

## ESPACES SÉQUENTIELLEMENT COMPLETS ET UNE CONSÉQUENCE DU THÉORÈME D'ASCOLI

A. ABDİK

Dans ce travail nous allons étudier l'aspect séquentiel des certains espaces uniformes et nous donnerons quelques conséquences du théorème d'Ascoli.

### ESPACES SÉQUENTIELLEMENT COMPLETS

Soit  $E$  un espace uniforme séparé. Dans  $E$  les filtres et les suites convergents ne dépendent que de la topologie de  $E$ . Mais les filtres de Cauchy et les suites de Cauchy ne changent pas quand on remplace la structure uniforme de  $E$  par une autre uniformément équivalente. Dans  $E$  toute suite de Cauchy peut converger, alors qu'il existe des filtres de Cauchy non convergents. Précisons ce point.

**Définition 1.1.** L'espace uniforme  $E$  séparé  $X$  est dit complet si tout filtre de Cauchy est convergent. Il est dit séquentiellement complet ( $S$ -complet), si toute suite de Cauchy est convergente.

Si, par exemple,  $E$  est un espace de Banach et  $E'$  son dual topologique,  $E'$  muni de la topologie  $\sigma(E', E)$  est  $S$ -complet, mais non complet. On sait [1] qu'un espace métrique est complet si et seulement si il est  $S$ -complet.

Dans cette partie de l'exposé j'ai été surtout inspiré par [2], [3], [4] et [5].

**Théorème 1.2.** Soit  $E$  un ensemble muni d'une structure uniforme dont  $U_0$  est un système fondamental d'entourages, et d'une topologie notée  $T$ . Désignons par  $T_0$  la topologie définie par  $U_0$ , la topologie  $T$  étant moins fine que la topologie  $T_0$ . Pour tout  $x$  de  $E$  et pour tout entourage  $V$  dans  $U_0$ ,  $V(x)$  est supposé fermé pour  $T$ . Si une suite  $(x_n)$  dans  $E$  est  $U_0$ -Cauchy, et si  $(x_n)$  converge vers  $x$  pour  $T$ , la suite  $(x_n)$  converge alors vers le même point  $x$  pour  $T_0$ .

**Démonstration.** Soit  $V$  un entourage symétrique quelconque appartenant à  $U_0$ . Il existe dans  $U_0$  un entourage symétrique  $W$  tel que  $W^2 \subset V$ . Puisque la

suite  $(x_n)$  est supposée  $U_0$ -Cauchy, il correspond à  $W$  un entier  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$  et pour tout  $m \geq p$  on a:  $(x_n, x_m) \in W$ . Cette relation est équivalente à:  $x_n \in W(x_m)$  pour tout  $n \geq p$ . Fixons  $m$ . Par hypothèse la suite  $(x_n)$  converge vers le point  $x$  pour  $T$  et  $W(x_m)$  est  $T$ -fermé; on a nécessairement  $x \in W(x_m)$ ; c'est-à-dire  $(x, x_m) \in W$ .

$(x, x_m) \in W$  et  $(x_m, x_n) \in W$  impliquent finalement

$$(x, x_n) \in W^2 \subset V$$

d'où il résulte que :

**Théorème 1.3.** Soit  $E$  un ensemble muni de deux structures uniformes  $U_0$  et  $U$ , la  $U$ -convergence étant moins fine que la  $U_0$ -convergence. Un système fondamental d'entourages pour  $U_0$  sera encore noté par  $U_0$ . Pour tout entourage  $V$  appartenant à  $U_0$  et pour tout point  $x$  de  $E$ ,  $V(x)$  est supposé  $U$ -fermé. Alors toute partie  $A$  de  $E$  qui est  $S$ -complète pour  $U$  est aussi  $S$ -complète pour  $U_0$ .

**Démonstration.**  $A$  étant une partie de  $E$  supposée  $S$ -complète pour  $U$ , soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy pour  $U_0$  dans  $A$ . Comme  $U$  est moins fine que  $U_0$ , cette suite est aussi une suite de Cauchy pour  $U$ .  $A$  étant, par hypothèse  $S$ -complète pour  $U$ , la suite  $(x_n)$  converge vers un point  $x$  de  $A$ , pour  $U$ -convergence. Le Théorème 1.3 prouve que la suite  $(x_n)$  converge aussi vers le même point  $x$  pour  $U_0$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels localement convexes séparés. Désignons par  $L(E; F)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . Si l'on muni  $L(E; F)$  de la convergence simple, on le notera par  $L_s(E; F)$ . L'ensemble  $L(E; F)$  muni de la convergence bornée sera noté par  $L_b(E; F)$ . Enfin  $L_c(E; F)$  désignera  $L(E; F)$  muni de la convergence compacte. En particulier si l'on prend  $F = K$  où  $K$  est le corps des nombres complexes, on trouve que :

$E' = L(E; K)$ , est le dual topologique de  $E$ .

$E'_s = L_s(E; K)$ , est l'espace  $E'$  muni de la topologie faible  $\sigma(E'; E)$ .

$E'_b = L_b(E; K)$ , est l'espace  $E'$  muni de la topologie forte.

$E'_c = L_c(E; K)$ , est l'espace  $E'$  muni de la topologie de la convergence compacte.

On sait que [5] :

$E_\sigma = L_s(E'_\sigma; K)$ , est l'espace  $E$  muni de la topologie affaiblie  $\sigma(E, E')$ .

$E = L_e(E'_\sigma; K)$ , où  $e$  est l'ensemble des parties équi continues de  $E'$ . Dans ce cas  $L_e(E'_\sigma; K)$  est l'espace  $E$  muni de la topologie initiale.

$E = L(E'_\sigma; K)$ , est l'ensemble  $E$ .

**Lemme 1.4.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels localement convexes séparés. Si nous désignons par  $U_0$  la structure uniforme de  $L_b(E; F)$  et par  $U$  la structure uniforme de  $L_s(E; F)$ ;  $U_0$  et  $U$  vérifient alors pour  $L(E; F)$  les conditions du Théorème 1.3.

**Démonstration.** Il suffit de montrer que  $L_b(E; F)$  possède un système fondamental de voisinages de 0 qui sont fermés pour  $L_s(E; F)$ . Quand les  $B$  parcourent l'ensemble des bornés de  $E$  et les  $V$  parcourent l'ensemble des voisinages fermés de  $O$  dans  $F$ , les  $W(B, V)$  forment un système fondamental de voisinages de  $O$  dans  $L_b(E; F)$ . Ici  $W(B, V)$  est l'ensemble des  $u$  de  $L(E; F)$  tel que  $u(B) \subset V$ . Montrons donc que chaque  $W(B, V)$  est fermé dans  $L_s(E; F)$ . Soit  $u$  un élément de  $L(E; F)$  non contenu dans  $W(B, V)$ . Il existe donc un point  $x$  de  $B$  tel que  $u(x)$  n'appartient pas à  $V$ . Comme  $V$  est fermé dans  $F$ , il existe nécessairement un voisinage  $V_1$  de  $O$  dans  $F$  tel que l'intersection de  $V$  avec  $u(x) + V_1$  est vide. C'est-à-dire que  $u + W(x, V_1)$  est contenu dans le complémentaire de  $W(B, V)$ . Comme  $W(x, V_1)$  est un voisinage de  $O$  dans  $L_s(E; F)$ , la proposition est démontrée.

**Remarque.** Si au lieu de  $L_b(E; F)$  on prend  $L_c(E; F)$ , on arrive à la même conclusion.

**Proposition 1.5.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels localement convexes séparés. Toute partie  $H$  de  $L(E; F)$  qui est  $S$ -complète pour  $L_s(E; F)$  est alors aussi  $S$ -complète pour  $L_b(E; F)$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence du Lemme 1.4 et du Théorème 1.3.

**Proposition 1.6.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels localement convexes séparés.  $F$  étant  $S$ -complet. Toute partie  $H$  équicontinue de  $L(E; F)$  fermée dans  $L_s(E; F)$  est alors  $S$ -complète pour  $L_b(E; F)$ .

**Démonstration.** Soit une suite  $(u_n)$  dans  $H$ , supposée de Cauchy pour  $L_s(E; F)$ . Comme  $F$  est  $S$ -complet par hypothèse, cette suite converge vers un élément  $u$  de  $H$ . Donc  $H$  est  $S$ -complète pour  $L_s(E; F)$ . D'après la Proposition 1.6,  $H$  est aussi  $S$ -complète pour  $L_b(E; F)$ .

**Proposition 1.7.** Si  $E$  est un espace tonnelé,  $F$  un espace vectoriel localement convexe séparé et  $S$ -complet,  $L_b(E; F)$  est alors  $S$ -complet.

**Démonstration.** Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $L_b(E; F)$ . Cette suite est aussi une suite de Cauchy dans  $L_s(E; F)$ . Elle est donc bornée dans  $L_s(E; F)$ . Comme  $E$  est tonnelé, cette suite est équicontinue. Il existe une partie  $H$  de  $L(E; F)$  équicontinue fermée pour  $L_s(E; F)$  contenant la suite  $(u_n)$ , d'où la conclusion en vertu du Théorème 1.6.

On en déduit :

**Corollaire 1.8.** Si  $E$  est un espace tonnelé  $E_{\sigma}'$ ,  $E_b'$  et  $E_c'$  sont alors  $S$ -complets.

**Proposition 1.9.** Si  $E$  est un espace vectoriel localement convexe séparé, toute partie  $A$  de  $E$  qui est faiblement  $S$ -complète est aussi  $S$ -complète.

**Démonstration.**  $E$  muni de la topologie initiale peut être identifié avec  $L_e(E_{\sigma}'; K)$ . De même  $E$  muni de la topologie affaiblie peut être identifié avec  $L_s(E_{\sigma}'; K)$ .  $L_e(E_{\sigma}'; K)$  et  $L_s(E_{\sigma}'; K)$  vérifient le Lemme 1.4, d'où la conclusion en vertu de la Proposition 1.5.

On a alors :

**Corollaire 1.10.** Soit  $E$  un espace vectoriel localement convexe séparé. Toute partie faiblement compacte de  $E$  est alors  $S$ -complète.

### QUELQUES CONSÉQUENCES DU THÉOREME D'ASCOLI

Les propriétés et les applications du théorème d'Ascoli sont étudiées en détail dans [1]. Nous allons maintenant le généraliser et l'améliorer. Remarquons qu'on en avait partiellement parlé dans [6].

**Théorème 2.1.** Soit  $(f_n)$  une suite équicontinue d'applications d'un espace topologique  $E$  dans un espace uniforme séparé  $F$ . L'ensemble  $A$  des points  $x$  de  $E$  pour lesquels la suite  $(f_n(x))$  est de Cauchy est alors à la fois ouvert et fermé.

**Démonstration.** Soit  $V$  un entourage symétrique et quelconque de  $F$ . Il correspond alors à  $V$  un entourage  $W$ , symétrique tel que  $W^3 \subset V$ .

Supposons  $A$  non vide. Soit  $a$  un point arbitraire de  $A$ . Comme la suite  $(f_n)$  est équicontinue au point  $a$ , il correspond à  $W$  un voisinage  $U$  de  $a$  tel que pour tout  $x$  dans  $U$  et pour tout  $n$  nous avons :

$$(f_n(x), f_n(a)) \in W, \quad (1)$$

$$(f_m(x), f_m(a)) \in W. \quad (1')$$

La suite  $(f_n(a))$  étant une suite de Cauchy, il existe un entier  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$  et pour tout  $m \geq p$  on ait :

$$(f_n(a), f_m(a)) \in W. \quad (2)$$

Les relations (2) et (1') nous donnent

$$(f_n(a), f_m(x)) \in W^2; \quad (3)$$

cette dernière relation et (1) nous fournissent alors

$$(f_n(x), f_m(x)) \in W^3 \subset V,$$

ce qui prouve que la suite  $(f_n(x))$  est une suite de Cauchy. Donc  $U \subset A$ , c'est-à-dire que  $A$  est ouvert.

Montrons que  $A$  est fermé. Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . D'après l'équicontinuité de la suite  $(f_n)$ , il correspond à  $W$  un voisinage  $N$  de  $a$  tel que pour tout  $x$  dans  $N$  et pour tout  $n$ , on ait :

$$(f_n(x), f_n(a)) \in W, \quad (4)$$

$$(f_m(x), f_m(a)) \in W. \quad (4')$$

Comme  $A \cap N$  est non vide, on peut supposer que  $x \in A$ .

Par hypothèse la suite  $(f_n(x))$  est une suite de Cauchy dans  $F$ . Il existe donc un entier  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$  et pour tout  $m \geq p$ , on ait :

$$(f_n(x), f_m(x)) \in W. \quad (5)$$

Les relations (5) et (4') nous donnent

$$(f_n(x), f_m(a)) \in W^2; \quad (6)$$

cette dernière et (4) nous fournissent

$$(f_n(a), f_m(a)) \in W^3 \subset V,$$

ce qui montre que la suite  $(f_n(a))$  est une suite de Cauchy. On a donc  $a \in A$ , c'est-à-dire que  $A$  est fermé.

**Proposition 2.2.** Soit  $(f_n)$  une suite équicontinue d'applications d'un espace topologique  $E$  dans un espace uniforme séparé  $F$ ,  $\mathcal{S}$ -complet. L'ensemble  $A$  des points  $x$  de  $E$  pour lesquels la suite  $(f_n(x))$  a une limite est alors à la fois ouvert et fermé. De plus la limite  $f$ , des  $(f_n)$  est une application continue de  $A$  dans  $F$ .

**Démonstration.** Désignons par  $B$  l'ensemble des points  $x$  de  $E$  pour lesquels la suite  $(f_n(x))$  est une suite de Cauchy. En vertu du Théorème 2.1  $B$  est à la fois ouvert et fermé. Comme  $F$  est  $\mathcal{S}$ -complet, on a  $A = B$ . Soit  $f$ , la limite simple de  $(f_n)$ . De l'équicontinuité de la suite  $(f_n)$ , résulte la continuité de  $f$ :  $A \rightarrow F$ .

**Corollaire 2.3.** Soit  $(f_n)$  une suite équicontinue d'applications d'un espace topologique connexe  $E$  dans un espace uniforme  $F$  séparé et  $\mathcal{S}$ -complet. Si alors en un point particulier  $a$  de  $E$  la suite  $(f_n(a))$  converge, la suite converge simplement en une application  $f$ , de  $E$  dans  $F$  et  $f$  est continue.

**Corollaire 2.4.** Soit  $(u_n)$  une suite d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé  $E$  dans un espace de Banach  $F$ . La suite  $(u_n)$  est supposée

bornée en norme par un nombre  $M > 0$ . Si en un point  $x \neq 0$  de  $E$  la suite  $(u_n(x))$  converge, la suite  $(u_n)$  converge alors simplement vers une application linéaire continue  $u$  de  $E$  dans  $F$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que  $E$  est connexe. On peut alors appliquer le corollaire précédent, en tenant compte du fait que la suite  $(u_n)$  est équicontinue.

#### RÉFÉRENCE ET BIBLIOGRAPHIE

- [<sup>1</sup>] SCHWARTZ, L. : Analyse. Hermann, Paris (1970).
- [<sup>2</sup>] BANERJEE, C.R. : On Subseries of Convergent Series, Ind. J. Math. **12** (1970).
- [<sup>3</sup>] HILL, J.D. : Some Theorems On Subseries, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942).
- [<sup>4</sup>] DIXMIER, J. : Sur un Théorème de Banach, Duke Math. J. **15** (1948).
- [<sup>5</sup>] GROTHENDIECK, A. : Espaces Vectoriels Topologiques. Soc. de Mate. S. PAULO (1964).
- [<sup>6</sup>] ABDİK, A. : Quelques Propriétés de la Catégories de Baire. Comm. de la Fac. des Sci. de l'Uni. d'Ankara Série A<sub>1</sub>, **24** (1975).

AHMET ABDİK  
EBUZZİYA TEVFİK SOK. 12/5  
ÇANKAYA/ANKARA

#### Ö Z E T

Bu çalışmada bazı üniform uzayların dizisel tamlıkları ve Ascoli teoreminin bazı sonuçları incelenmektedir.