DÉRIVATIONS PONCTUELLES ET L'ALGÈBRE $L^1(G)$

Ahmet ABDİK

Le but de ce travail est de chercher certaines propriétés de $L^1(G)$ en utilisant la notion de dérivation ponctuelle relative à une algèbre de Banach commutative.

I. Introduction. Étant donné une algèbre de Banach A, commutative et unitaire; son spectre sera noté par $Sp\ A$ et son dual topologique par A'. On sait que $Sp\ A$ est une partie compacte de A' pour la topologie $\sigma\ (A',A)$.

Dans toute la suite X sera toujours un espace compact et séparé. Nous désignerons par $C(X)$ l'algèbre des fonctions complexes, continues sur X et par $M(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X. L'algèbre $C(X)$ sera munie de sa norme naturelle.

Soit A une sous-algèbre de $C(X)$. On dit que A sépare X si pour tout couple de points distincts x et y de X il existe une fonction appartenant à A telle que: $f(x) \neq f(y)$.

Définition 1.1. Une sous-algèbre fermée de $C(X)$ est dite une algèbre uniforme sur X si elle sépare X et contient toutes les fonctions constantes.

On sait qu'on peut identifier X, par la transformation de Dirac, à une partie de fermée de $Sp\ A$.

II. Quelques Propriétés Fondamentales. Dans cette partie nous allons rappeler quelques résultats qui seront utiles dans la suite.

Définition 2.1. Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et M un idéal maximal de A. On dit que M possède "une unité approchée" s'il existe une constante positive k telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $f_1, f_2, \ldots, f_n$ éléments en nombre fini de M, il existe un élément e de M avec les propriétés suivantes : $\| e \| \leqq k$, pour tout $p \in \{1,2,\ldots,n\}$ on a $\| e f_p - f_p \| \leqq \varepsilon$.

Théorème 2.1 (P. Cohen [1]). Soit A une algèbre de Banach commutative et M un idéal maximal de A. Si M possède une unité approchée il existe alors pour tout $f \in M$, g et $h \in M$ tels que : $f = gh$.

Définition 2.2. Étant donnés une algèbre uniforme sur X et un point x de X, on dit que x est un point-pic pour A s'il existe une $f \in A$ telle que : $f(x) = 1$ et pour tout y de X différent de x on a $|f(y)| < 1$.

Le point x est dit un point-pic faible pour A s'il existe une constante positive k telle que pour tout voisinage U du point x et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $f \in A$ possédant les propriétés suivantes : $\|f\| \leqq k$, $f(x) = 1$ et pour tout y dans le complémentaire de U on a $|f(y)| < \varepsilon$.

Lemme 2.1. Étant donnés une algèbre uniforme sur X et un point x de X, si x est un point-pic pour A, il est aussi un point-pic faible pour A.

Démonstration. Si x est un pount-pic pour A il existe une $f \in A$ telle que $f(x) = 1$ et pour tout $y \in X$, $y \neq x$, on a $|f(y)| < 1$. Alors pour un entier n assez grand la fonction f^n satisfait bien la condition pour que x soit un point-pic faible pour A.

Théorème 2.2. Soit A une algèbre uniforme sur X. Considérons un point x de X. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) L'idéal $M = \{f \in A : f(x) = 0\}$ possède une unité approchée.

(ii) Le point x est un point-pic faible pour A.

Démonstration. Supposons (i) satisfaite.

Donnons-nous un voisinage U de point x. On peut alors trouver $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$ telle que

$$\{y \in X : |f_p(y)| < 1 \, ; p = 1,2,\ldots,n\} \subset U \, .$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Il correspond alors au nombre ε et à $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ un élément $e \in M$ tel que :

$$\|e\| \leqq K; \quad \|ef_p - f_p\| < \varepsilon \, , \; \forall \; p \in \{1,2,\ldots,n\} \, .$$

Donc pour tout y de X on a :

$$|e(y) f_p(y) - f_p(y)| < \varepsilon \, .$$

Si $y \notin U$ il existe $q \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que :

$$|f_q(y)| \geqq 1 \, .$$

Nous avons donc pour $y \notin U$, les inégalités ci-dessous :

$$|f_q(y)\,e(y) - f_q(y)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_q(y)| \geqq 1\,.$$

On en déduit $|e(y) - 1| < \varepsilon$ pour tout $y \notin U$. Posons $f = 1 - e$. Il est évident que $f \in A$. La fonction ainsi trouvée vérifie bien que x est un point-pic faible pour A.

Supposons (ii) vérifiée. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble

$$U = \left\{ y \in X : |f_p(y)| < \frac{\varepsilon}{k}\,,\ p = 1,2,\ldots,n \right\}$$

est un voisinage de x. On peut trouver un nombre positif r tel que : pour tout $p \in \{1,2,\ldots,n\}$ on a : $r\,\|f_p\| \leqq \varepsilon$. Comme x est un point-pic faible, il existe $f \in A$ tel que : $\|f\| \leqq k$, $f(x) = 1$ et $\forall\ y \notin U$, $|f(y)| < r$. Si l'on pose $e = 1 - f$, on aura alors $e \in M$ et $\|e\| \leqq k + 1$.

Pour tout $p \in \{1,2,\ldots,n\}$:

Si $y \in U$, on aura : $|e(y)f_p(y) - f_p(y)| = |f(y)f_p(y)| < \varepsilon$.

Si $y \notin U$, on aura : $|e(y)f_p(y) - f_p(y)| = |f(y)f_p(y)| < \varepsilon$.

d'où $\|e f_p - f_p\| \leqq \varepsilon$, $\forall\ p \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Corollaire. Étant donnés une algèbre uniforme sur X, et un point x de X, si x est un point-pic, l'ideal maximal $\{f \in A : f(x) = 0\}$ possède alors une unité approchée.

C'est évident d'après le Lemme 2.1.

III. Dérivations Ponctuelles. Nous allons donner la définition et les propriétés d'une dérivation ponctuelle, pour une algèbre de Banach commutative, dues à Browder [2].

Définition 3.1. Soit A une algèbre de Banach commutative et soit u un élément de son spectre. Sp A. On dit qu'une forme linéaire D sur A est une dérivation de A au point u si pour tout $f \in A$ et pour tout $g \in A$, on a :

$$D(fg) = D(f)\,u(g) + D(g)\,u(f)\,.$$

Si de plus D est continue, on dit que D est une dérivation continue.

Remarque. Si A possède une unité notée 1 on a $D(1) = 0$. $D(fg) = 0$ si $u(f) = 0$ et $u(g) = 0$. Posons donc :

$$M = \{f \in A : u(f) = 0\}$$

et désignons par M^2 l'espace engendré par l'ensemble

$$\{fg : f \in M \text{ et } g \in M\} .$$

On peut facilement déduire du Théorème 2.1 les propositions suivantes :

Proposition 3.1. Soit A une algèbre de Banach commutative et unitaire. Soit u un point de Sp A. Si le noyau de u a une unité approchée, il n'existe pas alors de dérivation au point u.

Proposition 3.2. Soit A une algèbre uniforme sur X. Soit x un point de X. Si x est un point-pic faible, ou un point-pic, il n'existe pas alors de dérivation au point x.

Annonçons maintenant un résultat important.

Théorème 3.1 (Browder [2]). Étant donnés une algèbre de Banach commutative A et un point u de Sp A, s'il n'y a pas de dérivation au point u, le point u est alors isolé dans Sp A pour la topologie forte de A'.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en général.

IV. L'Algèbre L¹(G). Soit G un groupe localement compact et abelien. Choisissons une mesure de Haar m sur G. Désignons par $L^1(G)$ l'espace des fonctions définies sur G, à valeurs complexes, m- integrables; par Hom (G, R) l'espace vectoriel des représentations réelles et continues de G et par $\hat{G}$ le dual de G. Munissons $L^1(G)$ de sa norme naturelle $\| \quad \|_1$.

Si f et $g \in L^1(G)$, la convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-t)\, g(t)\, dt$$

est bien définie dans $L^1(G)$. Par rapport à la convolution, $L^1(G)$ devient une algèbre de Banach commutative. Le spectre de $L^1(G)$ peut être identifié avec $\hat{G}$.

On sait que [3] $L^1(G)$ possède une unité approchée, il n'y a alors en vertu de la Proposition 3.1 aucune dérivation en aucun point de $\hat{G}$.

On peut donc appliquer le Théorème 3.1: le dual $\hat{G}$ de G est un espace discret dans $L^\infty(G)$ muni de la topologie forte.

Soit l un élément de Hom (G,R). Désignons par $L^1(G, l)$ l'ensemble

$$\{f \in L^1(G) : lf \in L^1(G)\}.$$

Nous avons défini dans $L^1(G, l)$ la notion de "dérivée convolutive" : pour f et g dans $L^1(G, l)$

$$l(f * g) = lf * g + f * lg .$$

Nous avons définis sur $L^1(G, l)$ une dérivation en se servant de la transformation de Fourier [4].

Pour $f \in L^1(G, l)$ posons $\|f\| = \|f\|_1 + \|lf\|_1$. $L^1(G, l)$ muni de cette norme devient alors une algèbre de Banach commutative. $\hat{G}$ est alors une partie du spectre de $L^1(G, l)$. On peut donc définir sur $L^1(G, l)$ une dérivation au sens de la Définition 3.1 en chaque point de $\hat{G}$ et en tirer les conséquences suivantes:

Proposition 4.1. Si $\hat{G}$ est totalement discontinu ou si tout élément de G est de torsion, $\hat{G}$ est alors un sous-espace discret du dual fort de $L^1(G, l)$.

Démonstration. Si tout élément de G est de torsion, on sait que [4] $\hat{G}$ est totalement discontinu. Si $\hat{G}$ est discontinu, d'après [4] il n'y aucune dérivation non nulle en aucun point de $\hat{G}$ de l'algèbre $L^1(G, l)$. En vertu du Théorème 3.1, $\hat{G}$ est discret dans le dual fort de $L^1(G, l)$.

Proposition 4.2. Si $\hat{G}$ est connexe, chaque idéal maximal défini pour tout s de $\hat{G}$ ne possède alors aucune unité approchée.

Démonstration. En tout point de $\hat{G}$ il y a une dérivation [4]. L'idéal maximal défini par tout s de $\hat{G}$ ne possède aucune unité approchée : Prop. 3.1.

RÉFÉRENCE

[1] COHEN, P.J. : Factorization in Group Algebras, Duke Math. J. 26 (1959), 199-205.

[2] BROWDER, A. : Point Derivations on Function Algebras, Journal of Functional Analysis, **1** (1967), 22-27.

[3] GUICHARDET, A. : Analyse Harmonique Commutative, Dunod, Paris (1968).

[4] ABDİK, A. : Dérivation sur un Groupe Localement Compact et Abelien, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, **25** (1971), 2.

AHMET ABDİK
EBUZZİYA TEVFİK SOK. 12/5
ÇANKAYA/ANKARA

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, komütatif bir Banach Cebrindeki noktasal türetme kavramını kullanarak L' (G) nin bazı özelliklerini araştırmaktır.