İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 43 (1978), 113 - 119

DISUGUAGLIANZE ASINTOTICHE PER GLI ZERI DELLE FUNZIONI $B_i(x)$, $A_i'(x)$, $B_i'(x)$[1)]

ANDREA LAFORGIA [2)]

In this paper it has been given some inequalities of asymptotic type for the zeros b_n of the Airy function $B_i(x)$ and for the zeros b_n' and a_n' of the functions $B_i'(x)$ and $A_i'(x)$ respectively.

1. Introduzione. Com'é noto, l'equazione differenziale

$$\frac{d^2w}{dx^2} = xw$$

ammette due soluzioni linearmente indipendenti $A_i(x)$ e $B_i(x)$ dette rispettivamente funzioni di Airy di prima e seconda specie.

Particolare importanza hanno gli zeri di queste funzioni e delle rispettive derivate $A_i'(x)$ e $B_i'(x)$. Tali zeri risultano essere tutti reali e negativi per le funzioni $A_i(x)$ e $A_i'(x)$, mentre le funzioni $B_i(x)$ e $B_i'(x)$ hanno anche zeri complessi.

Limitando il nostro studio agli zeri reali di queste funzioni, ricordiamo che per essi sussistono i seguenti sviluppi asintotici [[4], p.405]

$$a_n = - T\left\{\frac{3}{8}\pi(4n-1)\right\} \tag{1}$$

$$b_n = - T\left\{\frac{3}{8}\pi(4n-3)\right\} \tag{1'}$$

$$a_n = - U\left\{\frac{3}{8}\pi(4n-3)\right\} \tag{1''}$$

$$b_n = - U\left\{\frac{3}{8}\pi(4n-1)\right\} \tag{1'''}$$

dove abbiamo indicato con a_n, b_n, a_n', b_n' $(n = 1,2,\ldots)$ rispettivamente gli zeri delle funzioni $A_i(x)$, $B_i(x)$, $A_i'(x)$, $B_i'(x)$, e dove risulta

[1)] Lavoro svolto nell'ambito delle attività di ricerca del G.N.I.M. Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica

[2)] Istituto di Calcoli Numerici dell'Università di Torino

$$T(t) \sim t^{2/3}\left(1 + \frac{5}{48}t^{-2} - \frac{5}{36}t^{-4} + \dots\right),$$

$$U(t) \sim t^{2/3}\left(1 - \frac{7}{48}t^{-2} + \frac{35}{288}t^{-4} - \dots\right).$$

Le precedenti relazioni (1), (1'), (1''), (1'''), sebbene siano molto precise, presentano tuttavia l'inconveniente di fornire a riguardo dell'errore solo indicazioni di tipo qualitativo mentre é nota l'importanza che ha, ai fini del calcolo numerico, il conoscere delle esplicite maggiorazioni dell'errore. Questo problema é stato risolto da H.W.Hetheote [3, p.149] per gli zeri a_n della funzione $A_i(x)$.

Ci proponiamo in questa Nota, di mostrare come sia possibile ottenere delle disuguaglianze di tipo asintotico anche per gli zeri b_n, a_n', b_n' delle funzioni $B_i(x)$, $A_i'(x)$, $B_i'(x)$ che per "n grande" risultano molto aderenti. A tale scopo premettiamo un risultato di L.Gatteschi [2, p. 372] che possiamo enunciare con il seguente :

Teorema 1. Nell'intervallo $\left[n\pi - \frac{\pi}{2} - \Psi - p, n\pi - \frac{\pi}{2} - \Psi + p\right]$ con $p < \frac{\pi}{2}$, supponiamo $f(x) = \cos(x + \Psi) + \varepsilon(x)$, dove $f(x)$ é una funzione continua, e sia $E = \max|\varepsilon(x)| < \sin p$. Allora in detto intervallo esiste uno zero c di $f(x)$ tale che

$$\left|c - \left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \Psi\right)\right| \leqslant \frac{E}{\cos p}.$$

2. Disuguaglianze asintotiche per gli zeri della funzioae $B_i(x)$. Per la funzione $B_i(x)$ vale una rappresentazione asintotica [4, p.393] che si puó scrivere nella forma

$$B_i(-x) = \pi^{-1/2} x^{-1/4}\left\{\cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{385}{10368\,\xi^2} + \dots\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5}{72\,\xi} + \dots\right)\right\} \tag{2}$$

con

$$\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Entrambe le serie che compaiono nella (2) se troncate al loro n-esimo termine, sono tali che l'errore é in valore assoluto minore del primo termine trascurato [4, p.393]. Avremo allora

$$\pi^{1/2} x^{1/4} B_i(-x) = \cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) + E(\xi)$$

con

$$| E(\xi) | < \frac{385}{10368\,\xi^2} + \frac{5}{72\,\xi}.$$

Supposto allora $n \geqslant 6$, e tenuto conto che [1, p.478] $b_6 = -8.49194885\ldots$, risulterá

$$| E(\xi) | < 0.0087. \tag{3}$$

Scegliendo allora $p = 0.0088$, risultando

$$\max | E(\xi) | < \sin p,$$

le condizioni del Teorema 1 saranno soddisfatte, e pertanto identificando nel Teorema 1 $f(\xi)$ con $\pi^{1/2} x^{1/4} B_i(-x)$ e Ψ con $\frac{\pi}{4}$, esisterá uno zero c_n di $f(\xi)$ tale che

$$\left| c_n - \left(n\pi - \frac{3}{4}\pi\right)\right| < \frac{0.0739}{n\pi - \frac{3}{4}\pi - 0.0088}$$

che si puó scrivere anche

$$\left| (-b_n)^{3/2} - \frac{3\pi(4n-3)}{8} \right| < \frac{0.0353}{n - 0.7528}$$

e quindi con un semplice sviluppo in serie di Taylor

$$b_n = -\left[\frac{3\pi(4n-3)}{8}\right]^{2/3} + \varepsilon_n \tag{4}$$

$$| \varepsilon_n | < \frac{0.0141}{(n - 0.7529)^{4/3}}. \tag{4'}$$

La (4) e la (4′) forniscano le desiderate disuguaglianze per gli zeri b_n della funzione $B_i(x)$, risultano inoltre di tipo asintotico nel senso che ε_n é dello stesso órdine di grandezza del termine trascurato nella (1′). Inoltre sebbene la (4) e la (4′) siano state ottenute per $n \geqslant 6$, si dimostra facilmente, mediante un confronto diretto che esse valgono anche per $n \geqslant 1$.

Naturalmente le disuguaglianze ottenute saranno tanto più precise quanto più "n é grande", ma giá per b_1 forniscono il non spregevole risultato

$$-1.2064 < b_1 < -1.0245$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é [1, p.478]

$$b_1 = -1.1737132 \ldots.$$

Per $n = 10$ si ha invece

$$-12.3865 < b_{10} < -12.3850$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é

$$b_{10} = -12.3864171 \ldots.$$

3. Disuguaglianze per gli zeri della funzione $B_i'(x)$. Per la funzione $B_i'(-x)$ vale una rappresentazione asintotica che si puó porre nelle forme

$$B_i'(-x) = \pi^{-\frac{1}{2}} x^{1/4} \left\{ \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \frac{455}{10368\,\xi^2} - \ldots\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{7}{72\,\xi} + \ldots\right)\right\}. \tag{5}$$

Considerazioni analoghe a quelle fatte per le serie che compaiono nella (2) possono essere fatte per le serie che compaiono nella (5) [[4], p.393], e quindi possiamo scrivere

$$\pi^{1/2} x^{-1/4} B_i'(-x) = \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) + E(\xi),$$

dove questa volta vale la maggiorazione

$$|E(\xi)| < \frac{455}{10368\,\xi^2} + \frac{7}{72\,\xi}.$$

Posto come nel caso precedente $n \geqslant 6$, e tenuto conto che $b_6 = -9.0195833\ldots$ risulterá

$$|E(\xi)| < 0.0115.$$

Scegliendo allora $p = 0.0115$, essendo

$$\max |E(\xi)| < \sin p,$$

le condizioni del Teorema 1 risulteranno soddisfatte e quindi identificando $f(\xi)$ con $\pi^{1/2} x^{-1/4} B_i'(-x)$, Ψ con $\dfrac{\pi}{4}$ ed essendo come nel caso precedente $\varepsilon = \dfrac{2}{3} x^{3/2}$, esisterá uno zero c_n di $f(\xi)$ tale che

$$\left| c_n - \left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{0.1020}{n\pi - \dfrac{\pi}{4} - 0.0015}$$

che si puó scrivere anche

$$\left| (-b_n')^{3/2} - \frac{3\pi(4n-1)}{8} \right| < \frac{0.0488}{n-0.2504}$$

e quindi con considerazioni analoghe a quelle gia fatte al p.115

$$b_n' = -\left[\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right]^{2/3} + \varepsilon_n' \tag{6}$$

con

$$|\varepsilon_n'| < \frac{0.0195}{(n-0.2504)^{4/3}}. \tag{6'}$$

La (6) e la (6′) sono le relazioni desiderate che forniscono le disuguaglianze asintotiche per gli zeri $b_n'(n \geqslant 6)$ della funzione $B_i'(x)$.

Anche in questo caso la condizione $n \geqslant 6$ puó essere rimossa con una verifica diretta, la quale mostra che la (6) e la (6′) valgono per $n \geqslant 1$.

Per b_1' dalla (6) e dalla (6′) otteniamo

$$-2.3489 < b_1' < -2.2916$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é [1, p.478]

$$b_1' = -2.2944396 \ldots.$$

Per b'_{10} abbiamo invece

$$-12.8291 < b_{10}' < -12.8272$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é [1, p.478]

$$b_{10}' = -12.8272583 \ldots.$$

4. **Disuguaglianze per gli zeri della funzione $A_i'(x)$.** Per la funzione $A_i'(-x)$ vale una rappresentazione asintotica [4. p.392] che si puó porre nella forme

$$A_i'(-x) = \pi^{-\frac{1}{2}} x^{1/4} \left\{ \cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\left(-1 - \frac{455}{10368\,\xi^2} + \ldots\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{7}{72\,\xi} - \ldots\right)\right\}.$$

Considerazioni analoghe a quella fatte ai p.115,116 conducano alia relazione

$$\pi^{1/2} x^{-1/4} A_i'(-x) = \cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) + E(\xi)$$

con

$$|E(\xi)| < \frac{455}{10368\,\xi^2} + \frac{7}{72\,\xi},$$

$p = 0.0126$, $\Psi = \frac{\pi}{4}$, e quindi, con calcoli che non stiamo qui a riportare perche analoghi a quelli eseguiti ai p.115 e 116 si ottiene, per $n \geqslant 6$

$$a_n' = -\left[\frac{3\pi(4n-3)}{8}\right]^{2/3} + \delta_n, \tag{7}$$

$$|\delta_n| < \frac{0.0195}{(n-0.7538)^{4/3}}. \tag{7'}$$

Analogamente ai casi precedenti la condizione $n \geqslant 6$ può essere rimossa poiché si verifica facilmente che la (7) e la (7') valgono per $n \geqslant 1$.

Per a_1' dalla (7) e dalla (7') otteniamp

$$-1.2419 < a_1' < -0.9890,$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é [1, p.478]

$$a_1' = -1.0187929\ldots.$$

Per a_{10}' abbiamo invece

$$-12.3868 < a_{10}' < -12.3847$$

mentre il valore esatto a sette cifre decimali é [1, p.478]

$$a_{10}' = -12.3847883\ldots.$$

Riepilogando, per b_n, b_n', a_n' abbiamo ottenuto rispettivamente le seguenti disuguaglianze asintotiche :

$$\boxed{\begin{array}{ll} b_n = -\left[\dfrac{3\pi(4n-3)}{8}\right]^{2/3} + \varepsilon_n & \\ & n \geqslant 1 \\ |\varepsilon_n| < \dfrac{0.0141}{(n-0.7529)^{4/3}} & \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} b_n' = -\left[\dfrac{3\pi(4n-1)}{8}\right]^{2/3} + \varepsilon_n' & \\ & n \geqslant 1 \\ |\varepsilon_n'| < \dfrac{0.0195}{(n-0.2504)^{4/3}} & \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_n' = -\left[\dfrac{3\pi(4n-3)}{8}\right]^{2/3} + \delta_n & \\ & n \geqslant 1 \\ |\delta_n| < \dfrac{0.0195}{(n-0.7538)^{4/3}} & \end{array}}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. : **Handbook of Mathematical Functions**, Nat. Bureau of Standards (1964), e succ. ed.

[2] GATTESCHI, L. : **Funzioni Speciali**, U.T.E.D. (1973).

[3] HETHEOTE, H.W. : *Error Bounds for Asymptotic Approximations of Zeros of Transcendental Functions*, S.I.A.M., J. Math. Anal. **1** (1970), 147-152.

[4] OLIVER, F.W.J. : **Asymptotic and Special Functions**, Acad. Press, New York and London (1974).

ÖZET

Bu çalışmada $B_i(x)$ Airy fonksiyonunun b_n sıfır yerleri ve $B_i'(x)$, $A_i'(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla b_n', a_n' sıfır yerlerine dair asimptotik tipte bazı eşitsizlikler verilmektedir.