İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 49 (1990), 37-38

UBER GEWISSE POTENZREIHEN, DEREN FUNKTIONSWERTE FÜR ARGUMENTE AUS DER MENGE DER LIOUVILLESCHEN ZAHLEN TRANSZENDENT SIND

M.H. ORYAN

Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} x^n \quad (a_n, b_n \in \mathbf{Z}, a_n > 1) \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = \sigma > 1, \tag{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n} = \theta > 1. \tag{3}$$

Es sei ferner ξ eine reelle Liouvillesche Zahl mit folgenden Eigenschaften :

ξ laesst sich durch rationale Zahlen p_n/q_n mit $q_n > 1$ derart approximieren, dass für hinreichend grosses n es gilt

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < q_n^{-n\lambda} \tag{4}$$

und

$$a_n^{\delta_1} \leqq q_n^n \leqq a_n^{\delta_2}, \tag{5}$$

wobei $\lambda, \delta_1, \delta_2$ positive reelle feste Zahlen mit $2 < \delta_1 \leqq \delta_2$, $\lambda > (\theta + 2\delta_2 + 4)/\delta_1$ und $\sigma(1-\theta) > 2\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} + \delta_2\right)$ sind.

SATZ. Es sei $f(x)$ und ξ wie oben. Dann ist $f(\xi)$ eine rationale oder transzendente Zahl.

Beweis. Es sei $A_n = k.g.V. \{a_0, \ldots, a_n\}$. Es folgt aus (2)

$$a_n \leqq A_n \leqq a_n^{u+\varepsilon_0}, \tag{6}$$

wobei $u = \limsup_{n\to\infty} (\log A_n)/(\log a_n)$ eine endliche Zahl mit $1 \leqq u \leqq \sigma/(\sigma - 1)$ ist. Es sei $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_\nu}{a_\nu} x^\nu$. Dann gilt für jedes n

$$|f(\xi) - f_n(p_n/q_n)| \leqq |f(\xi) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f_n(p_n/q_n)|. \tag{7}$$

Es folgt aus (2), (3) für grosses n

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| \leqq \frac{2|\xi|^{n+1}}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_1}} \leqq a_{n+1}^{-1+\theta+\varepsilon_2} \leqq a_n^{-s'_n(1-\theta-\varepsilon_2)}, \tag{8}$$

wobei $s'_n = (\log a_{n+1})/(\log a_n)$ und $1 - \theta > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ ist. Es gilt ferner für hinreichend grosses n wegen (2), (3), (4) und $\lambda > (\theta + 2\varepsilon_2 + 4)/\delta_1 > (\theta + 2u + 2\delta_2)/\delta_1$

$$|f_n(\xi) - f_n(p_n/q_n)| \leqq \frac{1}{2}(A_n q_n^n)^{-(2+\varepsilon_3)} \quad (\varepsilon_3 > 0). \tag{9}$$

Ausserdem gilt für hinreichend grosses n wegen (2), (5) und (6)

$$a_n^{-s'_n(1-\theta-\varepsilon_2)} \leqq \frac{1}{2}(A_n q_n^n)^{-(2+\varepsilon_3)}. \tag{10}$$

Also folgt aus (7), (8), (9) und (10)

$$|f(\xi) - f_n(p_n/q_n)| \leqq (A_n/q_n^n)^{-(2+\varepsilon_3)} \tag{11}$$

für fast alle n. Die Zahlen $f_n(p_n/q_n) = h_n/(A_n q_n^n)$ sind rational mit $h_n \in Z$. Aus (11) folgt dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p_n/q_n) = f(\xi).$$

Falls die Folge $\{f_n(p_n/q_n)\}$ ist konstant, dann ist $f(\xi)$ eine rationale Zahl, sonst ist $f(\xi)$ transzendent.

Folgerung. Falls $b_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und $\xi > 0$ im obigen Satz ist, dann ist $f(\xi)$ transzendent.

Beweis. Da $\xi > 0$ ist, kann aus der Folge $\{p_n/q_n\}$ so eine Teilfolge $\{p_{n_k}/q_{n_k})$ ausgewaehlt werden, dass die Glieder von $\{p_{n_k}/q_{n_k}\}$ positiv sind und sie streng monoton wachsend, dann gilt wegen $b_n/a_n > 0$

$$f_{n_{k+1}}(p_{n_{k+1}}/q_{n_{k+1}}) - f_{n_k}(p_{n_k}/q_{n_k}) > 0.$$

Also ist $\{f_n(p_n/q_n)\}$ nicht konstant, d.h. $f(\xi)$ ist transzendent.

Der obige Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 1 in [1] und von Satz 1 in [2] des Authors.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ORYAN, M.H. : *On Power Series and Mahler's U-Numbers*, Math. Scand., **65** (1989), 143-151.

[2] ORYAN, M.H. : *Oh the Power Series and Liouville Numbers*, Doğa-Tr. J. of Mathematics, **14** (1990), 1-12.