İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 51 (1992), 41-45

SUR LES GROUPES DONT LES CARACTERES SONT A VALEURS RATIONNELLES

I. ARMEANU

Dans cette note nous présentons quelques théorèmes qui donnent des conditions suffisantes afin qu'un caractère irréductible χ d'un **Q**-groupe ait l'indice de Schur $m_{\mathbf{Q}}(\chi) = 1$.

Les groupes utilisés sont finis et les définitions et les symboles sont ceux de Isaacs [4] et Curtis et Reiner [1].

Théorème 1. Soit G un groupe qui a des caractères à valeurs rationnelles. Soit $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ qui est réalisable dans le corps **R**. Alors, il existe $a \in G$, élément d'ordre impair et il existe un 2-groupe de Sylow H dans $C^*(a)$, tel que si $H_0 \trianglelefteq H$ est un 2-groupe de Sylow dans $C(a)$, il existe un caractère $\lambda \times \mu \in \mathrm{Irr}(A \times H_0)$ où $A = \langle a \rangle$, $\lambda \in \mathrm{Irr}(A)$, $\mu \in \mathrm{Irr}(H_0)$ tel que

i) $(\chi_{A \times H_0}, \lambda \times \mu)$ est impair ;

ii) le caractère induit $(\lambda \times \mu)^{AH}$ est réalisable dans le corps **R** ;

iii) μ est réalisable dans **Q**.

Preuve. D'après le théorème 1.1. de Gow [3], il existe $A = \langle a \rangle$, $a \in G$ un élément d'ordre impair, H un 2-groupe de Sylow dans $C^*(a)$ et $\theta \in \mathrm{Irr}(AH)$ à valeurs réelles tel que (χ, θ^G) est impair et $\ker \theta \not\supseteq A$.

Soit H_0 un 2-groupe de Sylow dans $C(a)$, de manière que $H_0 \trianglelefteq H$. Un calcul simple prouve qu'il existe $\mu \in \mathrm{Irr}(H_0)$ et $\lambda \in \mathrm{Irr}(A)$ tel que $\theta = (\lambda \times \mu)^{AH}$. Compte tenu du théorème de réciprocité de Frobenius, $(\chi_{AH}, \theta) = (\chi_{AH_0}, \lambda \times \mu)$ est impair. Parce que (χ, θ^G) est impair, $m_{\mathbf{R}}(\chi) = 1$ et $\mathbf{Q}(\theta) \subset \mathbf{R}$ d'après le théorème de Brauer-Speiser on obtient $m_{\mathbf{R}}(\theta) = 1$. D'après le théorème de Clifford [4] page 79

$$(\lambda \times \mu)^{AH} \mid_{AH_0} = \sum_{t \in T} \lambda^t \cdot \mu^t ,$$

où T est une transversale du H_0 dans H. Soit G_2 le 2-Sylow groupe dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\lambda \times \mu) ; \mathbf{Q})$. Parce que $[AH : AH_0] = 2^n$, $\mathbf{Q}(\theta) \subset \mathbf{R}$ et $\ker \theta \not\supseteq A$ on a

$$(\lambda\times\mu)^{AH}\mid_{AH_0}=\sum_{\sigma\in G_2}(\lambda\times\mu)^{\sigma}$$

et on obtient que $[AH : AH_0] = [\mathbf{Q}(\lambda) ; \mathbf{Q}]$, et alors $\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\lambda\times\mu)$ et $\mathbf{Q}(\mu)\subset\mathbf{Q}(\lambda)$. Du moment que μ est un caractère irréductible d'un 2-groupe, on obtient que $\mathbf{Q}(\mu)\cap\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}$, donc μ est à valeurs rationnelles.

Parce que χ_{AH_0} est réalisable dans $\mathbf{R}$ et $(\lambda\times\mu , \chi_{AH_0})$ est impaire, on obtient que $m_{\mathbf{R}}(\lambda\times\mu)=1$. Parce que $m_{\mathbf{R}}(\lambda)=1$ et $[\mathbf{R}(\lambda) , \mathbf{R}]$ est impaire, d'après [4] 10.10. page 172, on obtient que $m_{\mathbf{R}}(\lambda\times\mu) = m_{\mathbf{R}}(\lambda)\ m_{\mathbf{R}}(\mu)$, donc $m_{\mathbf{R}}(\mu) = 1$. Mais μ est un caractère rationnel d'un 2-groupe et donc est réalisable dans le corps $\mathbf{Q}$.

Théorème 2. Soit $\lambda\times\mu$ le caractère obtenu par le théorème 1 et U un 2-groupe de Sylow dans $N_G(A)$ tel que $H_0\trianglelefteq H$. Supposons que μ soit invariant dans U. Soit encore $\tau\in\mathrm{Irr}(A)$ le caractère fidèle, de manière que $\tau^n=\lambda$. Alors :

i) $(\tau\times\mu)^{AU}$ est irréductible à valeurs dans un corps K extension de degré impair du corps $\mathbf{Q}$.

ii) $(\lambda\times\mu)^{AU}$ est à valeurs dans K et si $(\tau\times\mu)^{AU}$ est réalisable dans K, alors $(\lambda\times\mu)^{AU}$ est réalisable dans K aussi.

Preuve. i) Parce que le stabilisateur du $\tau\times\mu$ est AH_0, on obtient que $(\tau\times\mu)^{AU}$ est irréductible. Puisque μ est invariant dans U on a

$$(\tau\times\mu)^{AU}(a x) = \sum_{t\in T}\tau(tat^{-1})\ \mu(x),$$

où T est une transversale de H_0 dans U et $x\in H_0$. Soit σ un automorphisme d'ordre puissance de 2 dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\omega_{0(a)}) ; \mathbf{Q})$ (où $\omega_{0(a)}$ est une racine primitive d'ordre $o(a)$ de l'unité). Le caractère μ étant à valeurs rationnelles on obtient

$$((\tau\times\mu)^{AU})^{\sigma} = (\tau\times\mu)^{AU},$$

donc $K = \mathbf{Q}((\tau\times\mu)^{AU})$ est un corps extension de degré impair de $\mathbf{Q}$.

ii) Soient $T_\tau , T_\mu , T_\lambda$ les représentations correspondant aux caractères τ , μ , λ. Soit $z_1 = 1 , z_2 ,\ldots, z_n$ une transversale de H_0 en U. Alors le composant (i , j) de la matrice de la représentation $(T_\tau\times T_\mu)^{AU}(a x t)$ est

$$(T_\tau\times T_\mu)^0 (z_i a x t z_j^{-1}) = T_\tau^0(z_i a z_i^{-1})\ T_\mu^0(z_i x z_i^{-1} z_i t z_j^{-1}),$$

où $x\in H_0$ et t appartient à la transversale de H_0 en U. Donc si $z_i t z_j^{-1}\notin H_0$, alors

$$(T_\tau\times T_\mu)^0 (z_i a x t z_j^{-1}) = 0$$

et si $z_i t z_j^{-1}\in H_0$ alors

$$(T_\tau \times T_\mu)^0 \, (z_i \, a \, x \, t z_j^{-1}) = T_\tau \, (z_i \, a \, z_i^{-1}) \; T_\mu \, (z_i \, x \, t z_j^{-1}).$$

De la même manière, le composant (i, j) de la matrice de la représentation $(T_\lambda \times T_\mu)^{AU}$ $(a x t)$ est nul pour $z_i \, t \, z_j^{-1} \notin H_0$ et $T_\lambda \, (z_i \, a \, z_i^{-1}) \; T_\mu \, (z_i \, x \, t z_j^{-1})$ à la condition que $z_i \, t \, z_j^{-1} \in H_0$. Mais $T_\lambda \, (z_i \, a \, z_i^{-1}) = \lambda^z \; (a)$ et $T_\tau \, (z_i \, a \, z_i^{-1}) = \tau^{z_i} \, (a)$. Donc pour les composants on obtient que

$$((T_\lambda \times T_\mu)^{AU} \, (a \, x \, t))_{(i,j)} = ((T_\tau \times T_\mu)^{AU} \, (a^k \, x \, t))_{(i,j)} .$$

Il en résulte que si $(\tau \times \mu)^{AU}$ est réalisable dans K, alors $(\lambda \times \mu)^{AU}$ est réalisable dans le corps K aussi.

Théorème 3. Si $(\lambda \times \mu)^{AU}$ est réalisable dans le corps K, alors χ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.

Preuve. Parce que $(\chi, (\lambda \times \mu)^G)$ est impair, et l'indice de Schur

$$m_K((\lambda \times \mu)^{AU}) = 1$$

compte tenu du lemme 10.4 page 162 de [4], on obtient $m_{\mathbf{Q}}(\chi) = 1$.

Théorème 4. S'il existe $\theta \in \operatorname{Irr}(U)$ à valeurs rationnelles tel que $\theta \mid_{H_0} = \mu$, alors χ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.

Preuve. Parce que μ est réalisable dans $\mathbf{Q}$ et θ sera réalisable dans $\mathbf{Q}$. En calculant, on obtient

$$((\tau \times \mu)^{AU}, \theta^{AU}) = 1.$$

Donc $(\tau \times \mu)^{AU}$ est réalisable dans K et en vertu du théorème 2 $(\lambda \times \mu)^{AU}$ est réalisable aussi dans K. Conformément au théorème 3, on obtient que χ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.

Corollaire. Si μ est linéaire et s'il existe θ tel que $\theta \mid_{H_0} = \mu$, alors χ est réalisable dans $\mathbf{Q}$.

Lemme. $(\lambda \times \mu)^{AU}$ est à valeurs dans K si et seulement si μ est U-invariant.

Preuve. En vertu du théorème de Clifford

$$(\lambda \times \mu)^{AU} \mid_{AH_0} = \sum_{t \in T} \lambda^t \times \mu^t,$$

où T est une transversale de H_0 dans U. Parce que pour tout $\sigma \in \operatorname{Gal}(\mathbf{Q}(\omega_{0(a)}), \mathbf{Q})$ d'ordre puissance de 2,

$$((\lambda \times \mu)^{AU})^\sigma = (\lambda \times \mu)^{AU},$$

on obtient qu'il existe un élément $t \in T$ si bien que

$$(\lambda\times\mu)^{\sigma}=\lambda^{t}\times\mu^{t}.$$

Parce que Gal $(\mathbf{Q}(\omega_{0(a)}),\mathbf{Q})\simeq U/H_0$ et μ est à valeurs rationnelles on obtient que pour tout $t\in T$, il existe un automorphisme $\sigma\in$ Gai $(\mathbf{Q}(\omega_{0(a)}),\mathbf{Q})$ d'ordre puissance de 2 tel que

$$(\lambda\times\mu)^{t}=\lambda^{t}\times\mu^{t}=(\lambda\times\mu)^{\sigma}=\lambda^{\sigma}\times\mu=\lambda^{t}\times\mu,$$

donc $\mu=\mu^{t}$.

Théorème 5. Soit p un nombre premier impair, $p/|G|$, tel que $p-1$ n'est pas divisible par 4. Supposons que $o(a)=p^{k}$. Alors

i) μ est invariant dans U et il existe $\theta\in\mathrm{Irr}(U)$ de telle sorte que $\theta|_{H_0}=\mu$.

ii) $\mathbf{Q}(\theta)=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et χ est réalisable dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Preuve. Évidemment $U=H$. D'après la lemme il résulte que μ est invariant dans U. Parce que U/H_0 est cyclique, il existe $\theta\in\mathrm{Irr}(U)$ tel que $\theta|_{H_0}=\mu$. Alors, l'invariant de Frobenius-Schur $\nu_2((\lambda\times\mu)^{AU})=1$ et un calcul direct nous donne que

$$\nu_2((\lambda\times\mu)^{AU})=(1/|H_0|)\sum_{h\in H_0}\mu((ht)^2)$$

où 1, t est une transversale de H_0 dans U. Donc,

$$\nu_2(\theta)=(1/|H|)\sum_{h\in H}\theta(h^2)=(\mathrm{i}/|H|)\sum_{h\in H_0}(\mu(h^2)+\mu((ht)^2))=1,$$

c'est-à-dire θ est réalisable dans $\mathbf{R}$. Mais $\mu^{U}=\theta+\alpha\,.\,\theta$ où $\alpha\in\mathrm{Irr}(U/H_0)$. Si $\mathbf{Q}(\theta)\neq\mathbf{Q}$, soit $\sigma\in$ Gai $(\mathbf{Q}(\theta),\mathbf{Q})$ de sorte que $\theta^{\sigma}\neq\theta$. Alors, $\theta^{\sigma}=\alpha\theta$ et il en résulte que $|$Gai $(\mathbf{Q}(\theta),\mathbf{Q})|=2$. Parce que $\mathbf{Q}(\theta)\subseteq\mathbf{Q}(\omega_{2^n})$ et θ est réel on obtient que $\mathbf{Q}(\theta)$ est une extension quadratique réelle de $\mathbf{Q}$, donc $\mathbf{Q}(\theta)=$ $=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Corollaire 1. Soit G un groupe d'ordre $|G|=2^r3^s$ avec des caractères à valeurs rationnelles et soit $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$. Alors χ est réalisable dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Corollaire 2. Si G est un groupe résoluble qui a des caractères à valeurs rationnelles et tous les caractères sont réalisables dans $\mathbf{R}$, alors les caractères sont réalisables dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Preuve. D'après Gow [2], $|G|=2^r3^s$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CURTIS, R. and REINER, I. : Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience Publishers, New York, 1962.

[2] GOW, R. : J. of Algebra, 40, 1 (1976), 280-289.

[3] GOW, R. : J. of Algebra, 61, 2 (1979), 388-413.

[4] ISAACS, I.M. : Character theory of finite groups, Academic Press, New York, 1976.

UNIVERSITY OF BUCHAREST
FACULTY OF PHYSICS
MATHEMATICS DEPARTMENT
BUCHAREST MAGURELE
ROMANIA

ÖZET

Bu çalışmada, bir Q-grubun indirgenemeyen bir χ karakterinin Schur indeksinin $m_Q(\chi) = 1$ olabilmesi için bazı yeter koşullar verilmektedir.