İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 43 (1978), 13 - 27

SUR UNE MÉTHODE D'APPLICATION ISOMÉTRIQUE DES SURFACES DE E_3 DANS E_4

PAUL VINCENSINI

On indique un moyen d'appliquer isométriquement, de façon explicite, les surfaces de E_3 dans l'espace E_4 a quatre dimensions. On envisage plus specialement le cas où les ds^2 des surfaces considérées sont ramenés á des formes canoniques unifonctionnelles, et, dans les cas du ds^2 le plus général, on donne une condition nécessaire et suffisante à satisfaire par ses coefficients pour que l'application isométrique soit explicitement possible.

1. Introduction. Dans un article publié dans le volume dédié par l'Académie Roumaine à la mémoire de G. Tzitzeica et D. Pompeiu [1], nous avons montré comment la déformation continue des surfaces tétraédrales de l'espace à trois dimensions réalisée par G. Tzitzeica [2] peut, moyennant l'application d'un procédé de représentation des couples ordonnés de points du plan euclidien E_2 par des points de l'espace euclidien E_4, dont nous avons exposé le principe dans un mémoire des Rendiconti di Matematica [3], être prolongée dans ce dernier espace E_4.

La possibilité de ce prolongement isométrique *hors de l'espace* E_3 à trois dimensions repose sur la considération d'une forme canonique particulière sous laquelle J. Weingarten [4], dans sa méthode de recherche des surfaces de l'espace euclidien E_3 isométriques à une surface *donnée* de cet espace, a mis l'élément linéaire de la surface la plus générale.

Nous nous proposons de montrer ici, d'abord comment, à la même considération de la forme canonique de Weingarten peut être rattachée une méthode de déformation isométrique continue dans E_4 *de la surface de* E_3 *la plus générale*; puis ensuite d'étudier quel est, relativement à la possibilité de déformation dans E_4 d'une surface donnée (ou dont un connait seulement le ds^2), de E_3, l'effet de la substitution de diverses autres formes canoniques du ds^2 à la forme canonique de Weingarten.

2. La forme de Weingarten du ds^2 d'une surface de E_3. La mise d'un ds^2 sous cette forme suppose *connue* une surface Θ_1 admettant ce ds^2. Si (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées rectangulaires du point courant de Θ_1, si l'on pose (voir G. Darboux, **Surfaces**, IV, 309)

$$u = x_1 , \ v = y_1 + i z_1 , \ 2w = y_1 - i z_1 ,$$

et si l'on regarde w comme une fonction, $f(u, v)$, de u et de v, la forme en question est

$$ds^2 = du^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial u} du\, dv + 2 \frac{\partial f}{\partial v} dv . \tag{1}$$

Si la surface Θ_1 est réelle, la relation entre u, v, w renferme des imaginaires, mais il est possible [3], moyennant une substitution linéaire orthogonale sur x_1 , y_1 , z_1, de se ramener au cas où w est une fonction réelle de u, v. Dans toute la suite aucune distinction ne sera faite entre le réel et l'imaginaire. Toutes les fonctions envisagées seront supposées analytiques.

3. La représentation des transformations ponctuelles de E_2 par des surfaces de E_4. Il convient, avant d'aller plus loin, de rappeler quelques résultats relatifs à la représentation à laquelle il a été fait allusion dans l'Introduction, des couples ordonnés de points de E_2 par des points de E_4.

Comme en [3], [5] nous désignerons par $[A(\xi_1 , \xi_2), A'(\eta_1, \eta_2)]$, un couple ordonné quelconque de points (A, A') du plan $E_2 (Ox_1 x_2)$, les coordonnées $\xi_1 , \xi_2 , \eta_1 , \eta_2$ étant rectangulaires, et d'ailleurs, comme on l'a dit, réelles ou imaginaires.

Le point M de $E_4 (Ox_1 x_2 x_3 x_4)$, image du couple (A, A') de E_2, a alors pour coordonnées

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\xi_1 + \xi_2 - \eta_1)/2, \\ x_2 &= (\xi_1 - \xi_2 - \eta_1)/2i, \\ x_3 &= (\xi_2 - \xi_1 - \eta_2)/2, \\ x_4 &= (\xi_2 + \xi_1 - \eta_2)/2i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Et si les équations

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1 (\xi_1 , \xi_2) , \\ \eta_2 &= \eta_2 (\xi_1 , \xi_2) , \end{aligned} \tag{3}$$

définissent une transformation ponctuelle quelconque du plan E_2 les équations (2), où η_1 , η_2 ont les expressions (3), définissent, dans E_4, une surface S, dite *l'image de la transformation* (3).

Rappelons aussi que si l'on considère, dans E_3 le point B de coordonnées $(\eta_1 , \eta_2 , 1)$, c'est-à-dire le point du plan parallèle à $(Ox\ x_1 x_2)$, d'ordonnée $+ 1$, se projetant orthogonalement en A' sur $(Ox_1 x_2)$, on peut regarder le point M défini dans E par les équations (2) comme une image ponctuelle, dans E_4, de la droite $D (A, A')$ de E_3. Et, à cet égard, les surfaces de E_4 apparaissent comme les images des congruences rectilignes (Γ) de E_3.

Ce dernier point de vue a été développé en [5]; nous signalerons seulement ici qu'il permet de donner une signification géométrique remarquable au ds^2 de la surface S. Ce ds^2 admet comme on le voit sans peine l'expression

$$ds^2 = d\xi_1\, d\eta_2 - d\xi_2\, d\eta_1\,, \tag{4}$$

ce qui, si Ω est le *moment* de deux droites infiniment voisines (D, D') de (Γ), peut être écrit sous la forme

$$ds^2 = -\,\Omega\,\lambda^2 \tag{5}$$

(où λ est la longueur de la portion de D comprise entre les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = 1$ de E_3), forme dont, dans divers travaux antérieurs nous avons mis en évidence l'interêt géométrique.

4. Déformation isométrique d'une surface **quelconque de** E_3 **dans** E_4. S étant une surface quelconque, *supposée donnée,* de E_3, supposons que, par le procédé indiqué au No. 2, son ds^2 ait été mis sous la forme canonique de Weingarten

$$ds^2 = d\xi_1{}^2 + 2\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\, d\xi_1\, d\xi_2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\, d\xi_2{}^2, \tag{1}$$

où f est une fonction connue de ξ_1 et ξ_2.

Cherchons les transformations ponctuelles $A(\xi_1, \xi_2) \to A'(\eta_1, \eta_2)$ du plan E_2, définies par des équations de la forme (3), dont les images dans E_4 sont des surfaces admettant le ds^2 (1).

La forme (4) du ds^2 de la surface image de la transformation générale (3), développée, s'écrit

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1}\, d\xi_1{}^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1}\right) d\xi_1\, d\xi_2 - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2}\, d\xi_2{}^2 \tag{4'}$$

et les fonctions $\eta_1(\xi_1, \xi_2)$, $\eta_2(\xi_1, \xi_2)$ définissant les transformations ponctuelles cherchées $(A \to A')$ vérifient le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = 1, \\ &\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = -\,2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \\ &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = 2\,\frac{\partial f}{\partial \xi_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Le système (6), aux deux fonctions inconnues $\eta_1(\xi_1, \xi_2)$, $\eta_2(\xi_1, \xi_2)$ est résoluble *quelle que soit* la fonction f (donc quelle que soit la surface S donnée dans E_3), et sa solution est, comme on le constate sans peine,

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= -2f(\xi_1, \xi_2) + c\,\xi_1, \\ \eta_2 &= \xi_1 + c\,\xi_2,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où c est une constante arbitraire.

Si alors on substitue les valeurs (7) de η_1, η_2 dans les équations (2) du No. 3, on obtient *explicitement* une surface Σ de E_4, continûment déformable dans E_4 par variation de la constante $k = 1 - c$, et applicable sur la surface donnée S de E_3.

Les équations de Σ sont :

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}[k\xi_1 + \xi_2 + 2f(\xi_1, \xi_2)], \\ x_2 &= \frac{1}{2i}[k\xi_1 - \xi_2 + 2f(\xi_1, \xi_2)], \\ x_3 &= \frac{1}{2}[k\xi_2 - 2\,\xi_1], \\ x_4 &= \frac{1}{2i}k\xi_2.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pour $k = 0$ on a la surface particulière S_0 de E_3 d'équation

$$S_0 \left\{\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}[\xi_2 + 2f(\xi_1, \xi_2)], \\ x_2 &= \frac{1}{2i}[-\xi_2 + 2f(\xi_1, \xi_2)], \\ x_3 &= -\xi_1,\end{aligned}\right.$$

qui n'est autre, à une symétrie près, que la surface S initialement donnée dans E_3, comme le montrent du début du No. 2 où (x_1, y_1, z_1) sont remplacés par (x_1, x_2, x_3) et (u, v, w) par $(\xi_1, \xi_2, f(\xi_1, \xi_2))$.

Le paramêtre k variant continûment à partir de zéro, la surface S_0 quitte l'espace à trois dimensions E_3 et pénètre dans E_4 en s'y déformant isométriquement, les trajectoires des points déformés homologues dans l'isométrie étant, comme on le voit sans peine, des droites isotropes de E_4 parallèles au plan totalement isotrope

$$\pi \left\{\begin{aligned}x_1 - i\,x_2 &= 0, \\ x_3 - i\,x_4 &= 0.\end{aligned}\right.$$

5. Autres formes canoniques du ds^2. Forme isothermique. La méthode développée au No. 4 peut être appliquée quelle que soit la forme canonique envisagée pour le ds^2 de la surface plus générale de E_3. Mais, contrairement à ce qui a lieu avec la forme de Weingarten, qui permet comme on l'a vu de déformer dans E_4 *la surface la plus générale de* E_3, on ne pourra alors généralement déformer dans E_4 *que des types particuliers de surfaces de* E_3 d'ailleurs variables avec la forme canonique envisagée, tant par la forme des surfaces constituantes que par l'ampleur de leur champ de déformabilité dans E_4.

Nous nous bornerons, dans ce qui suit, à la considération de quelques types canoniques classiques de *ds^2 unifonctionnels*, c'est-à-dire ne laissant figurer, dans les coefficients du ds^2, qu'une seule fonction arbitraire (f) des variables coordonnées et ses dérivées.

En écrivant que le ds^2 canonique considéré a la forme (4') nous obtiendrons, par identification, un système de trois équations aux dérivées partielles renfermant, d'une part les deux fonctions inconnues $\eta_1(\xi_1, \xi_2)$, $\eta_2(\xi_1, \xi_2)$ définissant la transformation ponctuelle (3) du plan E_2 dont l'image sera une surface de E_4 admettant le ds^2 envisagé, et d'autre part la fonction $f(\xi_1, \xi_2)$ figurant dans les coefficients de ce même ds^2.

Or, pour $f(\xi_1, \xi_2)$ quelconque, le système des trois équations aux dérivées partielles ci-dessus, aux fonctions inconnues η_1, η_2 sera généralement impossible. Il ne sera intégrable que pour des expressions particulières de f, donc pour certaines surfaces particulières de E_3, ce qui ajoute encore à l'intérêt que présente la forme canonique de Weingarten dans le problème de la déformation des surfaces, qui, elle, conduit à un système intégrable *quelle que soit* la forme de la fonction f qui y figure.

Envisageons, par exemple, la forme canonique (isothermique)

$$ds^2 = f(\xi_1, \xi_2)(d\xi_1^2 + d\xi_2^2) \tag{9}$$

du ds^2 d'une surface quelconque S de E_3, et cherchons, la surface étant connue on définie *in abstracto* par son ds^2, à déformer S dans E_4 par la méthode appliquée, au No.4, au ds^2 de Weingarten.

Le système (6) est ici à remplacer par

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = f(\xi_1, \xi_2), \\ &\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = -f(\xi_1, \xi_2), \\ &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

La 3 ème équation (10) donne pour η_1 et η_2 les formes

$$\eta_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \quad \eta_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1},$$

et les deux premières montrent que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2^2} = f(\xi_1 , \xi_2) .$$

Φ est donc nécéssairement une solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2^2} = 0 ,$$

et le coefficient f du ds^2 envisagée a alors la forme $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2}$ de sorte que (9) a la forme

$$ds^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} (d\xi_1^2 + d\xi_2^2) .$$

Toutes les fonctions harmoniques différent de la quantité $h\xi_1 + k\xi_2 + l$, où h, k, l sont des constantes arbitraires, donnent le même ds^2 ; mais l'adjonction du terme précedent à une fonction harmonique quelconque $\Phi(\xi_1 , \xi_2)$ ne fait qu'ajouter des constantes arbitraires à η_1, η_2, lesquelles comme le montrent les formules (2) définissant les surfaces de E_4 admettant le ds^2 (9'), n'introduisent que des translations pour ces dernières surfaces et peuvent par suite être négligées.

Compte tenu des expressions ci-dessus de η_1 et η_2, les formules (2) réalisant l'application du ds^2 (9') dans E_4 sont

$$(S) \begin{cases} x_1 = \left(\xi_1 + \xi_2 - \dfrac{\partial \Phi (\xi_1 , \xi_2)}{\partial \xi_2} \right) /2 , \\ x_2 = \left(\xi_1 - \xi_2 - \dfrac{\partial \Phi (\xi_1 , \xi_2)}{\partial \xi_2} \right) /2i , \\ x_3 = \left(\xi_2 - \xi_1 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right) /2 , \\ x_4 = \left(\xi_2 + \xi_1 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \right) /2i. \end{cases}$$

Il est facile de caractériser géométriquement les surfaces (S) ci-dessus correspondant aux diverses fonctions harmoniques réelles Φ possibles. Considérons la transformation ponctuelle $[A(\xi_1 , \xi_2) \to A'(\xi_1 , \xi_2)]$ réelle du plan $0\, x_1\, x_2$ du repère orthonormé $(0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ de E_4 définie par les équations

$$\eta_1 = \frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}, \quad \eta_2 = \frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1}.$$

La fonction Φ étant harmonique, cette transformation est, comme on le voit aussitôt, une transformation *conforme directe* du plan $0\, x_1\, x_2$, et réciproquement. Mais nous avons montré dans un travail antérieur [6], que l'ensemble des images ponctuelles dans E_4 des transformations conformes directes du plan $0\, x_1\, x_2$ constitue une famille de surfaces minimales particulières (dites du type de Riemann de E_4, définies et étudiées en [5]. Les équations (S) représentent donc *la famille complète des surfaces minimales du type de Riemann de* E_4.

On peut observer que pour un ds^2 donné de la forme (9') actuelle, les formules (S) ne contiennent *aucune* constante arbitraire, et représentent par suite *une seule* surface minimale du type de Riemann support du ds^2 envisagé. Et cela contrairement à ce qui avait lieu pour la forme canonique de Weingarten du ds^2 dont il a été question au No.2, pour laquelle il existe, dans E_4, une suite continue de ∞^1 surfaces supports isométriques (les surfaces définies par les équations (8)).

L'unicité de la surface support dans le cas actuel confirme un résultat établi en [7], suivant lequel, *les surfaces minimales du type de Riemann possèdent le caractère de rigidité isométrique dans l'ensemble général des surfaces minimales de* E_4.

6. Forme géodésique du ds^2. Cette forme est

$$ds^2 = d\xi_1^2 + f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2^2. \tag{10}$$

Les courbes coordonnées (ξ_1, ξ_2) des surfaces supports de ce ds^2 sont les géodésiques ξ_1 ($\xi_2 =$ const.) et leurs trajectoires orthogonales (ξ_2).

Les fonctions $\eta_1(\xi_1, \xi_2)$, $\eta_2(\xi_1, \xi_2)$ donnant, par les équations (4'), des surfaces de E_4 admettant le ds^2 (10), sont définies par le système suivant obtenu en identifiant (4') à (10):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = 1, \\ &\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = -f(\xi_1, \xi_2), \\ &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

On constate que (11) n'est compatible en η_1, η_2 que si f a la forme générale

$$f(\xi_1, \xi_2) = A(\xi_2) \cdot \xi_1 + B(\xi_2), \tag{12}$$

où A et B sont des fonctions arbitraires de ξ_2, le ds^2 (10) ayant alors la forme

$$ds^2 = d\xi_1^2 + [A(\xi_2) \,.\, \xi_1 + B(\xi_2)]\, d\xi_2^2 \,. \tag{13}$$

L'intégration de (11) donne dans ces conditions (en négligeant des constantes qui n'introduisent qu'un déplacement dans E_4)

$$\eta_1 = -\xi_1 \int A\, d\xi_2 - \int B\, d\xi_2\,, \quad \eta_2 = \xi_1 - \iint A\, d\xi_2\,, \tag{14}$$

$\int A\, d\xi_2$ et $\int B\, d\xi_2$ étant deux primitives premières des fonctions et $A(\xi_2)$ et $B(\xi_2)$ et $\iint A\, d\xi_2$ une primitive seconde de $A(\xi_2)$.

Comme le montrent les équations (2) de l'image ponctuelle, dans E_4, de la transformation plane de E_2 définie par les équations (3), la constante figurant dans $\int B\, d\xi_2$ correspond à une translation de la surface image dans E_4 (indifférente dans le problème d'isométrie qui nous occupe), et l'on peut se borner à désigner par $\int B\, d\xi_2$ une primitive bien déterminée de B. De même, des deux constantes introduites successivement par le calcul de $\iint A\, d\xi_2$, la deuxième correspond à une translation et peut être négligée. En désignant alors par h la première de ces deux constantes, les formules (14) peuvent être écrites

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= -h\,\xi_1 - \xi_1 \int A\, d\xi_2 - \int B\, d\xi_2\,, \\ \eta_2 &= \xi_1 - h\,\xi_2 - \iint A\, d\xi_2\,, \end{aligned}\right. \tag{14'}$$

et si l'on remplace η_1 et η_2 par les expressions précédentes dans les équations (2) donnant les images de la transformation ponctuelle plane (14'), on obtient, lorsque h varie, et après avoir posé $1 + h = k$, la famille de surfaces à un paramètre :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= [k\xi_1 + \xi_2 + \xi_1 \int A(\xi_2)\, d\xi_2 + \int B(\xi_2)\, d\xi_2]/2\,, \\ x_2 &= [k\xi_1 - \xi_2 + \xi_1 \int A(\xi_2)\, d\xi_2 + \int B(\xi_2)\, d\xi_2]/2i\,, \\ x_3 &= [k\xi_2 - 2\xi_1 + \iint A(\xi_2)\, d\xi_2]/2\,, \\ x_4 &= [k\xi_2 + \iint A(\xi_2)\, d\xi_2]/\, 2i\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Le caractère linéaire des équations (15) en ξ_1, se justifie par le fait que les courbes (ξ_1) sont, dans E_4, les images des géodésiques (ξ_2) du ds^2 (10). Les surfaces (15) sont des surfaces *réglées à plan directeur isotrope* $[x_1 - ix_2 = x_4 = 0]$, et l'on voit que le passage d'une surface quelconque de E_3 d'élément linéaire (13) à l'une quelconque de ses déformées isométriques (15) *rectifie* les géodésiques (ξ_1).

En ce qui concerne la déformation continue qui fait passer isométriquement par variation du paramètre k, d'une surface (15) à toutes les autres, on peut observer que les différents points de cette surface décrivent des trajectoires rectilignes parallèles au plan totalement isotrope $[x_1 - ix_2 = x_3 - ix_4 = 0]$, tout comme dans la déformation continue issue de la forme canonique de Weingarten étudiée au No. 4.

Le fait que les ds^2 de la forme (13) *caractérisent les surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope* est bien connu dans l'espace à trois dimensions (G. Darboux, **Théorie générale des surfaces, T. IV**, p. 333). Ce qui précède montre que les surfaces réglées à plan directeur isotrope de E_3 peuvent être appliquées isométriquement dans E_4, *sans altération de leur caractère reglé et avec conservation du parallélisme des génératrices rectilignes à un même plan directeur isotrope.*

Un cas intéressant est celui où le ds^2 (13), qui moyennant un changement sur le paramètre ξ_2 peut s'écrire

$$ds^2 = d\xi_1{}^2 + [\xi_1 + B(\xi_2)]\, d\xi_2{}^2 , \tag{13'}$$

affecte la forme

$$ds^2 = d\xi_1{}^2 + \xi_1\, d\xi_2{}^2 \qquad (B = 0)$$

qui convient aux surfaces applicables sur les *développées des surfaces minimales de* E_3.

On voit alors que ces dernières surfaces peuvent être appliquées sur les surfaces de E_4 définies par les équations (15) où l'on fait $A = 1$, $B = 0$, et où, comme d'habitude, on néglige les constantes additives qui n'introduisent qu'une translation dans E_4, soit

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (k\xi_1 + \xi_2 + \xi_1\,\xi_2)/2 , \\ x_2 &= (k\xi_1 - \xi_2 + \xi_1\,\xi_2)/2i , \\ x_3 &= \left(k\xi_2 - 2\xi_1 + \frac{\xi_2^{\,2}}{2}\right)/2 , \\ x_4 &= \left(k\xi_2 + \frac{\xi_2^{\,2}}{2}\right)2i . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ces équations représentent une famille de surfaces du second degré de E_4, d'où cette propriété inattendue des développées des *surfaces minimales de* E_3 *de pouvoir être appliquées isométriquement sur des quadriques de* E_4.

7. Forme de Tchébychef du ds^2. Cette forme est, comme l'on sait

$$ds^2 = d\xi_1^2 + f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 + d\xi_2^2, \tag{17}$$

où f représente le double du Cosinus de l'angle sous lequel se coupent les courbes coordonnées au point (ξ_1, ξ_2) d'une surface quelconque ayant le ds^2 (17).

L'identification de (17) et de (4′) donne le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_1} = 1, \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_2} = -1, \\ &\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_2} - \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} = f(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

intégrable si et seulement si $f(\xi_1, \xi_2)$ affecte la forme

$$f(\xi_1, \xi_2) = A(\xi_1) + B(\xi_2)$$

où A et B sont des fonctions arbitraires respectivement de ξ_1 et de ξ_2. η_1 et η_2 ont alors les expressions

$$\eta_1 = -\xi_2 - \int A(\xi_1)\, d\xi_1,$$

$$\eta_2 = \xi_1 + \int B(\xi_2)\, d\xi_2,$$

$\int A\, d\xi_1$ et $\int B\, d\xi_2$ étant des primitives déterminées quelconques de A et B (les constantes d'intégration étant sans influence).

Les surfaces supports dans E_4 du ds^2 (17), dont la forme est nécessairement, comme on vient de le voir

$$ds^2 = d\xi_1^2 + [A(\xi_1) + B(\xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 + d\xi_2^2; \tag{17'}$$

sont, d'après (2), définies par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left(\xi_1 + 2\,\xi_2 + \int A(\xi_1)\, d\xi_1\right)/2, \\ x_2 &= \left(\xi_1 + \int A(\xi_1)\, d\xi_1\right)/2i, \\ x_3 &= \left(\xi_2 - 2\,\xi_1 - \int B(\xi_2)\, d\xi_2\right)/2, \\ x_4 &= \left(\xi_2 - \int B(\xi_2)\, d\xi_2\right)/2\,i. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Les surfaces (19) sont des surfaces de translation, engendrées par des courbes situées dans des plans respectivement parallèles aux plans isotropes ($x_1 = 0$, $x_1 - ix_2 = 0$), ($x_1 = 0$, $x_3 + ix_4 = 0$).

Les surfaces de E_3 admettant un élément linéaire de Tchébychef de la forme (17′), applicables par suite isométriquement dans E_4 suivant les surfaces (19), sont des surfaces particulières, jouissant d'une propriété caractéristique qui les apparente au plan euclidien, et qu'il convient de signaler.

ω étant l'angle sous lequel se coupent les deux courbes coordonnées au point courant (ξ_1, ξ_2) de l'une, S, de ces surfaces, on a, comme on l'a rappelé plus haut

$$2 \cos \omega = f(\xi_1, \xi_2) = A(\xi_1) + B(\xi_2).$$

Si [$M(\xi_1, \xi_2)$, $N(\xi_1', \xi_2)$, $P(\xi_1', \xi_2')$, $Q(\xi_1, \xi_2')$] *(Fig. 1)* est le quadrilatère curviligne formé, sur S, par un couple quelconque [MN, QP] de courbes ξ_1 et par un couple quelconque [MQ, NP] de courbes ξ_2, ce quadrilatère joint de la propriété evidente (résultant de la définition des réseaux de Tchébychef) *d'avoir ses couples de cotés opposés égaux* ($\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{QP}$, $\overset{\frown}{MQ} = \overset{\frown}{NP}$).

Fig. 1

En outre, $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ étant les mesures des angles *intérieurs,* on a :

$$\cos \widehat{M} = A(\xi_1) + B(\xi_2),$$

$$\cos \widehat{N} = -A(\xi_1') - B(\xi_2),$$

$$\cos \widehat{P} = A(\xi_1') + B(\xi_2'),$$

$$\cos \widehat{Q} = -A(\xi_1) - B(\xi_2'),$$

d'où il résulte

$$\mathrm{eos}\, \widehat{M} + \mathrm{eos}\, \widehat{N} + \mathrm{eos}\, \widehat{P} + \mathrm{eos}\, \widehat{Q} = 0.$$

Si l'on appelle *pseudo-parallélogramme* tout quadrilatère curviligne d'une surface à couple de côtés opposés *égaux* jouissant de la propriété angulaire précédente, on voit aussitôt que cette condition imposée aux différents quadrilatères formés avec les courbes d'un réseau de Tchébychef entraîne la forme (17′) pour le ds^2 correspondant, de sorte que les surfaces S de E_4 susceptibles d'être appliquées isométriquement dans E_4 par le procédé qui fait l'objet de cette étude, sont caractérisées par la propriété de posséder un réseau de courbes tel que *tout quadrilatère formé par deux couples quelconques de courbes appartenant respectivement à l'un et l'autre système soit un pseudo-parallélogramme.*

Le plan euclidien est évidemment une surface S, le réseau de courbes correspondant étant constitué par deux familles de droites parallèles quelconques.

Un cas particulièrement intéressant est celui où, dans le ds^2 (17'), les deux fonctions $A(\xi_1)$, $B(\xi_2)$ sont deux fonctions périodiques de ξ_1 et ξ_2 de périodes respectives ω_1, ω_2.

Toute surface S représentative d'un tel ds^2 jouit alors de la propriété de pouvoir être décomposée, de ∞^2 façons différentes, en une infinité dénombrable de pseudo-parallélogrammes de côtés (ω_1, ω_2) admettant, non seulement leurs cotés opposés mais aussi leurs angles opposés égaux. Tous les pseudoparallélogrammes appartenant à une même décomposition sont isométriques entre-eux; de sorte que la surface *admet un groupe discontinu d'auto-transformations isométriques* (dont les opérations transforment entre-elles les courbes d'une même famille du réseau de Tchébychef de S), groupe qui tend vers le groupe de libre mobilité lorsque les deux périodes ω_1 et ω_2 tendent vers zéro, S se réduisant alors au plan Euclidien.

8. Forme minimale. Considérons enfin une surface quelconque S de E_3 supposée rapportée à ses lignes de longueur nulle, dont le ds^2 a donc la forme

$$d\xi^2 = f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{20}$$

et cherchons les formes que doit avoir la fonction $f(\xi_1, \xi_2)$ pour que l'application isométrique de S dans E_4, par le procédé dont il est question dans cet article, soit possible.

L'identification du ds^2 ci-dessus avec (4') donne le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = 0\,, \\ &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

qui impose à f la forme

$$f = A(\xi_1) + B(\xi_2)$$

et donne pour η_1 et η_2 les expressions

$$\eta_1 = -\int A(\xi_1)\, d\xi_1\,, \eta_2 = \int B(\xi_2)\, d\xi_2\,.$$

Les ds^2 du type (20) permettant l'applicabilité isométrique requise dans E_4 ont donc la forme

$$ds^2 = [A(\xi_1) + B(\xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2\,. \tag{20'}$$

Et les surfaces de E_4 supports de ces ds^2, que l'on obtient toujours en remplaçant dans les équations (2) η_1 et η_2 par les expressions ci-dessus, sont définies par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\xi_1 + \xi_2 + \int A(\xi_1)\, d\xi_1)/2\,, \\ x_2 &= (\xi_1 - \xi_2 + \int A(\xi_1)\, d\xi_1)/2i\,, \\ x_3 &= (\xi_2 - \xi_1 - \int B(\xi_2)\, d\xi_2)/2\,, \\ x_4 &= (\xi_2 + \xi_1 - \int B(\xi_2)\, d\xi_2)/2i\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

9. Remarque sur la condition d'applicabilité du ds^2 le plus général dans E_4. Supposons un ds^2 donné sous la forme la plus générale

$$ds^2 = E\, d\xi_1^2 + 2F\, d\xi_1\, d\xi_2 + G\, d\xi_2^2 \tag{23}$$

où E, F, G sont des fonctions de ξ_1 et ξ_2, et cherchons à quelle condition une surface S de E_3 admettant ce ds^2 est applicable isométriquement dans E_4 par la méthode qui fait l'objet de cet article.

L'identification de (23) et de (4') fournit le système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = E(\xi_1, \xi_2)\,, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} = -G(\xi_1, \xi_2)\,, \\ &\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} = 2F(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

d'où l'on tire

$$\eta_2 = \int E\, d\xi_1 + \lambda(\xi_2)\,, \quad \eta_1 = -\int G\, d\xi_2 + \mu(\xi_2), \tag{25}$$

$\int E\, d\xi_1$ et $\int G\, d\xi_2$ étant des primitives déterminées de E et G relativement à ξ_1 et ξ_2 respectivement, et $\mu(\xi_1)$ et $\lambda(\xi_2)$ des fonctions de ξ_1 et de ξ_2.

La 3 ème équation (24) donne alors

$$\int \frac{\partial E}{\partial \xi_2}\, d\xi_1 + \int \frac{\partial G}{\partial \xi_1}\, d\xi_2 + \lambda'(\xi_2) - \mu'(\xi_1) = 2F(\xi_1, \xi_2) \tag{26}$$

et de là on déduit aussi-tôt la condition nécessaire suivante d'applicabilité du ds^2 (23) dans E_4

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2} = 0\,. \tag{27}$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si elle est vérifiée, $2F(\xi_1, \xi_2)$ a la forme (26) avec des expressions déterminées pour les fonctions $\lambda'(\xi_2)$ et $\mu'(\xi_1)$, et l'application des formules (2) où η_1 et η_2 ont les expressions (25) donne une surface de E_4 isométrique à la surface S de E_3 d'élément linéaire (23), à savoir:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left[\xi_1 + \xi_2 + \int G\, d\xi_2 - \mu(\xi_1)\right]/2, \\ x_2 &= \left[\xi_1 - \xi_2 + \int G\, d\xi_2 - \mu(\xi_1)\right]/2i, \\ x_3 &= \left[\xi_2 - \xi_1 - \int E\, d\xi_1 - \lambda(\xi_2)\right]/2, \\ x_4 &= \left[\xi_2 + \xi_1 - \int E\, d\xi_1 - \lambda(\xi_2)\right]/2i. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dans le cas où le ds^2 (23) considéré a la forme isothermique $[E = G,\ F = 0]$, (27) se réduit à l'équation de Laplace $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi_2^2} = 0\right)$ et cela conformément à ce qu'on a vu au No.5 sur le rôle joué par cette équation dans le problème de l'application isométrique des ds^2 isothermiques dans E_4.

De même, si $(E = G = 0)$ ou $(E = G = 1)$, on retrouve les expressions de F [toutes les deux de la forme : $A(\xi_1) + B(\xi_2)$], obtenues aux Nos 7 et 8 pour la possibilité d'application isométrique, dans E_4, des ds^2 ayant la forme de Tchébychef ou la forme minimale.

L'équation (27) donne aussi la véritable raison du fait, signalé au No. 4, que la surface *la plus générale (supposée explicitement donnée) de E_3 peut être appliquée isométriquement, de façon explicite, dans E_4*. Le ds^2 de S peut en effet être mis (voir le No. 2) sous la forme (1) de Tchébychef. On a alors: $E = 1$, $G = 2\frac{\partial f}{\partial \xi_2}$, $F = 2\frac{\partial f}{\partial \xi_1}$, et (27) se réduit à l'identité évidente :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] VINCENSINI, P. : *Sur la déformation des surfaces tétraédrales de G. Tzitzeica.* Symposium "Georges Tzitzeica et Dimitrie Pompeiu"; Editions de la République Socialiste Roumaine, Bucarest (1976), 109-200.

[2] TZITZEICA, G. : Annales de l'Académie Roumaine (Mémoires) ; **38** (1916), 241-248.

[3] VINCENSINI, P. : *Sur une représentation quadridimensionnelle ponctuelle de l'espace réglé à trois dimensions*, Annali di matematica pura ed applicata, série IV. T. LXX (1965), 371-397.

[4] WEINGARTEN, J. : Acta Matematica 20 (1896), 159-200.

[5] VINCENSINI, P. : *Sur une représentation quadridimensionnelle des transformations ponctuelles du plan, et quelques aperçus sur ses relations avec la géométrie différentielle et la théorie des fonctions analytiques*, Rendiconti di Matematica (4), 3, serie VI, (1970).

[6] VINCENSINI, P. : *Sur une représentation géométrique des fonctions analytiques*, Rendiconti di Matematica (2), 5, série VI, (1972).

[7] VINCENSINI, P. : *Surfaces minimales du type de Riemann de E_4 et groupes de transformations*, Annali di matematica pura ed applicata (IV), XCV (1973), 321-330.

[8] DARBOUX, G. : **Leçons sur la théorie générale des surfaces**; T. IV, p. 309.

32, BOULEVARD DE LA LIBERTÉ
13001 MARSEILLE - FRANCE

ÖZET

Bu çalışmada E_3 e ait yüzeyleri dört boyutlu E_4 uzayına eksplisit bir tarzda, izometrik olarak tasvir etmek için bir yöntem verilmektedir. Daha özel olarak, gözönüne alınan yüzeylerin ds^2 lerinin ünifonksiyonel kanonik formlara dönüştürülebildiği hal ile karşılaşılmaktadır. ds^2 nin daha genel hallerinde, izometrik tasvirin eksplisit olarak ifade edilebilmesi için, katsayıların gerçekleyeceği bir gerek ve yeter şart verilmektedir.