CORRESPONDANCES ASYMPTOTIQUES ET FAMILLES DE COURBES PLANES INVARIANTES

A. EVYATAR - F. MARCUS

Dans la première partie du présent mémoire on étudie les courbes intégrales d'une équation différentielle $v'' = F(u, v, v')$ sur une surface et l'on obtient des conditions pour qu'elles soient planes. Dans la deuxième partie on traite de l'éxistence d'une correspondance asymptotique entre deux surfaces non réglées qui n'est pas une déformation et conserve une famille á deux paramètres de courbes planes.

Le présent mémoire comprend deux parties. Dans la première partie on montre d'abord que: les courbes intégrales d'une équation differentielle $v''=F(u, v, v')$ $(u'' = F(u, v, u'))$, sont planes sur une surface non réglée si et seulement si

$$v'' = a_0 + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + a_3 (v')^3 \quad (a^i = a^i (u, v)) .$$

Ensuite l'on démontre que pour $a_0 = -\beta$, $a_2 = \gamma$, la droite par laquelle passent les plans de ces courbes passe par un point fixe.

Dans le cas ou $a_0 = -\dfrac{\beta}{3}$, $a_3 = \dfrac{\gamma}{3}$ la droite $(x, x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_u)$ est l'arête de Gabriel Marcus Green, et ne passe pas par un point fixe.

On montre que sur les surfaces de Čech les courbes intégrales de $v'' = \gamma(v')^3 - \beta = 0$ $(\gamma = \beta)$ sont planes.

Dans la deuxième partie on traite de l'éxistence d'une correspondance asymptotique entre deux surfaces non réglées qui n'est pas une déformation projective et conserve une famille à deux paramètres de courbes planes.

Les théorèmes suivants sont établis :

1. Il n'existe que deux correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées qui conservent une même famille ∞^2 de courbes planes. Ces correspondances sont des similitudes projectives propres.

2. Seule une surface isothermo-asymptotique de Fubini admet une telle correspondance. On montre aussi que parmi les surfaces qui admettent ∞^2 trans-

formations projectives en elles-mêmes il y a une seule surface dont l'arête de Green passe par un point fixe, tandis que sur les autres surfaces de même espèce il y a deux droites canoniques qui passent par des points fixes.

I. Première Partie

1. Rappel de quelques notions de base. Suivant E. Bompiani [3,4] toute correspondance biunivoque différentiable entre deux surfaces non développables (qui ne sont pas des quadriques) qui est telle que les éléments linéaires projectifs de Fubini se trouvent dans un rapport constant est une similitude projective (*s.p.*).

Si u, v sont les paramètres asymptotiques, la définition précédente s'exprime donc par

$$\bar{\beta}(u, \mathrm{v}) = k\, \beta(u, \mathrm{v}); \bar{\gamma}(u, \mathrm{v}) = k\, \gamma(u, \mathrm{v}), \tag{1.1}$$

où k est une constante non nulle pour toute *s.p.* $x(u, \mathrm{v}) \rightarrow \bar{x}(u, \mathrm{v})$.

Si

$$k \neq \pm 1, \tag{1.2}$$

nous dirons, que la s.p. est une s.p. propre. D'après Čech [5] on peut baser la classification des correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées sur les invariants de contact r et s, et l'on obtient 3 espèces de correspondances.

Si la surface $\bar{x}(u,\mathrm{v})$ est en correspondance asymptotique de troisième espèce avec la surface $x(u, \mathrm{v})$ l'on a

$$r = k_1\, ; s = k_2 \quad (k_1\, , k_2 \text{ constantes} \neq 0,1, -1)\, . \tag{1.3}$$

En coordonnées asymptotiques les surfaces $\bar{x}(u, \mathrm{v})$ sont déterminées par

$$\frac{\bar{\beta}}{\beta} = r = k_1\, ; \; \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = s = k_2\, , \tag{1.4}$$

qui doivent évidement satisfaire aussi aux conditions d'intégrabilité [1,2].

Parmi les correspondances asymptotiques de 3^e-espèce on a aussi le cas

$$r = s = c \quad (c \neq 0, 1, -1)\, , \tag{1.5}$$

et dans ce cas la correspondance dépend de six fonctions arbitraires d'un argument [5] et est une s.p. propre.

Čech énonce aussi, sans démonstration, dans [5] la propriété suivante: si la surface (x) est donnée, la correspondance existe si et seulement si l'on a:

$$\beta_{vvv} = \gamma_{uuu} \tag{1.6}$$

pour un choix convenable des paramètres. La démonstration de ce résultat se trouve dans le mémoire [6] de 0. Mayer, qui ne connaissait pas la note [5] de Čech.

Notons ici que les surfaces de Čech [1] peuvent admettre des c.a. de 3^e-espèce qui satisfont à (1.6).

2. Familles ∞^2 de courbes planes sur une surface non réglée. Soit S une surface non réglée rapportée a ses lignes asymptotiques u,v. Les coordonnées x d'un point générique, supposées normées selon Wilczynski satisfont (voir [2]) au système

$$x_{uu} = \beta x_v + p_{11}\, x\,; \quad x_{vv} = \gamma\, x_u + p_{22}\, x\,, \tag{2.1}$$

quant aux conditions d'intégrabilité, ce sont

$$\begin{aligned} &L_v + 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0\,; \; M_u + 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0\,, \\ &\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$L = -\beta_v - 2p_{11}\,; \quad M = -\gamma_u - 2p_{22}\,. \tag{2.3}$$

Les sections planes de S doivent satisfaire à l'équation

$$(x, dx, d^2x, d^3x) = 0\,. \tag{2.4}$$

Donc, si v $=$ v(u) est une courbe plane sur S, l'équation différentielle suivante doit être vérifiée

$$\begin{aligned} &2v''' - 3\,(v'')^2 - 4\,(\gamma\,(v')^3 + \beta)\,v'' + \gamma^2\,(v')^6 - 2\gamma_v\,(v')^5 - \\ &- 2(\gamma_u + 2\pi_{22})\,(v')^4 + 2\,(\beta_v + 2\pi_{11})\,(v')^2 + 2\beta_u\,v' - \beta^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où v′, v″, v‴ sont les dérivées de v par rapport à u et

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v\,; \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u\,. \tag{2.3′}$$

Supposons que les ∞^2 courbes solutions de l'équation

$$v'' = F(u, v', v'') \tag{2.6}$$

soient planes sur S. Dérivant (2.6) par rapport à u et en introduisant les résultats dans (2.5) on obtient une équation différentielle d'ordre un et de sixième degrée qui doit être identiquement nulle. Mais dès que le coefficient de $(v')^6$ est γ^2, on doit avoir $\gamma = 0$, ce qui veut dire que S est une surface réglée que nous avons exclue.

Nous allons maintenant examiner quelles sont les conditions qui doivent satisfaire aux fonctions $a_i(u, \mathrm{v})$ $(i = 1,2,\dots,n)$ afin que les ∞^2 courbes intégrales de l'équation

$$\mathrm{v}'' = \sum_i a_i(u, \mathrm{v})(\mathrm{v}')^i \quad (i = 0,1,2,\dots,n) \tag{2.7}$$

soient planes sur S.

Après différentiation de v'' par rapport à u et substitution dans (2.5) nous obtenons une équation différentielle d'ordre n et de degré $2n$ qui doit être identiquement nulle.

L'on voit de suite que $n \leqq 3$ et (2.7) se réduit à l'équation cubique

$$\mathrm{v}'' = a_0 + 2a_1 \mathrm{v}' + 2a_2(\mathrm{v}')^2 + a_3(\mathrm{v}')^3 \tag{2.8}$$

avec $a_i(u, \mathrm{v})$.

Effectuant la différentiation et la substitution, l'on obtient ce qui suit :

Proposition I. Les courbes intégrales de l'équation (2.8) sont planes sur une surface S non réglée si les coefficients a_i $(i = 0,1,2,3)$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&3a_0^2 + 4\beta a_0 + \beta^2 = 0\,,\\
&a_{0u} - 4a_0 a_1 - 4\beta a_1 + \beta_u = 0\,,\\
&a_{1\mathrm{v}} + a_{2u} - \gamma a_0 - \beta a_3 = 0\,,\\
&a_{3\mathrm{v}} + 4a_2 a_3 - 4\gamma a_2 - \gamma_{\mathrm{v}} = 0\,,\\
&3a_3^2 + \gamma^2 - 4\gamma a_3 = 0\,,\\
&a_{0\mathrm{v}} + 2a_{1u} - 2a_1^2 - 2a_0 a_2 - 4\beta a_2 + \beta_{\mathrm{v}} = -2\pi_{11}\,,\\
&a_{3u} + 2a_{2\mathrm{v}} + 2a_2^2 + 2a_1 a_3 - 4\gamma a_1 - \gamma_u = 2\pi_{22}\,.
\end{aligned} \tag{I}$$

En excluant de nos considérations les surfaces réglées il s'ensuit de (I) que $a_0 a_3 \neq 0$.

Réciproquement, si les fonctions $a_i(u, \mathrm{v})$, $a_0 a_3 \neq 0$, satisfont aux conditions (I), les courbes intégrales de (2.8) sont planes sur une surface non réglée.

Étudions les conditions (I) d'une façon plus détaillée. De la première et de la cinquième condition l'on déduit :

$$\begin{aligned}
&a_0 = -\beta \quad \text{ou} \quad a_0 = -\frac{\beta}{3}\,,\\
&a_3 = \gamma \quad \text{ou} \quad a_3 = \frac{\gamma}{3}\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'où les possibilités suivantes :

A) $a_0 = -\beta$; $a_3 = \gamma$,

alors

$$a_{1v} + a_{2u} = 0 ,$$
$$a_1^2 + \beta a_2 - a_{1u} = \pi_{11} , \tag{2.10}$$
$$a_2^2 + a_{22} - \gamma a_1 = \pi_{22} .$$

B) $a_0 = -\dfrac{\beta}{3}$; $a_3 = \dfrac{\gamma}{3}$,

alors

$$a_1 = \frac{1}{4} (\log \beta)_u ; \quad a_2 = -\frac{1}{4} (\log \gamma)_v ; \quad (\log \beta : \gamma)_{uv} = 0 ,$$
$$-\frac{(\log \beta)_{uu}}{4} + \frac{(\log \beta)_u^2}{16} - \frac{5\beta (\log \gamma)_v}{12} - \frac{\beta_v}{3} = \pi_{11} , \tag{2.11}$$
$$-\frac{(\log \gamma)_{vv}}{4} + \frac{(\log \gamma)_v^2}{16} - \frac{5\gamma (\log \beta)_u}{12} - \frac{\gamma_u}{3} = \pi_{22} .$$

C) $a_0 = -\beta$; $a_3 = \dfrac{\gamma}{3}$,

alors

$$a_{1v} + a_{2u} = -\frac{2}{3} \beta\gamma ; \quad a_2 = -\frac{1}{4} (\log \gamma)_v ,$$
$$a_1^2 - \frac{\beta (\log \gamma)_v}{4} - a_{1u} = \pi_{11} ; \quad a_2^2 + a_{2v} - \frac{5}{3} \gamma a_1 - \frac{\gamma_u}{3} = \pi_{22} . \tag{2.12}$$

D) $a_0 = -\dfrac{\beta}{3}$; $a_2 = \gamma$.

Dans ce cas

$$a_{1v} + a_{2v} = \frac{2}{3} \beta\gamma ; \quad a_1 = \frac{1}{4} (\log \beta)_u ,$$
$$a_1^2 - a_{1u} + \frac{5\beta a_2}{3} - \frac{\beta_v}{3} = \pi_{11} ; \quad a_{2v} + a_2^2 - \gamma a_1 = \pi_{22} . \tag{2.13}$$

3. Interprétation géométrique. On sait que l'équation $v = v(u)$ $(u = u(v))$ d'une courbe C sur une surface S qui est tangente en 0 $(u = v = 0)$ à l'asymptotique $v = 0$ $(u = 0)$ est

$$\mathrm{v} = -\frac{h}{2}\beta u^2 + (3) \quad \left(u = -\frac{h}{2}\gamma \mathrm{v}^2 + (3)\right), \tag{3.1}$$

où u, v sont les coordonnées asymptotiques, (3) indique des termes du troisième ordre au point 0, et h est une constante telle que $1-h$ est l'invariant de contact de C avec l'asymptotique $\mathrm{v} = 0$ $(u = 0)$.

Notons que h ne change pas si l'on change les paramètres asymptotiques et le plan osculateur au point 0 à C ne dépend que de $(1-h)$ [2].

Si l'on a

$$3h = 1 \tag{3.2}$$

on aura alors

$$\mathrm{v} = -\frac{\beta}{6}u^2 + (3) \quad \left(u = -\frac{\gamma}{6}\mathrm{v}^2 + (3)\right), \tag{3.3}$$

et le plan osculateur à C en 0 est stationaire et y coincide avec le plan tangent à la surface ; C est donc une courbe plane.

D'autre part si

$$h = 1 \tag{3.4}$$

C a en 0 un point d'inflexion et le plan osculateur y est indéterminé.

Dans le premier cas l'on a au point 0 considéré

$$\mathrm{v}'' = -\frac{\beta}{3}, \tag{3.5}$$

et dans le second

$$\mathrm{v}'' = -\beta \quad (u'' = -\gamma). \tag{3.6}$$

Soit (d) la droite déterminée par

$$(x, x_{u\mathrm{v}} - l_1 x_{\mathrm{v}} - l_2 x_u). \tag{3.7}$$

Les plans osculateurs des courbes

$$\mathrm{v}'' = a_0 + 2a_1 \mathrm{v}' + 2a_2 (\mathrm{v}')^2 + a_3 (\mathrm{v}')^3 \tag{3.8}$$

passent par (d) si et seulement si

$$a_0 = -\beta;\ a_1 = -l_1;\ a_2 = l_2;\ a_3 = \gamma, \tag{3.9}$$

et la droite dont il s'agit est alors

$$(x, x_{u\mathrm{v}} + a_1 x_{\mathrm{v}} - a_2 x_u). \tag{3.10}$$

Si les courbes (3.8) sont planes sur la surface $x(u, \mathrm{v})$ et que les équations qui caractérisent le cas A du §2 sont vérifiées, nous aurons

$$l_{1v} = l_{2u};\ l_1^2 + \beta l_2 + l_{1u} = \pi_{11};\ l_2^2 + \gamma l_1 + l_{2v} = \pi_{22}. \tag{3.11}$$

Les développables de la congruence engendrée par la droite (3.7) sont données par

$$(\pi_{11} - l_{1u} - l_1 \beta - l_1^2)\, du^2 + (l_{1u} - l_{1v})\, du dv + (l_2^2 + \gamma l_1 + l_{2v} - \pi_{22})\, dv^2 = 0. \tag{3.12}$$

On voit alors que dans le cas A du §2 ces développables sont indéterminées et que par conséquent la droite (3.10) passe alors par un point fixe.

Nous avons donc :

Proposition II. Si les ∞^2 courbes intégrales de l'équation

$$v'' = -\beta + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + \gamma (v')^3$$

sont planes sur une surface $x(u, v)$ non réglée, la droite $(x, x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_u)$, droite d'intérsection des planes de ces courbes, passe par un point fixe.

La réciproque est également vraie: si la droite (3.10) passe par un point fixe, les courbes associées (3.8) sont planes.

Le calcul montre que le point fixe par lequel passent les rayons de la congruence est donné par

$$x' = x + R(x_{uv} + a_1 x_u - a_2 x_v),$$

où

$$R = -\frac{1}{\beta\gamma - a_{2u} + a_1 a_2} = -\frac{1}{\beta\gamma + a_{1v} + a_1 a_2}. \tag{3.13}$$

Il s'ensuit que dans le cas A du §2, les courbes planes (2.8) forment une configuration particulière, que d'après Bompiani [7] l'on nomme système axial associé à la congruence engendrée par la droite (d).

Dans le cas **B**, quand

$$a_0 = -\frac{\beta}{3};\ a_3 = \frac{\gamma}{3},$$

on peut prendre $\beta = \gamma$ sans diminuer la genéralité comme on le voit dans (2.11).

On obtient alors :

$$-l_1 = a_1 = \frac{1}{4}(\log\beta)_u;\ l_2 = a_2 = -\frac{1}{4}(\log\beta)_v,$$

$$\pi_{11} = -\frac{(\log\beta)_{uu}}{4} + \frac{(\log\beta)_u^2}{16} - \frac{3}{4}\beta_v, \tag{3.14}$$

$$\pi_{22} = -\frac{(\log \beta)_{vv}}{4} + \frac{(\log \beta)_v^2}{16} - \frac{3}{4}\beta_u .$$

Donc

$$l_{2u} = l_{1v} ,$$

$$\pi_{11} - l_{1u} - l_1^2 - \beta l_2 = -\frac{1}{2}\beta_v ; \pi_{22} - l_{2v} - l_2^2 - \gamma l_1 = -\frac{1}{2}\beta_u , \tag{3.15}$$

ce qui montre que si S n'est pas une surface de coïncidence, la droite $(x, x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_u)$ ne passe pas par un point fixe.

D'où :

Proposition III. Si les ∞^2 courbes intégrales de l'équation

$$v'' = -\frac{\beta}{3} + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + \frac{\gamma}{3}(v')^3 \quad (a_1 a_2 \neq 0)$$

sont planes sur une surface, la droite $(x, x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_u)$ ne passe pas alors par un point fixe.

Cette propriété montre la distinction entre les cas A et B.

4. **La droite (d) est une droite canonique.** Supposons que (d) est une droite canonique. Dans ce cas l'on a [2]

$$\begin{aligned} - l_1 &= \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)(\log \beta)_u + \left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right)(\log \gamma)_u , \\ - l_2 &= \left(2\lambda + \frac{1}{2}\right)(\log \beta)_v + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)(\log \gamma)_v , \end{aligned} \tag{4.1}$$

où λ est une constante arbitraire.

Pour $\lambda = 0$ on obtient la normale projective de Fubini, si $\lambda = -\frac{1}{2}$ c'est la directrice de Wilczynski, pour $\lambda = -\frac{1}{3}$ on a l'axe de Čech, si $\lambda = -\frac{1}{4}$ on obtient l'arête de Green, et pour $\lambda = -\frac{1}{6}$ ou $\lambda = -\frac{1}{12}$ les droites principales de Fubini. D'autres droites canoniques ont été obtenues par Bompiani, Sullivan, Lane et autres.

Si la surface est isothermo-asymptotique, l'on peut prendre $\beta = \gamma$, (4.1) devient alors

$$-l_1 = (1 + 3\lambda)(\log\beta)_u\,; \quad -l_2 = (1 + 3\lambda)(\log\beta)_v\,. \tag{4.2}$$

Tenant compte de (3.14) on a alors

$$1 + 3\lambda = \frac{1}{4}\,, \tag{4.3}$$

c'est-à-dire

$$\lambda = -\frac{1}{4}\,, \tag{4.4}$$

et la droite $(x,\ x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_2)$ $(a_1 a_2 \neq 0)$ est l'arête de Green.

D'où :

Proposition IV. Les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$v'' = -\frac{\beta}{3} + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + \frac{\gamma}{3}(v')^3,\ a_1 a_2 \neq 0$$

peuvent être planes seulement sur les surfaces dont l'arête de Green ne passe pas par un point fixe.

Notons que dans le cas A nous pouvons aussi supposer que la droite (3.10) est une droite canonique et S une surface isothermo-asymptotique. Nous pouvons prendre $\beta = \gamma$, et de (3.9) et (4.2) on aura

$$a_1 = -l_1 = (1 + 3\lambda)(\log\beta)_u\,,\ a_2 = l_2 = -(1 + 3\lambda)(\log\beta)_v \tag{4.5}$$
$$\beta \neq \text{const.}$$

D'où :

Proposition V. Les courbes (3.8) avec $a_0 = -\beta$, $a_3 = -\beta$ sont planes sur une surface dont une droite canonique passe par un point fixe.

Il semble que cette propriété n'a pas été jusqu'ici remarquée.

5. Un cas particulier. Dans toute l'étude précédente, nous avons supposé $a_1 a_2 \neq 0$. Nous considérons maintenant le cas particulier où

$$a_1 = a_2 = 0\,. \tag{5.1}$$

Les relations (I) donnent

$$a_0 = -\beta\,;\ a_3 = \gamma\,,\ \text{soit}\ a_0 = -\frac{\beta}{3}\,;\ a_3 = \frac{\gamma}{3}\,,$$

$$\text{soit}\ a_0 = -\beta\,;\ a_3 = \frac{\gamma}{3}\,,\ \text{soit}\ a_0 = -\frac{\beta}{3}\,;\ a_3 = \gamma\,.$$

Si $a_0 = -\beta$ et $a_3 = \gamma$ l'on tire de (2.10) et (2.3')

$$\pi_{11} = \pi_{22} = 0 \tag{5.2}$$

et

$$p_{11} + \beta_v = 0\,;\ p_{22} + \gamma_u = 0\,, \tag{5.3}$$

et les conditions d'intégrabilité deviennent maintenant :

$$\begin{aligned}&\beta_{vv} + \gamma\beta_u + 2\beta\gamma_u = 0 \,;\, \gamma_{uu} + \beta\gamma_v + 2\gamma\beta_v = 0\,,\\ &\beta\gamma_{uv} + \beta_{vvv} = \gamma\beta_{uv} + \gamma_{uuu}\,.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Comme on le voit, $\beta = \text{const.}$, $\gamma = \text{const.}$ est une solution de (5.4). Mais (5.3) donne alors $p_{11} = p_{22} = 0$, ce qui montre que les surfaces correspondantes sont les surfaces tétraédrales cubiques.

Il s'ensuit :

Proposition VI. Sur les surfaces tétraedrales cubiques les ∞^2 courbes intégrales de l'équation différentielle $v'' - \gamma(v')^3 + \beta = 0$ sont planes.

Pour obtenir toutes les surfaces sur lesquelles les courbes $v'' - \gamma(v')^3 + \beta = 0$ sont planes il faut intégrer le système (5.4).

Si $\beta = \gamma$, on a les surfaces de Čech [1], c'est-à-dire les surfaces dont l'axe de Čech passe par un point fixe. Les lignes de Segre de ces surfaces sont planes [1].

D'où :

Proposition VII. Sur les surfaces de Čech les courbes intégrales de l'équation $v'' - \gamma(v')^3 + \beta = 0$ sont planes.

Si par contre $a_0 = -\dfrac{\beta}{3}$, $a_3 = \dfrac{\gamma}{3}$ on aura

$$\beta = \text{const.}\,;\; \gamma = \text{const.},\; p_{11} = p_{22} = \pi_{11} = \pi_{22} = 0\,, \tag{5.5}$$

et les courbes $v'' - \dfrac{\gamma}{3}(v')^3 + \dfrac{\beta}{3} = 0$ ne sont planes que sur les surfaces tétraédrales cubiques.

Enfin si $a_0 = -\beta\,;\, a_3 = \dfrac{\gamma}{3}$ ou $a_0 = -\dfrac{\beta}{3}$, $a_3 = 0$, les surfaces correspondantes sont réglées.

6. Surfaces non réglées qui admettent un groupe G_2 de transformations projectives en elles-mêmes et sur lesquelles il y a une famille ∞^2 de courbes planes. F. Marcus s'est occupé récemment dans [8] des surfaces non-réglées qui admettent ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes.

Ces surfaces sont :

a. Les surfaces de coïncidence minima projectives. Elles sont determinées, comme on le sait, par

$$\begin{aligned}&\beta = \gamma = 1\,;\, \pi_{11} = p_{22} = \bar{h}\,;\, \pi_{22} = p_{22} = \bar{k}\,,\\ &L = -2\bar{h}\,;\, M = -2\bar{k}\,,\end{aligned} \tag{6.1}$$

où $\bar{h}$ et $\bar{k}$ sont des constantes.

Sous forme finie elles ont été complétement déterminées dans un Mémoire[1] maintes-fois oublié de Wilczynski [^{8_1}].

b. Les surfaces limites de Tzitzeica-Wilczynski ou encore les **surfaces de** Terracini de 3^e-espèce, données par

$$\beta = \frac{1}{\alpha(u-v)} ; \gamma = -\frac{\alpha}{u-v} ; L = M = -\frac{3}{2(u-v)^2} \quad (\alpha = \text{const.} \neq 0) ; \tag{6.2}$$

en ce qui concerne leur forme finie, consulter [^{8_2}].

c. Les surfaces de rotations projectives [8] detérminées par

$$\beta = \frac{\sigma}{u-v} ; \gamma = -\frac{\sigma}{u-v} ; L = M = -\frac{3}{|K|(u-v)^2} ;$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{|K|}} ; K(K+2) \neq 0 , \tag{6.3}$$

où K est une constante < 0 représentant la courbure de la première forme différentielle de Fubini [1, Tome II].

Pour plus de details nous renvoyons le lecteur à [8].

Nous avons vu que les courbes $v'' - \frac{1}{3}(v')^3 + \frac{1}{3} = 0$, et $v'' = -\beta + \gamma(v')^3$ sont planes sur les surfaces (6.1) avec $\overline{h} = \overline{k} = 0$. Dans ce cas on a

$$a_{1v} + a_{2u} = 0 ; a_1^2 - a_2 - a_{1u} = 0 ; a_2^2 + a_{2v} - a_1 = 0 . \tag{6.4}$$

Si $hk \neq 0$ les ∞^2 courbes intégrales de l'équation

$$(\alpha) \quad v'' = -1 + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + (v')^3, \; a_1 \, a_2 \neq 0$$

sont planes sur les surfaces (6.1) si les fonctions a_1 et a_2 satisfont au système

$$a_{1v} + a_{2u} = 0 ; a_1^2 + a_2 - a_{1u} = h ; a_2^2 + 2a_{2v} - a_1 = k . \tag{6.5}$$

On peut satisfaire au système (6.4) en prenant $a_1 = \pm 1$, $a_2 = \mp 1$, et l'équation (α) correspondante devient

$$v'' = -1 \pm 2v' \mp 2(v')^2 + (v')^3 , \tag{6.6}$$

si au contraire $hk \neq 0$, on peut satisfaire au (6.5) en prenant

$$h = k ; -a_2 = a_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4h}}{2} \tag{6.7}$$

ou

[1] Wilczynski ne pouvait pas savoir que les surfaces considérées dans son mémoire étaient minima-projectives.

$$h = k\,;\, a_2 = 1 + a_1\,;\, a_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{4h-3}}{2}\,. \tag{6.7}$$

Les (6.6) et celles qu'on déduit de l'équation (α) en substituant les valeurs de (6.7), peuvent être réduites par la substitution $v' = \dfrac{1}{t(v)}$ à des équations d'Abel.

Considérons maintenant les surfaces (6.2). Si $a_0 = -\beta$ et $a_3 = \gamma$ on peut supposer que la droite (3.10) est une droite canonique. Utilisant (3.9), (4.1) et (6.2),

$$a_1 = a_2 = -\frac{1+3\lambda}{u-v}\,. \tag{6.8}$$

Le cas $a_1 = a_2 = 0$ a été considéré dans le $5^{-\grave{e}me}$ paragraphe. Donc nous supposons $1 + 3\lambda \neq 0$.

De (2.10) et (6.2) l'on tire

$$\pi_{11} = \frac{9\alpha\lambda^2 + 3\lambda(\alpha-1) - 1}{\alpha(u-v)^2}\,;\, \pi_{22} = \frac{9\lambda^2 + 3\lambda(1-\alpha) - \alpha}{(u-v)^2}\,. \tag{6.9}$$

$\alpha \neq 0$, et il suit de (6.2) et (2.3) que

$$\pi_{11} = \frac{2+3\alpha}{4\alpha(u-v)^2}\,;\, \pi_{22} = \frac{3+2\alpha}{4(u-v)^2}\,. \tag{6.9'}$$

Par conséquent :

$$12\alpha\lambda^2 + 4\lambda(\alpha-1) = 2+\alpha\,;\, 12\lambda^2 + 4\lambda(1-\alpha) = 1+2\alpha, \tag{6.10}$$

équations quadratiques en λ et linéaires en α.

Les équations (6.10) sont identiquement satisfaites pour $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ car (6.2) sont, voir [8], les surfaces limites de Tzitzeica - Wilczynski.

Les autres racines de (6.10) sont :

$$\lambda = \frac{2+\alpha}{6\alpha} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1+2\alpha}{6}\,. \tag{6.11}$$

Elles coïncident pour $\alpha^2 = 1$. Si $\alpha = -1$ l'on a $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ ou $\lambda = -\dfrac{1}{6}$, et pour $\alpha = 1$ les valeurs de λ sont $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Nous obtenons donc ce qui suit :

Proposition VII. Sur la surface (6.2) de paramètre $\alpha = -1$ la droite principale de Fubini donnée par $\lambda = -\frac{1}{6}$ passe par un point fixe. Si $\alpha = 1$, c'est la droite canonique $\lambda = \frac{1}{2}$ qui passe par un point fixe. La première directrice et la droite canonique correspondante à $\lambda = \frac{1}{2}$ forment avec la normal projective de Fubini et la tangent canonique un faisceau harmonique. Faisons encore les observations suivantes: a) sur une surface (6.2) de paramètre $\alpha = \pm 1$ les plans canoniques forment un faisceau; b) les courbes $v'' = -\frac{\beta}{3} + v'\, 2a_1\, v' + 2a_2 (v')^2 + \frac{\gamma}{3} (v')^3$, ne peuvent pas être planes sur les surfaces (6.2).

Passons maintenant au surfaces (6.3). Supposons la droite (3.10) canonique.

Si $a_0 = -\beta$ et $a_3 = \gamma$ on obtient, si l'on tient compte de (6.8), les relations suivantes :

$$\pi_{11} = \pi_{22} = \frac{(1 + 3\lambda)^2 - (1 + 3\lambda)\,\sigma - (1 + 3\lambda)}{(u - v)^2}. \tag{6.12}$$

Il suit de même de (2.3) et (2.3') que

$$\pi_{11} = \pi_{22} = \frac{3\sigma^2 + 2\sigma}{4\,(u - v)^2}. \tag{6.13}$$

En égalant les expressions (6.12) et (6.13) on obtient la relation quadratique :

$$3\sigma^2 + 2\sigma = 4\,(1 + 3\,\lambda)\,(3\lambda - \sigma) \tag{6.14}$$

avec $1 + 3\lambda \neq 0$ (car ce cas a été déjà considéré) entre les valeurs de σ et λ qui déterminent une surface (6.3) et λ fixe une droite canonique.

Soit $3\lambda - \sigma \neq 0$; on trouve dans ce cas (α^*) $\sigma = 2\lambda$ ou $\sigma = -2 - 6\lambda$, et (δ) $\lambda = \frac{\sigma}{2}$ ou $\lambda = -\frac{2 + \sigma}{6}$. il apparaît comme conséquence de (α^*) et (δ) que pour $\sigma \neq -\frac{1}{2}$, il y a pour chaque valeur de σ une surface (6.3) dont deux droites canoniques passent chacun par un point fixe.

Réciproquement, pour chaque $\lambda \neq -\frac{1}{4}$ on obtient deux surfaces (6.3) telles que la droite canonique λ passe par un point fixe.

Il y a en fait deux exceptions :

1. $\sigma = -\frac{1}{2}$ et alors $\lambda = -\frac{1}{4}$,

2. $\sigma = -\frac{2}{3}$ alors $\lambda = -\frac{2}{9}$ est la seule droite canonique qui passe par un point fixe.

D'où :

Proposition VIII. (*A*) Les surfaces (6.3) détérminées par $\sigma = -\frac{1}{2}$ ou $\sigma = -\frac{2}{3}$ possèdent une famille de ∞^2 courbes intégrales planes dont les équations sont respectivement

$$v'' = \frac{1}{2(u - v)}(1 - v' - (v')^2 + (v')^3)$$

et

$$v'' = \frac{2}{3(u - v)}(1 - v' - (v')^2 + (v')^3).$$

(B) Les autres surfaces (6.3) possèdent chacune deux familles de ∞^2 courbes planes déterminées par les équations :

$$v'' = -\frac{\sigma}{u - v} - \frac{2 + 3\sigma}{u - v}(v' + (v')^2) - \frac{\sigma}{u - v}(v')^3$$

et

$$v'' = -\frac{\sigma}{u - v}[1 - v' - (v')^2 + (v')^3],$$

respectivement.

Nous montrons maintenant qu'il existe des surfaces (6.3) pour lesquelles les courbes

$$v'' = -\frac{\beta}{3} + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + \frac{\gamma}{3}(v')^3$$

sont planes.

En effet, on tire de (2.11) et (6.3)

$$\pi_{11} = \pi_{22} = -\frac{3 + 12\sigma}{16(u - v)^2}, \tag{6.15}$$

et de (2.3)

$$\pi_{11} = \pi_{22} = \frac{3\sigma^2 + 2\sigma}{4(u - v)^2}. \tag{6.16}$$

D'où

$$12\sigma^2 + 20\sigma + 3 = 0, \tag{6.17}$$

ce qui donne

$$\sigma = -\frac{3}{2} \quad st \quad \sigma = -\frac{1}{6}. \tag{6.18}$$

D'où :

Proposition IX. Les ∞^2 courbes intégrales de l'équation différentielle

$v'' = -\frac{\sigma}{3(u - v)} - \frac{1}{2(u - v)}(v' + (v')^2) - \frac{\sigma}{3(u - v)}(v')^3$ sont des courbes planes sur les surfaces (6.3) avec $\sigma = -\frac{3}{2}$ et $\sigma = -\frac{1}{6}$ respectivement.

Les droites canoniques $\left(x, x_{uv} - \frac{1}{4(u - v)} x_v + \frac{1}{4(u - v)} x_u\right)$ correspondantes, sont les arêtes de l'éminent géomètre Gabriel Marcus Green et elles ne passent pas par des points fixes.

En tenant compte de (α^*) l'on trouve que sur la surface (6.3) avec $o = -\frac{3}{2}$, la droite principale de Fubini $\lambda = -\frac{1}{12}$ et la droite canonique de Lane $\lambda = -\frac{3}{4}$ passent par des points fixes. Pour $\sigma = -\frac{1}{6}$ la droite $\lambda = -\frac{11}{36}$ et la droite principale de Fubini $\lambda = -\frac{1}{12}$ passent par des points fixes.

Les surfaces (6.1) et (6.2) ont été déterminées sous forme finie par Wilczynski [8₁], [15] retrouvées par F. Marcus sous une forme plus simple dans [8₂]. F. Marcus a aussi montré que les surfaces

$$x_1 = a^2 u^3 + 3u^2 v - 3uv^2 - \frac{1}{2}v^3;\ x_2 = au^2 - \frac{1}{2} v^2;\ x_3 = au - \frac{1}{a} v \tag{6.19}$$

obtenues par 0. Borůvka [9] sont précisement les surfaces de Tzitzeica-Wilczynski, ou les surfaces de troisième espèce de Terracini.

Mais 0. Borůvka [9] a obtenue sous forme finie trois autres classes de surfaces qui admettent ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes qui sont :

$$x^1 = (u - v)^{-A} \; ; \; x^2 = (u + v)(u - v)^{-A} \; ;$$
$$x^3 = a\,(u - v)^B - (a - 2)(u + v)^2 (u - v)^{-A} \tag{6.20}$$

ou

$$B = \frac{a-2}{a} \; ; \; A = -\frac{2+a}{a} \; ; \; a \neq 0, \pm 1, \pm 2,$$

$$x^1 = \frac{1}{(u - v)^2} \; ; \; x^2 = \frac{u + v}{(u - v)^2} \; ; \; x^3 = \log (u - v) - \left(\frac{u + v}{u - v}\right)^2 , \tag{6.21}$$

$$x^1 = \log (u - v) \; ; \; x^2 = u + v \; ; \; x^3 = (u - v)^2 - 2\,(u + v)^2, \tag{6.22}$$

où u,v sont des paramètres asymptotiques.

Nous voulons montrer que ces trois classes de surfaces représentent sous forme finie les surfaces (6.3).

En effet, on tire de (6.20)

$$\beta = -\frac{1}{\alpha\,(u - v)} \; ; \; \gamma = \frac{1}{\alpha\,(u - v)} \; ; \; \theta_u = -\frac{3 + 2\alpha}{\alpha\,(u - v)} \; ; \; \theta_v = \frac{3 + 2\alpha}{\alpha\,(u - v)} \tag{6.23}$$

où $\alpha \neq 0, \; \pm 1, \pm 2$.

Si l'on pose

$$\sigma = -\frac{1}{\alpha}, \tag{6.24}$$

on obtient toutes les surfaces (6.3) sauf celles qui correspondent à $\sigma = \pm \dfrac{1}{2}$ et $\sigma = \pm 1$.

On obtient de (6.21) les surfaces

$$\beta = -\frac{1}{2\,(u - v)} = -\gamma \; ; \; \theta_u = -\frac{7}{2\,(u - v)} \; ; \; \theta_v = \frac{7}{2\,(u - v)}, \tag{6.25}$$

et enfin on tire de (6.22)

$$\beta = \frac{1}{2\,(u - v)} \; ; \; \gamma = -\frac{1}{2\,(u - v)} \; ; \; \theta_u = -\frac{1}{2\,(u - v)} = -\theta_v . \tag{6.26}$$

Observons que pour les surfaces (6.3) $K < 0$ et $K + 2 \neq 0$. Donc σ ne peut pas être égal à ± 1.

D'où :

Proposition X. Les équations (6.20), (6.21), (6.22) représentent sous forme finie les surfaces (6.3). Nous avons donc sous forme finie toutes les surfaces qui admettent un groupe G_2 de transformations projectives en elles-mêmes.

II. Deuxième Partie

7. Surfaces non-réglées en correspondance asymptotique qui conserve une famille ∞^2 de courbes planes. R. Rottenberg s'est occupé dans [10] des correspondances entre deux surfaces qui conservent ∞^2 de courbes planes. Il a obtenu des résultats intéressants sur les correspondances conservant une famille à deux paramètres de courbes planes qui forment une congruence planaire, c'est-à-dire une famille ∞^2 de courbes planes, qui dans une application d'un plan sur une surface, correspondent aux droites de ce plan. Il a appellé une telle surface, surface P (planaire) et il a montré que les surfaces tétraèdrales cubiques, la surface de Steiner sont des surfaces P. Il a montré aussi que les courbes

$$\mathrm{v}'' - \gamma (\mathrm{v}')^3 + \beta = 0 \quad (\mathrm{v} = \mathrm{v}(u)) \tag{7.1}$$

sont planes sur les deux surfaces tétraèdrales cubique S et $\bar{S}$ qu'on détermine avec

$$\bar{\beta} = 3\beta = \text{const.}\,; \bar{\gamma} = 3\gamma = \text{const.}\,, \bar{p}_{11} = \bar{p}_{22} = p_{11} = p_{22} = 0, \tag{7.2}$$

$\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{22}$ correspondant à la surface $\bar{S}$.

F. Marcus a montré dans [11] que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une correspondance entre les courbes $\mathrm{v} = \mathrm{v}(u)$ d'une surface S dont les plans osculateurs passent par la droite $(x, x_{u\mathrm{v}})$ et les droites d'un plan, sont

$$\pi_{11\mathrm{v}} = \pi_{22u}\,. \tag{7.3}$$

Si $\pi_{11} = \pi_{22} = 0$ la droite $(x, x_{u\mathrm{v}})$ passe par un point fixe. Si l'on change les paramètres de façon que $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$, ce qui est faisable, la droite $(x, x_{u\mathrm{v}})$ engendre alors une congruence W. En coordonées de Wilczynski, les courbes dont les plans osculateurs passent par la droite $(x, x_{u\mathrm{v}})$ ou par la droite $(x, x_{u\mathrm{v}} - l_1 x_\mathrm{v} - l_2 x_u)$ sont respectivement

$$\mathrm{v}'' - \gamma (\mathrm{v}')^3 + \beta = 0\,, \tag{7.4}$$

et

$$\mathrm{v}'' - \gamma (\mathrm{v}')^3 - 2l_2 (\mathrm{v}')^2 + 2l_1 \mathrm{v}' + \beta = 0\,. \tag{7.5}$$

On voit toute de suite que sur une surface tétraèdrale cubique, la droite $(x, x_{u\mathrm{v}})$ passe par un point fixe et que par conséquent les courbes (7.1) sont planes.

Dans [12] on démontre le résultat suivant : La condition nécessaire et suffisante pour que dans une correspondance asymptotique entre deux surfaces non réglée qui n'est pas une applicabilité projective, les ∞^2 courbes intégrales de l'équation (7.4) soient planes sur les deux surfaces est que celles-ci soient des surfaces tétraèdrales cubiques.

Dans le cinquième paragraphe de ce mémoire, nous avons montré que sur les surfaces de Čech les ∞^2 courbes intégrales de l'équation $v'' - \gamma(v')^3 + \beta = 0$, sont des courbes planes. Nous allons maintenant voir s'il existent des correspondances asymptotiques propres entre deux surfaces non réglées telles que les courbes intégrales C de l'équation

$$v'' = a_0 + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + a_3 (v')^3 \tag{7.6}$$

$a_i = a_i(u, v)$ soient planes sur les deux surfaces.

Rapportons les deux surfaces aux paramètres asymptotiques et soient $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{p}_{11}$, $\bar{p}_{22}$ les coefficients du systéme (2.1) qui détermine $\bar{S}$. Les courbes C étant planes sur S et $\bar{S}$ on aura une équation similaire à (2.5) pour la surface $\bar{S}$ que nous notons $\overline{(2.5)}$ et des conditions similaires à (I) q'on note $(\bar{I})$ en prenant $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\pi}_{11}, \bar{\pi}_{22}$ au lieu de $\beta, \gamma, \pi_{11}, \pi_{22}$. On déduit de (I) et $(\bar{I})$:

$$\begin{aligned}
&a_0 = -\frac{\beta + \bar{\beta}}{4}\,;\ a_3 = \frac{\gamma + \bar{\gamma}}{4}\,;\\
&a_1 = \frac{(\log(\bar{\beta} - \beta))_u}{4}\,;\ a_2 = -\frac{(\log(\bar{\gamma} - \gamma))_v}{4}\\
&a_{1v} + a_{2u} = 0\,;\ \frac{\bar{\beta}}{\beta} = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\,;\\
&2(\bar{\pi}_{11} - \pi_{11}) = (\beta - \bar{\beta})(\log(\bar{\gamma} - \gamma))_v + (\beta - \bar{\beta})_v\\
&2(\bar{\pi}_{11} - \pi_{22}) = (\gamma - \bar{\gamma})(\log(\bar{\beta} - \beta))_u + (\gamma - \bar{\gamma})_u .
\end{aligned} \tag{II}$$

Par conséquent seuls les cas suivants peuvent se présenter :

$$a_0 = -\beta = -\frac{\bar{\beta}}{3}\,;\ a_3 = \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{3}$$

ou

$$a_0 = -\frac{\beta}{3} = -\bar{\beta}\,;\ a_3 = \frac{\gamma}{3} = \bar{\gamma}\,. \tag{7.7}$$

D'où l'on tire respectivement :

$$\frac{\bar{\beta}}{\beta} = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = 3 \text{ ou } \frac{\bar{\beta}}{\beta} = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = \frac{1}{3}\,. \tag{7.8}$$

Dans le premier cas on a :

$$a_0 = -\beta;\ a_1 = \frac{1}{4}(\log\beta)_u\,;\ a_2 = -\frac{1}{4}(\log\gamma)_v\,;\ a_3 = \gamma \tag{7.9}$$

et dans le deuxieme cas :

$$a_0 = -\frac{\beta}{3}\,;\ a_1 = \frac{1}{4}(\log\beta)_u\,;\ a_2 = -\frac{1}{4}(\log\gamma)_v\,;\ a_3 = \frac{\gamma}{3} \tag{7.10}$$

et de $a_{1v} + a_{2u} = 0$ il résulte que dans les deux cas on a

$$\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v} = 0\,. \tag{7.11}$$

La considération de (I) et (II) dans le cas (6.8) fournit

$$\begin{aligned} 2\pi_{11} &= -\frac{1}{2}(\log\beta)_{uu} + \frac{1}{8}(\log\beta)_u^{\,2} - \frac{\beta\,(\log\gamma)_v}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}(\log\bar\beta)_{uu} + \frac{1}{8}(\log\bar\beta)_u^{\,2} - \frac{\beta}{6}(\log\bar\gamma)_u\,; \\ 2\pi_{22} &= -\frac{1}{2}(\log\gamma)_{vv} + \frac{1}{8}(\log\gamma)_v^{\,2} - \frac{\gamma}{2}(\log\beta)_u = \\ &= -\frac{1}{2}(\log\bar\gamma)_{vv} + \frac{1}{8}(\log\bar\gamma)_v - \frac{\bar\gamma}{6}(\log\bar\beta)_u \end{aligned} \tag{7.12}$$

et

$$\begin{aligned} 2\bar\pi_{11} &= -\frac{1}{2}(\log\beta)_{uu} + \frac{1}{8}(\log\beta)_u^{\,2} - \frac{5}{2}\beta\,(\log\gamma)_v - 2\beta_v = \\ &= -\frac{1}{2}(\log\bar\beta)_{uu} + \frac{1}{8}(\log\bar\beta)_u^{\,2} - \frac{5}{6}\bar\beta\,(\log\bar\gamma)_v - \frac{2}{3}\bar\beta_v\,, \\ 2\bar\pi_{22} &= -\frac{1}{2}(\log\gamma)_{vv} + \frac{1}{8}(\log\gamma)_v^{\,2} - \frac{5\gamma}{2}(\log\beta)_u - 2\gamma_u = \\ &= -\frac{1}{2}(\log\bar\gamma)_{vv} + \frac{1}{8}(\log\bar\gamma)_v^{\,2} - \frac{5}{6}\bar\gamma\,(\log\bar\beta)_u - \frac{2}{3}\bar\gamma_u\,. \end{aligned} \tag{7.12'}$$

Dans le cas (7.10), on obtient $2\pi_{11}$ et $2\pi_{22}$ en intervertissant β, γ et $\bar\beta$, $\bar\gamma$ dans (7.12′) et de même $2\bar\pi_{11}$ et $2\bar\pi_{22}$ dans (7.12).

Nous avons donc :

Proposition XI$_1$. Il n'existe que deux correspondances asymptotiques entre deux surfaces non réglées qui conservent une même famille ∞^2 de courbes planes sur les deux surfaces.

Proposition XI$_2$. Seules les surfaces isothermo-asymptotiques de Fubini peuvent admettre de telles correspondances.

On déduit de (3.9), (4.2) et (7.9) que

$$\lambda = -\frac{1}{4}\,. \tag{7.13}$$

Donc la droite $(x, x_{uv} + a_1 x_v - a_2 x_u)$ est l'arête de Green [1,2] et nous avons :

Proposition XII. Seule une surface S non réglée, dont l'arête de Green passe par un point fixe, peut être mise en correspondance asymptotique avec une autre surface $\bar{S}$ de façon que le ∞^2 courbes intégrales de l'équation différentielle

$$v'' = -\beta + 2a_1 v' + 2a_2 (v')^2 + \gamma(v')^3 \quad (a_1 a_2 \neq 0)$$

soient planes sur les deux surfaces et que la correspondance ne soit pas une déformation projective.

Notons que l'arête de Green de $\bar{S}$ ne passe pas par un point fixe. Donc le système de courbes sur $\bar{S}$ ne forme pas un système axiale, car la correspondance n'est pas une déformation projective [2].

Nous avons vu que l'arête de Green de la surface (6.3) avec $\sigma = -\dfrac{1}{2}$ passe par un point fixe. Il résulte que la surface $\bar{S}$ correspondante est déterminée par

$$\bar{\beta} = -\frac{3}{2(u-v)}\,;\ \bar{\gamma} = \frac{3}{2(u-v)}\,;\ L - M = -\frac{27}{8(u-v)^2} \qquad (7.14)$$

et on vérifie que les conditions (7.12) et (7.12′) sont compatibles.

Nous voulons montrer que la surface (6.3) avec $\sigma = -\dfrac{1}{2}$ est la seule parmi les surfaces qui admettent un group G_1 de translation homographique (pour la notion de translation homographique voir [12₁]) dont l'arête passe par un point fixe. Posons par exemple $\gamma = -\beta$ avec $\beta_v = \gamma_u$. Donc $\beta = \phi(u - v) = -\gamma$, ou encore $\beta + \gamma = 0$.

On tire de (2.2) $L_v = 3\phi\phi' = M_u$, et il en résulte par intégration

$$L = -\frac{3\phi^2}{2} + U(u)\,;\ M = -\frac{3\phi^2}{2} + V(v). \qquad (7.15)$$

Le groupe G_1 est aussi (voir [12₁]) un G_1 de transformations projectives de ces surfaces en elles-mêmes. Par conséquent L et M doivent être des fonctions de l'argement $\tau_1 = u - v$. Donc $U(u)$ et $V(v)$ sont des constantes.

Il résulte de la troisième conditions d'intégrabilité (2.2) qu'elles sont égales.

Par conséquent nous écrivons

$$L = M = -\frac{3\phi^2 + 12\,C}{2} \qquad (7.16)$$

et l'on tire de (2.3) et (2.3′)

$$2\pi_{11} = \frac{3\phi^2 + 12C - 2\phi'}{2} = 2\pi_{22}\,. \tag{7.17}$$

Il résulte de (7.12) et (7.17) que

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{5}{4}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - 3\phi' + 3\phi^2 + 12\,C = 0\,. \tag{7.18}$$

Soit $\bar{S}$ la surface en correspondance asymptotique telle que $\bar{\beta}=3\beta$ et $\bar{\gamma}=3\gamma$. Nous avons alors

$$\bar{L} = \bar{M} = -\frac{27\,\phi^2 + 12\,\bar{C}}{2} \tag{7.19}$$

et

$$2\bar{\pi}_{11} = 2\bar{\pi}_{22} = \frac{27\phi^2 - 6\phi' + 12\bar{C}}{2}\,.$$

On tire de (7.12′)

$$2\bar{\pi}_{11} = 2\bar{\pi}_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\phi''}{\phi} + \frac{5}{8}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + \frac{9}{2}\phi'\,.$$

Par conséquent

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{5}{4}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - 15\phi' + 27\phi^2 + 12\bar{C} = 0\,, \tag{7.20}$$

et en tenant compte de (7.18) il s'ensuit que

$$\phi' - 2\phi^2 = \bar{C} - C\,. \tag{7.21}$$

Si $\bar{C} = C = 0$, c'est-à-dire si les surfaces S et $\bar{S}$ admettent aussi le sous-groupe de collinéations engendré par la t.i. $X = u\dfrac{\partial}{\partial u} + \mathrm{v}\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{v}}$, on aura alors de (7.21) la solution

$$\phi = -\frac{1}{2(u-\mathrm{v})}\,,\ L = M = -\frac{3}{8\,(u-\mathrm{v})^2} \tag{7.22}$$

qui vérifie (7.18) et (7.20).

Il suit de (7.14)

$$\sigma = -\frac{3}{2}$$

et d'après (δ) on a :

$$\lambda = -\frac{3}{4}\ \text{ et }\ \lambda = -\frac{1}{12}\,. \tag{7.23}$$

Sur la surface $\overline{S}$ donnée par (7.14) la deuxième droite principale de Fubini et la droite canonique $\lambda = -\frac{3}{4}$ passent donc chacune par des points fixes.

Comme nous avons déjà vu dans le sixième paragraphe, la surface (7.14) jouit également de la propriété suivante :

Les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$v'' = \frac{1}{2(u-v)} - \frac{1}{2(u-v)}(v' + (v')^2) + \frac{1}{2(u-v)}(v')^3$$

sont planes.

Supposons que $\overline{C} - C \neq 0$. On vérifie tout de suite que la solution $\phi = -\frac{1}{2(u-v)}$ ne peut pas être la solution de (7.18) et (7.20). Posons $\overline{C} - C = 2\alpha^2$. En intégrant (7.21) on obtient la solution $\phi = \alpha \, tg \, 2\alpha\tau$. On prouve que cette solution peut satisfaire à l'une des équations (7.18) ou (7.20) si et seulement si $\alpha = 0$. Donc $\overline{C} = C$.

Soit maintenant $\overline{C} - C = -2\alpha_1^2$. En intégrant l'équation (7.21) on obtient la solution

$$\phi = -\alpha_1 \coth 2\alpha_1 \tau_1 \; (\tau_1 = u - v)$$

qui ne vérifie les équations (7.18) et (7.20) que si $\alpha_1 = 0$, c'est-à-dire si $\overline{C} - C = 0$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Nous avons vu que (7.21) donne sous forme finie la surface (6.3) avec $\sigma = -\frac{1}{2}$.

8. Remarques Complémentaires. Nos résultats montrent qu'il existe une certaine relation entre le problème de la détermination des surfaces sur lesquelles les ∞^2, courbes intégrales de l'équation différentielle $v'' = a_0 + 2a_1 v'' + 2a_2 (v')^2 + a_0 (v')^3$ sont planes et celui de la détermination des surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe; entre autre la détermination des surfaces dont seule la droite canonique de Green, passe par un point fixe. On sait que les surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe sont des surfaces isothermo-asymptotique de Fubini. E.Čech (voir le paragraphe 28, *C*) de [1]) a déterminé toutes les surfaces d'ont l'axe de Čech passe par un point fixe. Après la rédaction du présent travail nous avons appris par la bibliographie [2] que J. Kaucky [13] s'est également occupé du problème de la détermination des surfaces dont une droite canonique qui n'est ni la normale projective de Fubini ni l'axe de Čech, passe par un point fixe.

Suivant une suggestion de Čech, J. Kaucky a réduit le problème à l'intégration d'un systeme de deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre en β, dépendant évidemment de λ. Par des calculs assez laborieux, J. Kaucky a montré que si l'on exclut le cas connu de la directrice de Wilczynski ou de la normale projective de Fubini, les solutions du système sont de deux espèces; pour la première on a $\beta_u^3 = \beta_v^3$, pour la seconde

$$\beta_u^3 \neq \beta_v^3 . \tag{8.1}$$

Pour les solutions de première espèce on peut supposer $\beta_u = \beta_v$ et le système se réduit à une seule équation différentielle qui (corrigée) est

$$2k\beta^2 \beta' + (k^2 - 1)(\beta')^2 + 2(k+1)\beta\beta'' - 3\beta^4 - a\beta^2 = 0, \tag{8.2}$$

$a = \text{const.}$, et dans le cas $\beta_u^3 \neq \beta_v^3$, $k \neq 0$, le système se réduit à :

$$\begin{aligned} &\beta_{uu} = c\beta\beta_v \,;\, \beta_{vv} = c\beta\beta_u \,, \\ &(k^2-1)[\beta\beta_{uv} - \beta_u \beta_v] + [(k+1) + kc - 3]\beta^4 = 0, \end{aligned} \tag{8.3}$$

où c est une racine de l'équation

$$(k+1)(k+3) + 4kc - 12 = 0 , \tag{8.4}$$

avec $k + 1 \neq 0$, $k + 3 \neq 0$ et

$$k = -3(1 + 2\lambda) . \tag{8.5}$$

J. Kaucky a intégré le système (8.3) dans les deux cas $k^2 - 1 = 0$ ou $\neq 0$. Dans [14] F. Marcus démontre que sous l'hypothèse de Kaucky $k + 1 \neq 0$ et $k + 3 \neq 0$, c'est-à-dire en excluant le cas de l'axe de Čech et la normale de Fubini, on doit exclure les solutions du deuxième espèce (*c.a.d.* on ne peut avoir $\beta_u^3 \neq \beta_v^3$).

On montre de plus dans [14] que parmi les surfaces qui satisfont à (8.2) et aux systèmes (8.3) et (8.4) il y en a une seule dont l'arête de Green passe par un point fixe.

Cette surface est déterminée par

$$\beta = -\frac{1}{2(u-v)} = -\gamma \,;\, L = M = -\frac{3}{8(u-v)^2} . \tag{8.6}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] FUBINI, G. and ČECH, E. : Geometria proiettiva differenziale, Bologna, N. Zanichelli (1926).

[2] IBIDEM : Introduction á la géométrie projective différentielle des surfaces, Gauthier-Villars (1931).

[3] BOMPIANI, E. : Rappresentazioni geodetico-proiettive fra due superficie, Ann. di Mat. pura (4) III (1926), 171-178.

[4] IBIDEM : I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie, Appendice in Fubini-Čech [1].

[5] ČECH, E. : Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces. Deux Notes, Rendiconti dei Lincei (6) **8** (1928), 484-486 et 552-554.

[6] MAYER, O. : Sur les similitude projectives, Analele Stiintifice ale Universitatii din Iaşi X (1964).

[7] BOMPIANI, E. : Sistemi coniugati e sistemi assiali etc. Boll. Unione Mat. Italiana (3) (1924), 10-16.

[8] MARCUS, F. : Sur les surfaces qui admettent ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes. Rendiconti Accad. Nazionale dei Lincei **XL**, Serie IV, XXIV-XXV (1974).

[8_1] WILCZYNSKI, E.Y. : A certain class of self projective surfaces, Transactions of the American Mathematical Society **14** (1913), 421-443.

[8_2] MARCUS, F. : Again on the surfaces which allow ∞^2 projective transformations into themselves, en cours de publication, Ann. Univ. de Jasy.

[9] BORŮVKA, O. : Sur certain types de surfaces qui sont projectivement applicables sur elles mêmes. Publication de la Fac. des Sci. Univ. Masaryk (1924).

[10] ROTTENBERG, R. : Surfaces planaires et congruences P., Rendiconti dei Lincei **42** (1967), 28-34, 195-201.

[11] MARCUS, F. : Sur une représentation planes des surfaces, Annales Sci. de l'Université de Jasy, **30** (1944-47), 1-7.

[12] MARCUS, F. and ROTTENBERG, R. : Les surfaces cubiques á congruences planaires. Rendiconti dei Lincei, Serie 8, LIV (1973), 57-67.

[13] KAUCKY, J. : Étude des surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe, Publication No. 109 de la Faculté des Sciences de l'Univ. Masaryk (1929).

[13_1] KAUCKY, J. : Sur les surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe. Rendiconti dei Lincei (6), 9 (1929), 147-149.

[12_1] MARCUS, F. : Cateva contributu la studiul deformarilor infinitezimale aie unei suprafete in ea insasi. Studii şi certetari ştiintifice, Jasy, Matematica, **12** (1961), 69-94.

[14] MARCUS, F. : On the results of J. Kaucky concerning the problem of determination of surfaces for which a canonical line passes through a fixed point, en cours de publication Israel Math. Journal.

[15] WILCZYNSKI, T.J. : Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven, Mathematische Annalen **76** (1915), 122-160.

ÖZET

Bu çalışmanın birinci kısmında bir eğri üzerinde alınan bir $v'' = F(u, v, v')$ diferansiyel denkleminin integral eğrileri incelenerek bunların düzlemsel olmaları şartları elde edilmektedir.

İkinci kısımda ise regle olmayan iki yüzey arasında bir deformasyondan farklı olan ve iki parametreli bir düzlemsel eğri ailesini koruyan bir asimptotik tekabülün varlığı araştırılmaktadır.