PROBLÈMES DE CINÉMATIQUE PONCTUELLE ET TANGENTIELLE CONCERNANT LA THÉORIE DES MÉCANISMES ET DES MACHINES

D. MANGERON ET HÉLÈNE CROITORU

Dans une série de Notes antérieures dues à l'un des auteurs seul ou en collaboration [1], [3], [5] basées sur la théorie des accélérations réduites d'ordre quelconque, définies par (1)–(3), concernant les mouvements plans des solides rigides, on a étudié le problème des champs d'accélérations, tout en appliquant ensuite les résultats acquis à l'étude des mouvements des mécanismes plans et des groupes D'ASSOUR les plus généraux [6]–[8]. Parmi les théorèmes qui s'y rattachent nous citerons ici le théorème suivant.

Théorème 1. *Le lieu géométrique des extrémités des accélérations réduites d'ordre quelconque m des points d'une droite* (D) *animée d'un mouvement parallèle à un plan fixe est une autre droite* (D_m) *perpendiculaire à la première.*

Après avoir donné ici les définitions des accélérations réduites d'ordre quelconque et de *première* ou de *seconde espèce* concernant les mouvements des chaînes de solides rigides dans l'espace [12]–[14] et avoir énoncé nombre de théorèmes relatifs à ce sujet, on énonce quelques résultats nouveaux qui se réfèrent à la géométrie cinématique tangentielle plane ou de l'espace (§. 4) et on étudie comme application (§. 5) le problème relatif aux courbes de bielle à droites enveloppes des mécanismes constitués de deux couples de translation et deux autres de rotation situées alternativement l'une après l'autre (*Figures* 1–3). On parvient de cette manière par une voie directe aux résultats établis du point de vue de la géométrie cinématique ponctuelle dans une série de Notes très intéressantes dues à M. I. I. ARTOBOLEVSKI [22]–[25].

1. Quelques théorèmes de cinématique ponctuelle des mouvements plans. A la suite d'un nombre de résultats qui se réfèrent à la généralisation des formules de SOMOFF [1], [2] et se rattachent entre antres à l'une des recherches récentes due à M^lle^ SÜEDA GÖNENÇ [3], l'un des auteurs a introduit la notion d'accélération réduite d'ordre quelconque [4]

(1) $$\mathbf{a}_{M_r}{}^{(m)} = \frac{\mathbf{a}_M{}^{(m)}}{A_m}, \quad \mathbf{a}_{M_r}{}^{(1)} = \frac{\mathbf{a}_M{}^{(1)}}{A_1} \equiv \frac{\mathbf{a}_M}{A_1},$$

(2) $$\begin{Bmatrix} x_1{}^{(m+1)} \\ x_2{}^{(m+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10}{}^{(m+1)} \\ x_{20}{}^{(m+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -A_m & -B_m \\ B_m & -A_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{Bmatrix},$$

(3) $$A_{m+1} = \frac{dA_m}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt} B_m, \quad B_{m+1} = \frac{dB_m}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt} A_m,$$

$$A_1 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2, \quad B_1 = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega^{(2)} = \varepsilon, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

où $\vartheta = \vartheta(t)$ est l'angle de rotation d'un solide rigide animé d'un mouvement paralèlle à un plan fixe, qui s'est montrée assez féconde dans la théorie des mécanismes et de machines [5], [6].

Parmi les théorèmes qui s'y rattachent et dont la démonstration peut-être achevée par le calcul directe, nous citerons ici les théorèmes suivants:

Théorème I. *Le lieu géométriques des extrémités des accélérations réduites d'ordre quelconque* m *des points d'une droite* (D) *animée d'un mouvement parallèle à un plan fixe est une autre droite* (D_m) *perpendiculaire à la première.*

Théorème II. *Les circonférence construites sur les accélérations réduites d'ordre quelconque* m *des points d'un organe animé d'un mouvement parallèle à un plan fixe passent par le pôle instantané des accélérations du même ordre* $P_m(x_{1p_m}, x_{2p_m})$, *que l'on peut transcrire dans les notations matricielles*

(4) $$\begin{Bmatrix} x_{1p_m} \\ x_{2p_m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} + \frac{1}{A_m{}^2 + B_m{}^2} \begin{Bmatrix} A_m & -B_m \\ B_m & A_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{10}{}^{(m+1)} \\ x_{20}{}^{(m+1)} \end{Bmatrix}, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

2. Pour des mouvements généraux de l'espace des solides rigides on obtient un théorème analogue au théorème I concernant les accélérations réduites d'ordre m et *de première espèce*, définies par les relations par recurrence [7], [8]

(5) $$\mathbf{a}_{M_r}{}^{(m)} = \frac{\mathbf{a}_M{}^{(m)}}{A_m - A_m(\mathbf{u})}, \quad \mathbf{a}_{M_r}{}^{(1)} = \frac{\mathbf{a}_M{}^{(1)}}{A_1 - A_1(\mathbf{u})} \equiv \frac{\mathbf{a}_M}{A_1 - A_1(\mathbf{u})},$$

(6) $$\left\{ \begin{array}{c} A_{m+1} = \dfrac{dA_m}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B}_m), \quad \mathbf{B}_{m+1} = \dfrac{d\mathbf{B}_m}{dt} - \boldsymbol{\omega} A_m, \\ A_1 = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{B}_1 = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}, \\ (m = 1, 2, \ldots). \end{array} \right.$$

$$(7)\quad \begin{cases} A_1(\mathbf{u}) = (\omega\cdot\mathbf{u})(\omega\cdot\mathbf{u}) & \text{pour} \quad A_1 = (\omega\cdot\omega), \\ A_2(\mathbf{u}) = 3(\omega^{(2)}\cdot\mathbf{u})(\omega\cdot\mathbf{u}) & \text{pour} \quad A_2 = 3(\omega^{(2)}\cdot\omega), \\ A_3(\mathbf{u}) = 4(\omega^{(3)}\cdot\mathbf{u})(\omega\cdot\mathbf{u}) + & \text{pour} \quad A_3 = 4(\omega^{(3)}\cdot(\omega) + \\ \quad +3(\omega^{(2)}\cdot\mathbf{u})(\omega^{(2)}\cdot\mathbf{u}) - (\omega\cdot\omega)(\omega\cdot\mathbf{u})(\omega\cdot\mathbf{u}) & \quad +3(\omega^{(2)}\cdot\omega^{(2)}) - (\omega\cdot\omega)(\omega\cdot\omega) \\ & \text{etc.}, \end{cases}$$

où $\omega = \omega(t)$ est la vélocité angulaire instantanée d'une droite (D) de verseur $\mathbf{u}$.

3. Relativement à la définition des accélérations réduites *de seconde espèce* concernant les mouvements généraux de l'espace des solides rigides, traduites dans les relations par recurrence

$$(8)\qquad \mathbf{a}_{M_r}{}^{(m)} = \lambda_m{}' \, \mathbf{a}_M{}^{(m)}, \quad \lambda_m{}' = \frac{1}{2}\,\frac{A_m + B_m(\mathbf{u}_3) + \sqrt{[A_m - A_m(\mathbf{u}_3)]^2 - 4B_m{}^2(\mathbf{u}_3)}}{A_m\cdot A_m(\mathbf{u}_2) + B_m{}^2(\mathbf{u}_3)}$$

$$(9)\qquad \mathbf{a}_{M_r}{}^{(m)''} = \lambda_m{}'' \, \mathbf{a}_M{}^{(m)}, \quad \lambda_m{}'' = \frac{1}{2}\,\frac{A_m + A_m(\mathbf{u}_3) - \sqrt{[A_m - A_m(\mathbf{u}_3)]^2 - 4B_m{}^2(\mathbf{u}_3)}}{A_m\cdot A_m(\mathbf{u}_3) + B_m{}^2(\mathbf{u}_3)},$$

$$(10)\quad \begin{cases} A_{m+1} = \dfrac{dA_m}{dt} + (\omega\cdot\mathbf{B}_m), \quad \mathbf{B}_{m+1} = \dfrac{d\mathbf{B}_m}{dt} - \omega A_m, & \\ A_1(\mathbf{u}_3) = (\omega\cdot\mathbf{u}_3)(\omega\cdot\mathbf{u}_3) & \text{pour} \quad A_1 = (\omega\cdot\omega), \\ A_2(\mathbf{u}_3) = 3(\omega^{(2)}\cdot\mathbf{u}_3)(\omega\cdot\mathbf{u}_3) & \text{pour} \quad A_2 = 3(\omega^{(2)}\cdot\omega), \\ B_1(\mathbf{u}_3) = (\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{u}_3) = (\omega^{(2)}\cdot\mathbf{u}_3) & \text{pour} \quad \mathbf{B}_1 = \omega^{(2)}, \\ B_2(\mathbf{u}_3) = (\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{u}_3) = (\omega^{(3)}\cdot\mathbf{u}_3) - (\omega\cdot\mathbf{u}_3)(\omega\cdot\omega) & \text{pour} \quad \mathbf{B}_2 = \omega^{(3)} - \omega(\omega\cdot\omega) \\ & \text{etc.}, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ est le verseur de la normale au plan déterminé par les vecteurs unitaires $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ d'origine M_0 et animé d'un mouvement général composé, ont lieu les théorèmes suivants:

Théorème III. *Les lieux géométriques des extrémités des accélérations réduites d'ordre m définies par* [8] *ou bien par* [9] *des points d'an plan rigide* (P) *contenant les verseurs* $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ *d'origine* $M_0 \in (P)$ *et animé d'un mouvement composé dans l'espace sont deux autres plans* $(P_m{}')$ *et* $(P_m{}'')$ *perpendiculaires au plan* (P).

Théorème IV. *Le trièdre déterminé par les intersections mutuelles des plans* (P), $(P_m{}')$, $(P_m{}'')$ *définis dans le théorème III est trirectangle.*

Théorème V. *La tangente trigonométrique de l'angle formé par une droite* (D) *de verseur* $\mathbf{u}$ *animée d'an mouvement composé dans l'espace*

$$(D): \qquad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{O'} + \mu\,\mathbf{u}$$

et par la droite

$$(D_m): \qquad \mathbf{r}_{M_m} = \mathbf{r}_M + \lambda_m\,\mathbf{a}_M^{(m)},$$

correspondant aux accélérations d'ordre m de ses points $M \in (D)$ prend son extremum pour la valeur da paramètre λ_m égale à

$$\lambda_m = \frac{1}{A_m - A_m(\mathbf{u})}, \tag{11}$$

fait qui conduit encore une fois à la notion des accélérations réduites.

Théorème VI. *La tangente trigonométrique de l'angle formé par un plan (P) défini par des verseurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ d'origine $M_0 \in (P)$ et animé d'un mouvement composé dans l'espace*

$$(P) \qquad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M_0} + \mu_1\,\mathbf{u}_1 + \mu_2\,\mathbf{u}_2$$

et le plan (P_m) d'équation vectorielle

$$(P_m): \qquad \mathbf{r}_{M_m} = \mathbf{r}_{M_0} + \mu_1\,\mathbf{u}_1 + \mu_2\,\mathbf{u}_2 + \lambda_m\,\mathbf{a}^{(m)}{}_M$$

où $\mathbf{a}_M^{(m)}$ est l'accélération d'ordre m d'un point $M \in (P)$ et λ_m est un paramètre, prend son extremum pour les valeurs de λ_m qui satisfont à la relation

$$1 - \lambda_m\,[A_m + A_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)] + \lambda_m^2\,[A_m \cdot A_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) + B_m^2(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)] = 0, \tag{12}$$

ce qui correspond aux valeurs $\lambda_m = \lambda_m'$, $\lambda_m = \lambda_m''$ définies par les relations (8), (9) *qui donnent des accélérations réduites.*

4. Quelques théorèmes de cinématique tangentielle plane où de l'espace. Soient $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$*) les coordonnées tangentielles d'un plan (P) d'équation cartésienne

$$(P): \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + 1 = 0. \tag{13}$$

Théorème VII. *Coordonnées tangentielles des plans (P), (P_m') [où bien (P), (P''_m)] définis par le théorème III, exprimées par les relations matricielles*

$$(P'_m): \qquad \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g_1' \\ g_2' \\ g_3' \end{Bmatrix} F', \qquad \mathbf{g}' \equiv (g_1', g_2', g_3'), \tag{14}$$

$$F' = [(\mathbf{r}_{M_0} - \lambda_m'\,\mathbf{r}_{M_0}^{(m)}) \cdot \mathbf{g}'], \tag{15}$$

---

*) Nous nous limiterons ici au cas des coordonnées non homogènes.

$$(16)\qquad g_1' = \begin{vmatrix} v_{12}' & v_{22}' \\ v_{13}' & v_{23}' \end{vmatrix}, \qquad g_2' = \begin{vmatrix} v_{13}' & v_{23}' \\ v_{11}' & v_{21}' \end{vmatrix}, \qquad g_3' = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{21}' \\ v_{12}' & v_{22}' \end{vmatrix},$$

$$(17)\qquad v'_{lk} = (\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{i}_k)(1 - \lambda_m' A_m) + \lambda_m' (\mathbf{B}_m \, \mathbf{u}_l \, \mathbf{i}_k) + \sum_{j=0}^{m-1} (\omega^{(j)} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{C}_{mj} \cdot \mathbf{u}_l),$$

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathbf{C}_{mj} = \mathbf{C}_{m-1,j-1} + D\,\mathbf{C}_{m-1,j}, \quad D \equiv \dfrac{d}{dt} - \omega \times, \\ \mathbf{C}_{10} \equiv \omega, \quad \mathbf{C}_{m-1,j-1} \equiv \mathbf{B}_{m-1}, \end{cases}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m-1; \quad l = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3)$$

où $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ *sont les verseurs des axes de coordonnées d'un repère fixe, expriment, comme il en résulte d'ailleurs par une autre voie* [9], [10], *que les plans* (P), (P'_m) *(ou bien* (P), (P''_m)*) constituent les bases des croix généralisées de* KOTELNIKOFF [11], [12], [13].

D'une manière analogue on peut énoncer, en prenant le point de départ des équations vectorielles d'une droite (D) animée d'un mouvement composé dans l'espace

$$(19)\qquad (D): \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M_0} + \mu (a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3), \; (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = \delta_{ij}, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$(i, j = 1, 2, 3)$$

et tout en tenant compte des équations vectorielles de la droite (D_m) associée à la première

$$(20)\qquad (D_m): \qquad \mathbf{r}_{M_m} = \mathbf{r}_M + \lambda_m \mathbf{a}_M^{(m)},$$

où l'on a

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathbf{a}_M^{(m)} &= \mathbf{a}_{M_0}^{(m)} + \mu(-A_m + B_m \times)(a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3) + \\ &+ \mu \sum_{j=1}^{m-1} \omega^{(j)} \Big(\mathbf{C}_{mj} \cdot (a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 a_2 + a_3 u_3) \Big) \end{aligned}$$

et où $\omega = \omega(t)$ est le vecteur vitesse angulaire instantané de la droite (D), et les symboles qui y interviennent sont donnés par (6), (18), le théorème duale au théorème précédent. On obtient de cette manière les croix généralisées duales de KOTELNIKOFF [14], [15] ayant pour droites fondamentales (D) donnée par (19) et (D_m)

$$(22)\qquad (D_m): \qquad \mathbf{r}_{M_m} = \mathbf{r}_M + \frac{\mathbf{a}_M^{(m)}}{A_m - A_m (a_1 \mathbf{u}_1 + o_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3)},$$

qui correspondent à l'accélération réduite d'ordre m

$$\mathrm{a}_{M_r}{}^{(m)} \equiv \frac{\mathrm{a}_M{}^{(m)}}{A_m - A_m(a_1 \mathrm{u}_1 + a_2 \mathrm{u}_2 + a_3 \mathrm{u}_3)} . \tag{23}$$

On obtient les scalaires $A_m(a_1 \mathrm{u}_1 + a_2 \mathrm{u}_2 + a_3 \mathrm{u}_3)$ par l'opération de polarisation par rapport à $\mathrm{u} \equiv a_1 \mathrm{u}_1 + a_2 \mathrm{u}_2 + a_3 \mathrm{u}_3$ par les formules analogues aux formules (10).

On obtient les formules correspondantes en coordonnées tangentielles en prenant comme point de départ une paire d'équations tangentielles des deux points de (D), à savoir

$$a_{1i} u_1 + a_{2i} a_2 + a_{3i} u_3 + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{24}$$

5. Les résultats acquis ont été utilisés par l'un des auteurs et quelques-uns de ses collaborateurs [16], ⋯, [20] à la résolution du problème de la distribution des accélérations d'ordre quiconque dans les chaînes cinématiques où bien dans les mécanismes plans où de l'espace, de l'importance incessamment croissante pour l'extension de l'automation, grâce à l'élaboration d'une méthode qui s'est montrée assez fructueuse, nommée *méthode des accélérations réduites.*

Ces mêmes résultats se prêtent aux généralisations concernant les croix au sens de KOTELNIKOFF [21] ayant à la base des variétés linéaires V_{n-k} de l'espace euclidien E_n à n dimensions.

Nous nous limiterons ici à l'application de la géométrie cinématique tangentielle, enrichie ci-dessus par une série de formules nouvelles, à l'établissement des équations tangentielles des courbes enveloppées par des droites invariablement liées aux bielles de certains mécanismes plans à quatre organes, étudiés tout à fait récemment d'une manière systématique au point de vue cartésien par M. I. I. ARTOBOLEVSKI [22]–[25].

Considérons le problème relatif aux courbes de bielle à droites enveloppes du mécanisme (*Fig.* 1) constitué de deux couples de translation et de deux autres de

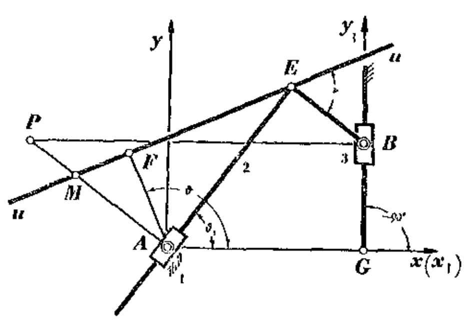

Fig. 1

rotation, ayant lieu alternativement l'une après l'autre. Soit $a - a$ une droite arbitrairement choisie dans le plan de la bielle. Soit P le centre instantané de rotation de la bielle [2]. On abaisse du point P la perpendiculaire PM sur la droite $u-u$. Le point M appartient à la courbe enveloppée linéairement par la droite $u-u$. Menons du point A la perpendiculaire AF sur la droite $u-u$ et désignons par p_1, a et b longueurs $AF=p_1$, $AG=a$, $EB=b$.

De l'équation cartésienne de la droite $u-u$

$$x\cos\vartheta+y\sin\vartheta=p, \tag{25}$$

ou bien

$$x\cos(\vartheta_1+\nu)+y\sin(\vartheta_1+\nu)=p_1\cos\nu$$

on obtient, tout en tenant compte des coordonnées tangentielles a, v de celle-ci *), les équations paramétriques tangentielles de la courbe cherchée, à savoir

$$\left\{\begin{aligned} u&=\frac{\cos(\vartheta_1+\nu)\cos\vartheta_1}{(a-b\sin\vartheta_1)\cos\nu},\\ v&=\frac{\sin(\vartheta_1+\nu)\cos\vartheta_1}{(a-b\sin\vartheta_1)\cos\nu},\end{aligned}\right. \tag{27}$$

tandis que ses équations paramétriques cartésiennes sont données par

$$\left\{\begin{aligned} x&=[p_1\cos(\vartheta_1+\nu)-\psi\sin(\vartheta_1+\nu)]\cos\nu,\\ y&=[p_1\sin(\vartheta_1+\nu)+\psi\cos(\vartheta_1+\nu)]\cos\nu,\\ p_1&=\frac{a-b\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_1},\qquad \psi=\frac{a\sin\vartheta_1-b}{\cos^2\vartheta_1}.\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Des simplifications assez intéressantes correspondent aux cas où l'on a $\nu=90°$; $\nu=0$.

Pour le mécanisme de LEBEAU [20] que l'on obtient du mécanisme considéré

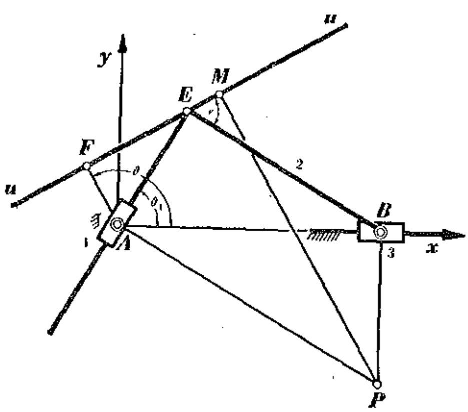

Fig. 2

*) Nous nous limiterons ici au cas de coordonnées non homogènes.

dans la fig. 1, les équations paramétriques tangentielles de la courbe enveloppée linéairement par la droite $u - a$ (*Fig.* 2) sont données par

$$
\text{(29)} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{b} \cos(\vartheta_1 + \nu) \operatorname{tg} \vartheta_1, \\[2ex] v = \dfrac{1}{b} \sin(\vartheta_1 + \nu) \operatorname{tg} \vartheta_1, \end{cases}
$$

tandis que celles de la courbe enveloppée par la droite $u - u$ liée au mécanisme

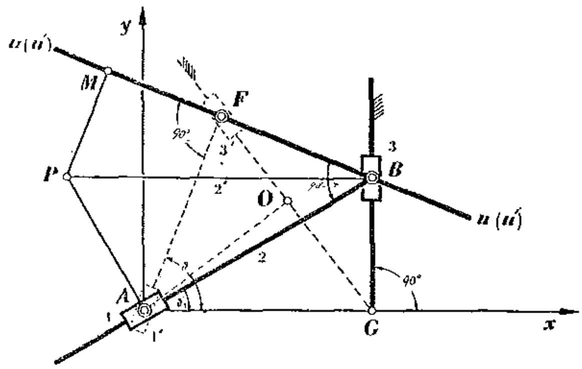

Fig. 3

(*Fig.* 3) que l'on obtient du mécanisme initial (*Fig.* 1) en y faisant $b = 0$, sont données par

$$
\text{(30)} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{a} \cos(\vartheta_1 + \nu) \cos \vartheta_1, \\[2ex] v = \dfrac{1}{a} \sin(\vartheta_1 + \nu) \cos \vartheta_1. \end{cases}
$$

Les équations (30) où bien les équations ponctuelles correspondantes

$$
\text{(31)} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos^2 \vartheta_1} \cos(2\vartheta_1 + \nu) \cos \nu, \\[2ex] y = \dfrac{a}{\cos^2 \vartheta_1} \sin(2\vartheta_1 + \nu) \cos \nu, \end{cases}
$$

représentent une parabole dont l'équation se réduit à

$$
\text{(32)} \qquad a v^2 = -u(a u + 1)
$$

pour $\nu = 0$. Dans ce cas les points A et G sont respectivement le foyer et le sommet de cette dernière. Dans [27] nous exposérons un algorithme de déduction des équations algébriques des courbes de bielle pour des mécanismes plans complexes [28]–[30] et y donnerons d'autres applications de la théorie générale des accélérations réduites d'ordre quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Mangeron : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 102, No. 4, 705–706, (1955).

[2] D. Mangeron, Gh. Cioranu, A. Braier : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 2 (6), fasc. 1–2, 29–67, (1956).

[3] Süeda Göneng : Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, A 20, fasc. 1–2, 17–46, (1955).

[4] D. Mangeron : Dokl. Aad. Nauk SSSR, 102, No. 5, 807–898, (1955).

[5] D. Mangeron : *Mechanisms Design based on the theory of reduced accelerations of any order*. Proceedings of the Seventh Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Bombay, 23rd Dec. to 26th Dec. (1961).

[6] D. Mangeron, C. Dragan : Rev. Méc. App., Académie de la République Populaire Roumaine, 2, No. 1, 145–156, (1957).

[7] D. Mangeron, C. Dragan : Rev. Méc. App., Académie de la République Populaire Roumaine, 7, No. 1, 41–62, (1962).

[8] D. Mangeron, D. Tavkhelidze : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 5 (9), fasc. 1–2, 303–306, (1959).

[9] D. Mangeron, E. Croitoru : Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. Fis., Mat. Nat., s. 8, 32, fasc. 5, (1962).

[10] D. Mangeron, Ia. S. Zilberman : Trudy Rostovskogo na Donu Inst. Inz. Zeleznodoroznogo transporta, XXIX, Prikladnaia Mehanika, 5–10, (1961).

[11] A. P. Kotelnikoff : Trudy Moskovskogo Inst. Inz. im. Baumana, 29–30, 3–27, (1937).

[12] D. Mangeron : Izv. Akad. Nauk SSSR, Mehanika i Masinostroenie, No. 1, 168–169, (1960).

[13] ——— : An. Şti. Univ. «Al. I. Cuza» din Iaşi, s. n., 1 ière Sect., 6, fasc. 3, 739–745, (1960).

[14] ——— : C. R. Acad. Bulgare des Sciences, (1962), (sous presse).

[15] C. Dragan : *Nouvelles méthodes de l'étude des mécanismes et des machines*. Thèse pour obtenir le grade de candidat ès sciences mathématiques et physiques (En roumain). Universitatea «Al. I. Cuza», Iaşi, (1961). Lit.

[16] Ia. S. Zilberman : Trudy Rostovskogo na Donu Instituta Inz. zeleznodoroznogo transporta, XXIX, Prikladnaia Mehanika, 11–91, (1961).

[17] V. Manafu : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 2 (6), fasc. 1–2, 311–320, (1956).

[18] A. I. Iasiulionis : Lietuvos Zemes Uklo Akademijos Moksllnial Darbai, 5, 253–259, (1958).

[19] D. Mangeron, C. Dragan, N. Irimiciuc : Mathematica, Cluj, 4 (27), 1, 159–200, (1962).

[20] D. Mangeron, C. Dragan, O. Munteanu : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 2 (6), fasc. 3–4, 263–281, (1956).

[21] D. Mangeron, E. Croitoru : Studii şi cercetari de Mecanica aplicata, 13, No. 5, 1177–1192, (1962).

[22] I. I. ARTOBOLEVSKI, : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144, No. 1, 76–78, (1962).

[23] ———— : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 139, No. 4, 838 840, (1961).

[24] ———— : Dokl. Akad. Nauk SSSR, 139, No. 5, 1077–1080, (1961).

[25] ———— : *O pewnej klasie krzywych lacznikowych. III* Ogolnopolska konferencja naukown katedr i zakladow teorii maszyn i mechanizmow (Rogow. 10.VI.1961). Katedra teorii maszyn i mechanizmow Politechniki Warszawskiej, Warszawa, p. 1, p. 11, (1961).

[26] I. I. ARTOBOLEVSKI, N. I. LEVITSKI, S. A. CERKUDINOV : Sintez ploskih mehanizmov, FIZMATGIZ, M., et loc. cit. (23, p. 839), (1960).

[27] D. MANGERON, P. A. LEBEDEV : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 8 (12), fasc. 1–2, (Sous presse), (1962).

[28] I. I. ARTOBOLEVSKI, : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 6 (10), fasc. 1–2, 285–298, (1960).

[29] P. A. LEBEDEV, : Bul. Inst. Politehn. Iaşi, s. n., 6 (10), fasc. 1–2, 299–302, (1960).

[30] N. I. MANOLESCU ET COLLABORATEURS : Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, 21 (sous presse), (1962).

INSTITUT POLYTECHNIQUE,
JASSY,
ROUMANIE

(Manuscrit reçu le 15 Juillet 1962)

ÖZET

Bundan önce yayınlanan [1], [2], [5] sayılı araştırmalarda, katı cisimlerin düzlem hareketlerinde söz konusu olan ve (1)–(3) sayılı araştırmalarda tarifleri verilen herhangi bir mertebeden indirgenmiş ivmeler teorisine dayanılarak ivme alanları problemi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar düzlem mekanizma hareketlerine ve en genel ASSUR gruplarına [6]–[8] tatbik olunmuştur.

Bu araştırmada ise, uzayda katı cisim takımlarının hareketleriyle ilgili herhangi bir mertebeden ve birinci veya ikinci neviden indirgenmiş ivmelerin [12]–[14] tarifleri ve bu bahisle alâkalı bir takım teoremler verildikten sonra düzlemin veya uzayın teğetsel kinematik geometrisi hakkında yeni neticeler ifade edilmiş ve bazı tatbikat gözden geçirilmiştir.