

**ÜBER GEWISSE POTENZREIHEN, DEREN FUNKTIONSWERTE
FÜR ARGUMENTE AUS DER MENGE DER LIOUVILLESCHEN
ZAHLEN U-ZAHLEN VOM GRADE $\leq m$ SIND**

M. H. ORYAN

Der Autor hat in einer Arbeit [4] bewiesen, dass eine Klasse von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten unter bestimmten Bedingungen für algebraische Argumente Werte aus den Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen.

In der vorliegenden Arbeit werden die ähnlichen Beziehungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen untersucht. Es wird bewiesen, dass die Funktionswerte gewisser Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen entweder U -Zahlen vom Grade $\leq m$ oder algebraische Zahlen sind. Unter strengeren Bedingungen wird erhalten, dass die Funktionswerte U -Zahlen vom Grade $\leq m$ sind.

E I N F Ü H R U N G

Mahler [3] hat 1932 die komplexen Zahlen in vier Klassen A, S, T, U eingeteilt. Er zieht als Ordnungsprinzip für seine Klasseneinteilung der Zahlen ξ die Genauigkeit heran, mit welcher nichtidentisch verschwindende Polynome in ξ mit ganzen rationalen Koeffizienten die Zahl Null nichttrivial approximieren.

Es sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die Zahl

$$H(P) = \max(|a_n|, \dots, |a_0|)$$

heißt die Höhe von P .

Mahler bildet bei festem n und festem H die Funktion

$$w_n(H, \xi) = \min |P(\xi)|^{1/n}.$$

$$(P)^\circ \leq n$$

$$H(P) \leq H$$

$$P(\xi) \neq 0$$

¹⁾ Das Symbol $()^\circ$ bedeutet den Grad eines Polynoms oder einer algebraischen Zahl.

Diese Funktion ist für $n \geq 1$, $H \geq 1$ höchstens gleich 1 und sie nimmt mit wachsendem n und H nicht zu. Er bildet

$$w_n(\xi) = \text{hm sup}_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log w_n(H, \xi)}{\log H}$$

und

$$w(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

Für $n \geq 1$ ist offenbar $0 \leq w_n(\xi) \leq \infty$ und $0 \leq w(\xi) \leq \infty$. Da ferner $w_{n+1}(H, \xi) \leq w_n(H, \xi)$ ist, gilt $w_{n+1}(\xi) \geq w_n(\xi)$. Daher ist $w(\xi)$ entweder eine nichtnegative endliche Grösse oder positiv unendlich.

Sei $\mu(\xi)$ der kleinste Index, für den $w_\mu(\xi) = \infty$ ist, falls ein solcher existiert, und im anderen Falle, dass $w_n(\xi)$ für alle n unter einer endlichen Schranke liegt, sei $\mu(\xi) = \infty$. Dadurch ist $\mu(\xi)$ eindeutig bestimmt. Es können also $\mu(\xi)$ und $w(\xi)$ nicht beide für das gleiche ξ endliche Werte haben. Damit bleiben für die Werte von $w(\xi)$ und $\mu(\xi)$ die folgenden vier Möglichkeiten, nach denen die Einteilung aller Zahlen ξ vorgenommen werden soll. Mahler nennt die Zahl

$$A\text{-Zahl, falls } w(\xi) = 0, \quad \mu(\xi) = \infty,$$

$$S\text{-Zahl, falls } 0 < w(\xi) < \infty, \quad \mu(\xi) = \infty,$$

$$T\text{-Zahl, falls } w(\xi) = \infty, \quad \mu(\xi) = \infty,$$

$$U\text{-Zahl, falls } w(\xi) = \infty, \quad \mu(\xi) < \infty.$$

Die Klasse der A -Zahlen besteht aus allen algebraischen Zahlen. Die transzendenten Zahlen sind in den Klassen S, T, U eingeteilt. ξ heisst eine U -Zahl vom Grade m ($1 \leq m$), falls $\mu(\xi) = m$ ist. Es seien U die Menge aller U -Zahlen und U_m ($m = 1, 2, \dots$) die Menge aller U -Zahlen vom Grade m , dann ist

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m.$$

Eine reelle Zahl ξ heisst Liouvillesche Zahl, wenn und nur wenn für jede natürliche Zahl n es ganze Zahlen p_n, q_n ($q_n > 1$) gibt mit

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < q_n^{-n}.$$

Jede Liouvillesche Zahl ist eine U -Zahl vom Grade 1 und auch umgekehrt ist jede U -Zahl vom Grade 1 eine Liouvillesche Zahl.

Koksma [2] hat 1939 eine andere Klasseneinteilung der komplexen Zahlen aufgestellt. In dieser Klassifikation wurden die komplexen Zahlen wieder in vier

Klassen A^* , S^* , T^* , U^* eingeteilt. Koksma zieht die Approximationsfähigkeit komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen α einer Höhe $H(\alpha) \leq H^2$) und eines Grades $(\alpha)^\circ \leq n$ heran.

Koksma bildet die Funktion

$$w_n^*(H, \xi) = \min | \xi - \alpha |$$

$$(\alpha)^\circ \leq n$$

$$H(\alpha) \leq H$$

$$\alpha \neq \xi$$

und daraus

$$w_n^*(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{-\log (H w_n^*(H, \xi))}{\log H},$$

$$w^*(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Es gilt auch $0 \leq w_n^*(\xi) \leq \infty$ und $0 \leq w^*(\xi) \leq \infty$. Es sei $\mu^*(\xi)$ der kleinste Index, für den $w_{\mu^*(\xi)}^*(\xi) = \infty$ ist, falls ein solcher existiert, sonst sei $\mu^*(\xi) = \infty$. Es besteht für $w^*(\xi)$ und $\mu^*(\xi)$ die folgenden vier Möglichkeiten. Die Zahl heisst

- A^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = 0$, $\mu^*(\xi) = \infty$,
- S^* - Zahl, falls $0 < w^*(\xi) < \infty$, $\mu^*(\xi) = \infty$,
- T^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = \infty$, $\mu^*(\xi) = \infty$,
- U^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = \infty$, $\mu^*(\xi) < \infty$.

ξ heisst eine U^* - Zahl vom Grade m ($1 \leq m$), falls $\mu^*(\xi) = m$ ist.

Die beiden Klassifikationen sind völlig äquivalent, d.h. A^- , S^- , T^- , U^- Zahlen sind dieselben wie A^* -, S^* -, T^* -, U^* - Zahlen. Ferner ist jede U^- Zahl vom Grade m eine U^* - Zahl vom Grade m und auch umgekehrt.

In einer Arbeit des Authors [4] wurde bewiesen, dass eine Klasse von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten unter bestimmten Bedingungen für algebraische Argumente Werte aus den Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen. In der vorliegenden Arbeit werden die ähnlichen Beziehungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen untersucht.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten behandelt. Es wird in Satz 1 bewiesen, dass die Funktionswerte dieser Potenzreihen unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge

²⁾ Die Höhe einer algebraischen Zahl ist als gleich der Höhe ihres Minimalpolynoms definiert.

der Liouvilleschen Zahlen entweder Liouvillesche Zahlen oder rationale Zahlen sind. Unter strengeren Bedingungen erhält man aus Satz 1, dass die Funktionswerte Liouvillesche Zahlen sind. Diese Tatsache wird als Folgerung 1 formuliert. Um Beispiele für Satz 1 und Folgerung 1 zu konstruieren, wird Satz 2 und Folgerung 2 bewiesen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden die Beziehungen im ersten Teil auf die Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten nach dem Gesichtspunkt der Koksaschen Klassifikation übertragen. Es wird in Satz 3 bewiesen, dass die Funktionswerte dieser Potenzreihen unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen entweder U -Zahlen vom Grade $\leq m$ sind, d.h. sie in der Menge $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$ liegen, oder algebraische Zahlen sind. Unter strengeren Bedingungen erhält man aus Satz 3, dass die Funktionswerte U -Zahlen vom Grade $\leq m$ sind. Diese Tatsache wird als Folgerung 3 formuliert. Ein Beispiel für Satz 3 und Folgerung 3 wird am Ende dieses Teils gegeben.

Satz 1 folgt aus Satz 3 als ein spezieller Fall und Folgerung 1 ist auch ein spezieller Fall von Folgerung 3.

Die Beziehungen in dieser Arbeit können entsprechend auf die Potenzreihen übertragen, die im p -adischen Körper Q_p oder im Körper der formalen Laurentreihen definiert sind. Entsprechende Beziehungen können auch für die Lückenreihen erhalten werden.

T E I L I

Wir betrachten in diesem Teil die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} x^n, \quad (1)$$

wobei b_n/a_n (a_n, b_n ganzrational, $a_n > 0$) nicht verschwindende rationale Zahlen mit $a_n > 1$ für $n \geq N_0$ ³⁾ sind.

Es seien

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty \quad (2)$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n} < 1. \quad (3)$$

Wegen (2) und (3) ist der Konvergenzradius von (1) unendlich. Es gilt der folgende Satz:

³⁾ Hier und im folgenden werden mit N_0, N_1, N_2, \dots passende Indizes bezeichnet.

Satz 1. Es sei $f(x)$ wie oben gegeben. Es sei ferner ξ eine Liouvillesche Zahl mit folgenden Eigenschaften :

1°) ξ lässt sich durch rationale Zahlen p_n / q_n mit $q_n > 1$ derart approximieren, dass für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < q_n^{-n w(n)} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = + \infty \right) \quad (4)$$

ist.

2°) Es gibt zwei positive reelle feste Zahlen δ_1 und δ_2 mit $1 < \delta_1 \leq \delta_2$, sodass es gilt

$$a_n^{\delta_1} \leq q_n^n \leq a_n^{\delta_2} \quad (5)$$

für hinreichend grosses n .

Dann ist $f(\xi)$ entweder eine Liouvillesche Zahl oder eine rationale Zahl.

Beweis. 1) Es folgt aus (2), dass die Folge $\{a_n\}$ ab $n = N_1 \geq N_0$ streng monoton wächst und für $n \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ strebt. Ferner gilt auch wegen (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n} = + \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n^2} = + \infty . \quad (6)$$

Es sei $A_n := [a_0, \dots, a_n]$ ⁴⁾ und η eine feste Zahl mit $0 < \eta < 1 - \frac{1}{\delta_1}$. Dann gilt für $n \geq N_2 \geq N_1$ wegen (2)

$$\frac{1}{\eta} < \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$$

und hieraus hat man

$$a_n < a_{n+1}^\eta . \quad (7)$$

Es sei $k_0 := a_0 \dots a_{N_2-1}$, dann erhält man für $n \geq N_2$ nach (7)

$$A_n \leq a_0 \dots a_n \leq k_0 \cdot a_n^{\eta^{n-N_2} + \dots + \eta + 1} ,$$

d.h. es gilt für $n \geq N_2$

$$A_n \leq k_0 \cdot a_n^{1/(1-\eta)} . \quad (8)$$

Wegen Auswahl von η ist $0 < \delta_1 - 1/(1-\eta)$. Nun sei ε eine reelle Zahl mit $0 < \varepsilon < \delta_1 - 1/(1-\eta)$. Dann gilt für $n \geq N_3 \geq N_2$

$$k_0 \leq a_n^\varepsilon .$$

⁴⁾ Das Symbol $[a_0, \dots, a_n]$ bedeutet das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a_0, \dots, a_n .

Also folgt hieraus und aus (8) für $n \geq N_3$

$$a_n \leq A_n \leq a_n^{\varepsilon+1/(1-\varepsilon)}. \quad (9)$$

2) Wir betrachten die Polynome

$$f_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{b_v}{a_v} x^v \quad (n=1,2,3,\dots).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f_n(\xi) - f_n(p_n/q_n) &= \sum_{v=0}^n \frac{b_v}{a_v} \left(\xi^v - \frac{p_n^v}{q_n^v} \right) \\ &= \sum_{v=0}^n \frac{b_v}{a_v} \left(\xi - \frac{p_n}{q_n} \right) \left(\xi^{v-1} + \xi^{v-2} \frac{p_n}{q_n} + \dots + \frac{p_n^{v-1}}{q_n^{v-1}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Es gilt ferner wegen (4) für $n \geq N_4 \geq N_3$

$$\left| \frac{p_n}{q_n} \right| \leq |\xi| + 1$$

Also folgt hieraus und aus (4) und (10) für $n \geq N_4$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| \leq q_n^{-nv(n)} \sum_{v=1}^n \left| \frac{b_v}{a_v} \right| v (|\xi| + 1)^{v-1}. \quad (11)$$

Sei $B_n = \max_{v=0}^n |b_v|$, dann gilt für $n \geq N_4$

$$\sum_{v=1}^n \left| \frac{b_v}{a_v} \right| v (|\xi| + 1)^{v-1} \leq n^2 \cdot B_n \cdot (|\xi| + 1)^{n-1}. \quad (12)$$

Es sei $\theta := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n}$, dann gilt wegen (3) und $\theta < (\theta + 1)/2$ für $n \geq N_5 \geq N_4$

$$\frac{\log |b_n|}{\log a_n} < \frac{\theta + 1}{2}. \quad (13)$$

Hieraus folgt für $n \geq N_6 \geq N_5$

$$\frac{\log B_n}{\log a_n} < \frac{\theta + 1}{2}, \quad (14)$$

weil die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst.

Wegen $0 < \varepsilon < \delta_1 - 1/(1 - \eta)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty$, (6) und (14) ergibt sich für $n \geq N_7 \geq N_6$

$$n^2 \cdot B_n \cdot (|\xi| + 1)^{n-1} \leq \frac{1}{2} \cdot a_n^{\left(\delta_1 - \varepsilon - \frac{1}{1-\eta}\right) \cdot \frac{w(n)}{2}}.$$

Hieraus und aus (5), (9) und (12) erhält man für $n \geq N_7$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{b_\nu}{a_\nu} \right| (|\xi| + 1)^{\nu-1} &\leq \frac{1}{2} (q_n^n / a_n^{\varepsilon+1/(1-\eta)})^{w(n)/2} \\ &\leq \frac{1}{2} (q_n^n / A_n)^{w(n)/2}. \end{aligned}$$

Also bekommt man hieraus und aus (1') für $n \geq N_7$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot (A_n q_n^n)^{-w(n)/2}. \quad (15)$$

3) Es gilt ferner

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n+k}}{a_{n+k}} \xi^{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_{n+k}|}{a_{n+k}} \cdot |\xi|^{n+k}.$$

Nach (13) gilt für $n \geq N_7$

$$\frac{|b_n|}{a_n} < \frac{1}{a_n^{(1-\theta)/2}}.$$

Also folgt hieraus für $n \geq N_7$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{|\xi|^{n+1}}{a_{n+1}^{(1-\theta)/2}} \left[1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^{(1-\theta)/2} |\xi| + \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}\right)^{(1-\theta)/2} |\xi|^2 + \dots \right].$$

Aus (7) folgt für $n \geq N_7$

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} < \frac{1}{a_{n+2}^{1-\eta}}$$

und da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ist, erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = 0.$$

Da $(1 - \theta)/2 > 0$ ist, folgt hieraus für $n \geq N_8 \geq N_7$ und $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\left(\frac{a_{n+\nu}}{a_{n+1+\nu}} \right)^{(1-\theta)/2} |\xi| < \frac{1}{2}$$

und für $n \geq N_8$ auch

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+1+\nu}} \right)^{(1-\theta)/2} |\xi|^\nu < 1/2^\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Also ergibt sich für $n \geq N_8$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{|\xi|^{n+1}}{a_n^{(1-\theta)/2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^\nu} + \dots \right) \leq \frac{2|\xi|^{n+1}}{a_{n+1}^{(1-\theta)/2}}.$$

Ausserdem gilt wegen (6) für $n \geq N_9 \geq N_8$

$$2|\xi|^{n+1} \leq a_{n+1}^{(1-\theta)/4}.$$

Hieraus erhält man für $n \geq N_9$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq a_{n+1}^{-(1-\theta)/4}. \quad (16)$$

Nun definieren wir für $n \geq N_9$ die Folge $\{s'(n)\}$ mit $s'(n) := (\log a_{n+1}/\log a)$. Wegen (2) ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s'(n) = +\infty$. Hieraus und aus (16) folgt für $n \geq N_9$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq a_n^{-s'(n)(1-\theta)/4}. \quad (17)$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} s'(n) = +\infty$, (5) und (9) gibt es eine geeignete Folge $\{s''(n)\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s''(n) = +\infty$, sodass es gilt für $n \geq N_{10} \geq N_9$

$$a_n^{-s'(n)(1-\theta)/4} \leq \frac{1}{2} \cdot (A_n q_n^n)^{-s''(n)}.$$

Hieraus und aus (17) ergibt sich für $n \geq N_{10}$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{1}{2} \cdot (A_n q_n^n)^{-s''(n)}. \quad (18)$$

Sei nun für $n \geq N_{10}$ $s(n) := \min(w(n)/2, s''(n))$. Also folgt aus (15) und (18) für $n \geq N_{10}$

$$\left| f(\xi) - f_n \left(\frac{p_n}{q_n} \right) \right| \leq (A_n q_n^n)^{-s(n)}, \quad (19)$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = +\infty$ ist. Ferner sind

$$f_n \left(\frac{p_n}{q_n} \right) = \sum_{\nu=0}^n \frac{b_\nu}{a_\nu} \left(\frac{p_n}{q_n} \right)^\nu = \frac{h_n}{A_n q_n^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

rationale Zahlen, wobei h_n für $n = 1, 2, 3, \dots$ ganzrational sind.

4) Es folgt aus (19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \left(\frac{p_n}{q_n} \right) = f(\xi).$$

Hieraus ergibt sich, dass entweder die Folge $\left\{f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right\}$ eine unendliche Teilfolge hat, deren Glieder voneinander und von $f(\xi)$ verschieden sind, oder die Folge $\left\{f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right\}$ für hinreichend grosses n konstant bleibt.

Im ersten Fall ist $f(\xi)$ nach (19) und (20) eine Liouvillesche Zahl. Im zweiten Fall ist $f(\xi)$ eine rationale Zahl, da $f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ für $n=1,2,\dots$ rationale Zahlen sind. Damit ist Satz I bewiesen.

Folgerung 1. Falls in Satz I $b_n > 0$ ($n = 0,1,2,\dots$) und $\xi > 0$ sind, dann ist $f(\xi)$ eine Liouvillesche Zahl.

Beweis. Da $\xi > 0$ ist, kann aus der Folge $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ so eine Teilfolge $\left\{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right\}$ ausgewählt werden, dass die Glieder von $\left\{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right\}$ positiv sind und sie streng monoton wächst oder abnimmt.

Sei $\left\{\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right\}$ streng monoton wachsend, dann gilt für jedes k

$$\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} < \frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}} \quad (21)$$

Ferner sind

$$\frac{b_n}{a_n} > 0 \quad (n = 0,1,2,\dots) \quad (22)$$

Es gilt für jedes k

$$\begin{aligned} f_{n_{k+1}}\left(\frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}}\right) - f_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) &= \frac{b_1}{a_1} \left(\frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}} - \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) + \dots + \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \left(\left(\frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}}\right)^{n_k} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right)^{n_k}\right) + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \left(\frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}}\right)^{n_{k+1}} + \dots + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \left(\frac{p_{n_{k+1}}}{q_{n_{k+1}}}\right)^{n_{k+1}} \quad (23) \end{aligned}$$

Wegen (21) und (22) ist die rechte Seite von (23) positiv. Also darf die Folge $\left\{f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right\}$ für hinreichend grosses n nicht konstant bleiben. Somit hat sie eine unendliche Teilfolge, deren Glieder voneinander und von $f(\xi)$ verschieden sind. Also muss $f(\xi)$ wegen (19) und (20) eine Liouvillesche Zahl sein.

Im Falle vom Abnehmen der Folge $\left\{ \frac{p_{nk}}{q_{nk}} \right\}$ wird der Beweis genauso laufen.

Damit ist Folgerung 1 gezeigt.

Der folgende Satz lässt uns Potenzreihen und Liouvillesche Zahlen konstruieren, für welche die Bedingungen von Satz 1 erfüllt werden.

Satz 2. In den Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} x^n \quad (24)$$

und

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{e_n} x^n \quad (25)$$

seien b_n/a_n (a_n, b_n ganzrational, $a_n > 0$) und f_n/e_n (e_n, f_n ganzrational, $e_n > 0$) nicht verschwindende rationale Zahlen mit $a_n > 1$ und $e_n > 1$ für $n \geq N_0'$.

Es seien folgende Bedingungen erfüllt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log e_{n+1}}{\log a_n} = +\infty, \quad (26)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n} < 1 \quad (27)$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f_n|}{\log e_n} < 1. \quad (28)$$

Ferner gebe es zwei positive reelle Konstanten δ_1' und δ_2' mit $1 < \delta_1' \leq \delta_2'$, sodass es gilt

$$a_n^{\delta_1'} \leq e_n^n \leq a_n^{\delta_2'} \quad (29)$$

für hinreichend grosses n .

Dann ist für jede nicht verschwindende rationale Zahl p/q mit $q > 0$ $g\left(\frac{p}{q}\right)$ eine Liouvillesche Zahl und $f\left(g\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ ist entweder eine Liouvillesche Zahl oder eine rationale Zahl.

Beweis. 1) Es folgt aus (26) und (29)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log e_{n+1}}{\log e_n} = +\infty. \quad (30)$$

Nach (28) und (30) erhält man aus Satz 1 in [4] für $m = 1$, dass $g\left(\frac{p}{q}\right)$ eine U -Zahl vom Grade 1 ist. Also ist $g\left(\frac{p}{q}\right)$ eine Liouvillesche Zahl.

2) Wir zeigen nun, dass die Bedingungen von Satz 1 für $f(x)$ und $\xi := g\left(\frac{p}{q}\right)$ erfüllt werden.

Nach (29) gilt für hinreichend grosses n

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} \geq \frac{n+1}{\delta_2'} \cdot \frac{\log e_{n+1}}{\log a_n}.$$

Hieraus und aus (26) folgt die Bedingung (2).

Die Bedingung (3) ist dieselbe wie (27).

Es sei

$$g_n\left(\frac{p}{q}\right) := \sum_{v=0}^n \frac{f_v}{e_v} \left(\frac{p}{q}\right)^v = \frac{k_n}{E_n \cdot q^n}, \quad (31)$$

wobei $E_n = [e_0, \dots, e_n]$ und k_n eine ganze Zahl ist. Man kann genauso wie in Satz 1 zeigen, dass es für $n \geq N_1' \geq N_0'$ gilt

$$\left| g\left(\frac{p}{q}\right) - g_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq e_{n+1}^{-(1-\theta')/4}, \quad (32)$$

wobei $\theta' := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f_n|}{\log e_n}$ ist. Ferner gilt auch für $n \geq N_2' \geq N_1'$

$$e_n \leq E_n \leq e_n^c, \quad (33)$$

wobei $c > 0$ eine geeignete reelle Konstant ist. Hieraus und aus (29) folgt für $n \geq N_3' \geq N_2'$

$$\frac{\log c_{n+1}}{n \log E_n} \geq \frac{\log e_{n+1}}{n c \log e_n} \geq \frac{\log e_{n+1}}{c \delta_2' \log a_n}$$

und also erhält man nach (26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log e_{n+1}}{n \log E_n} = +\infty. \quad (34)$$

Ferner gilt wegen (30) auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log e_n}{n} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log e_n}{n^2} = +\infty. \quad (35)$$

Nach (34) und (35) gibt es eine Folge $\{w(n)\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty$, sodass es gilt für $n \geq N_4' \geq N_3'$

$$e_{n+1}^{-(1-\theta')/4} \leq (E_n q^n)^{-n w(n)}. \quad (36)$$

Aus (31), (32) und (36) folgt für $n \geq N_4'$

$$\left| \xi - \frac{k_n}{E_n q^n} \right| \leq (E_n q^n)^{-n w(n)},$$

welche die Bedingung (4) ist.

Es ist ferner möglich geeignete Konstanten δ_1 und δ_2 mit $1 < \delta_1 \leq \delta_2$ zu bestimmen, sodass es gilt für hinreichend grosses n

$$a_n^{\delta_1} \leq (E_n q^n)^n \leq a_n^{\delta_2}. \quad (37)$$

Denn es folgt aus (29) für $n \geq N_4'$

$$\delta_1' \cdot \frac{\log E_n + n \log q}{\log e_n} \leq \frac{n \log E_n + n^2 \log q}{\log a_n} \leq \delta_2' \cdot \frac{\log E_n + n \log q}{\log e_n}. \quad (38)$$

Wegen (33), (35) und $\delta_1' > 1$ gibt es eine geeignete reelle Zahl δ_1 , sodass es für $n \geq N_5' \geq N_4'$ gilt

$$1 < \delta_1 < \delta_1' \cdot \frac{\log E_n + n \log q}{\log e_n}. \quad (39)$$

Ferner gibt es wegen (33) und (35) auch eine geeignete reelle Zahl δ_2 , sodass es für $n \geq N_6' \geq N_5'$ gilt

$$\delta_2' \cdot \frac{\log E_n + n \log q}{\log e_n} \leq \delta_2. \quad (40)$$

Also folgt aus (38), (39) und (40) die Beziehung (37) für $n \geq N_6'$, welche die Bedingung (5) ist.

Somit folgt aus Satz 1, dass $f\left(g\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ entweder eine Liouvillesche Zahl oder eine rationale Zahl ist.

Folgerung 2. Falls in Satz 2 $b_n, f_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und $p/q > 0$ sind, dann ist $f\left(g\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ eine Liouvillesche Zahl.

Beweis. Unter den obigen Bedingungen ist $\xi := g\left(\frac{p}{q}\right) > 0$. Da aus den Bedingungen von Satz 2 die Bedingungen von Satz 1 erhalten werden, ergibt sich nach Folgerung 1, dass $f\left(g\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ eine Liouvillesche Zahl ist.

Als Beispiele zu Satz 2 und Folgerung können die Koeffizienten in (24) und (25) wie folgt genommen werden :

1°) $a_n = a^{\ln(n)^{3/4}}, b_n = i, e_n = a^{(n)^2}, f_n = i,$
wobei $a > 1$ eine ganze Zahl ist.

2°) $a_n = a^{\ln(2n+1/4)}, b_n = 1, e_n = a^{n^{2n}}, f_n = 1,$
wobei $a > 1$ eine ganze Zahl ist.

T E I L I I

In diesem Teil untersuchen wir die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n, \tag{i}$$

wobei η_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) nicht verschwindende ganze algebraische Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade m und a_n positive ganzrationale Zahlen mit $a_n > 1$ für $n \geq N_0$ sind.

Es seien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty \tag{2}$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < 1, \tag{3}$$

wobei $H(\eta_n)$ Höhe von η_n bedeutet.

Wegen (2) und (3) ist der Konvergenzradius von (1) unendlich. Es gilt der folgende Satz :

S a t z 3. Es sei $f(x)$ wie oben gegeben. Es sei ferner ξ eine Liouvillesche Zahl mit folgenden Eigenschaften :

1°) ξ lässt sich durch rationale Zahlen p_n/q_n mit $q_n > 1$ derart approximieren, dass für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq q_n^{-n w(n)} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty) \tag{4}$$

ist.

2°) Es gibt zwei reelle Konstanten δ_1 und δ_2 mit $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, sodass es gilt

$$a_n^{\delta_1} \leq q_n^n \leq a_n^{\delta_2} \tag{5}$$

für hinreichend grosses n .

Dann ist $f(\xi)$ entweder eine U -Zahl vom Grade $\leq m$ oder eine algebraische Zahl aus K .

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. Es seien α_j ($j=1, \dots, k$) ($k \geq 1$) Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper K vom Grade g und mit den jeweiligen Höhen $H(\alpha_j)$ ($j=1, \dots, k$). Es sei ferner η eine weitere algebraische Zahl, die mit α_j durch eine Relation $F(\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$ verbunden sein möge, wobei $F(y, x_1, \dots, x_k)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und in y von mindestens erstem Grad ist. Dann ist der Grad von $\eta \leq dg$ und es gilt für die Höhe $H(\eta)$ von η folgende Abschätzung:

$$H(\eta) \leq 3^{2dg+(l_1+\dots+l_k)g} \cdot H^g \cdot H(\alpha_1)^{l_1g} \dots H(\alpha_k)^{l_kg}.$$

Dabei bedeutet d den Grad von $F(y, x_1, \dots, x_k)$ nach y ; l_j denjenigen von $F(y, x_1, \dots, x_k)$ nach x_j ($j=1, \dots, k$), H das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $F(y, x_1, \dots, x_k)$ (Orhan Ş. İcen [1], S. 25).

Beweis von Satz 3. 1) Wie in Satz 1 wächst die Folge $\{a_n\}$ streng monoton für $n \geq N_1 \geq N_0$ und strebt gegen $+\infty$. Ferner gelten auch die folgenden Beziehungen für $n \geq N_2 \geq N_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n} = +\infty, \quad (6)$$

$$a_n < a_{n+1}^{\eta} \quad (7)$$

und

$$a_n \leq A_n \leq a_0 \dots a_n \leq k_1 \cdot a_n^{1/(1-\eta)} \leq a_n^3, \quad (8)$$

wobei η eine feste Zahl mit $0 < \eta < 1/2$ und $k_1 > 1$ eine geeignete feste Zahl ist.

Sei $\theta := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n}$. Aus (3) und $\theta < (\theta + 1)/2$ folgt für $n \geq N_3 \geq N_2$

$$\frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < \frac{1 + \theta}{2}.$$

Hieraus bekommt man für dieselben n

$$H(\eta_n) < a_n^{(1+\theta)/2}. \quad (9)$$

Da andererseits

$$|\eta_n| \leq \overline{|\eta_n|} \leq 2 H(\eta_n)^{5/2}$$

ist, bekommt man für $n \geq N_3$ aus (9)

⁵⁾ S. Schneider [2], S.5, Hilfssatz 1.

$$|\eta_n| \leq \overline{|\eta_n|} \leq 2 a_n^{(1+\theta)/2}, \quad (10)$$

wobei $\overline{|\eta_n|}$ das Maximum der Absolutbeträgen aller Konjugierten von η_n bedeutet.

2) Es seien für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma_n := \sum_{v=0}^n \frac{\eta_v}{a_v} \left(\frac{p_n}{q_n} \right)^v.$$

γ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sind algebraische Zahlen aus dem Zahlkörper K . Also sind γ_n vom Grade $\leq m$. Wir schätzen die Höhe von γ_n nach oben ab. Hierfür wenden wir den Hilfssatz auf das Polynom

$$F(y, x_0, \dots, x_n) = A_n q_n^n y - A_n q_n^n \cdot \sum_{v=0}^n \frac{1}{a_v} \left(\frac{p_n}{q_n} \right)^v \cdot x_v$$

an. Da $F(\gamma_n, \eta_0, \dots, \eta_n) = 0$ ist, gilt

$$H(\gamma_n) \leq 3^{2,1,m+(n+1)m} \cdot H^m \cdot H(\eta_0)^m \dots H(\eta_n)^m, \quad (11)$$

wobei

$$H = \max_{v=0}^n \left(A_n q_n^n, A_n q_n^n \frac{1}{a_v} \left| \frac{p_n}{q_n} \right|^v \right)$$

ist. Wegen (4) gilt für jedes n

$$\left| \frac{p_n}{q_n} \right| \leq d_0,$$

wobei $d_0 \geq 1$ eine geeignete feste Zahl ist. Es folgt hieraus

$$H \leq A_n q_n^n d_0^n. \quad (12)$$

Aus (11) und (12) bekommt man

$$H(\gamma_n) \leq d_1^{nm} \cdot A_n^m \cdot q_n^{nm} \cdot H(\eta_0)^m \dots H(\eta_n)^m,$$

wobei $d_1 \geq 1$ eine geeignete feste Zahl ist. Da ferner

$$H(\eta_v) \leq (2 \overline{|\eta_v|})^{m \cdot 6}$$

ist, erhält man hieraus

$$H(\gamma_n) \leq d_1^{nm} \cdot A_n^m \cdot q_n^{nm} \cdot 2^{m^2(n+1)} \cdot (\overline{|\eta_0|} \dots \overline{|\eta_n|})^{m^2}. \quad (13)$$

Aus (10) folgt für $n \geq N_3$

⁶⁾ S. Schneider [⁶], S. 10, Hilfssatz 4.

$$(\overline{|\eta_0|} \dots \overline{|\eta_n|})^{m^2} \leq d_2 \cdot 2^{m^2(n+1)} \cdot (a_0 \dots a_n)^{m^2(1+\theta)/2},$$

wobei $d_2 \geq 1$ eine geeignete feste Zahl ist. Hieraus und aus (8) erhält man für $n \geq N_3$

$$(\overline{|\eta_n|} \dots \overline{|\eta_n|})^{m^2} \leq d_2 \cdot 2^{m^2(n+1)} \cdot a_n^{3m^2(1+\theta)/2}.$$

Also ergibt sich hieraus und aus (5), (8) und (13) für $n \geq N_3$

$$H(\gamma_n) \leq d_3^n \cdot a_n^{c_0}, \quad (14)$$

wobei $d_3 \geq 1$, $c_0 \geq 1$ geeignete feste Zahlen sind.

3) Wir betrachten die Polynome

$$f_n(x) = \sum_{v=0}^n \frac{\eta_v}{a_v} x^v \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Da $f_n(x)$ als Polynom überall stetig und differenzierbar ist, gibt es für jedes n reelle Zahlen θ_n zwischen ξ und p_n/q_n , sodass es gilt

$$f_n(\xi) - \gamma_n = f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \left(\xi - \frac{p_n}{q_n}\right) f_n'(\theta_n). \quad (15)$$

Wegen (4) gilt für $n \geq N_4 \geq N_3$

$$|\theta_n| \leq \max\left(|\xi|, \left|\frac{p_n}{q_n}\right|\right) \leq |\xi| + 1.$$

Also folgt hieraus und aus (4) und (15) für $n \geq N_4$

$$|f_n(\xi) - \gamma_n| \leq q_n^{-n\nu(n)} \sum_{v=1}^n \nu \left| \frac{\eta_v}{a_v} \right| (|\xi| + 1)^{\nu-1}. \quad (16)$$

Sei $\beta_n := \max_{v=0}^n |\eta_v|$, dann gilt für $n \geq N_4$

$$\sum_{v=1}^n \nu \left| \frac{\eta_v}{a_v} \right| (|\xi| + 1)^{\nu-1} \leq n^2 \cdot \beta_n \cdot (|\xi| + 1)^{n-1}. \quad (17)$$

Es gilt nach (10) für $n \geq N_5 \geq N_4$

$$\beta_n \leq 2 a_n^{(1+\theta)/2}.$$

Also folgt hieraus für $n \geq N_5$

$$n^2 \cdot \beta_n \cdot (|\xi| + 1)^{n-1} \leq 2 n^2 \cdot (|\xi| + 1)^{n-1} \cdot a_n^{(1+\theta)/2}.$$

Hieraus und aus (16) und (17) bekommt man für $n \geq N_5$

$$|f_n(\xi) - \gamma_n| \leq q_n^{-nw(n)} \cdot 2n^2 \cdot (|\xi| + i)^{n-1} \cdot a_n^{(1+\theta)/2}.$$

Wegen (5) erhält man hieraus für $n \geq N_5$

$$|f_n(\xi) - \gamma_n| \leq \frac{2n^2 \cdot (|\xi| + 1)^{n-1}}{a_n^{s_1 w(n) - (1+\theta)/2}}. \quad (18)$$

Wegen (6) und $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty$ ist es möglich eine Folge $\{s'(n)\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s'(n) = +\infty$ zu finden, für welche gilt für $n \geq N_6 \geq N_5$

$$\frac{2n^2 (|\xi| + 1)^{n-1}}{a_n^{s_1 w(n) - (1+\theta)/2}} \leq \frac{1}{2} (d_3^n \cdot a_n^{c_0})^{-s'(n)}. \quad (19)$$

Also folgt aus (14), (18) und (19) für $n \geq N_6$

$$|f_n(\xi) - \gamma_n| \leq \frac{1}{2} \cdot H(\gamma_n)^{-s'(n)} \quad (20)$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s'(n) = +\infty$.

4) Genauso wie in Satz 1 kann man zeigen, dass es für $n \geq N_7 \geq N_6$ gilt

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq a_{n+1}^{-(1-\theta)/4}. \quad (21)$$

Nun definieren wir für $n \geq N_7$ die Folge $\{s''(n)\}$ mit $s''(n) := \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$.

Wegen (2) ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s''(n) = +\infty$. Hieraus und aus (21) folgt für $n \geq N_7$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq a_n^{-s''(n) \cdot (1-\theta)/4}. \quad (22)$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} s''(n) = +\infty$ und (6) gibt es eine geeignete Folge $\{s'''(n)\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s'''(n) = +\infty$, sodass es gilt für $n \geq N_8 \geq N_7$

$$a_n^{-s'''(n) \cdot (1-\theta)/4} \leq \frac{1}{2} \cdot (d_3^n \cdot a_n^{c_0})^{-s'''(n)}. \quad (23)$$

Also folgt hieraus und aus (14) und (22) für $n \geq N_8$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{1}{2} \cdot H(\gamma_n)^{-s'''(n)} \quad (24)$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s'''(n) = +\infty$.

Sei nun $s(n) = \min(s'(n), s''(n))$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = +\infty$. Aus (20) und (24) erhält man für $n \geq N_8$

$$|f(\xi) - \gamma_n| \leq H(\gamma_n)^{-s(n)}, \quad (25)$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = +\infty$ ist.

5) Wegen (26) ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = f(\xi)$. Also ist die Folge $\{\gamma_n\}$ entweder konstant von einer Stelle ab, oder sie hat eine Teilfolge $\{\gamma_{n_k}\}$, deren Glieder von $f(\xi)$ und voneinander verschieden sind. Im ersten Fall ist $\gamma_n = \gamma$ für hinreichend grosses n , wobei γ eine feste algebraische Zahl aus K ist. Dann ist $f(\xi) = \gamma$, d.h. es gilt $f(\xi) \in K$. Im zweiten Fall sei l der höchste Grad von Gliedern der Folge $\{\gamma_{n_k}\}$, welcher unendlich viel wiederholt wird. Die Teilfolge der Glieder mit Graden l hat so eine Teilfolge $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$, dass die Höhen von $\gamma_{n_{k_j}}$ streng monoton wachsen. Es gilt nach (25) für die Teilfolge $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$ für $n_{k_j} \geq N_8$

$$|f(\xi) - \gamma_{n_{k_j}}| \leq H(\gamma_{n_{k_j}})^{-s(n_{k_j})}, \quad (26)$$

wobei $\lim_{j \rightarrow \infty} s(n_{k_j}) = +\infty$ ist.

Aus (26) ergibt sich

$$\mu^*(f(\xi)) \leq l. \quad (27)$$

Wegen $l \leq m$ folgt aus (27), dass $f(\xi)$ eine U^* -Zahl vom Grade $\leq m$ ist. Also ist $f(\xi)$ auch eine U -Zahl vom Grade $\leq m$.

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

F o l g e r u n g 3. Falls in Satz 3 η_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) positive reelle ganz-algebraische Zahlen aus K und $\xi > 0$ sind, dann ist $f(\xi)$ eine U -Zahl vom Grade $\leq m$.

Beweis. Genauso wie in Folgerung 1 kann man zeigen, dass unter den obigen Bedingungen die Folge $\{\gamma_n\}$ für hinreichend grosses n nicht konstant ist. Also folgt wie in Satz 3, dass $f(\xi)$ eine U -Zahl vom Grade $\leq m$ ist.

Im folgenden konstruieren wir ein Beispiel für Satz 3 und Folgerung 3.

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade m und $\{P_n\}$ eine Folge der Primzahlen mit $P_{n+1} \geq n^2 \cdot P_n$. Es sei ferner

$$\xi := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-P_n}.$$

Mit $q_n := 2^{P_n}$ und $p_n := q_n \sum_{v=0}^n 2^{-P_v}$ gilt für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{-P_v} \right| \leq \frac{2}{2^{P_{n+1}}} \leq \frac{2}{2^{n^2 P_n}} \leq \frac{1}{(2^{P_n})^{nw(n)}},$$

wobei $w(n) = n/2$ ist. Also gilt für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq q_n^{-nw(n)} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty \right). \quad (28)$$

Aus (28) folgt, dass ξ eine Liouvillesche Zahl ist. Es sei ferner $a_n := q_n^n = 2^{nP_n}$.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty. \quad (29)$$

Ausserdem sei α eine nicht verschwindende ganzzahlige Zahl aus K und seien für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\eta_n := \alpha^n.$$

Dann gilt $|\overline{\eta_n}| = |\overline{\alpha}|^n$ und $H(\eta_n) \leq (2|\overline{\eta_n}|)^n = 2^n |\overline{\alpha}|^{nm}$. Es folgt hieraus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} = 0. \quad (30)$$

Aus (28), (29) und (30) folgen die Bedingungen (2), (3) und (4) in Satz 3. Für $\delta_1 = \delta_2 = 1$ gilt auch (5).

Also ist nach Satz 3

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{2^{nP_n}} \xi^n$$

entweder eine U -Zahl vom Grade $\leq m$ oder eine algebraische Zahl aus K .

Falls $\alpha > 0$ ist, dann sind $\eta_n = \alpha^n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ausserdem ist auch $\xi > 0$. Also ist $f(\xi)$ in diesem Fall eine U -Zahl vom Grade $\leq m$ nach Folgerung 3.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

[¹] İÇEN, O.Ş. : *Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II"*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, 38 (1973), 25-35.

[²] KOKSMA, J.F. : *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monatsh. Math. Physik 48 (1939), 176-189.

[³] MAHLER, K. : *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I*, J. reine und angewandte Mathematik 166 (1932), 137-150.

- [⁴] ORYAN, M.H. : *Über gewisse Potenzreihen, die für algebraische Argumente Werte aus der Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen*, Revue de la Faculté de Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, 45 (1980), 1-42.
- [⁵] SCHNEIDER, Th. : *Einführung in die Transzendenten Zahlen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

Bemerkung : Diese Arbeit war am 21.4.1983 bei dieser Zeitschrift eingegangen. Wegen langer Verspätung der Publikation wurde sie vom Author bei einer anderen Zeitschrift erscheinen lassen.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
VEZNECİLER-İSTANBUL

Ö Z E T

Yazar bir çalışmasında [⁴], cebirsel katsayılı bazı kuvvet serilerinin belirli şartlar altında cebirsel argümanlar için Mahler'in U_m alt sınıflarında değer aldıklarını ispat etmişti.

Bu çalışmada benzer ilişkiler argümanların Liouville sayıları olmaları halinde incelenmektedir. Belirli şartlar altında cebirsel katsayılı bazı kuvvet serilerinin, argümanlarının Liouville sayıları olmaları halinde aldığı değerlerin ya dereceleri $\leq m$ olan U -sayıları veya cebirsel sayılar oldukları ispat edilmektedir. Daha kuvvetli şartlar altında, kuvvet serilerinin aldığı değerlerin dereceleri $\leq m$ olan U -sayıları oldukları elde edilmektedir.