# ÜBER EINE OBERE SCHRANKE DER KOEFFIZIENTEN EINIGER IN DER THEORIE DER JACOBISCHEN ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN VORKOMMENDER POLYNOME

BEDRIYE MELEK ZEREN

In dieser Note werden Absolutbeträge der Zahlenkoeffizienten der Polynomen $A_m(sn^2u, k^2)$, $B_m(sn^2u, k^2)$, $C_m(sn^2u, k^2)$, $D_m(sn^2u, k^2)$, die in der Multiplikationsformel der Jacobischen elliptischen Funktionen auftreten, nach oben abgeschätzt.

In dieser Note handelt es sich um die in der Multiplikationsformel der Jacobischen elliptischen Funktionen $sn(u\,;k^2) = snu$, $cn(u\,;k^2) = cnu$ $dn(u;k^2) = dnu$ auftretenden Polynome $A_m(sn^2u, k^2)$, $B_m(sn^2u, k^2)$, $C_m(sn^2u, k^2)$ $D_m(sn^2u, k^2)$.

Es ist für $m > 1$

$$(1)\quad \begin{cases} snmu \cdot D_m(x^2) - xyz \cdot A_m(x^2) = 0 & (m \text{ gerade}) \\ snmu \cdot D_m(x^2) - x \cdot A_m(x^2) = 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} cnmu \cdot D_m(x^2) - B_m(x^2) = 0 & (m \text{ gerade}) \\ cnmu \cdot D_m(x^2) - y \cdot B_m(x^2) = 0 & (m \text{ ungerade}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} dnmu \cdot D_m(x^2) - C_m(x^2) = 0 & (m \text{ gerade}) \\ dnmu \cdot D_m(x^2) - z \cdot C_m(x^2) = 0 & (m \text{ ungerade}), \end{cases}$$

wobei $x = snu$, $y = cnu$, $z = dnu$ sind, und $A_m = A_m(sn^2u, k^2) = A_m(x^2, k^2)$, $B_m = B_m(sn^2u, k^2) = B_m(x^2, k^2)$, $C_m = C_m(sn^2u, k^2) = C_m(x^2, k^2)$,

$D_m = D_m(sn^2 u, k^2) = D_m(x^2, k^2)$ Polynome in zwei Variablen $sn^2 u = x^2$, $k^2$ mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sind. Diese Polynome gehorchen dem unten gegebenen Induktionsgesetzt :

$$(2) \quad \begin{cases} A_1 = 1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = 1, \quad D_1 = 1, \\ A_2 = 2, \; B_2 = 1 - 2x^2 + k^2x^4, \; C_2 = 1 - 2k^2x^2 + k^2x^4, \; D_2 = 1 - k^2x^4, \end{cases}$$

und

$$(3) \quad \begin{cases} A_{2n} = 2\, A_n\, B_n\, C_n\, D_n \qquad (n \geqslant 2) \\ A_{2n+1} = \begin{cases} y^2 \cdot z^2 \cdot A_n \cdot D_n \cdot B_{n+1} \cdot C_{n+1} + A_{n+1} \cdot D_{n+1} \cdot C_n \cdot B_n & (n \text{ gerade}) \\ A_n \cdot D_n \cdot B_{n+1} \cdot C_{n+1} + y^2 \cdot z^2 \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1} \cdot C_n \cdot B_n & (n \text{ ungerade}) \end{cases} \\ B_{2n} = \begin{cases} B_n^2 \cdot D_n^2 - x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2 & (\text{n gerade}) \\ y^2 \cdot B_n^2 \cdot D_n^2 - x^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2 & (n \text{ ungerade}) \end{cases} \\ B_{2n+1} = B_n \cdot B_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1} - x^2 \cdot z^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1} \\ C_{2n} = \begin{cases} C_n^2 \cdot D_n^2 - k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2 & (n \text{ gerade}) \\ z^2 \cdot C_n^2 \cdot D_n^2 - k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2 & (n \text{ ungerade}) \end{cases} \\ C_{2n+1} = C_n \cdot C_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1} - k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1} \\ D_{2n} = \begin{cases} D_n^4 - k^2 \cdot x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot A_n^4 & (n \text{ gerade}) \\ D_n^4 - k^2 \cdot x^4 \cdot A_n^4 & (n \text{ ungerade}) \end{cases} \\ D_{2n+1} = D_n^2 \cdot D_{n+1}^2 - k^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot A_{n+1}^2 , \end{cases}$$

wobei

$$(4) \qquad cn^2 u = 1 - sn^2 u, \quad dn^2 u = 1 - k^2 \cdot sn^2 u$$

sind (Vgl. [1], §57).

Im folgenden wollen wir für die Absolutbeträge der rationalen Zahlenkoeffizienten der Polynomen $A_m(x^2, k^2)$, $B_m(x^2, k^2)$, $C_m(x^2, k^2)$, $D_m(x^2, k^2)$ eine in der Form $e^{Cm^2}$ obere Sehranke ergeben, wobei $C$ ein numerisch berechenbare Konstanten ist.

Es werden jetzt einige Vorbereitungen gemacht.

Definition und Eigenschaften von $||...||$ [1)]

Es sei ein $P$olynom

$$P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{5}$$

in $n$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und mit rationalen Koeffizienten $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ gegeben. Wir definieren $||P||$ als das Maximum der Absolutbeträge aller Koeffizienten von $P$, d.h.

$$\| P \| = \underset{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\mathrm{Max.}} \; |a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}| \, . \tag{6}$$

Das so definierte Symbol $||...||$ hat folgende Eigenschaften :

**I.** $||\lambda P|| = |\lambda| \cdot ||P||$, wobei $\lambda$ eine rationale Zahl ist.

**II.** $||P_1 + P_2 + \ldots + P_k|| \leqslant ||P_1|| + ||P_2|| + \ldots + ||P_k||$, wobei

$$P_i = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

$k$ Polynome in $n$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und mit rationalen Koeffizienten bedeuten.

**III.** 
$$||\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k|| \leqslant |\lambda_1| \cdot ||P_1|| + \\ + |\lambda_2| \cdot ||P_2|| + \ldots + |\lambda_k| \cdot ||P_k||,$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $k$ rationale Zahlen sind.

---

1) In Arbeit von O. Ş. İÇEN [2] wird das Symbol $||...||$ für ein Polynom in drei Variablen definiert und dort werden einige Eigenschaften gegeben.

IV. $||P_1 \cdot P_2 \cdots P_k|| \leqslant$
$[(G_1 + 1)(G_2 + 1) \cdots (G_k + 1)]^n \cdot ||P_1|| \cdot ||P_2|| \cdots ||P_k||,$

wobei $G_i$ den Gesamtgrad von $P_i$ nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet $(i = 1, \ldots, k)$.

**Beweis.** I, II, III sind klar. Zu IV :

Es sei

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_k = \sum d_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{8}$$

gesetzt. Dabei muß wegen (7)

$$d_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \sum_{\substack{\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \ldots + \alpha_1^{(k)} = \alpha_1 \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \ldots + \alpha_2^{(k)} = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n^{(k)} = \alpha_n}} a^{(1)}_{\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \ldots \alpha_n^{(1)}} \cdot a^{(2)}_{\alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_n^{(2)}} \cdots a^{(k)}_{\alpha_1^{(k)} \alpha_2^{(k)} \ldots \alpha_n^{(k)}} \tag{9}$$

sein. Die Anzahl der möglichen $nk$-tupeln $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(k)}; \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}; \ldots; \alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$ mit $0 \leqslant \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)} \leqslant G_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ ist $[(G_1 + 1) \cdot (G_2 + 1) \cdots (G_k + 1)]^n$. Also kann die Anzahl der Glieder rechts von (9) diese Zahl nicht überschreiten. Dies, weil $\left|a^{(i)}_{\alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(i)} \ldots \alpha_n^{(i)}}\right| \leqslant ||P_i||$ $(i = 1, \ldots, k)$ sind, (wegen (6), (7)) gibt uns

$$|d_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}| \leqslant [(G_1 + 1) \cdot (G_2 + 1) \cdots (G_k + 1)]^n \cdot \|P_1\| \cdot \|P_2\| \cdots \|P_k\| \tag{10}$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Aus (10) und der Definition (6) folgt nun die Behauptung IV.

**Lemma.** *Die Gesamtgrade der Polynomen $A_m$, $B_m$, $C_m$, $D_m$ nach $x^2 (x = snu)$, $k^2 (k \neq 0, \mp 1)$ genügen der Abschätzung :*

$$\textit{Grad von } (A_m), \textit{ Grad von } (B_m), \textit{ Grad von } (C_m), \textit{ Grad von } (D_m) \leqslant 2m(m-1) \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

(Im folgenden unter dem Grad eines Polynoms in zwei Variablen werden wir den Gesamtgrad verstehen).

**Beweis.** *Die Behauptung wird durch mathematische Induktion bewiesen.* Für $m = 1,2$ aus den Formeln (2) klar. Es sei jetzt $m > 2$, und (11) sei für kleinere Werte als $m$ richtig. Um die Behauptung für $m$ zu beweisen, wollen wir die Rekursionsformeln (3) benutzen.

Falls $m$ gerade, d.h. $m = 2n (n \geqslant 2)$ ist, dann ist der Grad von $(A_n\, B_n\, C_n\, D_n \leqslant 4 \cdot 2n\,(n-1) = 2 \cdot 2n \cdot 2\,(n-1) \leqslant 2 \cdot 2n \cdot (2n-1)$ (d.h. Grad von $(A_m) \leqslant 2m(m-1)$).

Falls $m$ ungerade, d.h. $m = 2n+1$ ist, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $n$ ungerade oder gerade ist. Für $m = 2n+1, n \geqslant 2$ gerade sind Grad von $(y^2 \cdot z^2 \cdot A_n\, D_n \cdot B_{n+1} \cdot C_{n+1}) \leqslant 3 + 2 \cdot 2n(n-1) + 2 \cdot 2n(n+1) = 8n^2 + 3$ und Grad von $(A_{n+1} \cdot D_{n+1} \cdot C_n \cdot B_n) \leqslant 2 \cdot 2n(n+1) + 2 \cdot 2n(n-1) = 8n^2$. Dann ist Grad von $(A_{2n+1}) \leqslant 8n^2 + 3 \leqslant 8n^2 + 2n \leqslant 8n^2 + 2 \cdot 2n = 2 \cdot 2n(2n+1)$. Für $m = 2n+1$, $n \geqslant 1$ ungrade sind Grad von $(A_n \cdot D_n \cdot B_{n+1} \cdot C_{n+1}) \leqslant 2 \cdot 2n(n-1) + 2 \cdot 2n(n+1) = 8n^2$ und Grad von $(y^2 \cdot z^2 \cdot A_{n+1} \cdot D_{n+1} \cdot C_n \cdot B_n) \leqslant 3 + 2 \cdot 2n(n+1) + 2 \cdot 2n(n-1) = 8n^2 + 3$. Dann ist Grad von $(A_{2n+1}) \leqslant 8n^2 + 3 \leqslant 8n^2 + 4n = 2 \cdot 2n(2n+1)$. Die für $A_{2n+1}$ geschriebene Ungleichungen gibt uns Grad von $(A_{2n+1}) \leqslant 2 \cdot 2n \cdot (2n+1)$.

Auf gleiche Weise wie oben erhalten wir folgende Ungleichungen für $B_m$.

Falls $m$ ungerade, d.h. $m = 2n+1$ $(n \geqslant 1)$ ist, da Grad von $(B_n \cdot B_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}) \leqslant 2 \cdot 2n(n-1) + 2 \cdot 2n(n+1) = 8n^2$ und Grad von $(x^2 \cdot z^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1}) \leqslant 3 + 2 \cdot 2n(n-1) + 2 \cdot 2n(n+1) = 8n^2 + 3$ sind, dann ist der Grad von $(B_{2n+1}) \leqslant 8n^2 + 3 \leqslant 8n^2 + 4n = 2 \cdot 2n(2n+1)$.

Falls $m$ gerade, d.h. $m = 2n$ ist, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Für $m = 2n$, $n \geqslant 2$ gerade sind Grad von $(B_n^2\, D_n^2) \leqslant 2 \cdot 2n(n-1) + 2 \cdot 2n(n-1) = 8n^2 - 8n$ und Grad von $(x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2) \leqslant 4 + 4 \cdot 2n(n-1) = 8n^2 - 8n + 4$. Dann ist Grad von $(B_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 4 \leqslant 8n^2 - 8n + 4n = 8n^2 - 4n = 2 \cdot 2n(2n-1)$. Für $m = 2n$, $n > 1$ ungerade sind Grad von $(y^2 \cdot B_n^2 \cdot D_n^2) \leqslant 1 + 4 \cdot 2n(n-1) = 8n^2 - 8n + 1$ und Grad von $(x^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2) \leqslant 3 + 4 \cdot 2n(n-1) = 8n^2 - 8n + 3$, Dann ist Grad von $(B_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 3 \leqslant 8n^2 - 8n + 4n = 8n^2 - 4n = 2 \cdot 2n(2n - 1)$. Die für $B_{2n}$ erhaltene Ungleichungen lassen sich vereinigen zu Grad von $(B_{2n}) \leqslant 2 \cdot 2n(2n - 1)$.

Nun wollen wir die ähnliche Berechnung für $C_m$ wiederholen.

Falls $m$ ungerade, d.h. $m = 2n + 1$ $(n \geqslant 1)$ ist, da sind Grad von $(C_n \cdot C_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}) \leqslant 2 \cdot 2n(n - 1) + 2 \cdot 2n(n + 1) = 8n^2$ und Grad von $(k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}) \leqslant 3 + 2 \cdot 2n(n - 1) + 2 \cdot 2n(n + 1) = 8n^2 + 3$, dann ist der Grad von $(C_{2n+1}) \leqslant 8n^2 + 3 \leqslant 8n^2 + 4n = 2 \cdot 2n(2n + 1)$.

Falls $m$ gerade, d.h. $m = 2n$ ist, unterscheiden wir zwei Fälle. Für $m = 2n$, $n \geqslant 2$ gerade sind Grad von $(C_n^2 \cdot D_n^2) \leqslant 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n$ und Grad von $(k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2) \leqslant 5 + 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n + 5$. Hieraus folgt Grad von $(C_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 5 \leqslant 8n^2 - 8n + 3n \leqslant 8n^2 - 8n + 4n = 2 \cdot 2n(2n - 1)$. Für $m = 2n$, $n > 1$ ungerade sind Grad von $(z^2 \cdot C_n^2 \cdot D_n^2) \leqslant 2 + 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n + 2$ und Grad von $(k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2) \leqslant 3 + 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n + 3$. Dann ist Grad von $(C_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 3 \leqslant 8n^2 - 8n + 4n = 8n^2 - 4n = 2 \cdot 2n(2n - 1)$. Die für $C_{2n}$ geschriebene Ungleichungen gibt uns Grad von $(C_{2n}) \leqslant 2 \cdot 2n(2n - 1)$.

Endlich wollen wir $D_m$ betrachten.

Falls $m$ ungerade, d.h. $m = 2n + 1$ $(n \geqslant 1)$ ist, dann sind Grad von $(D_n^2 \cdot D_{n+1}^2) \leqslant 2 \cdot 2n(n - 1) + 2 \cdot 2n(n + 1) = 8n^2$ und Grad von $(k^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot A_{n+1}^2) \leqslant 6 + 2 \cdot 2u(n - 1) + 2 \cdot 2n(n + 1) = 8n^2 + 6$. Für $n \geqslant 2$ ist Grad von $(D_{2n+1}) \leqslant 8n^2 + 6 \leqslant 8n^2 + 3n \leqslant 8n^2 + 4n = 2 \cdot 2n(2n + 1)$ (Ist $n = 1$, so erhält man Grad von $(D_3) = 6 \leqslant 2 \cdot 3(3 - 1) = 12$).

Falls $m$ gerade, d.h. $m = 2n$ ist, unterscheiden wir zwei Fälle. Für $m = 2n$, $n \geqslant 2$ gerade sind Grad von $(D_n^4) \leqslant 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n$ und Grad von $(k^2 \cdot x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot A_n^4) \leqslant 9 + 4 \cdot 2n(n - 1) = 8n^2 - 8n + 9$. Dann ist Grad von $(D_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 9 \leqslant 8n^2 - 8n + 3n \leqslant 8n^2 - 4n = 2 \cdot 2n(2n - 1)$ für $u > 2$ (Ist $n = 2$, so erhalten wir Grad von $(D_4) = 12 \leqslant 2 \cdot 4 \cdot (4 - 1) = 24$). Für $m = 2n$, $n \geqslant 3$ ungerade ist Grad von $(k^2 \cdot x^4 \cdot A_n^4) \leqslant 3 + 4 \cdot 2n(n - 1)$

$= 8n^2 - 8n + 3$. Dann ist Grad von $(D_{2n}) \leqslant 8n^2 - 8n + 3 \leqslant 8n^2 - 8n + 4n = 8n^2 - 4n$. Die für $D_{2n}$ geschriebene Ungleichungen lassen sich vereinigen zu Grad von $(D_{2n}) \leqslant 2 \cdot 2n(2n - 1)$.

Damit ist der Beweis dieses Lemma in allen Teilen beendet.

**Satz.** *Es gilt mit* $T = 2^{17} \cdot 3^8$

$$\|A_m\|, \|B_m\|, \|C_m\|, \|D_m\| \leqslant T^{m(m-1)} \qquad (m = 1,2,\ldots). \tag{12}$$

**Beweis.** Wir bedienen uns wieder einer Induktion nach $m$ unter Benutzung der Formeln (2) und (3).

Laut (2) sind $\|A_1\| = 1$, $\|B_1\| = 1$, $\|C_1\| = 1$, $\|D_1\| = 1$, $\|A_2\| = 2$, $\|B_2\| = 2$, $\|C_2\| = 2$, $\|D_2\| = 1$, und die ersten zwei Werte von $m(m-1)$ sind der Reihe nach 0,2. Dann wird (12) für $m = 1,2$ erfüllt.

Die Behauptung (12) sei für kleinere Werte des Indexes als $m (m > 2)$ richtig. Wir wollen unter dieser Voraussetzung beweisen, daß sie auch für $m$ richtig ist. Unter Benutzung der Eigenschaft I mit $\lambda = 2$ und II mit $k = 4$ von $\|\ldots\|$ und dem Lemma folgt aus der ersten Gleichung von (3):

$$\begin{aligned} \|A_{2n}\| &\leqslant 2 \cdot [(2n(n-1) + 1)^4]^2 \cdot \|A_n\| \cdot \|B_n\| \cdot \|C_m\| \cdot \|D_m\| \\ &\leqslant 2 \cdot (2n^2 + n)^8 \cdot \|A_n\| \cdot \|B_n\| \cdot \|C_n\| \cdot \|D_n\| \\ &\leqslant 2 \cdot 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\| \cdot \|B_n\| \cdot \|C_n\| \cdot \|D_n\| \\ &\leqslant 2 \cdot 3^8 \cdot 2^{16n} \cdot \|A_n\| \cdot \|B_n\| \cdot \|C_n\| \cdot \|D_n\|. \end{aligned} \tag{13}$$

Da wir jetzt auf die Polynome $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ rechts von (13) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|A_{2n}\| &\leqslant 2 \cdot 3^8 \cdot 2^{16n} \cdot T^{4n(n-1)} \leqslant (2^{17} \cdot 3^8)^{2n} \cdot T^{4n(n-1)} \\ &\leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2-4n} = T^{4n^2-2n} = T^{2n(2n-1)} \qquad (n \geqslant 2). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(14)\qquad \|A_{2n+1}\| \leqslant \begin{cases} \|y^2\cdot z^2\cdot A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}\| + \|A_{n+1}\cdot D_{n+1}\cdot C_n\cdot B_n\|, & (n \text{ gerade}) \\ \|A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}\| + \|y^2\cdot z^2\cdot A_{n+1}\cdot D_{n+1}\cdot C_n\cdot B_n\| & (n \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir die Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ und Lemma, so erhält man, der Beihe nach

$$(15)\qquad \|A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}\| \leqslant 5^4\cdot n^{16}\cdot\|A_n\|\cdot\|D_n\|\cdot\|B_{n+1}\|\cdot\|C_{n+1}\|, \qquad (n \geqslant 1)$$

$$(16)\qquad \|A_{n+1}\cdot D_{n+1}\cdot C_n\cdot B_n\| \leqslant 5^4\cdot n^{16}\cdot\|A_{n+1}\|\cdot\|D_{n+1}\|\cdot\|C_n\|\cdot\|B_n\|, \qquad (n \geqslant 1).$$

Nochmalige Anwendung der Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k = 3$ auf $P_1 = y^2$, $P_2 = z^2$, $P_3 = A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(17)\qquad \|y^2\cdot z^2\cdot A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}\| \leqslant 2^2\cdot 3^6\cdot n^4\cdot\|A_n\cdot D_n\cdot B_{n+1}\cdot C_{n+1}\|.$$

Ähnlicherweise erhalten wir

$$(18)\qquad \|y^2\cdot z^2\cdot A_{n+1}\cdot D_{n+1}\cdot C_n\cdot B_n\| \leqslant 2^2\cdot 3^6\cdot n^4\cdot\|A_{n+1}\cdot D_{n+1}\cdot C_n\cdot B_n\|.$$

Aus (15), (16), (17), (18) folgt

$$(19)\quad \|A_{2n+1}\| \leqslant \begin{cases} 2^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot n^{20}\cdot\|A_n\|\cdot\|D_n\|\cdot\|B_{n+1}\|\cdot\|C_{n+1}\| \\ \quad + 5^4\cdot n^{16}\cdot\|A_{n+1}\|\cdot\|D_{n+1}\|\cdot\|C_n\|\cdot\|B_n\|, & (n\geqslant 2 \text{ gerade}) \\ 5^4\cdot n^{16}\cdot\|A_n\|\cdot\|D_n\|\cdot\|B_{n+1}\|\cdot\|C_{n+1}\| \\ \quad + 2^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot n^{20}\cdot\|A_{n+1}\|\cdot\|D_{n+1}\|\cdot\|C_n\|\cdot\|B_n\|, & (n\geqslant 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Da wir auf die Polynome $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$, $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$, $D_{n+1}$, rechts von (19) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$\|A_{2n+1}\| \leqslant 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot$$

$$[\|A_n\| \cdot \|D_n\| \cdot \|B_{n+1}\| \cdot \|C_{n+1}\| + \|A_{n+1}\| \cdot \|D_{n+1}\| \cdot \|C_n\| \cdot \|B_n\|]$$

$$\leqslant 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot T^{2n(n-1)+2n(n+1)} \leqslant 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2}$$

$$\leqslant 2^{3n} \cdot 3^{6n} \cdot (2.3)^{4n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2} = 2^{27n} \cdot 3^{10n} \cdot T^{4n^2}$$

$$\leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2} = T^{2n(2n+1)}.$$

Auf gleiche Weise wie oben erhalten wir folgende Ungleichungen für $B_m$:

Wegen der Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(20) \qquad \|B_{2n}\| \leqslant \begin{cases} \|B_n^2 \cdot D_n^2\| + \|x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2\|, & (n \geqslant 2 \text{ gerade}) \\ \|y^2 \cdot B_n^2 \cdot D_n^2\| + \|x^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2\|, & (n > 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Betrachten wir die Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ und Lemma, so erhält man, die Reihe nach

$$(21) \qquad \|B_n^2 \cdot D_n^2\| \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|B_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 \qquad (n > 1),$$

$$(22) \qquad \|A_n^2 \cdot C_n^2\| \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|C_n\|^2 \qquad (n > 1).$$

Nochmalige Anwendung der Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k = 4$ auf $P_1 = x^2$, $P_2 = y^2$, $P_3 = z^2$, $P_4 = A_n^2\, C_n^2$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(23) \qquad \|x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2\| \leqslant 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|A_n^2 \cdot C_n^2\|.$$

Ähnlicherweise erhalten wir

$$(24) \qquad \|x^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot C_n^2\| \leqslant 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|A_n^2 \cdot C_n^2\|$$

und

$$(25) \qquad \|y^2 \cdot B_n^2 \cdot D_n^2\| \leqslant 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|B_n^2 \cdot D_n^2\|.$$

Aus (21), (22), (23), (24), (25) folgt

$$(26)\qquad \|B_{2n}\| \leqslant \begin{cases} 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|B_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|C_n\|^2, & \\ \hfill (n \geqslant 2 \text{ gerade}) & \\ 2^2 \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|B_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + 2^2 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|C_n\|^2, & \\ \hfill (n > 1 \text{ ungerade}). & \end{cases}$$

Wenden wir jetzt auf die Polynome $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ rechts von (26) die Induktionsvoraussetzung an, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|B_{2n}\| &\leqslant 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot [\|B_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + \|A_n\|^2 \cdot \|C_n\|^2] \\ &\leqslant 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n(n-1)} \leqslant 2^{5n} \cdot 3^{12n} \cdot (2 \cdot 3)^{2n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2-4n} \\ &= 2^{27n} \cdot 3^{14n} \cdot T^{4n^2-4n} \leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2-4n} = T^{2n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(27)\qquad \begin{aligned} \|B_{2n+1}\| \leqslant\ & \|B_n \cdot B_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}\| \\ & + \|x^2 \cdot z^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ und Lemma, so erhält man

$$(28)\qquad \|B_n \cdot B_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot \|D_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1),$$

$$(29)\qquad \|A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1).$$

Nochmalige Anwendung der Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k = 3$ auf $P_1 = x^2$, $P_2 = z^2$, $P_3 = A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1}$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(30)\qquad \|x^2 \cdot z^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot C_n \cdot C_{n+1}\| \leqslant 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\|.$$

Aus (28) und (30) folt

$$(31) \quad \|B_{2n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot \|D_{n+1}\| + 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\| .$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung ergibt sich daraus

$$\|B_{2n+1}\| \leqslant 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot$$

$$[\|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot \|D_{n+1}\| + \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\|]$$

$$\leqslant 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot T^{2n(n-1)+2n(n+1)} \leqslant 2^{3n} \cdot 3^{6n} \cdot (2.3)^{4n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2}$$

$$= 2^{27n} \cdot 3^{10n} \cdot T^{4n^2} \leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2} = T^{2n(2n+1)}.$$

Nun wollen wir die ähnliche Berechnung für $C_m$ wiederholen.

Mit Hilfe der Eigenschaft II von $\|...\|$ schreiben wir

$$(32) \quad \|C_{2n}\| \leqslant \begin{cases} \|C_n^2 \cdot D_n^2\| + \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2\|, & (n \geqslant 2 \text{ gerade}) \\ \|z^2 \cdot C_n^2 \cdot D_n^2\| + \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2\|, & (n > 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir die Eigenschaft IV von $\|...\|$ und Lemma, so erhält man

$$(33) \quad \|C_n^2 \cdot D_n^2\| \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|C_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 \qquad (n > 1)$$

und

$$(34) \quad \|A_n^2 \cdot B_n^2\| \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|B_n\|^2 \qquad (n > 1).$$

Durch Anwendung der Eigenschaft IV von $\|...\|$ mit $k = 5$ auf $P_1 = k^2$, $P_2 = x^2$, $P_3 = y^2$, $P_4 = z^2$, $P_5 = A_n^2 \cdot B_n^2$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(35) \quad \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2\| \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|A_n^2 \cdot B_n^2\| .$$

Ähnlicherweise erhalten wir der Reihe nach

$$(36) \quad \|z^2 \cdot C_n^2 \cdot D_n^2\| \leqslant 3^4 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|C_n^2 \cdot D_n^2\| ,$$

$$(37) \qquad \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n^2 \cdot B_n^2\| \leqslant 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|A_n^2 \cdot B_n^2\|.$$

Aus (33), (34), (35), (36) folgt

$$(38) \qquad \|C_{2n}\| \leqslant \begin{cases} 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|C_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + 2^6 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|B_n\|^2 \\ \hfill (n \geqslant 2 \text{ gerade}), \\ 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|C_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + 2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|B_n\|^2 \\ \hfill (n > 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Da wir nun auf die Polynome $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ rechts von (38) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|C_{2n}\| &\leqslant 2^6 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot [\|C_n\|^2 \cdot \|D_n\|^2 + \|A_n\|^2 \cdot \|B_n\|^2] \\ &\leqslant 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot T^{4n(n-1)} \leqslant 2^{7n} \cdot 3^{12n} \cdot (2.3)^{2n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n(n-1)} \\ &= 2^{29n} \cdot 3^{14n} \cdot T^{4n(n-1)} \leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2-4n} = T^{2n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(39) \qquad \begin{aligned} \|C_{2n+1}\| \leqslant {} & \|C_n \cdot C_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}\| \\ & + \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1). \end{aligned}$$

Betrachten wir die Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ und Lemma, so erhält man

$$(40) \qquad \|C_n \cdot C_{n+1} \cdot D_n \cdot D_{n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot \|D_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1),$$

$$(41) \qquad \|A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\| \qquad (n \geqslant 1).$$

Nochmahgc Anwendung der Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k=4$ auf $P_1 = k^2$, $P_2 = x^2$, $P_3 = y^2$, $P_4 = A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(42) \qquad \|k^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}\| \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot \mathrm{n}^4 \cdot \|A_n \cdot A_{n+1} \cdot B_n \cdot B_{n+1}\|.$$

Aus (40), (41) und (42) ergibt sich

$$(43)\qquad \|C_{2n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot \|D_{n+1}\| + 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\|,$$

woraus, wegen der Induktionsvoraussetzung, man

$$(44)\qquad \|C_{2n+1}\| \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot [\|C_n\| \cdot \|C_{n+1}\| \cdot \|D_n\| \cdot D_{n+1}\| + \|A_n\| \cdot \|A_{n+1}\| \cdot \|B_n\| \cdot \|B_{n+1}\|]$$
$$\leqslant 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot T^{2n(n-1)+2n(n+1)} \leqslant 2^{7n} \cdot 3^{4n} \cdot (2.3)^{4n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2}$$
$$= 2^{31n} \cdot 3^{8n} \cdot T^{4n^2} \leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2} = T^{4n^2+2n} = T^{2n(2n+1)}$$

gewinnt.

Endlich wollen wir $D_m$ betrachten.

Wegen der Eingenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(45)\qquad \|D_{2n}\| \leqslant \begin{cases} \|D_n^4\| + \|k^2 \cdot x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot A_n^4\| & (n \geqslant 2 \text{ gerade}), \\ \|D_n^4\| + \|k^2 \cdot x^4 \cdot A_n^4\| & (n > 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Betrachten wir die Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ und, so erhält man, der Reihe nach

$$(46)\qquad \|D_n\|^4 \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|D_n\|^4 \qquad (n > 1),$$

$$(47)\qquad \|A_n\|^4 \leqslant 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\|^4 \qquad (n > 1).$$

Durch Anwendung von Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k = 5$ auf $P_1 = k^2$, $P_2 = x^4$, $P_3 = y^4$, $P_4 = z^4$, $P_5 = A_n^4$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(48)\qquad \|k^2 \cdot x^4 \cdot y^4 \cdot z^4 \cdot A_n^4\| \leqslant 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot n^4 \cdot \|A_n^4\|.$$

Ähnlicherweise gewinnt man

$$(49)\qquad \|k^2 \cdot x^2 \cdot A_n^4\| \leqslant 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot n^4 \cdot \|A_n^4\|.$$

Aus (46), (47), (48), (49) folgt

$$(50)\qquad \|D_{2n}\| \leqslant \begin{cases} 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|D_n\|^4 + 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^4 & (n \geqslant 2 \text{ gerade}), \\ 3^8 \cdot n^{16} \cdot \|D_n\|^4 + 2^2 \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^4 & (n > 1 \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Da wir jetzt auf die Polynome $A_n$, $D_n$ rechts von (50) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$(51)\qquad \|D_{2n}\| \leqslant 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot [\|D_n\|^4 + \|A_n\|^4]$$

$$\leqslant 2^3 \cdot 3^{14} \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot T^{4n(n-1)} \leqslant 2^{3n} \cdot 3^{14n} \cdot (2.3)^{4n} \cdot 2^{20n} \cdot T^{4n^2-4n}$$

$$= 2^{27n} \cdot 3^{16n} \cdot 3^{2n} \cdot T^{4n^2-4n} \leqslant 2^{27n} \cdot (2^2)^{2n} \cdot 3^{16n} \cdot T^{4n^2-4n}$$

$$= 2^{31n} \cdot 3^{16n} \cdot T^{4n^2-4n} \leqslant T^{2n} \cdot T^{4n^2-4n} = T^{2n(2n-1)} \quad (n=2,3,\ldots).$$

Wegen der Eigenschaft II von $\|\ldots\|$ schreiben wir

$$(52)\qquad \|D_{2n+1}\| \leqslant \|D_n^2 \cdot D_{n+1}^2\| + \|k^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot A_{n+1}^2\| \qquad (n \geqslant 1).$$

Berücksichtigen wir die Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ und Lemma, so erhält man

$$(53)\qquad \|D_n^2 \cdot D_{n+1}^2\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|D_n\|^2 \cdot \|D_{n+1}\|^2 \qquad (n \geqslant 1),$$

$$(54)\qquad \|A_n^2 \cdot A_{n+1}^2\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|A_{n+1}\|^2 \qquad (n \geqslant 1).$$

Durch Anwendung von Eigenschaft IV von $\|\ldots\|$ mit $k = 5$ auf $P_1 = k^2$, $P_2 = x^4$, $P_3 = y^2$, $P_4 = z^2$, $P_5 = A_n^2 \cdot A_{n+1}^2$ unter Benutzung von Lemma gibt

$$(55)\qquad \|k^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot A_n^2 \cdot A_{n+1}^2\| \leqslant 2^4 \cdot 3^8 \cdot n^4 \cdot \|A_n^2 \cdot A_{n+1}^2\|\,.$$

Aus (53), (54) und (55) ergibt sich

$$(56)\qquad \|D_{2n+1}\| \leqslant 5^4 \cdot n^{16} \cdot \|D_n\|^2 \cdot \|D_{n+1}\|^2$$

$$+\, 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot n^{20} \cdot \|A_n\|^2 \cdot \|A_{n+1}\|^2, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

woraus, wegen der Induktionsvoraussetzung, man

$$(57)\quad \|D_{2n+1}\| \leqslant 2^4\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot n^{20}\cdot[\|D_n\|^2\cdot\|D_{n+1}\|^2+\|A_n\|^2\cdot\|A_{n+1}\|^2]$$
$$\leqslant 2^5\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot n^{20}\cdot T^{2n(n-1)+2n(n+1)} \leqslant 2^{5n}\cdot 3^{8n}\cdot(2.3)^{4n}\cdot 2^{20n}\cdot T^{4n^2}$$
$$= 2^{29n}\cdot 3^{12n}\cdot T^{4n^2} \leqslant T^{2n}\cdot T^{4n^2} = T^{4n^2+2n} = T^{2n(2n+1)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

gewinnt.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

**Folgerung.** *Es gilt mit einem numerisch berechenbaren* $C>0$

$$\|A_m\|,\ \|B_m\|,\ \|C_m\|,\ \|D_m\| \leqslant e^{Cm^2} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Für den Beweis genügt es $\log T = C$ zusetzen.

## LITERATURVERZEICHNIS


[1] WEBER, H. : Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl. **3**, BRAUNSCHWEIG (1908).

[2] İÇEN, O.Ş. : *Über die Größenordnung der Koeffizienten einiger in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommender Polynome*, İst. Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A, **35**, (1970).



İSTANBUL ÜNİVERSITESI
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ


*(Manuskript eingegangen am 9. August 1977)*

## ÖZET


Bu notta $sn(u;k^2)=snu$, $cn(u;k^2)=cnu$, $dn(u;k^2)=dnu$ Jacobi eliptik fonksiyonlarının çarpım formüllerinde geçen $A_m$, $B_m$, $C_m$, $D_m$ polinomlarının sayısal katsayılarının mutlak değerlerlnin $e^{Cm^2}$ şeklinde bir üst sınırı elde edilmektedir.