İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 45 (1980), 43-63

ÜBER DIE UNTERKLASSEN U_m DER MAHLERSCHEN KLASSENEINTEILUNG DER TRANSZENDENTEN FORMALEN LAURENTREIHEN

M. H. ORYAN

Es sei K der bekannte Körper der formalen Laurentreihen über einem endlichen Körper F. Die klassische Theorie der transzendenten Zahlen hat ihres Analogen in K. Man kann in Analogie zur klassischen Theorie die Klasseneinteilung der formalen Laurentreihen nach Mahler untersuchen.

In der vorliegenden Arbeit werden transzendente Laurentreihen in den Unterklassen U_m als Funktionswerte gewisser Potenzreihen und Lückenreihen für algebraische Argumente konstruiert. Hierfür wird eine Methode auf den Körper K übertragen, die der Author [8] im klassischen und p-adischen Fall angewandt hat, um neue transzendente Zahlen in Mahlerschen Unterklassen U_m (m>0) zu konstruieren.

Also wird hierdurch auch gezeigt, dass die Unterklassen U_m der transzendenten formalen Laurentreihen nicht leer sind. Die entsprechende Tatsache im klassischen Fall ist schon von LeVeque [5] in 1953 bewiesen worden.

§ 1. EINFÜHRUNG

Es sei F ein endlicher Körper mit $q = p^k$ Elementen, p eine Primzahl und k eine ganze positive Zahl. Es bedeute $F[x]$ der Ring der Polynome über F und $F(x)$ der Quotientenkörper von $F[x]$. Für $a \in F[x]$ sei ∂a der genaue Grad von a falls $a \neq 0$, bzw. $\partial 0 := -\infty$. Durch die Festsetzung $|a/b| := q^{\partial a - \partial b}$ für $a, b \in F[x]$, $b \neq 0$, in $F(x)$ eine non-archimediane Bewertung eingeführt. K sei die Vervollstaendigung von $F(x)$ bezüglich dieser Bewertung. K ist der bekannte Körper der formalen Laurentreihen über F.

Die klassische Theorie der transzendenten Zahlen hat ihres Analogon in K. Man kann in Analogie zur klassischen Theorie die Klasseneinteilung der formalen Laurentreihen nach Mahler untersuchen.

$\omega \in K$ heisst algebraisch über $F(x)$, wenn ω Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit Koeffizienten aus $F[x]$ ist; andernfalls heisst ω transzendent (über $F(x)$). Sei ω algebraisch über $F(x)$, dann heisst ein Polynom $P(y)$ über $F[x]$ das

Minimalpolynom von ω, falls es $P(\omega) = 0$, die Koeffizienten von $P(y)$ teilerfremd und $P(y)$ vom niedrigsten Grad sind. Der Grad eines algebraischen ω wird als Grad seines Minimalpolynoms definiert. Eine algebraische Laurentreihe heisst ganz algebraisch, falls die höchste Koeffizient ihres Minimalpolynoms aus F ist. Ganze algebraische Laurentreihen bilden einen Ring im Körper der algebraischen Laurentreihen. Man kann ein algebraisches ω ganz algebraisch machen, indem man ω mit einem geeigneten Polynom aus $F[x]$ multipliziert. Ein Polynom mit niedrigstem Grad unter diesen Polynomen heisst der Nenner von ω und wird mit $d(\omega)$ bezeichnet. $d(\omega)$ teilt alle Polynome aus $F[x]$, die ω ganz algebraisch machen. Also ist $d(\omega)$ bis auf ein Element aus F eindeutig bestimmt.

Sei $P(y) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^\nu$ ein beliebiges nichttriviales Polynom in y mit $a_\nu \in F[x]$ ($\nu = 0,1,\dots,n$). P ist von einem Grad $\leqslant n$, der mit $\partial(P)$ bezeichnet sei. $h(P) := \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu| = q^{\max \partial a_\nu}$ heisse die Höhe von P. Die Höhe einer algebraischen Laurentreihen wird als die Höhe ihres Minimalpolynoms definiert.

Ferner seien $\omega_1, \dots, \omega_n$ alle Konjugierten vom algebraischen ω, d.h. die Nullstellen seines Minimalpolynoms, dann bezeichnet das Symbol $\overline{|\omega|}$ das Maximum von $|\omega_j|$ $(j = 1, \dots, n)$.

Es sei $\omega \in K$ transzendent. Setzt man in Analogie zum klassischen Fall (siehe Schneider [7], S.66)

$$W_n(H, \omega) := \min_{\substack{P \neq 0 \\ h(P) \leqslant H \\ \partial(P) \leqslant n}} |P(\omega)|,$$

$$W_n(\omega) := \limsup_{H \to \infty} (-\log W_n(H, \omega)) / \log H,$$

$$W(\omega) := \limsup_{H \to \infty} W_n(\omega) / n,$$

so hat man $W_n(\omega) \geqslant n$ für alle $n \in N$ und also $W(\omega) \geqslant 1$ wegen

$$W_n(H, \omega) < H^{-n} q^n \max(1, |\omega|^n)$$

für alle $n, H \in N$ (siehe Bundschuh [2], *HS*. 3).

Sei $\mu(\omega)$ der kleinste Index n, für den $W_n(\omega) = \infty$ ist, falls es einen solchen überhaupt gibt, sonst sei $\mu(\omega) := \infty$. Dann heisst ein transzendentes $\omega \in K$ eine

S - Laurentreihe , falls $1 \leqslant W(\omega) < \infty$, $\mu(\omega) = \infty$;

T - Laurentreihe , falls $W(\omega) = \infty$, $\mu(\omega) = \infty$,

U - Laurentreihe , falls $W(\omega) = \infty$, $\mu(\omega) < \infty$.

Man kann noch die Klasse U unterteilen. ω heisst eine U_m - Laurentreihe falls $\mu(\omega) = m$ $(m > 0)$ ist.

In der vorliegenden Arbeit werden transzendente Laurentreihen in U_m als Funktionenwerte gewisser Potenzreihen und Lückenreihen für algebraische Argumente konstruiert. Hierfür wird eine Methode auf den Körper K übertragen, die der Author [8] im klassischen und p-adischen Fall angewandt hat, um neue transzendente Zahlen in Mahlerschen Unterklassen U_m $(m > 0)$ als Werte gewisser Potenzreihen für algebraische Argumente zu konstruieren.

Also wird hierdurch auch gezeigt, dass die Unterklassen U_m der transzendenten formalen Laurentreihen nicht leer sind. Die entsprechende Tatsache im klassischen Fall ist schon von LeVeque [5] in 1953 bewiesen worden.

Durch dieselbe Methode haben Alnıaçık [1] und Zeren [9] im klassischen und p-adischen Fall auch neue transzendente Zahlen in U_m konstruiert.

§ 2. HILFSSAETZE

Im folgenden werden die benötigten Hilfssaetze angegeben, deren Beweise aehnlich zum klassischen Fall sind.

Hilfssatz 1. Es sei $P(y) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^\nu$ ein Polynom über $F[x]$ mit dem genauen Grad n und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullsteilen von $P(y)$. Dann gilt

$$|a_n| \prod_{i=1}^{n} \max(1, |\alpha_i|) = h(P)$$

(siehe Lang [4], S. 58).

Hilfssatz 2. Es seien $P(y) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^\nu$ und $Q(y) = \sum_{\mu=0}^{n} b_\mu y^\mu$ zwei Polynome über $F[x]$ mit genauen Graden n bzw. m. Falls γ eine Nullstelle von $Q(y)$ ist, dann gilt

$$|P(\gamma)| \geqslant |R| \, h(P)^{-m+1} \, h(Q)^{-n},$$

wobei R die Resultante von P und Q bedeutet (Vgl. Güting [3], Satz 1, S.151).

Folgerung. Falls die Polynome $P(y)$ und $Q(y)$ im Hilfssatz 2 keinen gemeinsamen Faktoren haben, dann gilt

$$|P(\gamma)| \geqslant h(P)^{-m+1} h(Q)^{-n} .$$

Hilfssatz 3. Es seien α_1 und α_2 algebraisch über $F(x)$, die voneinander verschieden und zueinander konjugiert sind. Ferner bezeichnen n ihren Grad mit $p+n$ und H ihre Höhe, dann gilt

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant H^{-n+1/2}$$

(Vgl. Güting [3], Satz 8, S.158).

Hilfssatz 4. Es gehören $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ $(s \geqslant 1)$ einem endlich-algebraischen Erweiterungskörper H von $F(x)$ mit $[H : F(x)] = m$. Dann gelten

$$h(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s) \leqslant h(\alpha_1)^{2m^2} \ldots h(\alpha_s)^{2m^2} ,$$

$$h(\alpha_1 \ldots \alpha_s) \leqslant h(\alpha_1)^{2m^2} \ldots h(\alpha_s)^{2m^2} .$$

Beweis (Vgl. Ramachandra [6], Lemma 1, S.75). Es sei γ beliebig aus H. Dann gelten

$$h(\gamma) \leqslant |d(\gamma)|^m . \max(1, \overline{|\gamma|})^m , \tag{1}$$

$$|d(\gamma)| \leqslant h(\gamma) , \tag{2}$$

$$\overline{|\gamma|} \leqslant h(\gamma)^m . \tag{3}$$

Zum Beweis dieser Behauptungen betrachten wir das Minimalpolynom von γ $P(y) = a_n y^n + \ldots + a_0$ $(n \leqslant m)$. Es sei $h(\gamma) = |a_j|$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ und seien $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ die Nullstellen von P. Es gilt

$$|a_j / a_n| = \Big| \sum_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-j})} \gamma_{\lambda_1} \ldots \gamma_{\lambda_{n-j}} \Big| \leqslant \max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-j})} |\gamma_{\lambda_1} \ldots \gamma_{\lambda_{n-j}}|$$

$$\leqslant \max(1, \overline{|\gamma|}^m)$$

und folgt hieraus

$$h(\gamma) \leqslant |a_n| \max(1, \overline{|\gamma|})^n . \tag{4}$$

Es sei $d = d(\gamma)$ und folgt dann aus der Gleichung $P(\gamma) = 0$

$$a_n d^n \gamma^n + a_{n-1} d^n \gamma^{n-1} + \ldots + a_0 d^n = 0$$

und

$$a_n (d\gamma)^n + a_{n-1} d (d\gamma)^{n-1} + \ldots + a_0 d^n = 0 .$$

Da $d\gamma$ ganz algebraisch ist, gilt $a_n \mid (a_{n-1}\, d, \ldots, a_0\, d^n)$. Andererseits gilt $(a_{n-1}\, d, \ldots, a_0\, d^n) \mid d^n\, (a_{n-1}, \ldots, a_0)$. Also folgt $a_n \mid d^n\, (a_{n-1}, \ldots, a_0)$. Da $a_0, \ldots, a_n$ keinen gemeinsamen Faktoren haben, gilt $a_n \mid d^n$. Also hat man

$$|a_n| \leqslant |d|^n. \tag{5}$$

Nach (4) und (5) gilt (1). Da $a_n\, \gamma$ ganz algebraisch ist, folgt nach der Definition von $d(\gamma)$ $|d| \leqslant |a_n|$. Daraus erhaelt man (2). Falls $\overline{|\gamma|} = |\gamma_j|$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ ist, folgt aus dem Hilfssatz 1

$$|a_n|\ \overline{|\gamma|} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \max\,(1, |\gamma_i|) = h(\gamma). \tag{6}$$

Andererseits ist $h(\gamma) \geqslant 1$ und also $1 / h(\gamma) \leqslant 1$. Also folgt

$$1 / h(\gamma) \leqslant \max\,(1, |\gamma_i|). \tag{7}$$

Da ferner $|a_n| \geqslant 1$ ist, folgt aus (6) und (7) $\overline{|\gamma|}\, h(\gamma)^{-n+1} \leqslant h(\gamma)$ und hieraus folgt (3) wegen $n \leqslant m$.

Jetzt seien $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ $(s \geqslant 1)$ aus H. Dann gelten folgende Aussagen:

$$|d(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)| \leqslant |d(\alpha_1)| \ldots |d(\alpha_s)|,$$

$$|d(\alpha_1 \ldots \alpha_s)| \leqslant |d(\alpha_1)| \ldots |d(\alpha_s)|,$$

$$\overline{|\alpha_1 + \ldots + \alpha_s|} \leqslant \max\,(\overline{|\alpha_1|}, \ldots, \overline{|\alpha_s|}),$$

$$\overline{|\alpha_1 \ldots \alpha_s|} \leqslant \overline{|\alpha_1|} \ldots \overline{|\alpha_s|}.$$

Es folgt aus (1) für $\gamma = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ und aus den obigen Ungleichungen

$$\begin{aligned} h(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s) &\leqslant |d(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)|^m \max\,(1, \overline{|\alpha_1 + \ldots + \alpha_s|})^m \\ &\leqslant |d(\alpha_1)|^m \ldots |d(\alpha_s)|^m \max\,(1, \overline{|\alpha_1|}, \ldots, \overline{|\alpha_s|})^m. \end{aligned}$$

Hieraus und aus (2) und (3) erhaelt man

$$h(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s) \leqslant h(\alpha_1)^m \ldots h(\alpha_s)^m \max\,(1, h(\alpha_1)^m, \ldots, h(\alpha_s)^m)^m.$$

Da $h(\alpha_j) \geqslant 1$ $(j = 1, \ldots, s)$ ist, gilt folglich

$$\begin{aligned} h(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s) &\leqslant h(\alpha_1)^m \ldots h(\alpha_s)^m \,.\, h(\alpha_1)^{m^2} \ldots h(\alpha_s)^{m^2} \\ &\leqslant h(\alpha_1)^{2m^2} \ldots h(\alpha_s)^{2m^2}. \end{aligned}$$

Die andere Behauptung des Hilfssatzes 4 laesst sich genauso beweisen.

§ 3. SATZ 1

Satz 1. Es sei

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n \tag{1}$$

eine Potenzreihe über $F(x)$ mit $c_n = b_n / a_n \neq 0$, a_n und b_n teilerfremd, $|a_n| > 1$ für $n \geqslant N_0$ [1] und gelten

$$\lim_{n\to\infty} \log |a_{n+1}| / \log |a_n| = +\infty\,, \tag{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \log |b_n| / \log |a_n| < 1\,. \tag{3}$$

Dann ist der Konvergenzradius von $f(y)$ unendlich und für ein nicht verschwindendes algebraisches α aus K vom Grade m mit $p \nmid m$ gehört $f(\alpha)$ der Unterklasse U_m.

Beweis. Es folgt aus (2) für $n \geqslant N_1 \geqslant N_0$, dass die Folge $\{|a_n|\}$ von $n = N_1$ ab streng monoton waechst und es gelten

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty\,,\ \lim_{n\to\infty} \log |a_n| / n = +\infty\,,\ \lim_{n\to\infty} \log |a_n| / n^2 = +\infty\,. \tag{4}$$

Seien $\theta := \limsup_{n\to\infty} \log |b_n| / \log |a_n|$ und δ eine konstante reelle Zahl mit $\theta < \delta < 1$. Aus (3) folgt für $n \geqslant N_2 \geqslant N_1$

$$|b_n| < |a_n|^{\delta}\,. \tag{5}$$

Nach (5) gilt $|b_n/a_n|^{1/n} < |a_n|^{-(1-\delta)/n}$, woraus und aus (4) folgt $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 0$. Also hat (1) den Konvergenzradius unendlich.

Es seien $\beta := f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ und $\beta_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \alpha^\nu$. Wir schaetzen die Höhe von β_n nach oben ab. Nach Hilfssatz 4 gilt

$$h(\beta_n) \leqslant \prod_{\nu=0}^{n} [h(c_\nu)\, h(\alpha)^{\nu 2m^2}]^{4m^4}\,.$$

Da ferner wegen (5) für $\nu \geqslant N_2$ gilt $h(c_\nu) = \max(|a_\nu|, |b_\nu|) = |a_\nu|$, ergibt sich

$$h(\beta_n) \leqslant h(\alpha)^{8m^6(1+\ldots+n)} \Big(\prod_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\Big)^{4m^4}\,.$$

[1] Hier und im folgenden werden mit N_0, N_1, N_2,... passende Indizis bezeichnet.

Es folgt aus (2) für hinreichend grosses n mit einer geeigneten festen Zahl $k_0 > 1$

$$\prod_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \leqslant k_0 |a_n|^2 .$$

Da ferner $1 + \ldots + n \leqslant n^2$ und $h(\alpha)$, k_0, m konstante Zahlen sind, erhaelt man hieraus und aus (4) für $n \geqslant N_3 \geqslant N_2$

$$h(\beta_n) \leqslant |a_n|^{9m^4} . \tag{6}$$

Jetzt beweisen wir, dass die Grade von β_n für hinreichend grosses n gleich m sind. Diese Tatsache ist trivial für $m = 1$, also sei im folgenden $m > 1$. Es gilt

$$\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)} = \beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)} + c_{n+1} (\alpha^{(i)^{n+1}} - \alpha^{(j)^{n+1}}) .$$

Da für jedes n, $\partial(\beta_n) \mid m$[2] und $p \nmid m$ sind, gilt $p \nmid \partial(\beta_n)$. Falls $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ ist, gilt nach Hilfssatz 3 und wegen $\partial(\beta_n) \leqslant m$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| \geqslant h(\beta_n)^{-m+1/2} .$$

Hieraus und aus (6) ergibt sich für $n \geqslant N_3$

$$|\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| \geqslant |a_n|^{-9m^4(m-1/2)} .$$

Andererseits gilt

$$|c_{n+1} (\alpha^{(i)^{n+1}} - \alpha^{(j)^{n+1}})| \leqslant |c_{n+1}| \,\overline{|\alpha|}^{\,n+1} .$$

Da wegen (2), (4) und (5) für hinreichend grosses n gilt

$$|a_n|^{-9m^4(m-1/2)} > |c_{n+1}| \,\overline{|\alpha|}^{\,n+1} ,$$

hat man für $n \geqslant N_4 \geqslant N_3$

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| = |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}| .$$

Also gilt für $n \geqslant N_4$: aus $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ folgt $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$ für jedes Paar (i, j) mit $i \neq j$. Ferner dürfen die Gleichungen

$$\beta_k^{(i)} = \beta_k^{(j)} \quad (k = n, n+1, n+2) \ (i \neq j)$$

nicht gleichzeitig gelten. Denn sonst ergaebe sich wegen $\alpha \neq 0$ aus

$$(\beta_{n+2}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(i)}) / (\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_n^{(i)}) = (\beta_{n+2}^{(j)} - \beta_{n+1}^{(j)}) / (\beta_{n+1}^{(j)} - \beta_n^{(j)})$$

$\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)}$. Das waere dann ein Wiederspruch, weil ja $\partial(\alpha) = m$ ist. Also ist $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ für $n \geqslant N_5 \geqslant N_4 + 2$ und jedes Paar (i, j) mit $i \neq j$, d.h. $\partial(\beta_n) = m$ für $n \geqslant N_5$.

[2] Das Symbol $\partial(\gamma)$ bedeutet den Grad eines algebraischen γ aus K über $F(x)$.

Es seien $P_n(y) = f_0^{(n)} + f_1^{(n)} y + \ldots + f_m^{(n)} y^m$ die Minimalpolynome von β_n über $F[x]$ für $n \geqslant N_5$. Es gilt

$$P_n(\beta) = P_n(\beta_n + r_n) = r_n \gamma_n$$

mit

$$\gamma_n = f_1^{(n)} + f_2^{(n)} (2\beta_n + r_n) + \ldots + f_m^{(n)} (m \beta_n^{m-1} + \tbinom{m}{2} \beta_n^{m-2} r_n + \ldots + r_n^{m-1}).$$

Es folgt aus (2) und (4) für $n \geqslant N_6 \geqslant N_5$ $|r_n| \leqslant |c_{n+1}| \, |\alpha|^{n+1}$. Wegen $|f_\nu^{(n)}| \leqslant h(\beta_n) \leqslant |a_n|^{9m^4}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ und der Beschraenktheit von $|\beta_n|$ und $|r_n|$ erhaelt man $|\gamma_n| \leqslant |a_n|^{9m^4}$ für $n \geqslant N_7 \geqslant N_6$. Also ergibt sich nach (4) und (5) für $n \geqslant N_8 \geqslant N_7$

$$|P_n(\beta)| = |r_n| \, |\gamma_n| \leqslant |a_n|^{9m^4+1} / |a_{n+1}|^{1-\delta}.$$

Seien $\xi_n := \log |a_{n+1}| / \log |a_n|$ und $s_n := ((1-\delta)\xi_n - 9m^4 - 1) / 9m^4$, dann folgt hieraus und aus (6)

$$|P_n(\beta)| \leqslant h(\beta_n)^{-s_n}. \tag{7}$$

Die Folge $\{\beta_n\}$ hat unendlich viele voneinander verschiedene Glieder. Denn im Gegenfall bestünde $\{\beta_n\}$ aus Wiederholungen endlich vieler Glieder. Dann würde $t := \min\limits_{\beta_l \neq \beta_k} |\beta_l - \beta_k|$ als eine positive Zahl existieren. Da (1) für $y = \alpha$ konvergiert, ist $\lim\limits_{n\to\infty} |c_{n+1} \alpha^{n+1}| = 0$. Also erhielte man $0 < |\beta_{n+1} - \beta_n| < t$ für hinreichend grosses n. Dies wiederspricht aber der Definition von t. Hieraus ergibt sich die Existenz einer unendlichen Teilfolge von $\{\beta_n\}$ mit ganz verschiedenen Gliedern. Hieraus folgt, dass auch die Folge $\{P_n\}$ eine unendliche Teilfolge $\{P_{n_k}\}$ mit ganz verschiedenen Gliedern hat. Da P_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ unzerlegbar sind, kann β Nullstelle von höchstens einem P_{n_k} sein. Im gegebenenfall kann man endlich viele Glieder aus dem Anfang von $\{P_{n_k}\}$ auslassen, sodass es für $n_k \geqslant N_9 \geqslant N_8$ immer $P_{n_k}(\beta) \neq 0$ gilt. Andererseits können die Höhen von P_{n_k} wegen $\partial(P_{n_k}) = m$ nach oben nicht beschraenkt sein. Denn sonst waeren P_{n_k} in endlicher Anzahl, da der Körper F endlich ist. Also hat $\{P_{n_k}\}$ eine Teilfolge $\{P_{n_{k_j}}\}$ derart, dass $h(P_{n_{k_j}}) = h(\beta_{n_{k_j}})$ monoton wachsend gegen $+\infty$ strebt. Also folgt aus (7) für $n_{k_j} \geqslant N_9$

$$0 \neq |P_{n_{k_j}}(\beta)| \leqslant h(P_{n_{k_j}})^{-s_{n_{k_j}}}.$$

Da wegen (2) $\limsup\limits_{j\to\infty} s_{n_{k_j}} = +\infty$ ist, erhaelt man

$$\mu(\beta) \leqslant m . \tag{8}$$

Es sei $m = 1$. Da es immer $\mu(\beta) \geqslant 1$ ist, folgt aus (8)

$$\mu(\beta) = 1 . \tag{9}$$

Also sei im folgenden $m > 1$ und sei $P(y)$ ein Polynom über $F[x]$ vom Grade $1 \leqslant g \leqslant m - 1$. Dann gilt für irgendeinen Index ν

$$P(\beta) = P(\beta_\nu) + r_\nu \gamma_\nu . \tag{10}$$

Es ist $P(\beta_\nu) \neq 0$ für $\nu \geqslant N_9$. Also gilt nach der Folgerung des Hilfssatzes 2 und (6)

$$|P(\beta_\nu)| \geqslant h(P)^{-m+1} |a_\nu|^{-(m-1)9m^4} . \tag{11}$$

Ferner gilt für $\nu \geqslant N_0$

$$|r_\nu| \, |\gamma_\nu| \leqslant |a_\nu|^{9m^4+1} |a_{\nu+1}|^{-1+\delta} = |a_{\nu+1}|^{-1+\delta+(9m^4+1)/\xi_\nu} .$$

Wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_\nu = +\infty$ erhaelt man hieraus für $\nu \geqslant N_{10} \geqslant N_9$

$$|r_\nu| \, |\gamma_\nu| \leqslant |a_{\nu+1}|^{-(1-\delta)/2} . \tag{12}$$

Wir waehlen jetzt die Zahlen λ und η so, dass die Ungleichungen

$$\lambda(1-\delta)/2 > (m-1)(9m^4+1) , \tag{13}$$

$$(1-\delta)/2\eta > (m-1)(\lambda 9m^4+1) \tag{14}$$

erfüllt werden. Hieraus folgen $\lambda > 1$ und $\eta > 0$. Ferner gilt wegen (2) für $n \geqslant N_{11}(\eta) \geqslant N_{10}$

$$|a_\nu| < |a_{\nu+1}| . \tag{15}$$

Jetzt seien $N^* = N_{11}(\eta)$ und $H^* = |a_{N^*}|$. Es existiert für jedes $H = h(P) > H^*$ so ein n, dass es

$$|a_n| \leqslant H < |a_{n+1}|$$

gilt. Ferner ist $n \geqslant N^*$ für $H > H^*$. Falls es für λ

$$|a_n| \leqslant H < |a_{n+1}|^{1/\lambda} \tag{16}$$

gilt, dann sind $|a_n| \leqslant H$ und $H^\lambda < |a_{n+1}|$. Wir schreiben jetzt (10), (11) und (12) für $\nu = n$ und erhalten dann wegen $n \geqslant N^* = N_{11}$

$$P(\beta) = P(\beta_n) + r_n \gamma_n , \tag{17}$$

$$|P(\beta_n)| \geqslant H^{-(m-1)(9m^4+1)} , \tag{18}$$

$$|r_n| \, |\gamma_n| \leqslant H^{-\lambda(1-\delta)/2} . \tag{19}$$

Also ergibt sich aus (13), (17), (18) und (19) $|P(\beta)| = |P(\beta_n)|$ und folglich wegen (18)

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-(m-1)(9m^4+1)}. \tag{20}$$

Falls es für λ die Beziehung (16) nicht gilt, dann muss gelten

$$|a_{n+1}|^{1/\lambda} \leqslant H < |a_{n+1}|.$$

Hieraus folgen $|a_{n+1}| \leqslant H^\lambda$ und $H < |a_{n+1}|$. Wenn wir jetzt $\nu = n+1$ in (10), (11), (12) und (15) nehmen, dann erhalten wir

$$P(\beta) = P(\beta_{n+1}) + r_{n+1}\,\gamma_{n+1}, \tag{21}$$

$$|P(\beta_{n+1})| \geqslant H^{-(m-1)(1+9\lambda m^4)}, \tag{22}$$

$$|r_{n+1}|\,|\gamma_{n+1}| \leqslant |a_{n+2}|^{-(1-\delta)/2}, \tag{23}$$

$$|a_{n+1}| < |a_{n+2}|^\eta. \tag{24}$$

Es folgt aus (14), (21), (22), (23) und (24) $|P(\beta)| = |P(\beta_{n+1})|$ und gilt also wegen (22)

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-(m-1)(1+9\lambda m^4)}. \tag{25}$$

Aus (20) und (25) erhaelt man für $H > H^*$

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-c} \tag{26}$$

mit $c = (m-1)(1+9\lambda m^4)$. Weil c von H nicht abhaengt und der Grad von $P(y)$ nur die Werte von 1 bis $(m-1)$ annehmen darf, folgt aus (26)

$$\mu(\beta) \geqslant m. \tag{27}$$

So ergibt sich zusammen aus (8) und (27)

$$\mu(\beta) = m. \tag{28}$$

§ 4. SAETZE 2 UND 3

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Potenzreihe $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n y^n / a_n$, wobei $\eta_n \neq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ ganz algebraisch sind und zu einer endlichalgebraischen Erweiterung H von $F(x)$ mit $[H : F(x)] = s$ gehören. Ferner seien $a_n \in F[x]$, $a_n \neq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Es sei $\alpha \neq 0$ algebraisch aus K vom Grade m und sei L eine endlich-algebraische Erweiterung von $F(x)$ vom niedrigsten Grad t mit $H \subset L$, $F(x,\alpha) \subset L$ und $p \nmid t$. Es gilt offenbar $t \geqslant m, s$.

Satz 2. Es sei die Potenzreihe

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n y^n / a_n \tag{1}$$

wie oben gegeben. Es sei $|a_n| > 1$ für $n \geqslant N_0$ und gelten

$$\lim_{n\to\infty} \log |a_{n+1}| / \log |a_n| = +\infty, \tag{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \log h(\eta_n) / \log |a_n| < 1/s. \tag{3}$$

Dann ist der Konvergenzradius von $f(y)$ unendlich und mit einem geeigneten positiven ganzrationaligen Teiler e von t gilt $f(\alpha) \in U_e$.

Beweis. Wegen (2) waechst die Folge $\{|a_n|\}$ monoton für $n \geqslant N_1 \geqslant N_0$ und es gelten

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \log |a_n| / n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \log |a_n| / n^2 = +\infty. \tag{4}$$

Seien $\theta := \limsup_{n\to\infty} \log h(\eta_n) / \log |a_n|$ und δ eine konstante Zahl mit $\theta < \delta < 1/s$. Aus (3) folgt für $n \geqslant N_2 \geqslant N_1$

$$h(\eta_n) < |a_n|^{\delta}. \tag{5}$$

Nach (3) im Beweis von Hilfssatz 4 gilt

$$|\eta_n| \leqslant \overline{|\eta_n|} \leqslant h(\eta_n)^s \tag{6}$$

und folgt aus (5) und (6)

$$|\eta_n / a_n|^{1/n} < |a_n|^{-(1-\delta s)/n}.$$

Wegen $1 - \delta s > 0$ und (4) gilt $\limsup_{n\to\infty} |\eta_n / a_n|^{1/n} = 0$, d.h. (1) hat den Konvergenzradius unendlich.

Es seien $\beta := f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \alpha^n / a_n$ und $\beta_n := \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \alpha^\nu / a_\nu$. β_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ gehören zum Körper L. Es gilt nach Hilfssatz 4

$$h(\beta_n) \leqslant \prod_{\nu=0}^{n} h(\eta_\nu)^{8t^6} |a_\nu|^{8t^6} h(\alpha)^{\nu 8t^6}.$$

Hieraus folgt wegen (5)

$$h(\beta_n) \leqslant h(\alpha)^{8t^6(1+2+\ldots+n)} \prod_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^{(1+\delta)8t^6}.$$

Es folgt aus (2) für hinreichend grosses n mit einer geeigneten festen Zahl $k_0 > 1$ $\prod_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \leqslant k_0 |a_n|^2$. Da ferner $1+\ldots+n \leqslant n^2$ und $h(\alpha)$, k_0, m, t, $1+\delta$ konstante Zahlen sind, bekommt man hieraus und aus (4) für $n \geqslant N_4 \geqslant N_3$

$$h(\beta_n) \leqslant |a_n|^{33t^6}. \tag{7}$$

Jetzt beweisen wir, dass die Grade von β_n für hinreichend grosses n konstant bleiben. Wie im Satz 1 kann man zeigen, dass es für $n \geqslant N_5 \geqslant N_4$ gilt

$$|\beta_{n+1}^{(i)} - \beta_{n+1}^{(j)}| = |\beta_n^{(i)} - \beta_n^{(j)}|,$$

falls $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ ist. Also gilt für $n \geqslant N_5$: aus $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ folgt $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$ für jedes Paar (i,j) mit $i \neq j$. Das bedeutet, dass die Grade von β_n für $n \geqslant N_5$ nicht abnehmen. Da ferner $\partial(\beta_n) \leqslant t$ ist, bleiben die Grade von β_n fest von einem Index ab. Also gilt $\partial(\beta_n) = e$ für $n \geqslant N_6 \geqslant N_5$ mit einem geeigneten positiven ganzrationaligen Teiler e von t.

Es seien $P_n(y) = f_0^{(n)} + f_1^{(n)} y + \ldots + f_e^{(n)} y^e$ die Minimalpolynome von β_n über $F[x]$ für $n \geqslant N_6$. Man kann wie im Satz 1 zeigen, dass es gelten

$$P_n(\beta) = P_n(\beta_n + r_n) = r_n \gamma_n,$$

$$|r_n| \leqslant |\eta_{n+1} / a_{n+1}| \, |\alpha|^{n+1} \text{ für } n \geqslant N_7 \geqslant N_6,$$

$$|\gamma_n| \leqslant |a_n|^{33t^6} \text{ für } n \geqslant N_8 \geqslant N_7.$$

Also ergibt sich nach (4), (5) und (6) für $n \geqslant N_9 \geqslant N_8$

$$|P_n(\beta)| = |r_n| \cdot |\gamma_n| \leqslant |a_n|^{33t^6+1} / |a_{n+1}|^{1-\delta s}.$$

Seien $\xi_n := \log |a_{n+1}| / \log |a_n|$ und $s_n := ((1-\delta s)\,\xi_n - 33t^6 - 1) / 33t^6$, dann folgt hieraus und aus (7)

$$|P_n(\beta)| \leqslant h(\beta_n)^{-s_n}. \tag{8}$$

Man kann zeigen, dass die Folge $\{P_n\}$ eine solche unendliche Teilfolge $\{P_{n_k}\}$ besitzt, deren Glieder saemtlich voneinander verschieden und $P_{n_k}(k = 1, 2, \ldots)$ für β nicht verschwinden und $h(P_{n_k}) = h(\beta_{n_k})$ monoton wachsend gegen $+\infty$ strebt. Also folgt aus (8) für $n_k \geqslant N_{10} \geqslant N_9$

$$0 \neq |P_{n_k}(\beta)| \leqslant h(P_{n_k})^{-s_{n_k}}.$$

Da wegen (2) $\limsup_{k\to\infty} s_{n_k} = +\infty$ ist, erhaelt man

$$\mu(\beta) \leqslant e. \tag{9}$$

Es gilt offenbar für $e = 1$

$$\mu(\beta) = 1. \tag{10}$$

Also sei im folgenden $e > 1$ und sei $P(y)$ ein Polynom über $F[x]$ vom Grade $1 \leqslant g \leqslant e-1$. Dann gilt für irgendeinen Index ν

$$P(\beta) = P(\beta_\nu) + r_\nu \gamma_\nu. \tag{11}$$

Es ist $P(\beta_\nu) \neq 0$ für $\nu \geqslant N_{10}$. Also gilt nach der Folgerung des Hilfssatzes 2 und (7)

$$|P(\beta_\nu)| \leqslant h(P)^{-(t-1)} |a_\nu|^{-33t^6(t-1)}. \tag{12}$$

Andererseits gilt für $\nu \geqslant N_{10}$

$$|r_\nu|\,|\gamma_\nu| \leqslant |a_\nu|^{33t^6+1} / |a_{\nu+1}|^{1-\delta s} = |a_{\nu+1}|^{-(1-\delta s-(33t^6+1)/\xi_\nu)}.$$

Wegen $\lim_{\nu\to\infty} \xi_\nu = +\infty$ erhaelt man hieraus für $\nu \geqslant N_{11} \geqslant N_{10}$

$$|r_\nu|\,|\gamma_\nu| \leqslant |a_{\nu+1}|^{-(1-\delta s)/2}. \tag{13}$$

Wir waehlen die Zahlen λ und η so, dass die Ungleichungen

$$\lambda(1-\delta s)/2 > (t-1)(1+33t^6), \tag{14}$$

$$(1-\delta s)/2\eta > (t-1)(1+33\lambda t^6) \tag{15}$$

gelten. Hieraus folgen $\lambda > 1$ und $\eta > 0$. Es gilt wegen (2) für $n \geqslant N_{12}(\eta) \geqslant N_{11}$

$$|a_\nu| < |a_{\nu+1}|^\eta. \tag{16}$$

Es seien jetzt $N^* = N_{12}(\eta)$ und $H^* = |a_{N^*}|$. Es existiert für jedes $H = h(P) > H^*$ so ein n, dass es gilt

$$|a_n| \leqslant H < |a_{n+1}|.$$

Ferner ist $n \geqslant N^*$ für $H > H^*$. Wenn es für λ gilt

$$|a_n| \leqslant H < |a_{n+1}|^{1/\lambda}, \tag{17}$$

dann sind $|a_n| \leqslant H$ und $H^\lambda < |a_{n+1}|$. Man erhaelt aus (11), (12) und (13) für $\nu = n$

$$P(\beta) = P(\beta_n) + r_n \gamma_n, \tag{18}$$

$$|P(\beta_n)| \geqslant H^{-(t-1)(1+33t^6)}, \tag{19}$$

$$|r_n||\gamma_n| \leqslant H^{-\lambda(1-\delta s)/2}. \tag{20}$$

Also folgt aus (14), (18), (19) und (20) $|P(\beta)| = |P(\beta_n)|$ und folglich nach (19)

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-(t-1)(1+33t^6)}. \tag{21}$$

Wenn es für λ die Beziehung (17) nicht gilt, dann muss gelten

$$|a_{n+1}|^{1/\lambda} \leqslant H < |a_{n+1}|.$$

Hieraus folgen $|a_{n+1}| \leqslant H^\lambda$ und $H < |a_{n+1}|$. Man erhaelt aus (11), (12), (13) und (16) für $\nu = n+1$

$$P(\beta) = P(\beta_{n+1}) + r_{n+1}\gamma_{n+1}, \tag{22}$$

$$|P(\beta_{n+1})| \geqslant H^{-(t-1)(1+33\lambda t^6)}, \tag{23}$$

$$|r_{n+1}||\gamma_{n+1}| \leqslant |a_{n+2}|^{-(1-\delta s)/2}, \tag{24}$$

$$|a_{n+1}| < |a_{n+2}|^\eta. \tag{25}$$

Es folgt aus (15), (22), (23), (24) und (25) $|P(\beta)| = |P(\beta_{n+1})|$ und gilt also nach (19)

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-(t-1)(1+33\lambda t^6)}. \tag{26}$$

Aus (21) und (26) erhaelt man für $H > H^*$

$$|P(\beta)| \geqslant H^{-c}, \tag{27}$$

wobei $c := (t-1)(1+33\lambda t^6)$ eine Konstante ist und von H nicht abhaengt. Daraus folgt

$$\mu(\beta) \geqslant e. \tag{28}$$

Aus (9) und (28) bekommt man

$$\mu(\beta) = e. \tag{29}$$

Bemerkung 1. Es ist nicht immer möglich genaue Aussagen über e im Satz 2 zu machen, wenn der Körper H beliebig gegeben ist. Zum Beispiel sei H eine beliebige endlich-algebraische Erweiterung von $F(x)$ vom Grade $s \geqslant 2$. Es sei ε eine arithmetische Einheit von H und $\eta_n = \varepsilon^n$ $(n = 0,1,\dots)$. Ferner seien $|a_n| > 1$ für $n \geqslant N_0$ und $\lim_{n\to\infty} \log|a_{n+1}| / \log|a_n| = +\infty$. Die Bedingungen des Satzes 2 werden hier erfüllt. Sei $\alpha = \varepsilon^{-1}$, dann folgt $f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$, d.h. es gilt $f(\alpha) \in U_1$. Also ist $e = 1$, aber $t = s > 1$.

Bemerkung 2. In manchen speziellen Faellen kann man genaue Aussagen über e machen. Ein solcher Fall ist $H = F(x)$. In diesem Fall wird der Satz 2 auf den Satz 1 mit $e = t = m$ induziert. Ein anderer spezieller Fall ist $\alpha \in F(x)$, welcher unten als ein Satz behandelt wird.

Satz 3. Es seien die Bedingungen (2) und (3) für die Potenzreihe $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n y^n / a_n$ erfüllt. Ferner sei $|a_n| > 1$ für $n \geqslant N_0$. Falls die Folge $\{\eta_n\}$ eine solche Teilfolge $\{\eta_{n_k}\}$ besitzt, dass die Grade deren Glieder gleich s sind, dann gilt $f(\alpha) \in U_s$ für nicht verschwindendes $\alpha \in F(x)$.

Beweis. Es existiert für jedes $n \in Z^+$ ein n_k mit $n_k > n$ und $\partial(\eta_{n_k}) = s$. Es gilt mit einem geeigneten N_0': aus $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ folgt $\beta_{n+1}^{(i)} \neq \beta_{n+1}^{(j)}$ für $n > N_0'$ und jedes Paar (i, j) $(i \neq j)$. Es sei N_{k_0} das erste Glied nach N_0' mit $\partial(\eta_{N_{k_0}}) = s$, d.h. es gilt $\eta_{N_{k_0}}^{(i)} \neq \eta_{N_{k_0}}^{(j)}$ $(i \neq j)$. Dann können die Gleichungen

$$\beta_l^{(i)} = \beta_l^{(j)} \quad (l = N_{k_0} - 1, N_{k_0}) \ (i \neq j)$$

nicht gleichzeitig erfüllt werden. Denn sonst erhielte man $\eta_{N_{k_0}}^{(i)} = \eta_{N_{k_0}}^{(j)}$. Hieraus bekommt man $\beta_n^{(i)} \neq \beta_n^{(j)}$ für $n \geqslant N_{k_0}$, d.h. es gilt $\partial(\beta_n) = s$ für $n \geqslant N_{k_0}$. Wenn man den Beweisgang des Satzes 2 hier anwendet, dann erhaelt man $f(\alpha) \in U_s$.

§ 5. SAETZE 4 UND 5

Wir betrachten in diesem Paragraphen die Lückenreihen über $F(x)$ und endlich-algebraische Erweiterungen von $F(x)$. Der folgende Satz ist eine Übertragung des Satzes 1 auf Lückenreihen:

Satz 4. Es sei

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} y^{n_i} \tag{1}$$

eine Lückenreihe über $F(x)$ mit $c_{n_i} = b_{n_i} / a_{n_i} \neq 0$, a_{n_i} und b_{n_i} teilerfremd und $|a_{n_i}| > 1$ für $n_i \geqslant N_0$. Ferner gelten

$$\lim_{i \to \infty} n_{i+1} / n_i = + \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{i \to \infty} \log |a_{n_i}| / n_i < + \infty. \tag{3}$$

Wir setzen noch voraus, dass der Konvergenzradius R von (1) positiv ist. Es sei α algebraisch aus K vom Grade m mit $p+m$ und $0<\overline{|\alpha|}<R$. Ausserdem seien die Konjugierten von α nach der Bewertung voneinander saemtlich verschieden. Dann gilt $f(\alpha)\in U_m$.

Beweis. Wegen $\overline{|\alpha|}<R$ konvergiert (1) für $y=\alpha$. Es sei $r_{n_k}:=\sum_{i=k+1}^{\infty} c_{n_i}\alpha^{n_i}$. Da $R>0$ ist, gilt

$$\limsup_{i\to\infty} |c_{n_i}|^{1/n_i} = \begin{cases} 1/R & \text{für } 0<R<+\infty \\ 0 & \text{für } R=+\infty . \end{cases} \tag{4}$$

Im Falle $0<R<+\infty$ folgt aus (4) für $\varepsilon>0$ und hinreichend grosses n

$$|c_{n_i}|<(R-\varepsilon)^{-n_i}. \tag{5}$$

Sei $\varepsilon>0$ so klein gewaehlt, dass $\overline{|\alpha|}<R-\varepsilon$ gilt. Dann folgt für $n_i\geqslant N_1(\varepsilon)\geqslant N_0$

$$|r_{n_k}|\leqslant(\overline{|\alpha|}/R-\varepsilon)^{n_{k+1}}. \tag{6}$$

Im Falle $R=+\infty$ sei $\rho\in K$ mit $\overline{|\alpha|}<|\rho|$. Da (1) für $y=\rho$ konvergiert, gilt $\lim_{i\to\infty}|c_{n_i}\rho^{n_i}|=0$. Daraus folgt für $n_i\geqslant N_2\geqslant N_1$

$$|c_{n_i}|\leqslant|\rho|^{-n_i}. \tag{7}$$

Also gilt für $n_k\geqslant N_2$

$$|r_{n_k}|\leqslant(\overline{|\alpha|}/|\rho|)^{n_{k+1}}. \tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt für $n_k\geqslant N_2$

$$|r_{n_k}|\leqslant c_0^{n_{k+1}}, \tag{9}$$

wobei $c_0=\max(\overline{|\alpha|}/R-\varepsilon, \overline{|\alpha|}/|\rho|)$ ist. Es folgt aus (3) für $n_i\geqslant N_3\geqslant N_2$

$$|a_{n_i}|\leqslant c_1^{n_i} \tag{10}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c_1>1$. Ausserdem gilt nach (5) und (7) für $n_i\geqslant N_3$

$$|c_{n_i}|<c_2^{n_i} \tag{ii}$$

mit $c_2:=\max(1/(R-\varepsilon), 1/|\rho|)$. Aus (10) und (11) folgt

$$|b_{n_i}|\leqslant c_3^{n_i} \tag{12}$$

mit $c_3:=c_1\cdot c_2$ für $n_i\geqslant N_3$.

Es seien $\beta := \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} \alpha^{n_i}$ und $\beta_{n_k} := \sum_{i=0}^{k} c_{n_i} \alpha^{n_i}$. Nach Hilfssatz 4 gilt

$$h(\beta_{n_k}) \leqslant \prod_{i=0}^{k} (h(c_{n_i}). h(\alpha)^{n_i \cdot 2m^2})^{4m^4} .$$

Andererseits gilt nach (10) und (12) für $n_i \geqslant N_3$ mit $c_4 := \max\ (c_1, c_3)$ $h(c_{n_i}) \leqslant c_4{}^{n_i}$ und wegen (2) für $n_i \geqslant N_4 \geqslant N_3$ $n_0 + \ldots + n_i < 3n_i$. Hieraus ergibt sich für $n_k \geqslant N_5 \geqslant N_4$

$$h(\beta_{n_k}) \leqslant c_5{}^{n_k}, \tag{13}$$

wobei $c_5 > 1$ eine geeignete Konstante ist.

Jetzt beweisen wir, dass die Grade von β_{n_k} für hinreichend grosses n gleich m sind. Man kann wegen $0 < c_0 < 1$ und $1 < c_5$ wie im Satz 1 zeigen, dass für $n_k \geqslant N_6 \geqslant N_5$ und $i \neq j$ aus $\beta^{(i)}_{n_k} \neq \beta^{(j)}_{n_k}$ folgt $\beta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \beta^{(j)}_{n_{k+1}}$. Ferner gilt für jedes n_k und $i \neq j$ mindestens eine von beiden Ungleichungen

$$\beta^{(i)}_{n_k} \neq \beta^{(j)}_{n_k} \quad \text{und} \quad \beta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \beta^{(j)}_{n_{k+1}} .$$

Denn sonst waere $|\alpha^{(i)}|^{n_{k+1}} = |\alpha^{(j)}|^{n_{k+1}}$. Also gilt $\partial(\beta_{n_k}) = m$ für $n_k \geqslant N_7 \geqslant N_6$.

Es seien $P_{n_k}(y) = f_0^{(n_k)} + f_1^{(n_k)} y + \ldots + f_m^{(n_k)} y^m$ die Minimalpolynome von β_{n_k} über $F[x]$ für $n_k \geqslant N_7$. Es gelten für $n_k \geqslant N_7$

$$P_{n_k}(\beta) = P_{n_k}(\beta_{n_k} + r_{n_k}) = r_{n_k} \gamma_{n_k} ,$$

$$|\gamma_{n_k}| \leqslant c_6{}^{n_k} ,$$

wobei c_6 eine geeignete Konstante mit $c_5 < c_6$ ist. Es folgt hieraus und aus (9) für $n_k \geqslant N_7$

$$|P_{n_k}(\beta)| = |r_{n_k}| \, |\gamma_{n_k}| \leqslant c_0{}^{n_{k+1}} . c_6{}^{n_k} . \tag{14}$$

Sei $s_{n_k} := (n_{k+1}/n_k). (\log c_0^{-1} / \log c_6) - 2$ für $n_k \geqslant N_7$, dann folgt aus (13) und (14)

$$|P_{n_k}(\beta)| \leqslant h(\beta_{n_k})^{-s_{n_k}} . \tag{15}$$

Man kann zeigen, dass es eine unendliche Teilfolge $\{P_{n_{k_j}}\}$ von $\{P_{n_k}\}$ existiert, sodass für $n_{k_j} \geqslant N_8 \geqslant N_7$ immer $P_{n_{k_j}}(\beta) \neq 0$, alle $P_{n_{k_j}}$ voneinander verschieden sind und $h(P_{n_{k_j}}) = h(\beta_{n_{k_j}})$ für $j \to \infty$ monoton wachsend gegen $+\infty$ strebt. Also folgt aus (15) für $n_{k_j} \geqslant N_8$

$$0 \neq | P_{n_{k_j}}(\beta) | \leqslant h(P_{n_{k_j}})^{-s_{n_{k_j}}} .$$

Da wegen (2) $\limsup_{j\to\infty} s_{n_{k_j}} = +\infty$ ist, erhaelt man

$$\mu(\beta) \leqslant m . \tag{16}$$

Es gilt offenbar für $m = 1$

$$\mu(\beta) = 1 . \tag{17}$$

Also sei im folgenden $m > 1$ und sei $P(y)$ ein Polynom über $F[x]$ vom Grade $1 \leqslant g \leqslant m-1$. Dann gilt für irgendeinen Index ν

$$P(\beta) = P(\beta_{n_\nu}) + r_{n_\nu} \gamma_{n_\nu} . \tag{18}$$

Es ist $P(\beta_{n_\nu}) \neq 0$ für $n_\nu \geqslant N_8$. Also folgt aus der Folgerung des Hilfssatzes 2 und (13)

$$| P(\beta_{n_\nu}) | \geqslant h(P)^{-(m-1)} c_5^{-n_\nu(m-1)} . \tag{19}$$

Andererseits gilt für $n_\nu \geqslant N_8$ $| r_{n_\nu} | \, | \gamma_{n_\nu} | \leqslant (1/c_5)^{n_\nu s_{n_\nu}}$. Aus der Definition von s_{n_ν} folgt mit einer geeigneten Konstanten $c_7 > 1$ $s_{n_\nu} \leqslant c_7 \, (n_{\nu+1}/n_\nu)$ für $n_\nu \geqslant N_8$. Also folgt hieraus mit $c_8 := (1/c_5)^{c_7} < 1$ für $n_\nu \geqslant N_8$

$$| r_{n_\nu} | \, | \gamma_{n_\nu} | \leqslant c_8^{n_{\nu+1}} . \tag{20}$$

Wir waehlen jetzt λ und η, sodass die Ungleichungen

$$\lambda > 2(m-1) , \tag{21}$$

$$\eta > (m-1)(\lambda+1) \tag{22}$$

erfüllt werden. Hieraus folgen $\lambda > 1$ und $\eta > 0$. Es gilt wegen (2) für $n_\nu \geqslant N_9(\eta) \geqslant N_8$

$$\eta \, n_\nu < n_{\nu+1} . \tag{23}$$

Es seien $N^* = N_9(\eta)$ und $H^* = c_5^{N^*}$. Es existiert für jedes $H = h(P) > H^*$ so ein n_k, dass es gilt

$$c_5^{n_k} \leqslant H < c_5^{n_{k+1}} .$$

Ferner ist $n_k \geqslant N^*$ für $H > H^*$. Wenn es für λ gilt

$$c_5^{n_k} \leqslant H < c_5^{n_{k+1}/\lambda} , \tag{24}$$

dann sind $c_5^{n_k} \leqslant H$ und $H^\lambda < c_5^{n_{k+1}}$. Es folgen also aus (18), (19) und (20) für $n_\nu = n_k$

$$P(\beta) = P(\beta_{n_k}) + r_{n_k} \gamma_{n_k} , \tag{25}$$

$$| P(\beta_{n_k}) | \geqslant H^{-2(m-1)} , \tag{26}$$

$$| r_{n_k} | \, |\gamma_{n_k} | < H^{-\lambda} . \tag{27}$$

Hieraus und aus (21) erhaelt man $| P(\beta) | = | P(\beta_{n_k}) |$ und folglich nach (26)

$$| P(\beta) | \geqslant H^{-2(m-1)} . \tag{28}$$

Falls es für λ die Beziehung (24) nicht gilt, dann muss gelten

$$c_5^{n_{k+1}/\lambda} \leqslant H < c_5^{n_{k+1}} .$$

Hieraus folgen $c_5^{n_{k+1}} \leqslant H^\lambda$ und $H < c_5^{n_{k+1}}$. Es ergeben sich also aus (18), (19), (20) und (23) für $n_\nu = n_{k+1}$

$$P(\beta) = P(\beta_{n_{k+1}}) + r_{n_{k+1}} \gamma_{n_{k+1}} , \tag{29}$$

$$| P(\beta_{n_{k+1}}) | \geqslant H^{-(m-1)(\lambda+1)} , \tag{30}$$

$$| r_{n_{k+1}} | \, | \gamma_{n_{k+1}} | \leqslant c_8^{n_{k+2}} , \tag{31}$$

$$\eta \, n_{k+1} < n_{k+2} . \tag{32}$$

Hieraus und aus (22) erhaelt man $| P(\beta) | = | P(\beta_{n_{k+1}}) |$ und folglich nach (30)

$$| P(\beta) | \geqslant H^{-(m-1)(\lambda+1)} . \tag{33}$$

Aus (28) und (33) erhaelt man für $H > H^*$

$$| P(\beta) | \geqslant H^{-c} , \tag{34}$$

wobei $c := (m-1)(\lambda+1)$ eine Konstante ist und von H nicht abhaengt. Daraus folgt

$$\mu(\beta) \geqslant m . \tag{35}$$

Aus (16) und (35) bekommt man

$$\mu(\beta) = m . \tag{36}$$

Damit ist der Satz 4 bewiesen.

Man kann genauso wie im Satz 4 den folgenden Satz beweisen, der eine Übertragung des Satzes 3 auf Lückenreihen ist.

Satz 5. Es seien L eine endlich-algebraische Erweiterung von $F(x)$ mit $[L : F(x)] = m$ und

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{n_i} y^{n_i}$$

eine Lückenreihe mit $\gamma_{n_i} \neq 0$ $(i = 0,1,2,\dots)$ aus L. Ferner hat die Folge $\{\gamma_{n_i}\}$ eine unendliche Teilfolge, deren Glieder vom Grade m sind und gelten

$$\lim_{i\to\infty} n_{i+1}/n_i = +\infty,$$

$$\limsup_{i\to\infty} \log h(\gamma_{n_i})/n_i < +\infty,$$

$$\limsup_{i\to\infty} |\gamma_{n_i}^{(j)}|^{1/n_i} < +\infty \quad (j = 1, \dots, m),$$

wobei mit $\gamma_{n_i}^{(j)}$ die Konjugierten von γ_{n_i} bezeichnet. Seien

$$R := \min_{j=1}^{m} (1 / \limsup_{i\to\infty} |\gamma_{n_i}^{(j)}|^{1/n_i})$$

und $\alpha \in F(x)$ mit $0 < |\alpha| < R$, dann gilt $f(\alpha) \in U_m$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALNIAÇIK, K. : *On the subclasses U_m in Mahler's Classification of the transcendental numbers*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **44** (1979), 39-82.

[2] BUNDSCHUH, P. : *Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 299/300 (1978), 411-432.

[3] GÜTING, R. : *Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers*, Michigan Math. J. **8** (1961), 149-159.

[4] LANG, S. : **Introduction to transcendental numbers**, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[5] LEVEQUE, W.J. : *On Mahler's U-Numbers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 220-229.

[6] RAMACHANDRA, K. : *Contributions to the theory of transcendental numbers II*, Acta Arithmetica **14** (1968), 73-88.

[7] SCHNEIDER, TH. : **Einführung in die transzendenten Zahlen**, Springer Verlag, 1957.

[8] ORYAN, M.H. : *Über gewisse Potenzreihen, die für algebraische Argumente Werte aus Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen*. Ist. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **45** (1980), 1-42.

[8] ZEREN, B.M. : *Über einige komplexe und p-adische Lückenreihen mit Werten aus den Mahlersehen Unterklassen* U_m, Ist Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 45 (1980), 89-130.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
VEZNECİLER-İSTANBUL

Ö Z E T

F sonlu bir cisim ve K bunun üzerinde tanımlanan formel Laurent serilerinin cismi olsun. Transandant sayıların klasik teorisinin K da benzeri vardır. Klasik teoriye benzer bir şekilde formel Laurent serilerinin Mahler'e göre sınıflandırılması incelenebilir.

Bu çalışmada, U_m alt sınıflarmdaki transandant Laurent serileri, belirli kuvvet ve boşluk serilerinin cebirsel argümanlar için aldığı fonksiyon değerleri olarak elde edilmektedir. Bunun için, yazarın klasik ve p-adik hallerde, Mahler'in U_m alt sınıflarının yeni elemanlarını elde etmek için kullandığı bir metod [8] K cisminde uygulanmaktadır.

Böylelikle, transandant formel Laurent serilerinin U_m alt sınıflarının boş olmadıkları gösterilmiştir. Bu gerçeğin kompleks transandant sayılardaki karşılığı 1953 te LeVeque [5] tarafından gösterilmiştir.