

**ÜBER GEWISSE POTENZREIHEN,  
DIE FÜR ALGEBRAISCHE ARGUMENTE WERTE AUS  
DER MAHLERSCHEN UNTERKLASSEN  $U_m$  NEHMEN <sup>1)</sup>**

M. H. ORYAN

In der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten untersucht, die unter bestimmten Bedingungen über deren Koeffizienten für algebraische Argumente Werte aus Mahlerschen Unterklassen  $U_m$  nehmen.

**EINFÜHRUNG**

Mahler [7] hat die komplexen Zahlen in vier Klassen  $A, S, T, U$  eingeteilt, wobei die Klasse  $A$  aus allen algebraischen Zahlen besteht und die Menge der transzendenten Zahlen in die anderen Klassen unterteilt ist. Nachher wurde von Koksma [5] eine von der Mahlerschen zwar abweichende aber doch ähnliche Klassifikation aufgestellt. In dieser Klassifikation wurden die komplexen Zahlen wieder in vier Klassen  $A^*, S^*, T^*, U^*$  eingeteilt. Die Tatsache, dass die beiden Klassifikationen völlig äquivalent sind, wurde schliesslich von Wirsing [12] gezeigt.

Es wurde zuerst von Le Veque [6] bewiesen, dass die Unterklassen  $U_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) der Klasse  $U$  nicht leer sind. Diese Tatsache wurde u.a. auch nachher von Alniaçık [1] unter Benutzung der Le Veque'schen Methode gezeigt und viele transzendente Zahlen in  $U_m$  gegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden durch die Weiterentwicklung der oben genannten Methode neue transzendente Zahlen in  $U_m$  konstruiert als Funktionswerte gewisser Potenzreihen für algebraische Argumente. Es stellt sich ferner heraus, dass der (transzendente) Grad, d.h. das  $\mu$  (vgl. Schneider [10]) vom Funktionswert, durch den (algebraischen) Grad vom Argument in manchen Fällen vollstaendig, in anderen zum Teil bestimmbar ist.

Im ersten Paragraphen des ersten Teils der Arbeit werden die bei den Beweisen zu benutzenden Hilfssätze zusammengestellt. Im zweiten Paragraphen wird nach dem Gesichtspunkt der Koksma'schen Klassifikation der Hauptsatz

<sup>1)</sup> Diese Arbeit ist eine deutsche Übersetzung der Dissertation des Authors, die am 21. März 1979 von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Istanbul angenommen wurde. Der Author fühlt sich verpflichtet, Professor O.Ş. İçen bestens zu danken, der diese Arbeit angeregt und jede Weise gefördert hat.

über die Potenzreihen mit rationalzahligen Koeffizienten bewiesen. Im dritten Paragraphen dieses Teils wird der Hauptsatz auf den Fall der Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten verallgemeinert.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die Sätze vom ersten Teil auf den Henselschen  $p$ -adischen Körper  $\mathcal{Q}_p$  nach dem Gesichtspunkt von Mahlerscher Klassifikation übertragen. Hierfür werden die entsprechenden Hilfssätze im ersten Paragraphen gegeben und dann werden im zweiten Paragraphen die Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, im dritten Paragraphen die mit algebraischen Koeffizienten untersucht.

Ferner werden nach jedem Satz entsprechende Beispiele gegeben.

## ERSTER TEIL

### Der komplexe Fall

In diesem Teil legen wir den Körper  $C$  der komplexen Zahlen zugrunde. Alle hier vorkommenden Zahlen werden aus  $C$  entnommen.

### § 1. HILFSSÄTZE

**Hilfssatz 1.** Es seien  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) ( $k \geq 1$ ) Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper  $K$  vom Grade  $g$  und mit den jeweiligen Höhen  $h(\alpha_j)$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Es sei ferner  $\eta$  eine weitere algebraische Zahl, die mit  $\alpha_j$  durch eine Relation  $F(\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$  verbunden sein möge, wobei  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und in  $y$  von mindestens erstem Grad ist. Dann ist der Grad von  $\eta \leq dg$  und es gilt für die Höhe  $h(\eta)$  von  $\eta$  folgende Abschätzung:

$$h(\eta) \leq 3^{2dg + (l_1 + \dots + l_k)g} H^g h(\alpha_1)^{l_1 g} \dots h(\alpha_k)^{l_k g}.$$

Dabei bedeutet  $d$  den Grad von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  nach  $y$ ,  $l_j$  denjenigen von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  nach  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ),  $H$  das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  (Orhan §. İçen [4], S. 25).

**Hilfssatz 2.** Es seien  $\alpha_1, \alpha_2$  zwei nichtkonjugierte algebraische Zahlen von den jeweiligen Graden  $n_1, n_2$  und den jeweiligen Höhen  $h(\alpha_1), h(\alpha_2)$ , dann gilt

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \frac{1}{2^{\max(n_1, n_2) - 1} [(n_1 + 1) h(\alpha_1)]^{n_2} [(n_2 + 1) h(\alpha_2)]^{n_1}}$$

(folgt direkt aus R.Güting [3], Satz 3, S.154).

Hilfssatz 3. Es seien  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei verschiedene Konjugierte einer algebraischen Zahl vom Grade  $m$  und von der Höhe  $h$ . Dann gilt

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \frac{1}{(4m)^{\frac{m-2}{2}} [(m+1)h]^{\frac{2m-1}{2}}}$$

(R. Güting [3], Satz 8, S.158).

§ 2. SATZ 1

Satz 1. In der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

seien  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  ( $a_n, b_n$  ganzrational,  $a_n > 0$ ) nicht verschwindende rationale Zahlen und es sei  $a_n > 1$  für  $n \geq N_0$ )<sup>2)</sup>. Wenn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty \tag{2}$$

und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n} < 1 \tag{3}$$

ist, ist der Konvergenzradius von  $f(x)$  unendlich und für eine nicht verschwindende algebraische Zahl  $\alpha$  vom Grade  $m$  gehört  $f(\alpha)$  der Unterklasse  $U_m^*$ .

Beweis. 1) Die Folge  $\{a_n\}$ , die obengenannten Bedingungen erfüllt, wächst monoton und strebt gegen  $+\infty$ . Denn wegen (2) ist

$$\log a_{n+1} > 2 \log a_n > \log a_n$$

für  $n \geq N_1 \geq N_0$ . Hieraus folgt  $a_{n+1} > a_n$  und  $\log a_n > \log a_{N_1} \cdot 2^{n-N_1}$ . Für  $n \rightarrow +\infty$  erhält man daraus  $\log a_n \rightarrow +\infty$  und folglich  $a_n \rightarrow +\infty$ . Ferner, da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$  ist, folgt vom obigen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_n}{n} = +\infty. \tag{4}$$

Sei  $\theta := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |b_n|}{\log a_n}$ . Aus (3) folgt für  $n \geq N_2 \geq N_1$

<sup>2)</sup> Hier und im folgenden werden mit  $N_0, N_1, N_2, \dots$  passende Indizes bezeichnet.

$$\frac{\log |b_n|}{\log a_n} < \frac{1+\theta}{2}, \text{ da } \theta < \frac{1+\theta}{2} < 1 \text{ gilt.}$$

Hieraus bekommt man für dieselben  $n$

$$|b_n| < a_n^{\frac{1+\theta}{2}}. \quad (5)$$

Nach (5) ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|} < \sqrt[n]{\frac{1}{a_n^{\frac{1-\theta}{2}}}} = \frac{1}{a_n^{\frac{1-\theta}{2n}}}.$$

Wegen (4) hat man

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1-\theta}{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-\theta}{2} \cdot \frac{\log a_n}{n}} = +\infty.$$

Also ist  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$  und erhaelt man  $r = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = +\infty$ , d.h.

der Konvergenzradius von (1) ist unendlich.

Wir beweisen unten eine Eigenschaft, die nachher angewandt wird. Es seien  $A_n = [a_0, \dots, a_n]^3$ ,  $\eta$  eine feste Zahl mit  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ , die spaeter genauer bestimmt wird, und  $K_0 > 1$  eine geeignete feste Zahl. Dann gilt für  $n \geq N_3(\eta) \geq N_2$

$$A_n < K_0 \cdot a_n^{\frac{1}{1-\eta}}. \quad (6)$$

Denn aus (2) folgt für  $n \geq N_3(\eta) \geq N_2$

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} > \frac{1}{\eta}$$

und hieraus hat man

$$a_n < a_{n+1}^\eta. \quad (7)$$

Es sei  $K_0 := a_0 \dots a_{N_3-1}$ , dann hat man für  $n \geq N_3(\eta)$  wegen (7)

$$\begin{aligned} a_{N_3} &< a_{N_3+1}^\eta < a_n^{\eta^{n-N_3}}, \\ a_{N_3+1} &< a_n^{\eta^{n-N_3-1}}, \\ &\vdots \\ a_{n-1} &< a_n^\eta. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

<sup>3)</sup> Das Symbol  $[a_0, \dots, a_n]$  bedeutet das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen  $a_0, \dots, a_n$ .

$$A_n \leq K_0 a_n^{\eta^{n-N_3} + \dots + \eta + 1} < K_0 a_n^{\frac{1}{1-\eta}},$$

d.h. (6) gilt für  $n \geq N_3(\eta)$ .

2) Es seien  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$  und  $\beta_n = \sum_{v=0}^n c_v \alpha^v$ . Wir schätzen die Höhen von  $\beta_n$  nach oben ab. Hierfür wenden wir den Hilfssatz 1 auf das Polynom

$$F(y, x) = A_n y - \sum_{v=0}^n A_n c_v x^v$$

an. Weil  $F(\beta_n, \alpha) = 0$  ist, gilt

$$H(\beta_n) \leq 3^{2 \cdot 1 \cdot m + n \cdot m} (A_n B_n)^m h(\alpha)^{nm},$$

wobei  $B_n := \max_{v=0}^n (|b_v|)$  bedeutet. Mit einer geeigneten Konstante  $c = c(\alpha) > 1$  folgt hieraus

$$H(\beta_n) \leq c^{nm} (A_n B_n)^m.$$

Da die Folge  $\{a_n\}$  für hinreichend grosses  $n$  monotonwachsend gegen  $+\infty$  strebt, gilt wegen (5) für  $n \geq N_4(\eta) \geq N_3(\eta)$

$$B_n \leq a_n^{\frac{1+\theta}{2}}.$$

Hieraus und aus (6) folgt für  $n \geq N_4(\eta)$

$$H(\beta_n) \leq c^{nm} K_0^m a_n^{\frac{m}{1-\eta} + \frac{1+\theta}{2} m}.$$

Es seien  $c_1 := c K_0 > 1$  und  $\delta := \frac{1}{1-\eta} + \frac{1+\theta}{2} > 0$ . Dann hat man

$$H(\beta_n) \leq c_1^{nm} a_n^{m\delta}.$$

Ferner ist wegen (4) für  $n \geq N_5(\eta) \geq N_4(\eta)$

$$c_1^{nm} = e^{nm \log c_1} \leq e^{m \log a_n} = a_n^m.$$

Ausserdem ist

$$\delta = \frac{1}{1-\eta} + \frac{1+\theta}{2} < 2 + \eta = 3.$$

Also ergibt sich für  $n \geq N_5(\eta)$

$$H(\beta_n) \leq a_n^{m+\delta m} < a_n^{4m}. \tag{8}$$

3) Jetzt beweisen wir, dass die Grade von  $\beta_n$  für hinreichend grosses  $n$  gleich  $m$  sind. Diese Tatsache ist trivial für  $m = 1$ , also sei im folgenden  $m > 1$ . Es gilt

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| \geq |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| - \frac{2|b_{n+1}|}{a_{n+1}} |\alpha|^{n+1}.$$

Wenn  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  ist, gilt nach Hilfssatz 3 und wegen  $(\beta_n)^\circ := d_n \leq m$ <sup>4)</sup>

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| \geq \frac{c_2(d_n)}{(H(\beta_n))^{\frac{2d_n-1}{2}}} \geq \frac{c_2(m)}{(H(\beta_n))^{m-\frac{1}{2}}},$$

wobei  $c_2(m) = \frac{1}{(4m)^{\frac{m-2}{2}} (m+1)^{\frac{2m-1}{2}}}$  ist. Hieraus und aus (5) und (8) hat

man für  $n \geq N_5(\eta)$

$$\begin{aligned} |\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| &\geq \frac{c_2(m)}{(H(\beta_n))^{m-\frac{1}{2}}} - \frac{2|b_{n+1}|}{a_{n+1}} |\alpha|^{n+1} \geq \\ &\geq \frac{c_2(m)}{a_n^{4m(m-\frac{1}{2})}} - \frac{2|\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}. \end{aligned}$$

Wegen (2) und (4) gilt aber

$$\frac{c_2(m)}{a_n^{4m(m-\frac{1}{2})}} > \frac{2|\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}$$

für  $n \geq N_6(\eta) \geq N_5(\eta)$ . Also gilt für  $n \geq N_6(\eta)$ : aus  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  folgt  $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$  für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ . Ferner dürfen die Gleichungen

$$\beta_k^{(i)} = \beta_k^{(j)} \quad (k = n, n+1, n+2) \quad (i \neq j)$$

nicht gleichzeitig gelten. Denn sonst ergäbe sich wegen  $\alpha \neq 0$  aus

$$\frac{\beta_{n+2}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(i)}}{\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_n^{(i)}} = \frac{\beta_{n+2}^{(j)} - \beta_{n+1}^{(j)}}{\beta_{n+1}^{(j)} - \beta_n^{(j)}}$$

$\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)}$ . Das wäre dann ein Widerspruch, weil ja  $(\alpha)^\circ = m$  ist. Also für mindestens einen von den Indizes  $n = N_6(\eta)$ ,  $N_6(\eta) + 1$ ,  $N_6(\eta) + 2$  ist  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  für ein bestimmtes Paar  $(i, j)$ . Da die Paare  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) von endlicher Anzahl sind, folgt aus dem obigen Resultat, dass für  $n \geq N_7(\eta) \geq N_6(\eta) + 2$  und jedes Paar  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) gilt  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ . Also ist  $(\beta_n)^\circ = m$  für  $n \geq N_7(\eta)$ .

<sup>4)</sup> Das Symbol  $( )^\circ$  bedeutet den Grad einer algebraischen Zahl oder eines Polynoms.

4) Die Folge  $\{\beta_n\}$  hat eine solche Teilfolge  $\{\beta_{n_k}\}$ , dass alle Glieder derselben voneinander ganz verschieden sind. Denn, im Gegenfall bestünde die  $\{\beta_n\}$  aus Wiederholungen endlich vieler Glieder. Andererseits ist  $\beta_{n+1} - \beta_n = c_{n+1} \alpha^{n+1} \neq 0$ , also hat die Folge  $\{\beta_n\}$  mindestens zwei verschiedene Glieder. Dann existierte  $t := \min_{\beta_l \neq \beta_k} |\beta_l - \beta_k|$  als eine positive Zahl. Da die Reihe (1) für  $x = \alpha$  konvergiert, ist  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_{n+1}| |\alpha|^{n+1} = 0$ . Daraus unter Mitberücksichtigung von  $0 \neq \beta_{n+1} - \beta_n = c_{n+1} \alpha^{n+1}$  erhalte man für genügend grosses  $n$

$$0 < |\beta_{n+1} - \beta_n| < t.$$

Dies widerspricht aber der Definition von  $t$ . Hieraus ergibt sich die Existenz einer unendlichen Teilfolge  $\{\beta_{n_k}\}$  mit ganz verschiedenen Gliedern. Es kann höchstens ein Glied von  $\{\beta_{n_k}\}$  gleich  $\beta$  sein. Falls es nötig wird, kann man endlich viele Glieder aus dem Anfang der  $\{\beta_{n_k}\}$  auslassen, sodass man eine Teilfolge bekommt, deren Glieder voneinander und von  $\beta$  verschieden sind. Weil die Grade von  $\beta_{n_k}$  nach oben beschränkt sind, können ihre Höhe nach oben nicht beschränkt sein. Denn sonst wären  $\beta_{n_k}$  in endlicher Anzahl. Also hat  $\{\beta_{n_k}\}$  eine Teilfolge  $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ , derart, dass  $H(\beta_{n_{k_j}})$  monoton zunehmend gegen  $+\infty$  strebt.

5) Es ist

$$|\beta - \beta_n| = |r_n| \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} |c_v| |\alpha|^v.$$

Für  $n \geq N_7(\eta)$  gilt

$$|c_n| = \frac{|b_n|}{a_n} < \frac{1}{a_n \frac{1-\theta}{2}}.$$

Hieraus folgt

$$|r_n| \leq \frac{|\alpha|^{n+1}}{a_{n+1} \frac{1-\theta}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\alpha| + \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\alpha|^2 + \dots \right].$$

Wegen (7) ist für  $n \geq N_7(\eta)$

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} < \frac{1}{a_{n+2}^{1-\eta}}$$

und da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = 0$ . Weil  $\frac{1-\theta}{2} > 0$  und  $|\alpha| > 0$

sind, folgt hieraus für  $n \geq N_8(\eta) \geq N_7(\eta)$   $\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\alpha| < \frac{1}{2}$ , und auch für  $n \geq N_8(\eta)$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+1+\nu}}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\alpha|^\nu < \frac{1}{2^\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Also erhaelt man für  $n \geq N_8(\eta)$

$$|r_n| \leq \frac{|\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \leq \frac{2|\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Ausserdem gilt wegen (4) für  $n \geq N_9(\eta) \geq N_8(\eta)$

$$2|\alpha|^{n+1} < a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}.$$

Hieraus ergibt sich für  $n \geq N_9(\eta)$

$$|r_n| < \frac{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}} = \frac{1}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}}. \quad (9)$$

Jetzt definieren wir für  $n \geq N_9(\eta)$  die Folge  $\{s'(n)\}$  mit  $s'(n) := \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$ . Wegen

(2) ist  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'(n) = +\infty$ . Hieraus und aus (9) bekommt man für  $n \geq N_9(\eta)$

$$|r_n| < \frac{1}{a_n^{s'(n) \cdot \frac{1-\theta}{4}}}.$$

Es sei  $s(n) := s'(n) \frac{1-\theta}{16m}$ , wegen (8) ergibt sich für  $n \geq N_9(\eta)$

$$|r_n| < \frac{1}{(H(\beta_n))^{s'(n) \frac{1-\theta}{16m}}} = \frac{1}{(H(\beta_n))^{s(n)}}. \quad (10)$$

Wenn wir (10) für die oben konstruierte Teilfolge  $\{\beta_{n_{k_j}}\}$  schreiben, bekommen

wir für  $n_{k_j} \geq N_9(\eta)$

$$0 < |\beta - \beta_{n_{k_j}}| < \frac{1}{(H(\beta_{n_{k_j}}))^{s(n_{k_j})}}. \quad (11)$$



Da  $(\beta_{n_{k_j}})^\circ = m$  für  $n_{k_j} \geq N_9(\eta)$  und  $\lim_{j \rightarrow +\infty} s(n_{k_j}) = +\infty$  sind, ist  $\beta$  eine  $U^*$  Zahl und der (transzendente) Grad <sup>5)</sup>  $\mu^*$  von  $\beta$  höchstens gleich  $m$ , d.h. es ist

$$\mu^*(\beta) \leq m. \tag{12}$$

6) 1°) Sei  $m = 1$ . Da es immer

$$\mu^*(\beta) \geq 1 \tag{13}$$

gilt, folgt aus (12) und (13)

$$\mu^*(\beta) = 1.$$

2°) Es sei  $m > 1$  und  $\gamma$  sei eine algebraische Zahl vom Grad  $k < m$  und von der Höhe  $H$ . Dann gilt für irgendeinen Index  $\nu$

$$|\beta - \gamma| = |(\beta - \beta_\nu) + (\beta_\nu - \gamma)| \geq |\beta_\nu - \gamma| - |\beta - \beta_\nu|. \tag{14}$$

Da  $\beta_\nu$  und  $\gamma$  für  $\nu \geq N_9(\eta)$  von verschiedenen Graden sind, sind ihre Minimalpolynome verschieden. Nach dem Hilfssatz 2 gilt für  $\nu \geq N_9(\eta)$

$$|\beta_\nu - \gamma| \geq \frac{c_3(m, k)}{H(\beta_\nu)^k H^m}, \tag{15}$$

wobei  $c_3(m, k) = \frac{1}{2^{m-1} (m+1)^k (k+1)^m} > 0$  ist. Wegen

$$k \leq m - 1 \tag{16}$$

ist

$$c_3(m, k) \geq \frac{1}{2^{m-1} (m+1)^{m+1} m^m}. \tag{17}$$

Mit der Bezeichnung  $c_4(m) = \frac{1}{2^{m-1} (m+1)^{m+1} m^m}$  folgt aus (15) und (17)

$$|\beta_\nu - \gamma| \geq \frac{c_4}{H(\beta_\nu)^{m-1} H^m}. \tag{18}$$

Hieraus und aus (8), (9), (14) und (16) erhaelt man für  $\nu \geq N_9(\eta)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_\nu^{4m(m-1)} H^m} - \frac{1}{a_{\nu+1}^{\frac{1-\theta}{4}}}. \tag{19}$$

Jetzt wahlen wir die Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$  so, dass die Ungleichungen

$$\lambda \frac{1-\theta}{4} > 4m(m-1) + m \tag{20}$$

und

<sup>5)</sup> bei Schneider [10] der Index  $\mu^*$ .

$$\frac{1-\theta}{4\eta} > 4\lambda m(m-1) + m \quad (21)$$

erfüllt werden. Man sieht leicht, dass es für die so gewählten Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$ ,  $\lambda > 1$  und  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  gelten. Wir bezeichnen das neue  $N_9(\eta)$  mit  $N^*(\eta)$ , welches gemäss (20) und (21) fest gewählten Zahl  $\eta$  entspricht. Es sei  $a_{N^*} = H^*$ . Dann gibt es für jedes  $H > H^*$  ein  $n$ , so dass es gilt

$$a_n \leq H < a_{n+1}. \quad (22)$$

Ferner ist  $n \geq N^*(\eta)$  für  $H > H^*$ .

Falls es für die oben gewählte Zahl  $\lambda$

$$a_n \leq H < a_{n+1}^{\frac{1}{\lambda}} \quad (23)$$

gilt, dann sind  $a_n \leq H$  und  $a_{n+1} > H^\lambda$ . Jetzt nehmen wir  $\nu = n$  in (14) und (19). So erhält man aus (19)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{H^{4m(m-1)+m}} - \frac{1}{H^{\lambda \frac{1-\theta}{4}}}.$$

Wegen (20), wenn  $H$  hinreichend gross genommen wird, kann es

$$H^{\lambda \frac{1-\theta}{4}} > \frac{2}{c_3} H^{4m(m-1)+m}$$

gemacht werden. Es gelte diese Ungleichung für  $H > H_1$ . Hieraus ergibt sich für  $H > \max(H^*, H_1)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4/2}{H^{4m(m-1)+m}}. \quad (24)$$

Falls es für  $\lambda$  die Beziehung (23) nicht gilt, dann gilt

$$a_{n+1}^{\frac{1}{\lambda}} \leq H < a_{n+1}. \quad (25)$$

Hieraus folgen  $a_{n+1} \leq H^\lambda$  und  $a_{n+1} > H$ . Jetzt nehmen wir  $\nu = n+1$  in (14) und (19):

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_{n+1}^{4m(m-1)} H^m} - \frac{1}{a_{n+2}^{\frac{1-\theta}{4}}}. \quad (26)$$

Wegen (7) und  $n \geq N^*(\eta) = N_9(\eta)$  ist  $a_{n+1} \leq a_{n+2}^n$ . Also folgt aus (26)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_{n+1}^{4\lambda m(m-1)} H^m} - \frac{1}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4\eta}}},$$

und ferner wegen (25)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{H^{4\lambda m(m-1)+m}} - \frac{1}{H^{\frac{1-0}{4\eta}}}. \quad (27)$$

Nach (21) kann für hinreichend grosses  $H$

$$H^{\frac{1-0}{4\eta}} > \frac{2}{c_4} H^{4\lambda m(m-1)+m}$$

gemacht werden. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_2$ . Also ergibt sich für  $H > \max(H^*, H_2)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4/2}{H^{4\lambda m(m-1)+m}}. \quad (28)$$

Also folgt aus (24) und (28), dass es für  $H > \max(H^*, H_1, H_2)$  gilt

$$|\beta - \gamma| > \frac{\tilde{c}}{H^{\tilde{s}}}, \quad (29)$$

wobei  $\tilde{c} = c_4(m)/2$  und  $\tilde{s} = 4\lambda m(m-1) + m$  sind. Da diese Konstanten von  $H$  nicht abhaengen, und der Grad von  $\gamma$  nur die Werte von 1 bis  $m-1$  annehmen darf, folgt aus (29)

$$\mu^*(\beta) \geq m. \quad (30)$$

So ergibt sich zusammen aus (12) und (30), dass es gilt

$$\mu^*(\beta) = m. \quad (31)$$

Damit ist die Behauptung des Satzes in allen Teilen bewiesen.

**Beispiele für den Satz 1.**

1)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n^2}} x^n$ ,  $b_n$  mit  $|b_n| \leq b^{n^2}$ ,  $b_n, a$  ganzzahlig und  $1 \leq b < a$ .

2)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n^2}} x^n$ ,  $b_n$  mit  $|b_n| \leq b^{n^2}$ ,  $b_n, a$  ganzzahlig und  $1 \leq b < a$ ,

**Anhang zum Paragraphen 2. Wir betrachten die Potenzreihe**

(A) 
$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{(\nu!)^{\nu!}} x^\nu,$$

wobei die natürlichen Zahlen  $a_\nu$  mit einer Konstanten  $B > 0$  die Eigenschaft  $0 < a_\nu < B^\nu$  haben. Über diese Potenzreihe kann man die folgenden Sätze aussprechen :

**Satz A.** Es seien  $\beta$  keine  $U$ -Zahl und  $\beta \neq a_0$ . Dann besitzen Nullstellen der Gleichung  $f(x) = \beta$  transzendente Werte.

**Beweis.** Die Potenzreihe (A) erfüllt die Bedingungen des Satzes 1. Wegen  $\beta \neq a_0$  sind die Nullstellen von Null verschieden. Wenn also eine Nullstelle von  $f(x) = \beta$  eine algebraische Zahl wäre, müsste  $\beta$  eine  $U$ -Zahl sein. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass  $\beta$  keine  $U$ -Zahl ist. Also folgt hieraus die Behauptung des Satzes.

**Folgerung.** Nullstellen der Gleichung  $f(x) = 0$  sind transzendent.

**Satz B.** Es seien  $\beta$  keine  $U$ -Zahl und  $\beta = a_0$ , dann ist die Nullstelle von  $f(x) = \beta$  und alle anderen Nullstellen von  $f(x) = \beta$  sind transzendent.

**Beweis.** Da  $\beta = a_0$  ist, folgt aus  $f(x) = \beta$

$$a_0 = f(x) = a_0 + x \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v a_v}{(v!)^{v!}} x^{v-1}$$

und

$$(B) \quad 0 = x \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v a_v}{(v!)^{v!}} x^{v-1}.$$

Daraus ergibt sich, dass  $x = 0$  eine Nullstelle von  $f(x) = \beta$  ist.

Wenn  $x \neq 0$  ist, folgt aus (B)

$$(C) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v a_v}{(v!)^{v!}} x^{v-1} = 0.$$

Alle Nullstellen von (C) sind transzendent wegen der Folgerung des Satzes A. Also folgt die Behauptung des Satzes B (Für diese Reihe vgl. Schneider [10], S.9, Satz 5).

### § 3. SATZ 2 und FOLGERUNGEN

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n, \quad (i)$$

wobei  $\eta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) nicht verschwindende ganze algebraische Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper  $K$  von dem Grad  $s$  und  $a_n$  positive ganzrationale Zahlen sind. Es seien  $\alpha$  eine beliebige nichtverschwindende algebraische Zahl vom Grade  $m$  und  $L$  eine algebraische Erweiterung von  $Q$  vom niedrigsten Grad  $t$  mit  $K \subset L$  und  $Q(\alpha) \subset L$ . Es gilt offenbar  $t \geq m, s$ . Ferner bezeichne  $H(\eta_n)$  die Höhe von  $\eta_n$ .

**Satz 2.** Es sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n$$

wie oben gegeben. Es seien  $a_n > 1$  für  $n \geq N_0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty \tag{2}$$

und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < 1. \tag{3}$$

Dann ist der Konvergenzradius von  $f(x)$  unendlich und mit einem geeigneten positiven ganzrationalen Teiler  $q$  von  $t$  gilt  $f(\alpha) \in U_q^*$ .

**Beweis.** 1) Wie im Satz 1 wächst die Folge  $\{a_n\}$  für  $n \geq N_1 \geq N_0$  monoton und strebt gegen  $+\infty$ . Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_n}{n} = +\infty. \tag{4}$$

Sei  $\theta := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n}$ . Aus (3) folgt für  $n \geq N_2 \geq N_1$   $\frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < \frac{1+\theta}{2}$ ,

da  $\theta < \frac{1+\theta}{2} < 1$  gilt. Hieraus bekommt man für dieselben  $n$

$$H(\eta_n) < a_n^{\frac{1+\theta}{2}}. \tag{5}$$

Da andererseits  $|\eta_n| \leq \overline{|\eta_n|} \leq 2H(\eta_n)^{6)}$  gilt, bekommt man mit (5) zusammen

$$|\eta_n| \leq \overline{|\eta_n|} \leq 2 a_n^{\frac{1+\theta}{2}} \tag{6}$$

und hieraus

<sup>6)</sup> s. Schneider [10], S. 5

$${}^n\sqrt{\frac{|\eta_n|}{a_n}} \leq \frac{2^n}{a_n^{\frac{1-\theta}{2n}}}.$$

Da  $\frac{1-\theta}{2} > 0$  ist, erhaelt man aus (4)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1-\theta}{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{(1-\theta) \log a_n}{2n}} = +\infty.$$

Also ist  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} {}^n\sqrt{\frac{|\eta_n|}{a_n}} = 0$  und erhaelt man  $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} {}^n\sqrt{\frac{|\eta_n|}{a_n}}} = +\infty$ ,

d.h. der Konvergenzradius von (1) ist unendlich.

Es sei  $\eta$  eine feste Zahl mit  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ , die spaeter genauer bestimmt wird und  $K_1 > 1$  sei eine geeignete feste Zahl. Dann gilt für  $n \geq N_3(\eta) \geq N_2$

$$A_n \leq a_0 \dots a_n \leq K_1 a_n^{\frac{1}{1-\eta}} \leq K_1 a_n^2. \quad (7)$$

Denn aus (2) folgt für  $n \geq N_3(\eta) \geq N_2$

$$\frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} > \frac{1}{\eta}$$

und hieraus hat man

$$a_n < a_{n+1}^\eta. \quad (8)$$

Man erhaelt hieraus die Ungleichung (7) genauso wie im Satz 1.

2) Es seien  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} \alpha^n$  und  $\beta_n = \sum_{v=0}^n \frac{\eta_v}{a_v} \alpha^v$ . Wir schatzen die Höhe von  $\beta_n$  nach oben ab. Hierfür wenden wir den Hilfssatz 1 auf das Polynom

$$F(y, x_0, \dots, x_{n+1}) = A_n y - \sum_{v=0}^n \frac{A_n}{a_v} x_v x_{n+1}^v$$

an. Weil  $F(\beta_n, \eta_0, \dots, \eta_n, \alpha) = 0$  ist, gilt

$$H(\beta_n) \leq {}^{32.1.t+(2n)t} A_n^t H(\eta_0)^t \dots H(\eta_n)^t H(\alpha)^{nt}.$$

Denn es sind  $g = t$ ,  $d = 1$ ,  $l_0 = 1, \dots, l_n = 1$ ,  $l_{n+1} = n$  und  $H = A_n$ . Sei  $K_2 := H(\eta_0) \dots H(\eta_{N_3-1})$ . Dann folgt aus (5) für  $n \geq N_3(\eta)$

$$\begin{aligned} H(\eta_0) \dots H(\eta_t) &\leq K_2(a_{N_3} \dots a_t)^{\frac{1+\theta}{2}} \\ &\leq K_2(a_0 \dots a_n)^{\frac{1+\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Konstante  $c = c(\alpha) > 1$  folgt hieraus

$$H(\beta_n) \leq c^{nt} (a_0 \dots a_n)^{\frac{t(1+\theta)}{2} + t}.$$

Mit  $c_1 := c K_1^{\frac{1+\theta}{2} + 1}$  erhaelt man hieraus und aus (7)

$$H(\beta_n) \leq c_1^{nt} a_n^{t(1+\theta)+2t} = c_1^{nt} a_n^{t(3+\theta)}.$$

Andererseits gilt wegen (4) für  $n \geq N_4(\eta) \geq N_3(\eta)$

$$c_1^{nt} = e^{nt \log c_1} \leq e^{t \log a_n} = a_n^t.$$

Also gilt für  $n \geq N_4(\eta)$

$$H(\beta_n) \leq a_n^{t+t(3+\theta)} = a_n^{t(4+\theta)}.$$

Da  $4 + \theta < 5$  ist, erhaelt man für  $n \geq N_4(\eta)$

$$H(\beta_n) \leq a_n^{5t}. \tag{9}$$

3) Jetzt beweisen wir, dass die Grade von  $\beta_n$  für hinreichend grosses  $n$  konstant bleiben. Es gilt

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| \geq |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| - \frac{2 \sqrt{\eta_{n+1}} |\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Wenn  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  ist, gilt nach Hilfssatz 3 und wegen  $(\beta_n)^{\circ} \leq t$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| \geq \frac{c_2(t)}{(H(\beta_n))^{t - \frac{1}{2}}},$$

wobei  $c_2(t) = \frac{1}{(4t)^{\frac{t-2}{2}} (t+1)^{\frac{2t-1}{2}}}$  ist. Hieraus und aus (6) und (9) hat man

für  $n \geq N_4(\eta)$

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| \geq \frac{c_2(t)}{a_n^{5t(t-\frac{1}{2})}} - \frac{4 \sqrt{\alpha} |\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Wie im Satz 1 erhaelt man aus (2) und (4) für  $n \geq N_5(\eta) \geq N_4(\eta)$

$$\frac{c_2(t)}{a_n^{5t(t-\frac{1}{2})}} > \frac{4 \sqrt{\alpha} |\alpha|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Also gilt für  $n \geq N_5(\eta)$ : Aus  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  folgt  $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$  für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ . Das bedeutet aber, dass die Grade der Glieder der Folge  $\{\beta_n\}$  für

$n \geq N_5(\eta)$  nicht abnehmen. Da ausserdem  $(\beta_n)^\circ \leq t$  ist, bleiben die Grade von  $\beta_n$  fest von einem Index ab. Also gilt  $(\beta_n)^\circ = q$  für  $n \geq N_6(\eta) \geq N_5(\eta)$  mit einem geeigneten positiven ganzrationalen Teiler  $q$  von  $t$ .

4) Wie im Satz 1 hat die Folge  $\{\beta_n\}$  eine solche Teilfolge  $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ , dass alle Glieder derselben voneinander und von  $\beta$  verschieden sind und deren Höhen monoton wachsend gegen  $+\infty$  streben.

5) Es ist

$$|\beta - \beta_n| = |r_n| \leq \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{|\eta_v|}{a_v} |\overline{\alpha}|^v.$$

Für  $n \geq N_6(\eta)$  folgt aus (6)

$$|r_n| \leq \frac{2 |\overline{\alpha}|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}} \left[ 1 + \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\overline{\alpha}| + \dots \right].$$

Andererseits gilt wegen (8) für  $n \geq N_6(\eta)$

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} < \frac{1}{a_{n+2}^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ist, folgt hieraus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = 0$ . Hieraus erhaelt man

$$\text{für } n \geq N_7(\eta) \geq N_6(\eta) \quad \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\overline{\alpha}| < \frac{1}{2}, \text{ da } \frac{1-\theta}{2} > 0 \text{ und } |\overline{\alpha}| > 0$$

sind. Also hat man für  $n \geq N_7(\eta)$

$$\left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+1+v}} \right)^{\frac{1-\theta}{2}} |\overline{\alpha}|^v < \frac{1}{2^v} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Hieraus ergibt sich für  $n \geq N_7(\eta)$

$$|r_n| \leq \frac{2 |\overline{\alpha}|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \leq \frac{4 |\overline{\alpha}|^{n+1}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}}.$$

Ferner gilt wegen (4) für  $n \geq N_8(\eta) \geq N_7(\eta)$

$$4 |\overline{\alpha}|^{n+1} < a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}.$$

Jetzt definieren wir für  $n \geq N_8(\eta)$  die Folge  $\{s'(n)\}$  mit  $s'(n) := \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$ .

So erhaelt man für  $n \geq N_8(\eta)$



$$|r_n| < \frac{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{2}}} = \frac{1}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4}}} = \frac{1}{a_n^{s'(n)\frac{1-\theta}{4}}}. \quad (10)$$

Wegen (2) gilt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'(n) = +\infty$ . Es sei  $s(n) := s'(n) \frac{1-\theta}{20t}$  für  $n \geq N_8(\eta)$ .

Also folgt aus (9) und (10)

$$|r_n| \leq \frac{1}{(H(\beta_n))^{s'(n)\frac{1-\theta}{20t}}} = \frac{1}{(H(\beta_n))^{s(n)}}. \quad (11)$$

Wenn wir (11) für die oben erwähnte Teilfolge  $\{\beta_{n_{k_j}}\}$  schreiben, erhalten wir für  $n_{k_j} \geq N_8(\eta)$

$$0 < |\beta - \beta_{n_{k_j}}| < \frac{1}{(H(\beta_{n_{k_j}}))^{s(n_{k_j})}}. \quad (12)$$

Weil  $(\beta_{n_{k_j}})^\circ = q$  für  $n_{k_j} \geq N_8(\eta)$  und  $\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} s(n_{k_j}) = +\infty$  sind, ist  $\beta$  eine  $U$ -Zahl und der (transzendente) Grad  $\mu^*$  von  $\beta$  ist höchstens gleich  $q$ , d.h. es ist

$$\mu^*(\beta) \leq q. \quad (13)$$

6) 1°) Es sei  $q = 1$ . Da es immer

$$\mu^*(\beta) \geq 1 \quad (14)$$

gilt, folgt aus (13) und (14)

$$\mu^*(\beta) = 1.$$

2°) Es sei  $q > 1$  und  $\gamma$  sei eine algebraische Zahl vom Grade  $k < q$  und von der Höhe  $H$ . Dann gilt für irgend einen Index  $\nu$

$$|\beta - \gamma| = |(\beta - \beta_\nu) + (\beta_\nu - \gamma)| \geq |\beta_\nu - \gamma| - |\beta - \beta_\nu|. \quad (15)$$

Da  $\beta_\nu$  und  $\gamma$  für  $\nu \geq N_8(\eta)$  von verschiedenen Graden sind, sind ihre Minimalpolynome verschieden. Nach dem Hilfssatz 2 gilt für  $\nu \geq N_8(\eta)$

$$|\beta_\nu - \gamma| \geq \frac{c_3(q, k)}{H(\beta_\nu)^k H^q}, \quad (16)$$

wobei

$$c_3(q, k) = \frac{1}{2^{q-1} (q+1)^k (k+1)^q},$$

ist. Wegen

$$k \leq q - 1 \quad (17)$$

ist

$$c_3(q, k) \geq \frac{1}{2^{q-1} (q+1)^{q-1} q^q}. \quad (18)$$

Mit der Bezeichnung  $c_4(q) := \frac{1}{2^{q-1} (q+1)^{q-1} q^q}$  folgt aus (16) und (18)

$$|\beta_v - \gamma| \geq \frac{c_4}{(H(\beta_v))^{q-1} H^q}. \quad (19)$$

Hieraus und aus (9), (10), (15) und (17) bekommt man für  $v \geq N_8(\eta)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_v^{5t(q-1)} H^q} - \frac{1}{a_{v+1}^{\frac{1-\theta}{4}}}. \quad (20)$$

Jetzt wählen wir die Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$  so, dass die Ungleichungen

$$\lambda \frac{1-\theta}{4} > 5t(q-1) + q \quad (21)$$

und

$$\frac{1-\theta}{4\eta} > 5\lambda t(q-1) + q \quad (22)$$

erfüllt werden. Man sieht leicht, dass es für die so gewählten Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$ ,  $\lambda > 1$  und  $0 < \eta < \frac{1}{2}$  gelten. Man bezeichne das neue  $N_8(\eta)$  mit  $N^*(\eta)$ , welches gemäss (21) und (22) fest gewählter Zahl  $\eta$  entspricht. Es sei  $a_{N^*} = H^*$ . Dann gibt es für jedes  $H > H^*$  ein  $n$ , so dass es gilt

$$a_n \leq H < a_{n+1}. \quad (23)$$

Ferner ist  $n \geq N^*(\eta)$  für  $H > H^*$ . Falls es für die oben gewählte Zahl  $\lambda$

$$a_n \leq H < a_{n+1}^{\frac{1}{\lambda}} \quad (24)$$

gilt, dann sind  $a_n \leq H$  und  $a_{n+1} > H^\lambda$ . Jetzt nehmen wir  $v = n$  in (15) und (20). So erhält man aus (20)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{H^{5t(q-1)+q}} - \frac{1}{H^\lambda \frac{1-\theta}{4}}.$$

Wegen (21), wenn  $H$  hinreichend gross genommen wird, kann es

$$H^\lambda \frac{1-\theta}{4} > \frac{2}{c_4} H^{5t(q-1)+q}$$

gemacht werden. Es gelte diese Ungleichung für  $H > H_1$ . Hieraus ergibt sich für  $H > \max(H^*, H_1)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4/2}{H^{5\lambda t(q-1)+q}}. \quad (25)$$

Falls es für  $\lambda$  die Beziehung (24) nicht gilt, dann gilt

$$a_{n+1}^{\frac{1}{\lambda}} \leq H < a_{n+1}. \quad (26)$$

Hieraus folgen  $a_{n+1} \leq H^\lambda$  und  $a_{n+1} > H$ . Jetzt nehmen wir  $\nu = n + 1$  in (15) und (20). So erhaelt man aus (20)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_{n+1}^{5\lambda t(q-1)} H^q} - \frac{1}{a_{n+2}^{\frac{1-\theta}{4}}}. \quad (27)$$

Wegen (8) gilt  $a_{n+1} \leq a_{n+2}^\eta$  für  $n \geq N^*(\eta) = N_\delta(\eta)$ . Also folgt aus (27)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{a_{n+1}^{5\lambda t(q-1)} H^q} - \frac{1}{a_{n+1}^{\frac{1-\theta}{4\eta}}}$$

und hieraus erhaelt man wegen (26)

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4}{H^{5\lambda t(q-1)+q}} - \frac{1}{H^{\frac{1-\theta}{4\eta}}}. \quad (28)$$

Wegen (22), wenn  $H$  hinreichend gross genommen wird, kann es

$$H^{\frac{1-\theta}{4\eta}} > \frac{2}{c_4} H^{5\lambda t(q-1)+q}$$

gemacht werden. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_2$ . Hieraus erhaelt man für  $H > \max(H^*, H_2)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{c_4/2}{H^{5\lambda t(q-1)+q}}. \quad (29)$$

Also folgt aus (25) und (29) für  $H > \max(H^*, H_1, H_2)$

$$|\beta - \gamma| > \frac{\tilde{c}}{H^{\tilde{s}}}, \quad (30)$$

wobei  $\tilde{c} = c_4(q)/2$  und  $\tilde{s} = 5\lambda t(q-1) + q$  sind. Da diese Konstanten von  $H$  nicht abhengen, und der Grad von  $\gamma$  nur die Werte von 1 bis  $q-1$  annehmen darf, folgt aus (30)

$$\mu^*(\beta) \geq q. \quad (31)$$

So ergibt sich zusammen aus (13) und (31), dass es gilt

$$\mu^*(\beta) = q. \quad (32)$$

Damit ist die Behauptung des Satzes in allen Teilen bewiesen.

**Beispiele für den Satz 2.** 1) Es sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper vom Grade  $s$  und  $\alpha$  sei eine nicht verschwindende ganzzahlige Zahl aus  $K$ . Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a^{n!}} x^n,$$

wobei  $\eta_n = \alpha^{n!}$  und  $a > 0$  mit  $|\alpha| \leq \sqrt[s]{a}$  sind. Diese Potenzreihe erfüllt die Bedingungen des Satzes 2, denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$$

und wegen

$$H(\eta_n) \leq (2 |\overline{\eta_n}|)^s = (2 |\overline{\alpha^{n!}}|)^s = 2^s |\alpha|^{n!s}$$

gilt

$$\frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} \leq \frac{n! s \log |\alpha| + s \log 2}{n! \log a}$$

und es folgt daraus

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < 1.$$

2) Es sei  $K = Q(\delta)$ , wobei  $\delta$  eine ganzzahlige Zahl über  $Q$  vom Grade  $s$ . Die Folgen  $\{\eta_n\}$  und  $\{a_n\}$  seien so gewählt, dass es gelten

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log l^{(n)}}{\log a_n} < \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty$$

mit  $\eta_n := l_0^{(n)} + l_1^{(n)} \delta + \dots + l_{s-1}^{(n)} \delta^{s-1} \neq 0$ ,  $l_j^{(n)} \in \mathbb{Z}$  ( $j = 0, \dots, s-1$ )

und

$$l^{(n)} := \max_{j=0}^{s-1} |l_j^{(n)}|.$$

Ferner sei  $a_n > 1$  für  $n \geq N_0$ . Dann werden die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt. Denn es gilt nach dem Hilfssatz 1 mit einer geeigneten Konstante  $c_1 > 0$

$$H(\eta_n) \leq c_1^{s^2} (l^{(n)})^s,$$

da für das Polynom  $F(y, x) = y - \sum_{v=0}^{s-1} l_v^{(n)} x^v$  ist  $F(\eta_n, \delta) = 0$ . Hieraus erhält

man

$$\frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} \leq \frac{s^2 \log c_1 + s \log l^{(n)}}{\log a_n}.$$

Nach den obigen Bedingungen über  $\eta_n$  und  $a_n$  sieht man leicht, dass die Bedingungen des Satzes 2 für die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n$$

erfüllt sind.

3) Wir können  $\eta_n$  im obigen Beispiel noch verallgemeinerter nehmen, indem wir

$$\eta_n = \sum_{k=0}^n k \delta^k \quad \text{und} \quad a_n > 1 \quad \text{für} \quad n \geq N_0$$

mit Bedingung (2) wählen. Dann werden die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt. Denn es existiert für jedes  $k$  solche ganzrationale Zahlen  $a_j^{(k)}$  ( $0 \leq j < s$ ), dass es gilt

$$\delta^k = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \delta + \dots + a_{s-1}^{(k)} \delta^{s-1}$$

mit  $|a_j^{(k)}| \leq (1 + H(\delta))^k \leq (2H(\delta))^k$  (Hierfür siehe J.W.S. Cassels, An Introduction to Diophantine Approximation, Cambridge University Press, 1957, S.107, Lemma 4). Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |\eta_n| &= \left| \sum_{k=0}^n k (a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \delta + \dots + a_{s-1}^{(k)} \delta^{s-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n k 2^k H(\delta)^k (1 + |\delta| + \dots + |\delta|^{s-1}). \end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Konstante  $c = c(\delta) > 0$  erhält man hieraus

$$|\eta_n| < c \sum_{k=0}^n k (2H(\delta))^k < cn (2H(\delta))^n (n+1) < cn (4H(\delta))^n.$$

Daraus folgt

$$H(\eta_n) < (2|\eta_n|)^s < (2c)^s n^s (4H(\delta))^{ns}$$

und

$$\frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} < \frac{ns \log 4H(\delta) + s \log n + s \log (2c)}{\log a_n}.$$

Da es  $n/\log a_n \rightarrow +\infty$  gilt für  $n \rightarrow +\infty$ , ist der Limes der rechten Seite der obigen Ungleichung Null für  $n \rightarrow +\infty$ . Also sind die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt.

**Bemerkung 1.** Es ist nicht möglich genaue Aussagen über die Zahl  $q$  im Satz 2 zu machen, wenn der Zahlkörper  $K$  beliebig gegeben ist.

Zum Beispiel  $K$  sei ein beliebiger Zahlkörper vom Grade mindestens zwei. Es sei  $\varepsilon$  eine arithmetische Einheit von  $K$  und  $\eta_n = \varepsilon^n$ . Ferner sei  $a_n > 1$  für  $n \geq N_0$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log a_{n+1}/\log a_n) = +\infty$ . In diesem Fall werden die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt. Denn (2) ist vorausgesetzt und (3) folgt aus

$$H(\varepsilon^n) \leq (2 \overline{|\varepsilon^n|})^s = 2^s \overline{|\varepsilon|}^{ns}$$

und

$$\frac{\log H(\varepsilon^n)}{\log a_n} \leq \frac{ns \log \overline{|\varepsilon|} + s \log 2}{\log a_n},$$

da wegen (4) der Limes der rechten Seite der obigen Ungleichung Null ist. Es sei  $\alpha = \varepsilon^{-1}$ , dann folgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{a_n} (\varepsilon^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Es gilt  $f(\alpha) \in U_1$ , denn es ist der Fall des Satzes für  $m = 1$ . Also hat man in diesem Beispiel  $t = s > 1$ , aber  $q = 1$ .

**Bemerkung 2.** In manchen speziellen Fällen kann man genaue Aussagen über  $q$  machen. Ein solcher Fall ist  $K = \mathbb{Q}$ . In diesem Fall wird Satz 2 auf Satz 1 induziert. Es gilt schon im Satz 1  $q = t = m$ .

Ein anderer spezieller Fall ist  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . In diesem Fall bekommt man  $q = t = s$ , wenn die Folge  $\{\eta_n\}$  eine solche Teilfolge  $\{\eta_{n_k}\}$  besitzt, dass die Grade deren Glieder gleich  $s$  sind. Dieser Spezialfall wird unten als ein Satz ausgesprochen.

**Satz 3.** Es seien die Bedingungen (2) und (3) für die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n$$

erfüllt. Ferner sei  $a_n > 1$  für  $n \geq N_0$ . Falls die Folge  $\{\eta_n\}$  eine solche Teilfolge  $\{\eta_{n_k}\}$  besitzt, dass die Grade deren Glieder gleich  $s$  sind, dann gilt  $f(\alpha) \in U_s^*$  für  $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$ .

**Beweis.** Es existiert für jedes  $n \in \mathbb{Z}^+$  ein  $n_k$  mit  $n_k > n$  und  $(\eta_{n_k})^\circ = s$ .

Es gilt mit einem geeigneten  $N_0'$ : aus  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  folgt  $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$  für jedes Paar  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) und für  $n > N_0'$ . Es sei  $N_{k_0}$  das erste Glied nach  $N_0'$  mit  $(\eta_{N_{k_0}})^\circ = s$ , d.h. es gilt

$$\eta_{N_{k_0}}^{(i)} \neq \eta_{N_{k_0}}^{(j)} \quad (i \neq j).$$

Dann können die Gleichungen

$$\beta_l^{(i)} = \beta_l^{(j)} \quad (l = N_{k_0} - 1, N_{k_0}) \quad (i \neq j)$$

nicht gleichzeitig erfüllt werden. Denn sonst erhielte man

$$\eta_{N_{k_0}}^{(i)} = \eta_{N_{k_0}}^{(j)}.$$

Hieraus bekommt man  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  für  $n \geq N_{k_0}$ , d.h. es gilt  $(\beta_n)^\circ = s$  für  $n \geq N_{k_0}$ . Wenn man wie im Satz 2 weiter geht, erhält man  $f(a) \in U_s^*$ .

**Beispiele für den Satz 3.** 1) Es sei  $b$  eine positive ganzzahlige Zahl mit  $\sqrt[k]{b} \notin \mathbb{Z}$ . Es seien  $\eta := \sqrt[k]{b}$  und  $K := \mathbb{Q}(\eta)$ . Dann gilt  $[K : \mathbb{Q}] = k$ . Wir nehmen  $\eta_n := \eta^n$  und  $a_n := a^n$  mit  $a > 1$ . Wir betrachten die Teilfolge  $\{\eta_{n_j}\}$  ( $n_j \equiv 1 \pmod{k}$ ). Die Grade der Glieder dieser Teilfolge sind gleich  $k$ . Für die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n$$

werden die Bedingungen (2) und (3) erfüllt. Denn es existiert eine geeignete Konstante  $c_1 > 0$  nach dem Hilfssatz 1 mit  $H(\eta_n) \leq c_1^n$ , da für das Polynom  $F(y, x) = y - x^n$   $F(\eta_n, \eta) = 0$  ist. Hieraus bekommt man  $\log H(\eta_n) \leq n \log c_1$  und daraus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} = 0 < 1$ . Also ist (3) erfüllt. (2) folgt sofort aus der Definition von  $a_n$ .

2) Es sei  $\zeta$   $l$ -te Einheitswurzel, d.h. es sei  $\zeta^l - 1 = 0$ . Es gilt  $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] = 2$  und für jedes  $n \in \mathbb{Z}$   $\zeta^n + \zeta^{-n} \in \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ . Es sei  $s = \varphi(l)/2$ , dann hat man  $[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = s$ . Für  $n \equiv 1 \pmod{l}$  erhält man  $\zeta^n + \zeta^{-n} = \zeta + \zeta^{-1} \in \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ . Wir nehmen  $\eta_n := \zeta^n + \zeta^{-n}$  und  $a_n := a^n$  ( $a > 1$ ). Es gilt  $(\eta_{n_k})^\circ = s$  für  $n_k \equiv 1 \pmod{l}$ . Da es für das Polynom  $F(y, x) = x^n y - x^{2n} - 1$  gilt  $F(\eta_n, \zeta) = 0$ , folgt aus dem Hilfssatz 1  $H(\eta_n) \leq c_1^n$ , wobei  $c_1$  eine geeignete positive Zahl ist. Hieraus ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log H(\eta_n)}{\log a_n} = 0,$$

d.h. (3) ist erfüllt. Ferner folgt (2) aus der Definition von  $a_n$ . Also sind die Bedingungen des Satzes 3 erfüllt.

## ZWEITER TEIL

### Der $p$ -adische Fall

Wir legen in diesem Teil den Henselschen  $p$ -adischen Körper  $Q_p$  zugrunde. Alle hier vorkommenden Zahlen werden aus  $Q_p$  entnommen.

### § 1. HILFSSATZ

**Hilfssatz 1.** Es seien  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) algebraische Zahlen aus  $Q_p$  und es sei  $[Q(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : Q] = g$ . Es sei ferner  $\eta$  eine weitere algebraische Zahl, die mit  $\alpha_j$  durch eine Relation  $F(\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$  verbunden sein möge, wobei  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und in  $y$  von mindestens erstem Grad ist. Dann ist der Grad von  $\eta \leq dg$  und es gilt für die Höhe  $h(\eta)$  von  $\eta$  folgende Abschätzung:

$$h(\eta) \leq 3^{2dg + (l_1 + \dots + l_k)g} H^g h(\alpha_1)^{l_1 g} \dots h(\alpha_k)^{l_k g}.$$

Dabei bedeutet  $d$  den Grad von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  nach  $y$ ,  $l_j$  denjenigen von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  nach  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ),  $H$  das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von  $F(y, x_1, \dots, x_k)$  (Orhan §. İçen [4], S.25).

**Hilfssatz 2.** Es sei  $P(x) = k_n x^n + \dots + k_0$  ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten. Wenn  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die Nullstellen von  $P(x)$  mit  $\alpha_i \neq \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) sind, dann gilt

$$|\alpha_i - \alpha_j|_p \geq \frac{c}{H(P)^{n-1}}.$$

Dabei ist  $c$  eine geeignete positive Konstante, die nur von  $n$  und  $p$  abhängt (J.F.Morrison [9], S.336).

**Hilfssatz 3.** Es sei  $P(x) = l_n x^n + \dots + l_0$  ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und vom Grade  $n$  und von der Höhe  $H(P)$ . Es sei ferner  $\alpha$  eine algebraische Zahl vom Grade  $N$  und von der Höhe  $H(\alpha)$ . Dann gilt

$$|P(\alpha)|_p \geq \frac{p^{(N-1)t}}{(n+N)! (H(P))^N (H(\alpha))^n},$$

wobei  $|\alpha|_p = p^{-h}$  und  $t = \min(0, h)$  sind (K. Mahler [8], S.181).



**Hilfssatz 4.** Es sei  $P(x)$  ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und von der Höhe  $H(P)$ . Wenn  $P(\alpha) = 0$  ist, dann gilt

$$|\alpha|_p \geq (H(P))^{-1}$$

(J.F.Morrison [9], S.337).

§ 2. SATZ 4

Im Körper  $Q_p$  betrachten wir die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \left( c_n = \frac{b_n}{a_n} \right), \quad (1)$$

wobei  $a_n, b_n$  von Null verschiedene ganze rationale Zahlen mit  $(a_n, b_n) = 1$  und  $a_n > 0$  sind. Es seien im folgenden  $|c_n|_p = p^{-u_n}$ ,  $A_n = [a_0, \dots, a_n]$  und  $C_n := \max_{v=0}^n |c_v|_{\infty}$ .

**Satz 4.** Es sei  $\alpha \neq 0$  eine algebraische Zahl vom Grade  $m$  und es sei  $u_n > 0$  für  $n \geq N_0$ . Wenn es ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \quad (2)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p(A_n C_n)}{u_n} < +\infty, \quad (3)$$

dann ist der Konvergenzradius von  $f(x)$  unendlich und die  $p$ -adische Zahl  $f(\alpha)$  gehört der Unterklasse  $U_m$ .

**Beweis.** 1) Wir beweisen zuerst, dass der Konvergenzradius von (1) unendlich ist. Es gilt

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|_p}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-\frac{u_n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{\frac{u_n}{n}}.$$

Wegen (2) gilt  $u_{n+1} > 2u_n$  für hinreichend grosses  $n$ . Daraus folgt für  $n \geq N_1 \geq N_0$

$$u_n > 2^{n-1-N_1} u_{N_1}.$$

Hieraus erhaelt man

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad (4)$$

Da ferner  $\frac{u_n}{n} > \frac{2^{n-1-N_1} u_{N_1}}{n}$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$  ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = +\infty. \quad (5)$$

Also erhaelt man folglich  $r = +\infty$ .

2) Es seien  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$  und  $\beta_n = \sum_{v=0}^n c_v \alpha^v$ . Um die Höhe von  $\beta_n$  nach oben abzuschätzen, wenden wir den Hilfssatz 1 auf das Polynom

$$F(y, x) = A_n y - \sum_{v=0}^n A_n c_v x^v$$

an. Da  $F(\beta_n, \alpha) = 0$  ist, gilt

$$H(\beta_n) \leq 3^{2.1.m+n.m} (A_n C_n)^{nm} H(\alpha)^m \leq c_1^{nm} (A_n C_n)^m,$$

wobei  $c_1 > 1$  eine geeignete Konstante ist. Wegen (3) erhaelt man mit einer geeigneten Konstante  $c_2 > 0$  für hinreichend grosses  $n$

$$H(\beta_n) \leq c_1^{nm} p^{c_2 u_n}.$$

Da es aus (5) für hinreichend grosses  $n$  folgt

$$c_1^{nm} = p^{nm \log_p c_1} \leq p^{m u_n},$$

erhaelt man für  $n \geq N_2 \geq N_1$  mit  $c_3 = c_2 + m$

$$H(\beta_n) \leq p^{(c_3+m)u_n} = p^{c_3 u_n}. \quad (6)$$

3) Wir beweisen jetzt, dass die Grade von  $\beta_n$  für hinreichend grosses  $n$  gleich  $m$  sind. Diese Tatsache ist trivial für  $m = 1$ , also sei im folgenden  $m > 1$ . Es gilt

$$\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)} = \beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)} + c_{n+1} (\alpha^{(i)n+1} - \alpha^{(j)n+1}).$$

Wenn  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  ist, gilt nach Hilfssatz 2 und wegen  $(\beta_n)^o \leq m$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p \geq \frac{c_4(m, p)}{H(\beta_n)^{m-1}},$$

wobei  $c_4(m, p)$  eine geeignete positive Konstante ist. Aus (6) folgt für  $n \geq N_2$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p \geq \frac{c_4(m, p)}{p^{c_3(m-1)u_n}}.$$

Es sei  $\max_{i=1}^m (|\alpha^{(i)}|_p) = p^{-k}$ , daraus folgt

$$|\alpha^{(i)^{n+1}} - \alpha^{(j)^{n+1}}|_p \leq \max(|\alpha^{(i)}|_p, |\alpha^{(j)}|_p)^{n+1} \leq p^{-(n+1)k}.$$

Hieraus erhaelt man

$$|c_{n+1}|_p |\alpha^{(i)^{n+1}} - \alpha^{(j)^{n+1}}|_p \leq p^{-u_{n+1} - (n+1)k}.$$

Wegen (2), (4) und (5) gilt aber

$$\frac{c_4(m, p)}{p^{c_3(m-1)u_n}} > p^{-u_{n+1} - (n+1)k}$$

für  $n \geq N_3 \geq N_2$ . Also gilt für  $n \geq N_3$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p > |c_{n+1}|_p |\alpha^{(i)^{n+1}} - \alpha^{(j)^{n+1}}|_p,$$

und hieraus erhaelt man für  $n \geq N_3$

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}|_p = |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p.$$

Daraus ergibt sich für  $n \geq N_3$ : aus  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  folgt  $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$  für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ . Ferner dürfen die Gleichungen

$$\beta_k^{(i)} = \beta_k^{(j)} \quad (k = n, n+1, n+2) \quad (i \neq j)$$

nicht gleichzeitig gelten. Denn sonst ergaebe sich wegen  $\alpha \neq 0$  aus

$$\frac{\beta_{n+2}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(i)}}{\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_n^{(i)}} = \frac{\beta_{n+2}^{(j)} - \beta_{n+1}^{(j)}}{\beta_{n+1}^{(j)} - \beta_n^{(j)}}$$

$\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)}$ . Das waere dann ein Widerspruch, weil ja  $(\alpha)^\circ = m$  ist. Also ist für mindestens einen von den Indizes  $n = N_3, N_3 + 1, N_3 + 2$   $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  für ein bestimmtes Paar  $(i, j)$ . Da die Paare  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) von endlicher Anzahl sind, folgt aus dem obigen Resultat, dass für  $n \geq N_4 \geq N_3 + 2$  und jedes Paar  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) gilt  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ . Also ist  $(\beta_n)^\circ = m$  für  $n \geq N_4$ .

4) Es seien für  $n \geq N_4$  die Minimalpolynome von  $\beta_n$

$$P_n(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_m x^m \quad (f_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, m).$$

Es gilt

$$P_n(\beta) = P_n(\beta_n + r_n) = r_n \gamma_n, \tag{7}$$

wobei

$$\gamma_n = f_1 + f_2 (2\beta_n + r_n) + \dots + f_m (m\beta_n^{m-1} + \binom{m}{2}\beta_n^{m-2} + \dots + r_n^{m-1})$$

ist. Es gilt  $|c_n \alpha^n|_p = p^{-(un+kn)}$  und  $1 + \frac{nk}{u_n} > \frac{1}{2}$  wegen (5) für  $n \geq N_5 \geq N_4$ .

Hieraus folgt für  $n \geq N_5$

$$|c_n \alpha^n|_p \leq p^{-\frac{u_n}{2}}.$$

Da die Folge  $\{u_n\}$  wegen (2) für  $n \geq N_6 \geq N_5$  monoton waechst, gilt für  $n \geq N_6$

$$\begin{aligned} |r_n|_p &\leq \max(|c_{n+1}|_p |\alpha|_p^{n+1}, |c_{n+2}|_p |\alpha|_p^{n+2}, \dots) \\ &\leq \max(p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}, p^{-\frac{u_{n+2}}{2}}, \dots). \end{aligned}$$

Daraus erhaelt man

$$|r_n|_p \leq p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}. \quad (8)$$

Es gilt ferner

$$|\gamma_n|_p \leq \max_{\nu=1}^n \{ |f_\nu(\nu \beta_n^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} \beta_n^{\nu-2} r_n + \dots + r_n^{\nu-1})|_p \}.$$

Da  $|f_\nu|_p \leq 1$  und  $|\binom{\nu}{x}|_p \leq 1$  ( $1 \leq x \leq \nu$ ) sind, erhaelt man

$$|\gamma_n|_p \leq \max\{1, |\beta_n|_p, |r_n|_p\}^{m-1}.$$

Weil  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_n|_p = |\beta|_p$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r_n|_p = 0$  sind, ergibt sich für  $n \geq N_7 \geq N_6$  mit einer geeigneten Konstante

$$|\gamma_n|_p \leq l. \quad (9)$$

Es folgt aus (7)

$$|P_n(\beta)|_p = |r_n|_p |\gamma_n|_p.$$

Hieraus und aus (8) und (9) folgt für  $n \geq N_7$

$$|P_n(\beta)|_p \leq l \cdot p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}.$$

Es sei  $\xi_n := \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{2 \log_p \left( \frac{1}{l} \right)}{u_n}$ . Wegen (2) und (4) gilt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$ . Es folgt aus der Definition von  $\xi_n$

$$|P_n(\beta)|_p \leq \frac{l}{p^{\frac{u_{n+1}}{2}}} = \frac{1}{p^{\frac{\xi_n u_n}{2}}}.$$

Hieraus folgt wegen (6)

$$|P_n(\beta)|_p \leq \frac{1}{H(\beta_n)^{\frac{\xi_n}{2c_3}}}. \quad (10)$$

Die Folge  $\{\beta_n\}$  hat unendlich viele voneinander verschiedene Glieder. Man kann diese Eigenschaft wie im Satz 1 zeigen.

Wir betrachten die Folge der Minimalpolynome  $\{P_n\}$  von Gliedern der Folge  $\{\beta_n\}$ . Unendlich viele Polynome in dieser Folge sind voneinander verschieden, denn sonst müsste  $\{P_n\}$  aus Wiederholungen endlich vieler

Polynome bestehen. Daraus würde folgen, dass nur endlich viele Glieder von  $\{\beta_n\}$  voneinander verschieden sind. Das wäre ein Widerspruch, weil  $\{\beta_n\}$  unendlich viele voneinander verschiedene Glieder hat. Also hat  $\{P_n\}$  eine unendliche Teilfolge  $\{P_{n_k}\}$  mit ganz verschiedenen Gliedern. Da die  $P_{n_k}$  unzerlegbar sind, kann  $\beta$  Nullstelle von höchstens einem  $P_{n_k}$  sein. Im Gegebenenfall kann man endlich viele Glieder aus dem Anfang der  $\{P_{n_k}\}$  auslassen, so dass es für  $n_k \geq N_8 \geq N_7$  immer  $P_{n_k}(\beta) \neq 0$  gilt. Andererseits können die Höhen von  $P_{n_k}$  wegen  $(P_{n_k})^\circ = m$  nach oben nicht beschränkt sein. Denn sonst wären  $P_{n_k}$  in endlicher Anzahl. Also hat  $\{P_{n_k}\}$  eine Teilfolge  $\{P_{n_{k_j}}\}$  derart,

dass  $H(P_{n_{k_j}}) = H(\beta_{n_{k_j}})$  monoton wachsend gegen  $+\infty$  strebt. Es sei  $s_{n_{k_j}} := \frac{\xi_{n_{k_j}}}{2c_3}$  für  $n_{k_j} \geq N_8$ , dann gilt

$$0 \neq |P_{n_{k_j}}(\beta)|_p \leq \frac{1}{H(\beta_{n_{k_j}})^{s_{n_{k_j}}}}$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$  gilt  $\lim_{j \rightarrow +\infty} s_{n_{k_j}} = +\infty$ . Daraus folgt wegen  $(P_{n_{k_j}})^\circ = m$

$$\mu(\beta) \leq m. \tag{11}$$

5) 1°) Es sei  $m = 1$ . Da es immer

$$\mu(\beta) \geq 1 \tag{12}$$

gilt, folgt aus (11) und (12)

$$\mu(\beta) = 1.$$

2°) Es sei  $m > 1$  und  $P(x)$  sei ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und vom Grade  $1 \leq s \leq m - 1$ . Dann gilt für irgendeinen Index  $\nu$

$$P(\beta) = P(\beta_\nu) + r_\nu \gamma_\nu. \tag{13}$$

Weil  $(\beta_\nu)^\circ = m$  für  $\nu \geq N_8$  ist, gilt  $P(\beta_\nu) \neq 0$ . Es gilt nach dem Hilfssatz 3

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{p^{(m+1)t_\nu}}{(m+s)! H(\beta_\nu)^s H(P)^m}$$

mit  $|\beta_\nu|_p = p^{-k_\nu}$  und  $t_\nu = \min(0, k_\nu)$ . Da  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\beta_\nu|_p = |\beta|_p$  gilt, ist die Folge  $\{k_\nu\}$  von unten beschränkt. Denn sonst wäre

$$|\beta|_p = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\beta_\nu|_p = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} p^{-k_\nu} = +\infty.$$

Also gilt  $-\infty < \bar{k} < k_\nu$  mit einer geeigneten Konstante  $\bar{k} < 0$ . Daraus folgt  $\bar{k} \leq t_\nu \leq 0$  wegen  $t_\nu = \min(0, k_\nu)$ . Hieraus erhält man

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{p^{(m-1)\bar{k}}}{(s+m)! H(\beta_\nu)^s (H(P))^m}, \quad (14)$$

weil  $p^{(m-1)\nu} \geq p^{(m-1)\bar{k}}$  ist. Es gilt  $s \leq m-1$  und daraus erhaelt man

$$\frac{p^{(m-1)\bar{k}}}{(s+m)!} \geq \frac{p^{(m-1)\bar{k}}}{(2m-1)!} =: c_7(m, p).$$

Also folgt hieraus und aus (14)

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{c_7}{H(\beta_\nu)^{m-1} H(P)^m}. \quad (15)$$

Man bekommt aus (15) und (6)

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{c_7}{p^{c_8(m-1)u_\nu} H(P)^m}. \quad (16)$$

Ferner gilt wegen (8) und (9) für  $\nu \geq N_8$

$$|r_\nu|_p | \gamma_\nu |_p \leq l p^{-\frac{u_{\nu+1}}{2}}. \quad (17)$$

Wir waehlen jetzt die Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$  so, dass die Ungleichungen

$$\frac{\lambda}{2} > c_3(m-1) + m \quad (18)$$

und

$$\frac{\eta}{2} > \lambda c_3(m-1) + m \quad (19)$$

erfüllt werden. Es ist leicht zu sehen, dass  $\lambda > 1$  und  $\eta > 0$  sind. Wegen (2) gilt für  $\nu \geq N_9(\eta) \geq N_8$

$$\eta u_\nu \leq u_{\nu+1}. \quad (20)$$

Es sei nun  $N^* = N_8$  und  $H^* = p^{N^*}$ . Dann gibt es für jedes  $H = H(P) > H^*$  ein  $n$ , so dass es gilt

$$p^{u_n} \leq H < p^{u_{n+1}}.$$

Ferner ist  $n \geq N^*$  für  $H > H^*$ . Falls es für die oben gewählte Zahl  $\lambda$

$$p^{u_n} \leq H < p^{\frac{u_{n+1}}{\lambda}} \quad (21)$$

gilt, dann sind  $p^{u_n} \leq H$  und  $H^\lambda < p^{u_{n+1}}$ . Hieraus bekommt man

$$\frac{c_7}{p^{c_8(m-1)u_n} H^m} \geq \frac{c_7}{H^{c_8(m-1)+m}} \quad (22)$$

und

$$l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}} \leq l H^{-\frac{\lambda}{2}}. \tag{23}$$

Wegen (18) kann man für hinreichend grosses  $n$

$$H^{\frac{\lambda}{2}} > \frac{l}{c_7} H^{c_3(m-1)+m}$$

machen. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_1$ . Hieraus erhaelt man für  $H > H_1$

$$\frac{c_7}{H^{c_3(m-1)+m}} > \frac{l}{H^{\frac{\lambda}{2}}}. \tag{24}$$

Wir schreiben jetzt (13), (16) und (17) für  $\nu = n$  und erhalten dann wegen  $n \geq N^* \geq N_9$

$$P(\beta) = P(\beta_n) + r_n \gamma_n, \tag{25}$$

$$|P(\beta_n)|_p \geq \frac{c_7}{p^{c_3(m-1)u_n} H^m}, \tag{26}$$

$$|r_n|_p |\gamma_n|_p \leq l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}. \tag{27}$$

Es folgt aus (22), (23), (24), (26) und (27)

$$|P(\beta)|_p > |r_n|_p \cdot |\gamma_n|_p. \tag{28}$$

Man erhaelt aus (25) und (28) für  $n \geq N^*$  und  $H > \max(H^*, H_1)$

$$|P(\beta)|_p = |P(\beta_n)|_p.$$

Hieraus und aus (22) und (26) erhaelt man

$$|P(\beta)|_p \geq \frac{c_7}{H^{c_3(m-1)+m}}. \tag{29}$$

Falls es für  $\lambda$  die Beziehung (19) nicht gilt, dann gilt

$$p^{\frac{u_{n+1}}{\lambda}} \leq H < p^{u_{n+1}}. \tag{30}$$

Hieraus folgen  $p^{u_{n+1}} \leq H^\lambda$  und  $H < p^{u_{n+1}}$ . Wenn wir  $\nu = n + 1$  in (13), (16), (17) und (20) nehmen, dann erhalten wir

$$P(\beta) = P(\beta_{n+1}) + r_{n+1} \gamma_{n+1}, \tag{31}$$

$$|P(\beta_{n+1})|_p \geq \frac{c_7}{p^{c_3(m-1)u_{n+1}} H^m}, \tag{32}$$

$$|r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p \leq l p^{-\frac{u_{n+2}}{2}}, \tag{33}$$

$$\cap u_{n+1} \leq u_{n+2}. \tag{34}$$

Da  $p^{u_{n+1}} \leq H^\lambda$  ist, folgt aus (32)

$$|P(\beta_{n+1})|_p \geq \frac{c_7}{H^{\lambda c_3(m-1)+m}}. \quad (35)$$

Ferner erhaelt man aus (33) und (34)

$$|r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p \leq l p^{-\frac{\eta u_{n+1}}{2}} \leq l H^{-\frac{\eta}{2}}. \quad (36)$$

Wegen (19) kann man für hinreichend grosses  $H$

$$H^{\frac{\eta}{2}} > \frac{l}{c_7} H^{\lambda c_3(m-1)+m}$$

machen. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_2$ . Hieraus folgt für  $H > H_2$

$$\frac{c_7}{H^{\lambda c_3(m-1)+m}} > \frac{l}{H^{\frac{\eta}{2}}}. \quad (37)$$

Man erhaelt aus (35), (36), (37)

$$|P(\beta_{n+1})|_p > |r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p. \quad (38)$$

Wegen (31) und (38) gilt für  $n \geq N^*$  und  $H > \max(H^*, H_2)$

$$|P(\beta)|_p = |P(\beta_{n+1})|_p.$$

Hieraus und aus (35) folgt

$$|P(\beta)|_p \geq \frac{c_7}{H^{\lambda c_3(m-1)+m}}. \quad (39)$$

Also ergibt sich aus (29) und (39) für  $H > \max(H^*, H_1, H_2)$

$$|P(\beta)|_p > \frac{\tilde{c}}{H^{\tilde{s}}}, \quad (40)$$

wobei  $\tilde{c} = c_7$  und  $\tilde{s} = \lambda c_3(m-1) + m$  sind. Weil diese Konstanten von  $H$  nicht abhaengen und der Grad von  $P(x)$  nur die Werte von 1 bis  $m-1$  annehmen darf, folgt aus (40)

$$\mu(\beta) \geq m. \quad (41)$$

So ergibt sich zusammen aus (11) und (41), dass es gilt

$$\mu(\beta) = m. \quad (42)$$

Damit ist der Satz 4 in allen Teilen bewiesen.

Beispiele für den Satz 4. 1)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n!} x^n$ ;  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n^n} x^n$ .



2) Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n p^{n!}}{s_n} x^n$  mit  $(r_n, p) = (s_n, p) = 1$ ,

$\frac{r_n}{s_n} \leq C_1 p^{n!}$  und  $A_n = [s_0, \dots, s_n] \leq C_2 p^{n!}$ , wobei  $C_1, C_2 > 1$  Konstanten

sind. Dann gilt mit  $c_n = \frac{r_n}{s_n} p^{n!}$

$$|c_n|_p = p^{-n!} = p^{-u_n}.$$

Hier gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty \quad (\text{für } n \rightarrow +\infty)$$

und

$$\frac{\log_p(A_n C_n)}{u_n} = \frac{\log_p A_n + \log_p C_n}{n!} \leq \frac{n! \log_p C_2 + n! \log_p C_1}{n!} = \log C_1 + \log C_2 < +\infty.$$

Daraus folgen die Bedingungen (2) und (3). Als ein Beispiel hierfür kann

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p \cdot 2^n - 1}{p \cdot 3^n + 1} \cdot p^{n!} x^n$$

gegeben werden.

### § 3. SATZ 5

Wir betrachten im Körper  $Q_p$  die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_n = \eta_n/a_n), \tag{1}$$

wobei  $\eta_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) von Null verschiedene ganzzahlige Zahlen aus einem Zahlkörper  $K$  vom Grade  $s$  und  $a_n$  positive ganzrationale Zahlen sind. Es sei  $\alpha$  eine von Null verschiedene algebraische Zahl vom Grade  $m$ . Es sei ferner

$$\max_{i=1}^s (|c_n^{(i)}|_p) = p^{-u_n}, \quad \max_{i=1}^s (|\alpha^{(i)}|_p) = p^{-k}$$

und  $A_n := [a_0, \dots, a_n]$  und  $H_n$  bezeichne die Höhe von  $\eta_n$ . Sei  $L$  eine algebraische Erweiterung von  $Q$  vom niedrigsten Grad  $t$  mit  $K \subset L$  und  $Q(\alpha) \subset L$ . Dann gilt  $t \geq m, s$ .

Satz 5. Es sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \left( c_n = \frac{\eta_n}{a_n} \right)$$

wie oben gegeben. Es seien ferner  $u_n > 0$  für  $n \geq N_0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \quad (2)$$

und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p (A_n H_n)}{u_n} < +\infty. \quad (3)$$

Dann ist der Konvergenzradius von  $f(x)$  unendlich und mit einem geeigneten positiven ganzrationalen Teiler  $q$  von  $t$  gilt  $f(\alpha) \in U_q$ .

**Beweis.** 1) Es gilt

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{c_n} \mid_p} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-\frac{u_n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{\frac{u_n}{n}}.$$

Da es wegen (2) für hinreichend grosses  $n$   $u_{n+1} > 2u_n$  ist, gilt für  $n \geq N_1 \geq N_0$

$$u_n > 2^{n-1-N_1} u_{N_1}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad (4)$$

Da es andererseits  $\frac{u_n}{n} > \frac{2^{n-1-N_1} u_{N_1}}{n}$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$  gelten, erhaelt man

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = +\infty. \quad (5)$$

Hieraus folgt  $r = +\infty$ .

2) Es seien  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} \alpha^n$  und  $\beta_n = \sum_{v=0}^n \frac{\eta_v}{a_v} \alpha^v$ . Um die Höhe von  $\beta_n$

nach oben abzuschätzen, wenden wir den Hilfssatz 1 auf das Polynom

$$F(y, x_0, \dots, x_{n+1}) = A_n y - \sum_{v=0}^n \frac{A_v}{a_v} x_v x_{n+1}^v$$

an. Weil  $F(\beta_n, \eta_0, \dots, \eta_n, \alpha) = 0$  ist, gilt mit einer geeigneten Konstante  $c_0 > 0$

$$\begin{aligned} H(\beta_n) &\leq 3^{2.1.t+(2n)t} A_n^t H_0^t \dots H_n^t H(\alpha)^{nt} \\ &\leq c_0^{nt} A_n^t H_0^t \dots H_n^t. \end{aligned}$$

Nach (2) und (3) folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} / \log_p (A_n H_n) = +\infty.$$

Es folgt ferner aus dem Hilfssatz 4

$$H_{n+1}^{-1} \leq |\eta_{n+1}|_p \leq p^{-u_{n+1}} |a_{n+1}|_p \leq p^{-u_{n+1}},$$

da  $|a_{n+1}|_p \leq 1$  ist. Hieraus erhaelt man  $u_{n+1} \leq \log_p H_{n+1}$  und wegen  $A_n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{\log_p (A_n H_n)} \leq \frac{\log_p H_{n+1}}{\log_p H_n}.$$

Da für  $n \rightarrow +\infty$  die linke Seite der obigen Gleichung gegen  $+\infty$  strebt, strebt auch die rechte Seite derselben für  $n \rightarrow +\infty$  gegen  $+\infty$ , d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p H_{n+1}}{\log_p H_n} = +\infty.$$

Daraus folgt mit einer geeigneten Konstante  $\nu$  mit  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  für  $n \geq N_2 \geq N_1$

$$H_n \leq H_{n+1}^\nu.$$

Es sei  $K_0 := H_0 \dots H_{N_2-1}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} H_0 \dots H_n &\leq H_0 \dots H_{N_2-1} \cdot H_{N_2} \dots H_n \leq K_0 \cdot H_n^{\nu^{n+...+1}} \\ &\leq K_0 \cdot H_n^{\frac{1}{1-\nu}} < K_0 H_n^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für  $n \geq N_2$

$$H(\beta_n) \leq c_0^{nt} A_n^t K_0^t H_n^{2t} \leq c_1^{nt} (A_n H_n)^{2t},$$

wobei  $c_1 > 0$  eine geeignete Konstante ist. Es gilt wegen (5) für hinreichend grosses  $n$

$$c_1^{nt} = p^{nt \log_p c_1} \leq p^{un}.$$

Andererseits gilt wegen (3) für hinreichend grosses  $n$  mit einer geeigneten Konstante  $c_2 > 0$

$$A_n H_n \leq p^{c_2 un}.$$

Also erhaelt man für  $n \geq N_3 \geq N_2$

$$H(\beta_n) \leq p^{un+2t c_2 un} = p^{c_3 un}. \tag{6}$$

3) Wir beweisen jetzt, dass die Grade von  $\beta_n$  für hinreichend grosses  $n$  konstant bleiben. Es gilt

$$\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)} = (\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}) + (c_{n+1}^{(i)} \alpha^{(i)^{n+1}} - c_{n+1}^{(j)} \alpha^{(j)^{n+1}}).$$

Wenn  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  ist, gilt wegen  $(\beta_n)^0 = d_n \leq t$  und nach Hilfssatz 2 und (2) für  $n \geq N_3$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p \geq \frac{c_4(d_n, p)}{H(\beta_n)^{t-1}} \geq \frac{c_4(d_n, p)}{p^{c_3(t-1)u_n}}.$$

Da es  $d_n \leq t$  gilt, ist die Anzahl von  $c_4(d_n, p)$  endlich. Es sei  $c_5 = c_5(t, p) = \min_{d_n} \{c_4(d_n, p)\}$ , dann gilt  $c_5 > 0$  wegen  $c_4(d_n, p) > 0$ . Hieraus folgt für  $n \geq N_3$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p \geq \frac{c_5}{p^{c_3(t-1)u_n}}.$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} |c_{n+1}^{(i)} \alpha^{(i)n+1} - c_{n+1}^{(j)} \alpha^{(j)n+1}|_p &\leq \max(|c_{n+1}^{(i)}|_p |\alpha^{(i)}|_p^{n+1}, |c_{n+1}^{(j)}|_p |\alpha^{(j)}|_p^{n+1}) \\ &\leq p^{-u_{n+1} - k(n+1)}. \end{aligned}$$

Aus (2), (4) und (5) folgt für hinreichend grosses  $n$

$$\frac{c_5}{p^{c_3(t-1)u_n}} > \frac{1}{p^{u_{n+1} + k(n+1)}}.$$

Also gilt für  $n \geq N_4 \geq N_3$

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}|_p = |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|_p.$$

Daraus folgt für  $n \geq N_4$ : aus  $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$  folgt  $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$  für jedes Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ . Das bedeutet aber, dass die Grade der Glieder der Folge  $\{\beta_n\}$  für  $n \geq N_4$  nicht abnehmen. Da ausserdem  $(\beta_n)^0 \leq t$  ist, bleiben die Grade von  $\beta_n$  fest von einem Index ab. Also gilt  $(\beta_n)^0 = q$  für  $n \geq N_5 \geq N_4$  mit einem geeigneten positiven ganzrationalen Teiler  $q$  von  $t$ .

4) Es sei

$$P_n(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_q x^q \quad (f_i \in \mathbf{Z}, i = 0, 1, \dots, q)$$

das Minimalpolynom von  $\beta_n$  für  $n \geq N_5$ . Es gilt

$$P_n(\beta) = P_n(\beta_n + r_n) = r_n \gamma_n, \quad (7)$$

wobei

$$\gamma_n = f_1 + f_2(2\beta_n + r_n) + \dots + f_q(q\beta_n^{q-1} + \dots + r_n^{q-1})$$

ist. Es ist  $|c_n \alpha^n|_p = p^{-(u_n + kn)}$  und es gilt  $1 + \frac{nk}{u_n} > \frac{1}{2}$  für  $n \geq N_6 \geq N_5$  wegen

(5). Daraus folgt für  $n \geq N_6$

$$|c_n \alpha^n|_p \leq p^{-\frac{u_n}{2}}.$$

Da die Folge  $\{u_n\}$  wegen (2) für  $n \geq N_7 \geq N_6$  monoton wächst, erhält man wie im Satz 4 für  $n \geq N_7$

$$|r_n|_p \leq p^{-\frac{u_{n+1}}{2}} \tag{8}$$

und

$$|\gamma_n|_p \leq \max \{1, |\beta_n|_p, |r_n|_p\}^{q-1}.$$

Da es  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_n|_p = |\beta|_p$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r_n|_p = 0$  sind, gilt für  $n \geq N_8 \geq N_7$  mit einer geeigneten Konstante  $l > 0$

$$|\gamma_n|_p \leq l. \tag{9}$$

Es folgt aus (7)

$$|P_n(\beta)|_p = |r_n|_p \cdot |\gamma_n|_p.$$

Hieraus und aus (8) und (9) folgt für  $n \geq N_8$

$$|P_n(\beta)|_p \leq lp^{-\frac{u_{n+1}}{2}}.$$

Es sei  $\xi_n := \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{2 \log_p \frac{1}{l}}{u_n}$ . Dann gilt nach (2) und (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$ .

Daraus erhaelt man

$$|P_n(\beta)|_p \leq \frac{l}{p^{\frac{u_{n+1}}{2}}} = \frac{1}{p^{\frac{\xi_n u_n}{2}}}$$

und wegen (6)

$$|P_p(\beta)|_p \leq \frac{1}{H(\beta_n)_{2c_3}^{\xi_n}}. \tag{10}$$

Wie im Satz 4 besitzt die Folge  $\{P_n\}$  eine solche Teilfolge  $\{P_{n_{k_j}}\}$ , dass alle Glieder derselben voneinander verschieden und  $P_{n_{k_j}}(\beta) \neq 0$  sind und deren Höhen  $H(P_{n_{k_j}}) = H(\beta_{n_{k_j}})$  monoton wachsend gegen  $+\infty$  streben. Es sei

$s_{n_{k_j}} := \frac{\xi_{n_{k_j}}}{2c_3}$  für  $n_{k_j} \geq N_8$  und man schreibe (10) für die Folge  $\{P_{n_{k_j}}\}$ , dann erhaelt man für  $n_{k_j} \geq N_8$

$$0 \neq |P_{n_{k_j}}(\beta)|_p \leq \frac{1}{H(\beta_{n_{k_j}})^{s_{n_{k_j}}}}.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$  ist, gilt  $\lim_{j \rightarrow +\infty} s_{n_{k_j}} = +\infty$ . Wegen  $(P_{n_{k_j}})^\circ = q$  gilt hieraus

$$\mu(\beta) \leq q. \tag{11}$$

5) 1°) Es sei  $q = 1$ . Da es immer gilt

$$\mu(\beta) \geq 1, \quad (12)$$

folgt aus (11) und (12)

$$\mu(\beta) = 1.$$

2°) Es sei  $q > 1$  und  $P(x)$  sei ein Polynom vom Grade  $r$  ( $1 \leq r < q$ ) mit ganzrationalen Koeffizienten. Dann gilt für irgendeinen Index  $\nu$

$$P(\beta) = P(\beta_\nu) + r_\nu \gamma_\nu. \quad (13)$$

Da es für  $\nu \geq N_8$  ( $\beta_\nu$ )<sup>o</sup> =  $q$  ist, gilt  $P(\beta_\nu) \neq 0$ . Es folgt aus dem Hilfssatz 3 mit  $|\beta_\nu|_p = p^{-k_\nu}$  und  $t_\nu = \min(0, k_\nu)$

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{p^{(q-1)t_\nu}}{(r+q)! H(\beta_\nu)^q H(P)^q}. \quad (14)$$

Da es  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\beta_\nu|_p = |\beta|_p$  ist, ist die Folge  $\{k_\nu\}$  von unten beschränkt. Denn sonst wäre

$$|\beta|_p = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\beta_\nu|_p = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} p^{-k_\nu} = +\infty.$$

Das widerspricht der Tatsache, dass (1) für  $x = a$  konvergiert. Also gilt  $-\infty < \bar{k} < k_\nu$  mit einer geeigneten Konstante  $\bar{k} < 0$ . Daraus folgt  $\bar{k} \leq t_\nu \leq 0$  und wegen  $r \leq q - 1$

$$\frac{p^{(q-1)t_\nu}}{(r+q)!} \geq \frac{p^{(q-1)\bar{k}}}{(2q-1)!} = c_6(q, p).$$

Also erhält man aus (14)

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{c_6}{H(\beta_\nu)^{q-1} H(P)^q}. \quad (15)$$

Es folgt aus (15) wegen (6)

$$|P(\beta_\nu)|_p \geq \frac{c_6}{p^{c_3(q-1)u_\nu} H(P)^q}. \quad (16)$$

Es gilt ferner wegen (8) und (9) für  $\nu \geq N_8$

$$|r_\nu|_p |\gamma_\nu|_p \leq l p^{-\frac{u_\nu+1}{2}}. \quad (17)$$

Wir wählen die Zahlen  $\lambda$  und  $\eta$  so, dass die Ungleichungen

$$\frac{\lambda}{2} > c_3(q-1) + q \quad (18)$$

und

$$\frac{\eta}{2} > \lambda c_3(q-1) + q \quad (19)$$

erfüllt werden. Man sieht leicht, dass es  $\lambda > 1$  und  $\eta > 0$  gelten. Aus (2) folgt für  $\nu \geq N_9(\eta) \geq N_8$

$$\eta u_\nu \leq u_{\nu+1}. \quad (20)$$

Es seien  $N^* = N_8$  und  $H^* = p^{u_{N^*}}$ . Es existiert für jedes  $H = H(P) > H^*$  ein solches  $n$ , dass es gilt

$$p^{u_n} \leq H < p^{u_{n+1}}.$$

Es gilt ferner  $n \geq N^*$  für  $H > H^*$ . Falls es für die gemäss (18) gewählte Zahl  $\lambda$  gilt

$$p^{u_n} \leq H < p^{\frac{u_{n+1}}{\lambda}}, \quad (21)$$

dann gelten  $p^{u_n} \leq H$  und  $H^\lambda < p^{u_{n+1}}$ . Hieraus erhaelt man

$$\frac{c_6}{p^{c_5(q-1)u_n} H^q} \geq \frac{c_6}{H^{c_5(q-1)+q}} \quad (22)$$

und

$$l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}} \leq l H^{-\frac{\lambda}{2}}. \quad (23)$$

Wegen (18) kann man für hinreichend grosses  $H$

$$H^{\frac{\lambda}{2}} > \frac{l}{c_5} H^{c_5(q-1)+q}$$

machen. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_1$ . Hieraus bekommt man für  $H > H_1$

$$\frac{c_6}{H^{c_5(q-1)+q}} > \frac{l}{H^{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (24)$$

Wir nehmen  $\nu = n$  in (13), (16) und (17) wegen  $n \geq N^* \geq N_8$ . Also erhaelt man

$$P(\beta) = P(\beta_n) + r_n \gamma_n, \quad (25)$$

$$|P(\beta_n)|_p \geq \frac{c_6}{p^{c_5(q-1)u_n} H^q} \quad (26)$$

und

$$|r_n|_p |\gamma_n|_p \leq l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}. \quad (27)$$

Aus (22), (23), (24), (26) und (27) folgt

$$|P(\beta_n)|_p > |r_n|_p |\gamma_n|_p. \quad (28)$$

Wegen (25) und (29) erhaelt man für  $n \geq N^*$  und  $H > \max(H^*, H_1)$

$$|P(\beta)|_p = |P(\beta_n)|_p.$$

Daraus und aus (22) und (26) folgt

$$|P(\beta)|_p \geq \frac{c_6}{H^{c_5(q-1)+q}}. \quad (29)$$

Falls es für die oben gewählte Zahl  $\lambda$  (21) nicht erfüllt, dann gilt

$$p^{\frac{u_{n+1}}{\lambda}} \leq H < p^{u_{n+1}}. \quad (30)$$

Hieraus gelten  $p^{u_{n+1}} \leq H^\lambda$  und  $H < p^{u_{n+1}}$ . Wir nehmen in diesem Fall  $v = n + 1$  in (13), (16), (17) und (20). Dann gelten

$$P(\beta) = P(\beta_{n+1}) + r_{n+1} \gamma_{n+1}, \quad (31)$$

$$|P(\beta_{n+1})|_p \geq \frac{c_6}{p^{c_5(q-1)u_{n+1}} H^q}, \quad (32)$$

$$|r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p \leq l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}}, \quad (33)$$

$$\eta u_{n+1} \leq u_{n+2}. \quad (34)$$

Wegen  $p^{u_{n+1}} \leq H^\lambda$  folgt aus (32)

$$|P(\beta_{n+1})|_p \geq \frac{c_6}{H^{\lambda c_5(q-1)+q}}. \quad (35)$$

Ferner folgt aus (33) und (34)

$$|r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p \leq l p^{-\frac{u_{n+1}}{2}} \leq l H^{-\frac{\eta}{2}}. \quad (36)$$

Wegen (19) kann man für hinreichend grosses  $H$

$$H^{\frac{\eta}{2}} > \frac{l}{c_5} H^{\lambda c_5(q-1)+q}$$

machen. Diese Ungleichung gelte für  $H > H_2$ . Dann folgt für  $H > H_2$

$$\frac{c_6}{H^{\lambda c_5(q-1)+q}} > \frac{l}{H^{\frac{\eta}{2}}}. \quad (37)$$

Man erhält aus (35), (36) und (37)

$$|P(\beta_{n+1})|_p > |r_{n+1}|_p |\gamma_{n+1}|_p. \quad (38)$$

Also folgt aus (31) und (38) für  $n \geq N^*$  und  $H > \max(H^*, H_2)$

$$|P(\beta)|_p = |P(\beta_{n+1})|_p.$$

Hieraus und aus (35) erhält man

$$|P(\beta)|_p \geq \frac{c_5}{H^{\lambda c_5(q-1)+q}}. \quad (39)$$

Also ergibt sich aus (29) und (39) für  $H > \max(H^*, H_1, H_2)$



$$|P(\beta)|_p > \frac{\tilde{c}}{H^{\tilde{s}}}, \tag{40}$$

wobei  $\tilde{c} = c_6$  und  $\tilde{s} = \lambda c_3(q - 1) + q$  sind. Da diese Konstanten von  $H$  nicht abhängen, und der Grad von  $P(x)$  nur die Werte von 1 bis  $q - 1$  annehmen darf, erhaelt man

$$\mu(\beta) \geq q. \tag{41}$$

So ergibt sich zusammen aus (11) und (41), dass es gilt

$$\mu(\beta) = q. \tag{42}$$

Damit ist die Behauptung des Satzes 5 in allen Teilen bewiesen.

**Bemerkung.** Obwohl der Satz 1 ein Spezialfall des Satzes 2 für  $m = 1$  ist, ist der Fall des Satzes 5 für  $s = 1$  mit dem Satz 4 nicht ganz übereinstimmend.

**Beispiele für den Satz 5.** 1) Es seien  $\eta_n = \eta^n p^{n!}$  und  $a_n = a^{n!}$  in der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n,$$

wobei  $a$  ( $a > 1$ ) eine positive ganzrationale Zahl mit  $(a, p) = 1$  und  $\eta \in K$  mit  $\eta^2 - b = 0$  und  $b$  keinen quadratischen Rest mod  $p$  sind. Dann gilt

$$\left| \frac{\eta_n}{a_n} \right|_p = |\eta|_p^n p^{-n!} = p^{-kn-n!}.$$

Hieraus folgt

$$p^{-u_n} = \max_{i=1}^2 \left| \frac{\eta_n^{(i)}}{a_n} \right|_p = \left| \frac{\eta_n}{a_n} \right|_p,$$

denn es gilt  $\frac{\eta_n^{(1)}}{a_n} = -\frac{\eta_n^{(2)}}{a_n}$ . Daraus erhaelt man  $u_n = n! + kn$ . Es gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! + k(n+1)}{n! + kn} \rightarrow +\infty \quad (\text{für } n \rightarrow +\infty).$$

Wenn wir den Hilfssatz 1 auf das Polynom  $F(z, y) = z - y^n$  anwenden, dann gilt mit einer geeigneten Konstante  $c_1 > 0$

$$H(\eta_n) \leq c_1^n.$$

Hieraus und wegen  $A_n = a^{n!}$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_p(A_n H_n)}{u_n} \leq \log_p a < +\infty.$$

Also wird die Bedingung (3) des Satzes 5 erfüllt. Es ist leicht zu sehen, dass (2) aus der Definition von  $a_n$  folgt. In diesem Beispiel ist  $s = 2$ .

## L I T E R A T U R

- [<sup>1</sup>] ALNIAÇIK, K. : *On  $U_m$  - Subclasses of Mahler's Classification of Transcendental Numbers*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, 44 (1979), 39-82.
- [<sup>2</sup>] COHN, H. : *Note on almost algebraic numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 1042-1045.
- [<sup>3</sup>] GÜTING, R. : *Approximation of algebraic numbers*, Michigan Math. J. 8 (1951), 149-159.
- [<sup>4</sup>] İÇEN, O.Ş. : *Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II"*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Serie A, 38 (1973), 25-35.
- [<sup>5</sup>] KOKSMA, J.F. : *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monatsh. Math. Physik 48 (1939), 176-189.
- [<sup>6</sup>] LE VEQUE, W.J. : *On Mahler's U-Numbers*, Journal of the London Math. Soc. 28 (1953), 220-229.
- [<sup>7</sup>] MAHLER, K. : *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I*, J. reine und angewandte Mathematik 166 (1932), 137-150.
- [<sup>8</sup>] MAHLER, K. : *Über die Klasseneinteilung der p-adischen Zahlen*, Mathematica B, Tijdschr. v. Stud. 3 (1935), 177-185.
- [<sup>9</sup>] MORRISON, J.F. : *Approximation of p-adic Numbers by Algebraic Numbers of Bounded Degree*, Journal of Number Theory 10 (1978), 334-350.
- [<sup>10</sup>] SCHNEIDER, Th. : *Einführung in die Transzendenten Zahlen*, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1957.
- [<sup>11</sup>] ŞENKON, H. : *P-adik alanda bazı kuvvet serilerinin değerlerinin transandantlığı*, Silivride yapılan 2. yurt içi matematikçiler toplantısı, 22-25 Nisan 1976, S.15.
- [<sup>12</sup>] WIRSING, E. : *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine u. angew. Math. 206 (1961), 67-77.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN FAKÜLTESİ  
MATEMATİK BÖLÜMÜ  
VEZNECİLER-İSTANBUL

## Ö Z E T

Bu çalışmada, belirli şartlar altında cebirsel argümanlar için Mahler'in  $U_m$  alt sınıfında değer alan ve katsayıları cebirsel olan kuvvet serileri incelenmektedir.