İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 50 (1991), 79-99

ÜBER EINE KLASSE VON VERALLGEMEINERTEN LÜCKENREIHEN, DEREN WERTE FÜR ALGEBRAISCHE ARGUMENTE TRANSZENDENT, ABER KEINE U-ZAHLEN SIND I

- Meinem verehrten Lehrer Orhan Ş. İÇEN zum siebzigsten Geburtstag -

B.M. ZEREN

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um einige verallgemeinerte Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten. Es wird gezeigt, dass eine solche Lückenreihe für von Null verschiedene algebraische Argumente unter gewissen Bedingungen über die Koeffizienten und das Argument transzendente Werte annimmt, deren Platz in der Mahler'schen Klasseneinteilung durch Benutzung eines Satzes von A. Baker präzisiert wird.

1. EINLEITUNG

In einer früheren Arbeit (Siehe [6]) hatte ich 1985 unter Anwendung des Roth-LeVeque'sehen Satzes u.a. gezeigt, dass einige schnell konvergente Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten -unter gewissen Bedingungen über diese Koeffizienten- für von Null verschiedene algebraische Argumente von nicht zu hohem Grad transzendente Werte annehmen.

M. H. Oryan hat (1988) (Siehe [4]) diesen Satz auf einfache Lückenreihen verallgemeinert und gleichzeitig vertieft, indem er unter Anwendung eines Baker'schen Satzes (Siehe [1]) gezeigt hat, dass von ihm betrachtete Reihen für algebraische Argumente von nicht zu hohem Grad transzendente Werte annehmen, welche keine *U*-Zahlen sind.

In der vorliegenden Arbeit stelle ich unter Anwendung desselben Satzes von A. Baker dem Resultat von M. H. Oryan einen Satz an die Seite, welcher verallgemeinerte Lückenreihen betrifft und Gegensatz zu den beiden obigen Arbeiten (von mir und von M. H. Oryan) sind die Konvergenzradien meiner Reihen endlich, während die Konvergenzradien jener Arbeiten unendlich waren. Im ersten Teil werden einige für den Beweis nötige bekannte oder daraus unmittelbar zu entnehmende Hilfssätze zusammengestellt, im zweiten Teil wird der Satz gegeben und bewiesen. Anwendungen und Beispiele werden in einer nachfolgenden Fortsetzung dieser Arbeit gegeben.

TEIL I

Im folgenden unterscheiden wir, im Anschluss an A. Baker [1], zwischen der gewöhnlichen (absoluten) Höhe einer algebraischen Zahl α und der Höhe derselben in bezug auf einen ihn enthaltenden Körper K (Fieldheight=Körperhöhe). Die gewöhnliche Höhe wird, wie üblich, mit $H(\alpha)$ bezeichnet, während die Höhe von α in bezug auf K mit $H_K(\alpha)$. Ausserdem gebrauchen wir bisweilen die Grösse (size) einer algebraischen Zahl α: $S(\alpha) = |a_0| + \ldots + |a_n|$; die Grösse in bezug auf K ist durch $s_K(\alpha) = |b_0| + \ldots + |b_m|$ gegeben. Dabei ist die definierende Gleichung von α: $a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$, und diejenige in bezug auf K ist: $b_0 x^m + \ldots + b_m = 0$.

Nun die Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Ist $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ ein Polynom mit ganzen algebraischen Koeffizienten und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seine Wurzeln, so ist jedes Produkt

$$a_0 \alpha^{(\nu_1)} \ldots \alpha^{(\nu_k)} \quad (k \geq 1)$$

ganz algebraisch, wobei $\nu_1, \ldots, \nu_k$ k verschiedene aus den Zahlen $1, \ldots, n$ sind (Siehe [2], S. 91, Hilfssatz b).

Hilfssatz 2. $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ ein Polynom mit ganzen algebraischen Koeffizienten, und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ seine Wurzeln, so ist jedes Produkt

$$a_0^{\Lambda} (\alpha^{(\nu_1)})^{\lambda_1} \ldots (\alpha^{(\nu_r)})^{\lambda_r} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0, \ 1 \leq r \leq n)$$

ganzalgebraisch, wenn $\nu_1, \ldots, \nu_r$ r verschiedene aus den Zahlen $1, \ldots, n$ bedeuten und $\Lambda = \mathrm{Max}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ gesetzt wurde.

Beweis. 1°) Für $\Lambda = 1$ reduziert sich der Hilffssatz 2 auf Hilfssatz 1.

2°) Für $\Lambda > 1$ schreibt man

$$a_0^{\Lambda} (\alpha^{(\nu_1)})^{\lambda_1} \ldots (\alpha^{(\nu_r)})^{\lambda_r} = a_0 (\alpha^{(\nu_1)} \ldots \alpha^{(\nu_r)}) \,.\, a_0^{\Lambda-1} \,.\, (\alpha^{(\nu_1)})^{\lambda_1-1} \ldots (\alpha^{(\nu_r)})^{\lambda_r-1}.$$

Der erste Faktor ist laut Hilfssatz 1, der zweite laut der Induktionsvoraussetzung ganz, also ist die linke Seite als Produkt von zwei ganzen algebraischen Zahlen wieder ganz algebraisch.

Hilfssatz 3 (Mahler). Ist $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ seine Wurzeln, so gilt [1)]

$$|a_0| \,.\, |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+ \leq s(P),$$

wobei $s(P) = |a_0| + \ldots + |a_n|$ gesetzt wurde (Ist $n = 0$, so ist für das Produkt $|\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+$ die Zahl 1 zu nehmen) (Siehe [3]).

1) Hier und im folgenden bedienen wir uns der bequemen Abkürzung $\mathrm{Max}(1, C) = C^+$ für $C \geq 0$.

Folgerung. Ist $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, so gilt wegen $s(P) = |a_0| + \ldots + |a_n| \leq (n+1) H(P)$ folgendes:

$$|a_0| \,.\, |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+ \leq (n+1) H(P).$$

Hilfssatz 4. Ist α eine algebraische Zahl und K ein α enthaltender Zahlkörper, so gilt

$$s_K(\alpha) \leq (s(\alpha))^{\frac{m}{n}},$$

wobei n den Grad von α, m den Grad von K bedeutet.

Beweis. Es sei $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ die Definitionsgleichung von α, $Q(x) = b_0 x^m + \ldots + b_m$ diejenige von α in bezug auf K, dann ist $Q(x) = \mp P(x)$, wobei $m = nl$. Daraus:

$\widehat{Q}(x) \prec (\widehat{P}(x))^l$, wobei $\widehat{P}(x) = |a_0| x^n + \ldots + |a_n|$, $\widehat{Q}(x) = |b_0| x^m + \ldots + |b_m|$ gesetzt wurden. Setzen wir hier $x = 1$, so ergibt sich mit $l = \dfrac{m}{n}$:

$$s_K(\alpha) \leq (s(\alpha))^{\frac{m}{n}}.$$

Folgerung. $H_K(\alpha) < (2\, H(\alpha))^m$.

Beweis. Aus $H_K(\alpha) \leq s_K(\alpha)$ und $s(\alpha) \leq (n+1) H(\alpha)$ folgt mit der Hilfe von Hilfssatz 4:

$$H_K(\alpha) \leq [(n+1) H(\alpha)]^{\frac{m}{n}} \leq [2^n \,.\, H(\alpha)]^{\frac{m}{n}} = 2^m \,.\, H(\alpha)^{\frac{m}{n}} \leq 2^m \,.\, H(\alpha)^m .$$

Hilfssatz 5. Ist $P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und sind $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ seine Wurzeln, so gilt

$$H(P) < 2^n \,.\, |a_0| \,.\, |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+,$$

wobei $H(P)$ die Höhe von $P(x)$ bedeutet.

Beweis. Es ist

$$H(P) = \operatorname*{Max}_{k=0}^{n} \left(|a_0| \,.\, \left| \sum \alpha^{(\nu_1)} \ldots \alpha^{(\nu_k)} \right| \right)$$

mit der Vereinbarung, dass für $k = 0$ unter $\sum \alpha^{(\nu_1)} \ldots \alpha^{(\nu_k)}$ die zahl 1 verstanden wird. Aus der obigen Gleichung erhält man

$$H(P) \leq |a_0| \operatorname*{Max}_{k=1}^{n} \left(1, \sum |\alpha^{(\nu_1)}| \ldots |\alpha^{(\nu_k)}|\right)$$
$$\leq |a_0| \operatorname*{Max}_{k=1}^{n} \left(\sum |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+\right)$$
$$\leq |a_0| \,.\, |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n)}|^+ \operatorname*{Max}_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aus $\binom{n}{k} < 2^n$ ergibt sich nun die Behauptung.

Hilfssatz 6. Es seien $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ beliebige Polynome und $P(x) = \prod_{\rho=1}^{k} P_\rho(x)$. Mit $H(P_\rho)$ sei die Höhe und n_ρ der Grad von $P_\rho(x)$ für $\rho = 1, \ldots, k$ bezeichnet. Dann gilt zwischen den Höhen $H(P_\rho)$ $(\rho = 1, \ldots, k)$ und der Höhe $H(P)$ von $P(x)$ die Ungleichung

$$\prod_{\rho=1}^{k} H(P_\rho) < 2^n (n+1) H(P)$$

mit $n = \text{Grad } (P(x)) = \sum_{\rho=1}^{k} n_\rho$.

Beweis. Es sei $P_\rho(x) = a_{0\rho} x^{n_\rho} + \ldots + a_{n_\rho \rho}$, wobei $H(P_\rho) = \max_{\nu=0}^{n_\rho} |a_{\nu\rho}|$ und $P(x) = b_0 x^n + \ldots + b_n$. Dann ist $b_0 = \prod_{\rho=1}^{k} a_{0\rho}$ und $n = \sum_{\rho=1}^{k} n_\rho$. Wenn die Wurzeln von $P_\rho(x) = 0$ mit $\alpha_\rho^{(1)}, \ldots, \alpha_\rho^{(n_\rho)}$ bezeichnet werden, so sind die Wurzeln von $P(x) = 0$: $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)} = \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(n_1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{(n_2)}, \ldots, \alpha_k^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(n_k)}$. Wenden wir den Hilfssatz 5 auf $P_\rho(x)$ $(\rho = 1, \ldots, k)$ an, so gilt:

$$H(P_\rho) < 2^{n_\rho} \,.\, |a_{0\rho}| \,.\, |\alpha_\rho^{(1)}|^+ \ldots |\alpha_\rho^{(n_\rho)}|^+ \quad (\rho = 1, \ldots, k).$$

Hieraus ergibt sich

$$\prod_{\rho=1}^{k} H(P_\rho) < 2^{\sum_\rho n_\rho} \,.\, \prod_\rho |a_{0\rho}| \,.\, |\alpha^{(1)}|^+ \ldots |\alpha^{(n_\rho)}|^+,$$

d. h.

$$\prod_{\rho=1}^{k} H(P_\rho) < 2^n \,.\, |b_0| \,.\, \prod_{\nu=1}^{n} |\alpha^{(\nu)}|^+ .$$

Die Anwendung von Hilfssatz 3 auf $P(x)$ gibt daraus die Behauptung.

Folgerung. Wenn $P_1(x) \mid P(x)$, dann

$$H(P_1) < 2^n (n+1) H(P).$$

Beweis. Es ist $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$. Die Behauptung ergibt sich aus dem obigen Hilfssatz für $k = 2$, zusammen mit $H(P_2) \geq 1$.

Hilfssatz 7. Es seien α_j ($j = 1, \ldots, k$) Zahlen aus einem festen algebraischen Zahlkörper K vom Grade m und mit den jeweiligen Grössen $s_K(\alpha_j)$ ($j = 1, \ldots, k$). Es sei ferner η eine weitere algebraische Zahl, die mit α_j ($j = 1, \ldots, k$) durch eine Relation

$$\eta = \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

verbunden sein möge, wobei $f(x_1, \ldots, x_k)$ und $g(x_1, \ldots, x_k)$ Polynome mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten in $x_1, \ldots, x_k$ bedeuten. Dann ist der Grad von η $\leq m$ und es gilt für die Körperhöhe $H_K(\eta)$ von η folgende Abschätzung:

$$H_K(\eta) < 2^m \cdot \Big(\prod_{j=1}^{k} (l_j + 1)\Big)^m \cdot H^m \cdot \prod_{j=1}^{k} s_K(\alpha_j)^{l_j}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet l_j das Maximum der Grade von $f(x_1, \ldots, x_k)$ und $g(x_1, \ldots, x_k)$ nach x_j ($j = 1, \ldots, k$), H das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $f(x_1, \ldots, x_k)$ und $g(x_1, \ldots, x_k)$.

Beweis. Es sei der primitive Teil der Hauptgleichung von α_j nach K (mit positiven Anfangskoeffizienten)

$$a_{0j} x^m + \ldots + a_{mj} = 0 \quad (a_{0j} > 0,\ j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Die Hauptgleichung von η nach K ist

$$\prod_{\nu=1}^{m} \left[y - \frac{f(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)})}{g(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)})} \right] = 0. \tag{3}$$

Nennen wir die linke Seite $P(y)$, so wird

$$\prod_{\nu=1}^{m} g(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)}) \cdot P(y) = \prod_{\nu=1}^{m} [y\, g(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)}) - f(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)})].$$

Da wegen des Satzes über symmetrische Funktionen $\prod_{\nu=1}^{m} g(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_k^{(\nu)}) \in \mathbf{Q}$ ist, sind die primitiven Teile von $P(y)$ und

$$\widetilde{P}(y)=\prod_{\nu=1}^{m}[y\,g(\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}})-f(\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}})] \tag{4}$$

gleich. Nennen wir

$$y\,g(x_1,\dots,x_k)-f(x_1,\dots,x_k)=F(y\,;x_1,\dots,x_k) \tag{5}$$

und

$$f(x_1,\dots,x_k)=A_0(x_1,\dots,x_k),\ g(x_1,\dots,x_k)=A_1(x_1,\dots,x_k), \tag{6}$$

so wird

$$F(y\,;x_1,\dots,x_k)=y\,A_1(x_1,\dots,x_k)+A_0(x_1,\dots,x_k) \tag{7}$$

und

$$\widetilde{P}(y)=\prod_{\nu=1}^{m}F(y\,;\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}}). \tag{8}$$

Dabei sind die Grade von Polynome A_0 und A_1 nach $x_j \leq l_j$ $(j=1,\dots,k)$ und das Maximum ihrer Koeffizienten $\leq H$. Dann sind in (7)

$$A_\mu=\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_k=0,\dots,0}^{l_1,\dots,l_k} a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}\,.\,x_1^{\lambda_1}\dots x_k^{\lambda_k}\quad(\mu=0,1) \tag{9}$$

mit $a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}\in\mathbf{Z}$, $|a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}|\leq H$. Nennen wir

$$A_\mu^{\{\nu\}}=\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_k} a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}\,.\,(\alpha_1^{\{\nu\}})^{\lambda_1}\dots(\alpha_k^{\{\nu\}})^{\lambda_k}\quad(\mu=0,1\,;\ \nu=1,\dots,m), \tag{10}$$

so wird

$$|A_\mu^{\{\nu\}}|\leq\Big(\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}|a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}|\Big)(|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+)^{l_1}\dots(|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+)^{l_k} \tag{11}$$

$$(\mu=0,1;\ \nu=1,\dots,m),$$

wobei

$$\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}|a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}|\leq(l_1+1)\dots(l_k+1)\,H\quad(\mu=0,1) \tag{12}$$

gilt. Aus (11) erhält man mit $(l_1+1)\dots(l_k+1)\,H=L$:

$$|A_\mu^{\{\nu\}}|\leq L\,.\prod_{j=1}^{k}(|\alpha_j^{\{\nu\}}|^+)^{l_j}\quad(\mu=0,1;\ \nu=1,\dots,m). \tag{13}$$

Nun suchen wir den primitiven Teil von $\widetilde{P}(y)$: Aus (7) und (8) ergibt sich

$$\widetilde{P}(y)=\prod_{\nu=1}^{m}[y\,A_1(\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}})+A_0(\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}})]. \tag{14}$$

Die Koeffizienten von $\tilde{P}(y)$, wegen (10) und (14), sind lineare Kombinationen mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten folgender Produkte algebraischer Zahlen

$$\prod_{\nu,j=1,1}^{m,k} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}}, 0 \leq \lambda_{\nu j} \leq l_j \; (\nu = 1,\ldots,m;\; j = 1,\ldots,k). \tag{15}$$

Wenn wir eine algebraische Zahl von der Form (15) mit $\prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j}$ multiplizieren, so wird sie ganzalgebraisch wegen Hilfssatz 2 angewendet auf (2). Denn es folgt aus $\prod_{\nu,j=1,1}^{m,k} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}} = \prod_{j=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{m} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}}$, dem Hilfssatz 2 und (15), daß die Zahl $a_{0j} \prod_{\nu=1}^{m} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}}$ ganzalgebraisch ist. Dann ist auch

$$\prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \cdot \prod_{j=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{m} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}} = \prod_{j=1}^{k} \Big[a_{0j}^{l_j} \prod_{\nu=1}^{m} (\alpha_j^{\{\nu\}})^{\lambda_{\nu j}} \Big]$$

ganzalgebraisch. Da die Koeffizienten von

$$\Big(\prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \Big) \tilde{P}(y) = \tilde{\tilde{P}}(y) \tag{16}$$

nach dem obigen ganzalgebraisch und wegen des Satzes von symmetrischen Funktionen rational sind, sind diese Koeffizienten ganz rational. Dann ist also

$$H_K(\eta) \leq H(\tilde{\tilde{P}}), \tag{17}$$

da $\tilde{\tilde{P}}(x)$ sich von dem gesuchten primitiven Teil von $\tilde{P}(x)$ nur um einen ganz rationalen Zahlenfaktor unterscheidet. Nun untersuchen wir $H(\tilde{\tilde{P}})$. Aus (16), (14) und (13) erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{P}}(y) &\prec \Big(\prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \Big) \cdot \prod_{\nu=1}^{m} (y+1) \,.\, L \,.\, \prod_{j=1}^{k} (|\alpha_j^{\{\nu\}}|^{+})^{l_j} \\ &= (y+\mathrm{i})^m \,.\, L^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \cdot \prod_{\nu=1}^{m} \prod_{j=1}^{k} (|\alpha_j^{\{\nu\}}|^{+})^{l_j}, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \prod_{\nu=1}^{m} \prod_{j=1}^{k} (|\alpha_j^{\{\nu\}}|^{+})^{l_j} &= \prod_{j=1}^{k} a_{0j}^{l_j} \prod_{j=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{m} (|\alpha_j^{\{\nu\}}|^{+})^{l_j} = \\ &= \prod_{j=1}^{k} \Big(a_{0j} \cdot \prod_{\nu=1}^{m} |\alpha_j^{\{\nu\}}|^{+} \Big)^{l_j} \end{aligned} \tag{19}$$

ist. Wegen des Hilfssatzes 3 ist

$$a_{0j} \prod_{\nu=1}^{m} | \alpha_j^{(\nu)} |^{+} \leq s_K(\alpha_j), \tag{20}$$

da hier $s(P) = | a_{0j} | + \ldots + | a_{mj} | = s_K(\alpha_j)$ ist. Aus (18), (19) und (20) ergibt sich nun :

$$\tilde{\tilde{P}}(y) \prec (y+1)^m \,.\, L^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} (s_K(\alpha_j))^{l_j}. \tag{21}$$

Unter Benutzung von (13) erhält man dann

$$\tilde{\tilde{P}}(y) \prec (y+1)^m \,.\, [(l_1+1) \ldots (l_k+1)]^m \,.\, H^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} (s_K(\alpha_j))^{l_j}. \tag{22}$$

Daraus erhalten wir :

$$H(\tilde{\tilde{P}}) < 2^m (l_1+1)^m \ldots (l_k+1)^m \,.\; H^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} (s_K(\alpha_j))^{l_j}. \tag{23}$$

Aus (17) und (23) ergibt sich nun :

$$H_K(\eta) < 2^m \,.\, (l_1+1)^m \ldots (l_k+1)^m \,.\, H^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} (s_K(\alpha_j))^{l_j}, \tag{24}$$

was dasselbe ist wie (1).

Folgerung.

$$H_K(\eta) < 2^m (l_1+1)^m \ldots (l_k+1)^m \,.\, H^m \,.\, 2^{m \sum_{j=1}^{k} l_j} \,.\, \prod_{j=1}^{k} H(\alpha_j)^{\frac{m}{m_j} l_j}. \tag{25}$$

Beweis. Unter Berücksichtigung des Hilfssatzes 4 und $s(\alpha_j) \leq (m_j+1)\, H(\alpha_j)$ erhält man aus (24) :

$$H_K(\eta) < 2^m (l_1+1)^m \ldots (l_k+1)^m \,.\, H^m \,.\, \prod_{j=1}^{k} [(m_j+1)\, H(\alpha_j)]^{l_j \cdot \frac{m}{m_j}}, \tag{26}$$

oder, wenn wir auf der rechten Seite die Ungleichung $m_j + 1 \leq 2^{m_j}$ gebrauchen

$$H_K(\eta) < 2^m (l_1+1)^m \ldots (l_k+1)^m \,.\, H^m \,.\, 2^{m \sum_{j=1}^{k} l_j} \,.\, \prod_{j=1}^{k} H(\alpha_j)^{\frac{m}{m_j} l_j}. \tag{27}$$

Hilfssatz 8. Es seien α und β ($\alpha \neq \beta$) zwei algebraische Zahlen aus einem festen Zahlkörper K vom Grade g ($[K:\mathbb{Q}] = g$) und mit den jeweiligen Körperhöhen $H_K(\alpha)$ und $H_K(\beta)$. Dann ist

$$|\alpha-\beta| \geq \frac{1}{\mathfrak{G}(g) \,.\, H_K(\alpha) \,.\, H_K(\beta)} .$$

Beweis. Es seien a_0 und b_0 die (positiv angenommen) Koeffizienten des höchsten Gliedes in den jeweiligen definierenden Gleichungen von α und β. Das Konjugiertensystem von α und β nach K sei jeweils mit $\alpha^{\{i\}}$ und $\beta^{\{i\}}$ $(i=1,\ldots,m)$ bezeichnet werden, wobei $\alpha=\alpha^{\{i\}}$, $\beta=\beta^{\{i\}}$ geseztzt wurden. Dann ist $\prod_{\nu=1}^{g}(\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}})$ als Norm von $\alpha-\beta\neq 0$ in K eine nichtverschwindeude rationale Zahl. Wenn wir das Produkt $\prod_{\nu=1}^{g}(\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}})$ entwickeln, so sehen wir - wegen Hilfssatz 1 - dass jedes Glied durch Multiplikation mit $a_0\, b_0$ zu einer ganzen algebraischen Zahl wird. Danach wird also auch deren Summe zu einer ganzen algebraischen Zahl. Da die Summe, d. h. $\prod_{\nu=1}^{g}(\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}})$ eine rationale Zahl war, ist mithin

$$Z=a_0\, b_0 \prod_{\nu=1}^{g}(\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}) \tag{28}$$

eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl. Hieraus erhalten wir

$$|a_0\, b_0| \,.\, |\alpha-\beta| \,.\, \prod_{\nu=2}^{g}|\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}| \geq 1 \tag{29}$$

und folglich

$$|\alpha-\beta| \geq \frac{1}{|a_0\, b_0| \,.\, \prod_{\nu=2}^{g}|\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}|} . \tag{30}$$

Da

$$|\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}| \leq |\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}|^{+} \quad (\nu=1,\ldots,g)$$

ist, ergibt sich wegen (30) und (31)

$$|\alpha-\beta| \geq \frac{1}{|a_0\, b_0| \prod_{\nu=2}^{g}|\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}|^{+}} . \tag{32}$$

Andererseits ist -wie leicht zu sehen-

$$|\alpha^{\{\nu\}}-\beta^{\{\nu\}}|^{+} \leq 2\,|\alpha^{\{\nu\}}|^{+} \,.\, |\beta^{\{\nu\}}|^{+} . \tag{33}$$

Aus (33) erhalten wir

$$\prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} - \beta^{\{\nu\}} |^{+} \leq 2^{g-1} . \prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} |^{+} . | \beta^{\{\nu\}} |^{+}$$

$$= 2^{g-1} . \prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} |^{+} . \prod_{\nu=2}^{g} | \beta^{\{\nu\}} |^{+} . \tag{34}$$

Dann folgt aus (32) und (34):

$$| a_0 b_0 | \prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} - \beta^{\{\nu\}} |^{+} \leq 2^{g-1} . \left(| a_0 | \prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} |^{+} \right) . \left(| b_0 | \prod_{\nu=2}^{g} | \beta^{\{\nu\}} |^{+} \right) \leq$$

$$\leq 2^{g-1} . \left(| a_0 | \prod_{\nu=1}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} |^{+} \right) . \left(| b_0 | \prod_{\nu=1}^{g} | \beta^{\{\nu\}} |^{+} \right) . \tag{35}$$

Wenden wir nun zweimal die Folgerung vom Hilfssatz 3 auf die rechte Seite von (35) an, so erhalten wir:

$$| a_0 b_0 | \prod_{\nu=2}^{g} | \alpha^{\{\nu\}} - \beta^{\{\nu\}} | \leq 2^{g-1} . (g+1) . H_K(\alpha) . (g+1) . H_K(\beta) . \tag{36}$$

Hieraus ergibt sich

$$| \alpha - \beta | \geq \frac{1}{\mathscr{C}(g) . H_K(\alpha) . H_K(\beta)}$$

mit $\mathscr{C}(g) = 2^{g-1} . (g+1)^2$.

Endlich wollen wir den Satz 1 (Theorem 1) von A. Baker [1] in der von M. H. Oryan [4] gegebenen Fassung zitieren:

Es sei ξ eine reelle oder komplexe Zahl und $\mathscr{H} > 2$. Es seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine Folge von verschiedenen Zahlen von einem algebraischen Zahlkörper K mit Körperhöhen $H_K(\alpha_1), H_K(\alpha_2), \ldots$ derart dass

a) $\quad | \xi - \alpha_i | < H_K(\alpha_i)^{-\mathscr{H}}$

und

b) $\quad \overline{\lim_{i \to \infty}} \dfrac{\log H_K(\alpha_{i+1})}{\log H_K(\alpha_i)} < +\infty .$

Dann ist ξ entweder eine S- oder eine T-Zahl.

TEIL II

Satz. Betrachten wir die Reihe

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \tag{1}$$

mit

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \; (k = 0, 1, \ldots), \; 0 \leq s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < s_3 \leq \ldots,$$

wobei $c_h \left(= \dfrac{b_h}{a_h}, b_h, a_h \in Z, a_h \geq 1 \right)$ rationale Zahlen sind mit $c_h = 0$, wenn $r_n < h < s_n$ aber $c_{r_n} \neq 0$, $c_{s_n} \neq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$. Der Konvergenzradius von $F(z)$ sei mit R bezeichnet.

Es seien ferner folgende Bedingungen erfüllt:

$$R > 0, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log A_{r_n}}{r_n} := \lambda < +\infty \quad (\lambda \geq 0), \tag{3}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} := \theta > 1, \; \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} < +\infty, \; \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_n}{s_{n-1}} < +\infty \tag{4}$$

mit $A_h := [a_0, \ldots, a_h]$ [1].

Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade m, die die Bedingung

$$0 < |\alpha| < R \tag{5}$$

erfüllt. Ausserdem sei $P_n(\alpha) = 0$ für höchstens endlichviele n. Dann für ein solches algebraisches Argument $z = \alpha$ vom Grade m mit

$$m \left(\log \left(\frac{1}{R} \right)^+ + \lambda \right) < \frac{\theta}{2} \log \frac{R}{|\alpha|} - \log s(\alpha) \tag{6}$$

ist $F(\alpha)$ transzendent, aber keine U-Zahl. Wenn man alle Voraussetzungen bis auf $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{s_n}{r_n} < +\infty$ beibehält, diese aber mit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{s_n}{r_n} = +\infty$ ersetzt, so wird $F(\alpha)$ eine U-Zahl.

Beweis des Satzes. 1°) Es ist $R < +\infty$, d. h. der Konvergenzradius der gegebenen Reihe ist endlich:

[1] $[a_0, \ldots, a_h]$ bedeutet, wie üblich, das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_0, \ldots, a_h$.

Es ist $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{h\to\infty}} \sqrt[h]{|c_h|}}$. Dann ist $\overline{\lim\limits_{h\to\infty}} \sqrt[h]{|c_h|} \geq \overline{\lim\limits_{h\to\infty}} \sqrt[r_n]{|c_{r_n}|}$. Aus $c_{r_n} \neq 0$ erhält man $|c_{r_n}| \geq \frac{1}{a_{r_n}}$. Hieraus ergibt sich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[r_n]{|c_{r_n}|} \geq \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[r_n]{|a_{r_n}|}} . \tag{7}$$

Andererseits erhält man aus (3) für ein $\lambda_1 > \lambda$

$$A_{r_n} < e^{\lambda_1 r_n}$$

für genügend grosse Zahlen n. Da $a_{r_n} \leq A_{r_n}$ ist, ergibt sich hieraus

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[r_n]{|a_{r_n}|} \leq e^{\lambda_1} .$$

Da λ_1 beliebig nahe an λ gewählt werden kann, folgt hieraus

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[r_n]{|a_{r_n}|} \leq e^{\lambda} . \tag{8}$$

Dann folgt aus (7) und (8) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[h]{|c_h|} \geq e^{-\lambda}$, d. h.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{h\to\infty}} \sqrt[h]{|c_h|}} \leq e^{\lambda} ;$$

also ist R endlich.

2°) Wir wählen nun drei reelle Zahlen r, θ_1, λ_1 so, dass folgende Ungleichungen gelten :

$$|\alpha| < r < R , \tag{9}$$

$$1 < \theta_1 < \theta , \tag{10}$$

$$\lambda_1 > \lambda , \tag{11}$$

$$m\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)^{+} + \lambda_1\right) < \frac{\theta_1}{2} \log \frac{r}{|\alpha|} - \log s(\alpha) . \tag{12}$$

Diese Wahl ist möglich : Bei (9)-(11) ist das klar; bei (12) folgt das aus der Stetigkeit der beiden Seiten von (6) in Bezug auf R, θ, λ. Nun wählen wir n so gross, etwa $n > N_1$, dass folgende Ungleichung gilt :

$$\frac{s_n}{r_n} > \theta_1 , \text{ für } n > N_1 . \tag{13}$$

3°) Wir bilden nun $\beta = F(\alpha)$. Wir setzen

$$\beta = \beta_n + \rho_n \tag{14}$$

mit

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\alpha) = \sum_{h=0}^{r_n} c_h \alpha^h, \tag{15}$$

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(\alpha) = \sum_{h=s_n}^{\infty} c_h \alpha^h. \tag{16}$$

Wir wollen jetzt die Höhe $H(\beta_n)$ von β_n nach oben abschätzen: Multiplizieren wir die beiden Seiten von (15) mit A_{r_n}, so erhält man

$$A_{r_n} \beta_n - \sum_{h=0}^{r_n} A_{r_n} c_h \alpha^h = 0. \tag{17}$$

Um nun $H(\beta_n)$ abzuschätzen, wenden wir den Hilfssatz 7 auf die Relation (17) an mit $k = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $l_1 = r_n$, $\eta = \beta_n$ und

$$F(y, x) = A_{r_n} y - \sum_{h=0}^{r_n} A_{r_n} c_h z^h.$$

Ist H die Höhe von $F(y, x)$, so ist

$$H = \operatorname{Max}(A_{r_n}, A_{r_n} | c_0 |, \ldots, A_{r_n} | c_{r_n} |). \tag{18}$$

Nach den Cauchyschen Ungleichungen ist mm

$$| c_h | \leq \frac{M(r)}{r^h} \quad (h = 0, 1, \ldots), \tag{19}$$

wobei $M(r)$ das Maximum von $|F(z)|$ auf $|z| = r$ ist. Aus (18) folgt mit Hilfe von (19):

$$H \leq A_{r_n} . \operatorname{Max}(1, M(r)) . \left(\operatorname{Max}\left(1, \frac{1}{r}\right)\right)^{r_n} = A_{r_n} . M(r)^{+} . \left(\left(\frac{1}{r}\right)^{+}\right)^{r_n}. \tag{20}$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes 7 erhält man

$$H_K(\beta_n) < 2^m . (r_n + 1)^m . H^m . (s_K(\alpha))^{r_n \, 1)}. \tag{21}$$

Dabei ist $K = \mathbf{Q}(\alpha)$, $m = [K : \mathbf{Q}]$. Nennen wir $B_{r_n} = 2 . (M(r))^{+} . (r_n + 1) A_{r_n}$, so erhalten wir aus (20) und (21)

$$H_K(\beta_n) < B_{r_n}^m . \left(\left(\frac{1}{r}\right)^{+}\right)^{m r_n} . (s(\alpha))^{r_n}. \tag{22}$$

Es ist jetzt

[1] Wegen $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ ist $s_K(\alpha) = s(\alpha)$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log B_{r_n}}{r_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log (2\, M(r)^+)}{r_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log (r_n + 1)}{r_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log A_{r_n}}{r_n},$$

woraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log B_{r_n}}{r_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log A_{r_n}}{r_n} = \lambda ,$$

d. h.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log B_{r_n}}{r_n} \leq \lambda . \tag{23}$$

Für genügend grosse Zahlen n ($n \geq N_2 \geq N_1$) wird also

$$\frac{\log B_{r_n}}{r_n} < \lambda_1$$

d. h.

$$B_{r_n} < e^{\lambda_1 r_n} \quad (n > N_2) . \tag{24}$$

Unter Benutzung von (24) erhält man aus (22) :

$$H_K(\beta_n) \leq e^{\lambda_1 m r_n} . \left(\left(\frac{1}{r}\right)^+\right)^{m r_n} . (s(\alpha))^{r_n} \quad (n > N_2) . \tag{25}$$

Hieraus ergibt sich für $n > N_2$

$$H_K(\beta_n) \leq e^{\left\{m\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)^+ + \lambda_1\right] + \log s(\alpha)\right\} r_n} \tag{26}$$

und mit Hilfe von (12) :

$$H_K(\beta_n) < e^{\left(\frac{\theta_1}{2}\log\frac{r}{|\alpha|}\right) r_n} \quad (n > N_2) ,$$

oder

$$H_K(\beta_n) < \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_1}{2} r_n} \quad (n > N_2) . \tag{27}$$

4°) Wir wollen jetzt $H_K(\beta_n)$ nach unten abschätzen :

Es ist laut Voraussetzung des Satzes $\beta_n - \beta_{n-1} = P_n(\alpha) \neq 0$ für genügend grosses n, etwa für $n > N_3$ ($N_3 \geq N_2$), und

$$| \beta_n - \beta_{n-1} | \leq | P_n(\alpha) | \leq | c_{s_{n-1}} | . | \alpha |^{s_{n-1}} + \dots$$

$$\leq \sum_{h=s_{n-1}}^{\infty} \frac{M(r)}{r^h} | \alpha |^h \leq \frac{M(r)}{1 - \frac{|\alpha|}{r}} . \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}} . \tag{28}$$

Falls wir

$$\frac{M(r)}{1-\dfrac{|\alpha|}{r}} = C_0(r, \alpha) = C_0$$

setzen, so ist $C_0 > 0$ und (28) wird zu

$$|\beta_n - \beta_{n-1}| \leq C_0 \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}}. \tag{29}$$

Andererseits folgt aus $\beta_n - \beta_{n-1} \neq 0$ für $n > N_3$ laut Hilfssatz 8:

$$|\beta_n - \beta_{n-1}| > \frac{1}{\mathfrak{C} \cdot H_K(\beta_n) \cdot H_K(\beta_{n-1})} \quad (n > N_3). \tag{30}$$

Dabei ist $\mathfrak{C}$ eine nur von m abhängende positive Konstante. Wenn wir nun (29) und (30) verbinden, erhalten wir

$$\frac{1}{\mathfrak{C} \cdot H_K(\beta_n) \cdot H_K(\beta_{n-1})} < C_0 \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_{n-1}}. \tag{31}$$

Die Einsetzung von (27) in (31) gibt uns für $n > N_4 = N_3 + 1$

$$H_K(\beta_n) > C_1 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{s_{n-1} - \frac{\theta_1}{2} r_{n-1}} \quad (n > N_4). \tag{32}$$

Dabei wurde $C_1 = \dfrac{1}{C_0 \mathfrak{C}}$ gesetzt, woraus $C_1 > 0$. Da $n - 1 > N_3 \geq N_2 \geq N_1$ gilt, so folgt aus (13), dass $s_{n-1} > r_{n-1}\, \theta_1$ für diese n, und dies eingesetzt in (32) gibt

$$H_K(\beta_n) > C_1 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{s_{n-1}}{2}} \quad (n > N_3), \tag{33}$$

was die gesuchte untere Abschätzung für $H_K(\beta_n)$ bildet.

5°) Wir behaupten nun, dass für genügend grosse n $\{H_K(\beta_n)\}$ eine monoton wachsende Folge bildet: Es sei

$$1 < \theta_1 < 0_2 < 0. \tag{34}$$

Laut der Voraussetzung des Satzes existiert ein $N_5 \, (N_5 \geq N_4)$, so dass für $n > N_5$

$$\frac{s_n}{r_n} > \theta_2 \tag{35}$$

wird. Aus (33) und (35) folgt nun

$$H_K(\beta_{n+1}) > C_1 \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_2}{2} r_n} \quad (n > N_5). \tag{36}$$

Andererseits war laut (27):

$$H_K(\beta_n) < \left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{\frac{\theta_1}{2} r_n} \qquad (n > N_5). \tag{37}$$

Da laut (9) $\frac{r}{|\alpha|} > 1$ war und $\theta_2 > \theta_1$ ist, und für $n \to \infty$ $r_n \to +\infty$, $s_n \to +\infty$ sind, so wird die rechte Seite von (36) grösser als die rechte Seite von (37) für genügend grosse n, etwa für $n > N_6$ $(N_6 \geq N_5)$. Also gilt

$$H_K(\beta_{n+1}) > H_K(\beta_n) \quad (n > N_6), \tag{38}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Hieraus folgt, dass für $n > N_6$ die β_n alle voneinander verschieden sind.

6°) Wir wollen jetzt $|\beta - \beta_n| = |\rho_n|$ nach oben abschätzen: Aus (16) folgt mit Hilfe von (19)

$$|\beta - \beta_n| = |\rho_n| \leq \sum_{h=s_n}^{\infty} \frac{M(r)}{r^h} |\alpha|^h \leq \frac{M(r)}{1 - \frac{|\alpha|}{r}} \cdot \left(\frac{|\alpha|}{r}\right)^{s_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus ergibt sich mit der Abkürzung von (28)

$$|\beta - \beta_n| \leq \frac{C_0}{\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)^{s_n}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Nun erhält man aus (39) und (27):

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_0}{H_K(\beta_n)^{\frac{s_n}{r_n} \frac{2}{\theta_1}}} \qquad (n > N_2). \tag{40}$$

Wenn wir (34) und (35) mitberücksichtigen, so wird (40) zu

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_0}{H_K(\beta_n)^{\varkappa}} \qquad (n > N_6), \tag{41}$$

wobei $\varkappa = 2\frac{\theta_2}{\theta_1}$ gesetzt wurde. Wegen $\theta_2 > \theta_1$ ist $\varkappa > 2$, so dass (41) mit $\varkappa > 2$ für unendlichviele verschiedene algebraische Zahlen β_n aus dem festen Körper K gilt (weil $H_K(\beta_n)$ für $n > N_6$ monoton wachsend war, sind β_n für $n > N_6$ voneinander verschieden).

Wenn wir in der Folgerung des Hilfssatzes 6 für $P = 0$ die definierende Gleichung von β_n in K, für $P_1 = 0$ die absolute definierende Gleichung für derselben und für n den Grad m von K nehmen, so ergibt sich

$$H(\beta_n) < C_1(m) \,.\, H_K(\beta_n) \tag{42}$$

mit $C_1(m) = 2^m(m+1)$. Aus (41) und (42) erhält man

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_2}{H(\beta_n)^{\varkappa}} \qquad (n > N_6) \tag{43}$$

mit einer von n unabhängigen positiven Konstanten C_2. Hier gilt $\lim_{n\to\infty} H(\beta_n) = +\infty$, weil nach der Folgerung vom Hilfssatz 4 $H(\alpha) \geq \frac{1}{2}[H_K(\alpha)]^{\frac{1}{m}}$ und nach der unteren Abschätzung (33) von $H_K(\beta_n)$, $\lim_{n\to\infty} H_K(\beta_n) = +\infty$ war. Wenn man diese Tatsache berücksichtigt, folgt aus (43)

$$|\beta - \beta_n| < \frac{1}{H(\beta_n)^{\varkappa'}} \qquad (n > N_7), \tag{44}$$

wobei $\varkappa'$ gemäss $2 < \varkappa' < \varkappa$ gewählt und N_7 $(\geq N_6)$ darauf abgestimmt werden kann. Da die β_n in (44) alle voneinander verschieden sind, widerspricht (44) dem Roth-LeVeque'schen Satz im Falle der Algebraizität von β. Also ist β transzendent.

7°) Nun wollen wir auf $\{\beta_n\}$ den Satz von A. Baker [1] in der Fassung von M. H. Oryan [4] anwenden, um die Natur der Transzendenz von β zu präzisieren: Weil die Folge $\{H_K(\beta_n)\}$ nach (38) für $n > N_6$ monoton wachsend ist, sind alle β_n für $n > N_6$ voneinander verschieden. Nun bilden wir das Verhältnis $\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)}$. Wegen (33) und (37) für $n+1$ statt n erhält man für $n > N_7$ (da $N_7 \geq N_6 \geq N_5 \geq N_3$)

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \frac{\left(\frac{\theta_1}{2}\log\frac{r}{|\alpha|}\right) r_{n+1}}{\log C_1 + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)\right] s_{n-1}} \qquad (n > N_7),$$

oder mit einigen Veränderungen:

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \theta_1 \,.\, \frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} \,.\, \frac{1}{1 + \frac{C'}{s_{n-1}}} \qquad (n > N_7) \tag{45}$$

mit $C' = \frac{2\log C_1}{\log\frac{r}{|\alpha|}}$. Auf der rechten Seite von (45) steht das Verhältnis $\frac{r_{n+1}}{s_{n-1}}$, was sich folgenderweise schreiben lässt:

$$\frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} = \frac{r_{n+1}}{s_n} \cdot \frac{s_n}{r_n} \cdot \frac{r_n}{s_{n-1}}, \tag{46}$$

woraus folgt :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_{n+1}}{s_{n-1}} \leq \phi \cdot \Theta \cdot \phi = \Theta \cdot \phi^2, \tag{47}$$

wobei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} = \Theta$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{r_n}{s_{n-1}} = \phi$ gesetzt wurde. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C'}{s_{n-1}} = 0$ ist, folgt aus (45) und (47) :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leq \frac{\theta_1}{2} \cdot \Theta \cdot \phi^2 \cdot 1 = \frac{\theta_1 \cdot \Theta \cdot \phi^2}{2} \tag{48}$$

und da θ_1 gleich am Anfang beliebig nahe an θ gewählt werden darf, erhalten wir aus (48) :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leq \frac{\theta \cdot \Theta \cdot \phi^2}{2}, \tag{49}$$

woraus laut dem oben genannten Satz von A. Baker angewendet auf P und die Folge $\{\beta_n\}$ mit $n > N_7$ folgt, dass β keine U-Zahl ist. Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} < +\infty \tag{50}$$

bewiesen.

Nun betrachten wir den 2. Teil des Satzes betreffend den Fall

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} = +\infty, \tag{51}$$

die anderen Voraussetzungen seien erhalten : Aus der Folge $\left\{\frac{s_n}{r_n}\right\}$ wählen wir eine Teilfolge $\left\{\frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}\right\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_{n_k}}{r_{n_k}} = +\infty, \tag{52}$$

was laut (51) möglich ist. Aus (40) erhält man

$$|\beta - \beta_{n_k}| < \frac{C_0}{H_K(\beta_{n_k})^{\frac{2}{\theta_1} \cdot \frac{s_{n_k}}{r_{n_k}}}} \qquad (n_k > N_6), \tag{53}$$

da $N_6 \geq N_2$ ist. Da $H_K(\beta_n) \to +\infty$ ist, ist auch $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$. Andererseits ist wegen der Folgerung des Hilfssatzes 4 und derjenigen des Hilfssatzes 6 :

$$\frac{1}{2} H_K(\beta_{n_k})^{\frac{1}{m}} < H(\beta_{n_k}) < c(m).\, H_K(\beta_{n_k}) \tag{54}$$

mit β_n statt α und $m = [K:\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$ und $c(m) = 2^m(m+1)$ (statt n in Hilfssatz 6 wurde hier m gesetzt). Ist $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$ für $n_k \to \infty$, so wird $H(\beta_{n_k}) \to +\infty$ für $n_k \to \infty$ wegen der linken Hälfte von (54). Wegen $H_K(\beta_n) \to +\infty$ wird für $n_k > N_8$ $(\geq N_6)$

$$H_K(\beta_{n_k}) > c(m)\,. \tag{55}$$

Dann ist für $n > N_8$

$$H(\beta_{n_k}) < (H_K(\beta_{n_k}))^2 \tag{56}$$

wegen (55) und der rechten Hälfte von (54). Aus (53) und (56) folgert man nun

$$|\beta - \beta_{nk}| < \frac{C_0}{H_K(\beta_{n_k})^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\theta_1}\cdot\frac{s_{nk}}{r_{nk}}}} \qquad (n > N_8),$$

d. h.

$$|\beta - \beta_{nk}| < \frac{C_0}{H(\beta_{n_k})^{\frac{1}{\theta_1}\cdot\frac{s_{nk}}{r_{nk}}}} \qquad (n > N_8) \tag{57}$$

mit $\lim\limits_{n_k\to\infty} H(\beta_{n_k}) = +\infty$ und $\lim\limits_{n_k\to\infty} \frac{s_{nk}}{r_{nk}} = +\infty$. Aus $\{\beta_{n_k}\}$ kann man eine Teilfolge $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ auswählen, so dass $\{H(\beta_{n_{k_j}})\}$ mit $n_{k_j} > N_7$ eine monoton wachsende Folge ist. Aus (57) erhält man nun

$$|\beta - \beta_{n_{k_j}}| < \frac{C_0}{H(\beta_{n_{k_j}})^{\frac{1}{\theta_1}\cdot\frac{s_{nkj}}{r_{nkj}}}} \qquad (n_{k_j} > N_8) \tag{58}$$

mit $H(\beta_{n_{k_j}})$ monoton wachsend und $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{s_{n_{k_j}}}{r_{n_{k_j}}} = +\infty$. Aus (58) folgt nun

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\log \frac{1}{|\beta - \beta_{n_{k_j}}|}}{\log H(\beta_{n_{k_j}})} \geq \varlimsup_{j\to\infty} \left(\frac{1}{\theta_1}\cdot\frac{s_{n_{k_j}}}{r_{n_{k_j}}}\right). \tag{59}$$

Da die rechte Seite von (59) laut dem vorhin gesagten $+\infty$ ist, so folgt auch, dass

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{H(\beta_{n_{k_j}})\,|\,\beta-\beta_{n_{k_j}}|}}{\log H(\beta_{n_{k_j}})} = -1 + \varlimsup_{j\to\infty}\left(\frac{1}{\theta_1}\cdot\frac{s_{n_{k_j}}}{r_{n_{k_j}}}\right) = +\infty \tag{60}$$

ist. Andererseits ist

$$w_m^*(\beta) = \varlimsup_{H\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{H\,.\,w_m^*(\beta, H)}}{\log H} \tag{61}$$

und

$$w_m^*(\beta, H) = \min_{\substack{\gamma^\circ\leq m\\ H(\gamma)\leq H}} |\,\beta-\gamma\,| \leq |\,\beta-\beta_{n_{k_j}}|\,. \tag{62}$$

Aus (60), (61) und (62) folgt

$$w_m^*(\beta) \geq \varlimsup_{j\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{H(\beta_{n_{k_j}})\,.\,|\,\beta-\beta_{n_{k_j}}|}}{\log H(\beta_{n_{k_j}})} = +\infty\,.$$

Also ist β eine U^*-Zahl vom höchstens m-ten Grad und folglich eine U-Zahl vom höchstens m-ten Grad.

Folgerung. Im Wortlaut des obigen Satzes kann man (6) durch die folgende stärkere Voraussetzung ersetzen :

$$m < \frac{\dfrac{\theta}{2}\log\dfrac{R}{|\,\alpha\,|} - \log H(\alpha)}{\log\left(\dfrac{1}{R}\right)^{+} + \lambda + \log 2}\,. \tag{63'}$$

Beweis der Folgerung. Aus (6') erhält man

$$m\left[\log\left(\frac{1}{R}\right)^{+} + \lambda\right] + m\log 2 < \frac{\theta}{2}\log\frac{R}{|\,\alpha\,|} - \log H(\alpha),$$

woraus :

$$m\left[\log\left(\frac{1}{R}\right)^{+} + \lambda\right] < \frac{\theta}{2}\log\frac{R}{|\,\alpha\,|} - \log\,[2^m\,H(\alpha)]\,.$$

Da $s(\alpha) \leq (m+1)\,H(\alpha) \leq 2^m\,H(\alpha)$ gilt, ergibt sich aus der letzten Ungleichung

$$m\left[\log\left(\frac{1}{R}\right)^{+} + \lambda\right] < \frac{\theta}{2}\log\frac{R}{|\,\alpha\,|} - \log s(\alpha)\,,$$

d. h. (6).

LITERATUR

[1] BAKER, A. : *On Mahler's classification of transcendental numbers*, Acta Mathematica, **111** (1964), 97-120.

[2] HECKE, E. : Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, 1923.

[3] MAHLER, K. : *An application of Jensen formula to polynomials*, Mathematika, 7 (1960), 98-100.

[4] ORYAN, M.H. : *On power series and Mahler's U-numbers* (will appear in Mathematica Scandinavica).

[5] SCHNEIDER, Th. : Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

[6] ZEREN, B.M. : *Über die Transzendenz der Werte einiger schnell konvergenter Potenzreihen für algebraische Argumente*, Bulletin of the Technical University of İstanbul, **38** (1985), Number 4, 473-496.

MATHEMATISCHE ABTEILUNG DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT ISTANBUL
VEZNECİLER-İSTANBUL/TÜRKEİ

ÖZET

Bu çalışmada katsayıları rasyonel olan bazı genelleştirilmiş boşluk serileri ele alınmakta ve bu boşluk serilerinin belirli koşullar altında cebirsel argümanlar için transandant değerler aldıkları ve bu değerlerin Mahler sınıflandırmasındaki yeri A. Baker'in verdiği bir teoremi kullanmak suretiyle belirtilmektedir.