dire que $\bar C_h$ est une hélice circulaire de S.

22. **Les cercles d'un champ de vecteurs.**

Soit une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}$ $(\phi, \bar\phi)$ défini sur celle-ci. Si tout le long d'une ligne $\bar C_c$ de S on a à la fois

$$\operatorname{Sin}\overline{\phi}\ \frac{\operatorname{Cos}\delta}{{}_w k_{a\theta}}=\frac{1}{c}\,,\quad {}_w t_{a\theta}={}_w t_{g\theta}-\overline{\omega}_I=0 \tag{22.1}$$

$\overline{C}_c$ sera appelée un cercle du champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S.

Nous allons voir que ces courbes se comportent comme les cercles ordinaires de S.

1) D'après la définition $\overline{C}_c$ est une ligne plane du champ et le centre de courbure $\overline{M}_c$ du champ relativement à $\overline{C}_c$ est à une distance constante des points du cercle.

2) D'après (18.2) la courbure sphérique du champ relativement à $\overline{C}_c$ est en général à l'infini.

3) Si le cercle $\overline{C}_c$ du champ est en même temps une trajectoire orthogonale et une géodésique du champ, le centre de courbure sphérique est indéterminé.

4) En considérant que chaque ligne plane est une hélice du champ et d'après la définition de l'hélice circulaire du champ, la définition de cette ligne montre que, $\overline{C}_c$ est une hélice circulaire particulière du champ.

5) Il résulte de la troisième formule de FRENET, que le vecteur $\overline{\mathbf{w}}^*$ reste le même tout le long d'un cercle $\overline{C}_c$ du champ.

6) La tangente au heu géométrique du centre de courbure donnée dans (16.5) devient pour le cercle $\overline{C}_c$ du champ

$$\mathbf{y}_I=(-\operatorname{Cos}\overline{\phi}\operatorname{Cos}\overline{\omega}\operatorname{Cos}\delta-\operatorname{Sin}\overline{\omega}\operatorname{Sin}\delta)\,\overline{\mathbf{w}}+(-\operatorname{Cos}\overline{\phi}\operatorname{Sin}\overline{\omega}\operatorname{Cos}\delta+\operatorname{Cos}\overline{\omega}\operatorname{Sin}\delta)\,\overline{\mathbf{w}}^*. \tag{22.2}$$

Cette tangente est orthogonale au champ $\mathbf{w}$. Si $\delta=\frac{\pi}{2}$ tout le long de $\overline{C}_c$ on a

$$\mathbf{y}_I=-\mathbf{v}^*\,. \tag{22.3}$$

Si $\delta=0$ tout le long de $\overline{C}_c$ oh a

$$\mathbf{y}_I=-\operatorname{Cos}\overline{\phi}\,\mathbf{w}^*\,. \tag{22.4}$$

7) Pour $\delta=0$ et $\overline{\phi}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{C}_c$ est un cercle ordinaire (champ de vecteurs tangentiels).

8) Pour $\overline{\phi}=0$ et $\overline{\omega}-\delta=$ etc., le lieu géométrique du centre de courbure $\overline{M}_c$ de $\overline{C}_c$ relativement au champ est une droite.

23. Les lignes de Bertrand d'un champ de vecteurs.

Soit une surface S et un champ de vecteurs $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ défini sur celle-ci. Si le long d'une ligne $\overline{C}_b$ de S, la ligne d'action $G_{\overline{w}}$ du vecteur unitaire $\overline{\mathbf{w}}$ est la normale principale d'une autre courbe $\overline{C}_b$, la ligne $\overline{C}_b$ sera appelée une *ligne de Bertrand* du champ $\mathbf{w}(\phi, \overline{\phi})$ relativement à S. Soit $\mathbf{b}^p$ ($p = 1, 2, 3$) les vecteurs unitaires du trièdre de FRENET de $\underline{C}_b$ au point P, $\overline{P}$ le point sur la ligne d'action $G_{\overline{w}}$ correspondant d'après la définition ci-dessus au point P de $\overline{C}_b$ et

$$\mathbf{w} \, . \, \mathbf{b}^1 = \operatorname{Cos} \bar{\alpha} \, . \tag{23.1}$$

En dérivant (23.1) on obtient

$$\mathbf{w}_I \, . \, \mathbf{b}^1 + \mathbf{w} \, . \, \mathbf{b}_I^1 = (\operatorname{Cos} \bar{\alpha})_I$$

et en utilisant (13.5; 1) dans cette dernière égalité, tout en considérant que $\overline{\mathbf{w}} \perp \mathbf{b}^1$, $\mathbf{w} \perp G_{\overline{w}}$, on trouve

$$\bar{\alpha} = \text{cte.} \tag{23.2}$$

tout le long de $\overline{C}_b$.

Soit $\bar{s}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\tau}$ l'arc, la courbure et la torsion de $\underline{C}_b$ en P. $\underline{C}_b$ est défini par

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + d\,\overline{\mathbf{w}} \tag{23.3}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur de position de $\overline{C}_b$ et où, d doit être déterminé de façon à vérifier la condition d'une ligne de Bertrand.

En dérivant (23.3) on obtient

$$\bar{\mathbf{x}}_I = \mathbf{x}_I + d\,\overline{\mathbf{w}}_I + d_I \, . \, \overline{\mathbf{w}} \tag{23.4}$$

et en utilisant (16.2), (13.5; 2) on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^1 \bar{s}_I = & (\operatorname{Sin}\overline{\phi} \operatorname{Cos} \delta - d \, . \, {}_w k_{a0}) \mathbf{w} + (d_I - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \overline{\omega} - \operatorname{Cos}\overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\omega} \operatorname{Cos} \delta) \overline{\mathbf{w}} + \\ & + (\operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \overline{\omega} - \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Sin} \overline{\omega} \operatorname{Cos} \delta + d. \, {}_w t_{a\theta}) \overline{\mathbf{w}}^* \, . \end{aligned} \tag{23.5}$$

A partir de la condition que vérifie $\overline{C}_b$ en étant une ligne de Bertrand relativement à S, $\mathbf{b}^1$ est orthogonal à $\overline{\mathbf{w}}$ et pour cela, d'après (23.5) il faut et il suffit que

$$d_I - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \overline{\omega} - \operatorname{Cos} \overline{\phi} \operatorname{Cos} \overline{\omega} \operatorname{Cos} \delta = 0 \, . \tag{23.6}$$

A partir de (23.1) et comme le vecteur $\mathbf{b}^1$ est parallèle au plan $\mathbf{w}$, $\overline{\mathbf{w}}^*$ on peut écrire

$$\mathbf{b}^1 = \mathbf{w} \operatorname{Cos} \bar{\alpha} + \overline{\mathbf{w}}^* \operatorname{Sin} \bar{\alpha} \, . \tag{23.7}$$

En utilisant la condition (23.6), (23.5) devient

$$\mathbf{b}^1 . \bar{s}_I = (\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\delta - d\,.\,{}_w k_{a\theta})\,\mathbf{w} + (\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\bar{\omega} - \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\omega}\,\mathrm{Cos}\,\delta + d\,.\,{}_w t_{a\theta})\,\bar{\mathbf{w}}^*. \tag{23.8}$$

En comparant (23.7) et (23.8) on obtient

$$\mathrm{Cos}\,\bar{\alpha} = \frac{\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\delta - d.\,{}_w k_{a\theta}}{\bar{s}_I}\,,\quad \mathrm{Sin}\,\bar{\alpha} = \frac{\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\bar{\omega} - \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\omega}\,\mathrm{Cos}\,\delta + d.\,{}_w t_{a\theta}}{\bar{s}_I} \tag{23.9}$$

d'où on peut écrire la relation

$$\mathrm{Cos}\,\bar{\alpha}\,{}_w t_{a\theta} + \mathrm{Sin}\,\bar{\alpha}\,{}_w k_{a\theta} - \frac{\mathrm{Sin}\,\bar{\alpha}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\delta - \mathrm{Cos}\,\bar{\alpha}\,(\mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Cos}\,\bar{\omega} - \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\omega}\,\mathrm{Cos}\,\delta)}{d} = 0\,. \tag{23.10}$$

On voit donc que, la torsion absolue et la courbure absolue d'un champ de vecteurs relativement à une ligne de Bertrand $\bar{C}_b$ sont linéairement liées.

Cas Particuliers.

La condition nécessaire et suffisante pour que d soit constant tout le long de $\bar{C}_b$ est que

$$d_I = \mathrm{Sin}\,\delta\,\mathrm{Sin}\,\bar{\omega} + \mathrm{Cos}\,\bar{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\omega}\,\mathrm{Cos}\,\delta = 0. \tag{23.11}$$

a) Dans le cas où d est constant, si $\bar{C}_b$ est en même temps une asymptotique du champ, ${}_w k_{n\theta} = 0$, d'après $\left(\bar{\omega} = \dfrac{\pi}{2}\right)$ et (23.11) on doit avoir $\delta = 0$ ($\bar{C}_b = C_v$). D'autre part on a $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^*$, $\bar{\mathbf{w}}^* = \mathbf{w}^*$, $\mathbf{b}^1$ prendra la forme

$$\mathbf{b}^1 = \mathbf{w}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\alpha} + \mathbf{w}^*\,\mathrm{Sin}\,\bar{\alpha}\,. \tag{23.12}$$

Pour (23.5) et (23.10) on aura respectivement

$$\mathbf{b}^1\,\bar{s}_I = (\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - d.\,{}_w k_{g\theta})\,\mathbf{w} + (d.\,{}_w t_{g\theta} - \mathrm{Cos}\,\bar{\phi})\,\mathbf{w}^* \tag{23.13}$$

$$\mathrm{Cos}\,\bar{\alpha}\,{}_w t_{g\theta} + \mathrm{Sin}\,\bar{\alpha}\,{}_w k_{g\theta} - \frac{\mathrm{Cos}\,(\bar{\phi} - \bar{\alpha})}{d} = 0\,. \tag{23.14}$$

D'après (23.14) on a

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} - d.\,{}_w t_{g\theta}}{d.\,{}_w k_{g\theta} - \mathrm{Sin}\,\bar{\phi}} = \mathrm{tg}\,\bar{\alpha} = \mathrm{cte}. \tag{23.15}$$

et d'après (1.5; 1,3), [[1], (3-1a)] on obtient

$$\frac{(1 - d\,k_{gc_v})\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi} - d\,t_{g\varnothing}\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi}}{-(1 - d\,k_{gc_v})\,\mathrm{Sin}\,\bar{\phi} - d\,t_{g\varnothing}\,\mathrm{Cos}\,\bar{\phi}} = \mathrm{tg}\,\bar{\alpha} = \mathrm{cte}. \tag{23.16}$$

Dans ce cas la valeur de $\overline{s}_I$ est

$$\overline{s}_I^2 = (1 - d\, k_{gc_\nu})^2 + d^2\, t_{g\varnothing}^2 \,. \tag{23.17}$$

b) Dans le cas où d est constant, si $\overline{C}_b$ est en même temps une géodésique du champ, ${}_w k_{g\theta} = 0$, d'après $(\overline{\omega} = 0)$ et (23.11) on doit avoir $\delta = \frac{\pi}{2}$ $(\overline{C}_b = C_{\nu^*})$. D'autre part on a $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^*$, $\overline{\mathbf{w}}^* = -\mathbf{v}^*$ et

$$\mathfrak{b}^1 = \mathbf{w} \operatorname{Cos} \bar{\alpha} - \mathbf{v}^* \operatorname{Sin} \bar{\alpha} \,. \tag{23.18}$$

Pour (23.5) et (23.10) on aura respectivement

$$\mathfrak{b}^1 \overline{s}_I = (- d.\ {}_w k_{n\theta})\, \mathbf{w} - (1 + d.\ {}_w t_{g\theta})\, \mathbf{v}^* \tag{23.19}$$

$$\operatorname{Cos} \bar{\alpha}\ {}_w t_{g\theta} + \operatorname{Sin} \bar{\alpha}\ {}_w k_{n\theta} + \frac{\operatorname{Cos} \bar{\alpha}}{d} = 0 \,. \tag{23.20}$$

D'après (23.20) on a

$$- \frac{d.\ {}_w t_{g\theta} + 1}{d.\ {}_w k_{g\theta}} = \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \text{cte.} \tag{23.21}$$

ou en se servant de (1.5), [1, (3-1a)] on obtient

$$\frac{d\,(k_{gc_\nu} \operatorname{Cos} \overline{\phi} + t_{g\varnothing} \operatorname{Sin} \overline{\phi}) + 1}{d\,(k_{gc_\nu} \operatorname{Sin} \overline{\phi} - t_{g\varnothing} \operatorname{Cos} \overline{\phi})} = \operatorname{tg} \bar{\alpha} = \text{cte.}$$

Dans ce cas la valeur de $\overline{s}_I$ devient

$$\overline{s}_I^2 = d^2.\ {}_w k^2_{n\theta} + (1 + d.\ {}_w t_{g\theta})^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ŞEMİN, F. : *Sur les champs de vecteurs tangentiels*, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 39 (1974), 69-106.

[2] ŞEMİN, F. : *Champs de vecteurs tangentiels*, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 40 (1975), 177-215.

[3] PAN, T.K. : *Normal curvature of a vector field*, Amer. J. Math. 74 (1952), 955-966.

[4] GRAUSTEIN, W.C. : *Parallelism and equidistance in classical Differential Geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 557-593.

[5] PAN, T.K. : *Torsion of a vector field*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 449-457.

[6] PAN, T.K. : *Centers of curvature of a vector field*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 292-298.

[7] PAN, T.K. : *Correction*, Tensor (N.S.) 28, No. 3 (1974).