DÉRIVATION DE L'ÉQUATION DE NORDHEIM À PARTIR DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

AHMED YÜKSEL ÖZEMRE

Dans cet article l'équation de NORDHEIM est déduite en se basant uniquement sur l'équation de diffusion des neutrons thermiques d'un milieu multiplicateur. Ceci est réalisé en ajoutant à l'équation de diffusion un terme de source qui exprime convenablement la contribution de m groupes différents de neutrons retardés au bilan neutronique du milieu.
La considération d'une seule équation différentielle pour obtenir l'équation de NORDHEIM constitue évidemment une simplification importante par rapport à la méthode appliquée jusqu'à présent qui consiste à se servir simultanément de l'équation de diffusion des neutrons thermiques et de m équations couplées donnant les densités des noyaux-mères, produits de fission, émettant les neutrons retardés.

Le procédé classique pour obtenir l'expression de l'équation de NORDHEIM [1] qui fournit les périodes stables et transitoires d'un milieu multiplicateur en fonction de la réactivité du système d'une part et du coefficient de multiplication et des caractéristiques des m groupes de neutrons retardés de l'autre part, consiste à considérer l'équation de diffusion donnant le flux neutronique, avec les m équations donnant les densités des m groupes de noyaux-mères produisant les neutrons retardés. On suppose alors que le système est assez proche de la criticalité et que par conséquent le flux neutronique peut être calculé avec satisfaction à partir du mode fondamental de l'équation des ondes en posant:

$$\Phi(\mathrm{r}, t) = R(\mathrm{r})\, T(t) = R(\mathrm{r})\, e^{\omega t},$$

$$C_i(\mathrm{r}, t) = C_i(\mathrm{r})\, T(t) = C_i(\mathrm{r})\, e^{\omega t}.$$

L'élimination de $\Phi(\mathrm{r}, t)$ et de $C_i(\mathrm{r}, t)$ qui sont respectivement le flux neutronique et la densité des noyaux-mères du groupe i, dans ces $m+1$ équations nous conduit finalement à la formule de NORDHEIM.

Dans l'article présent, nous nous proposons de montrer que la même formule peut être obtenue en se basant uniquement sur l'équation de diffusion des neutrons thermiques en y ajoutant toutefois un terme convenable pour tenir compte de la contribution des neutrons retardés au bilan neutronique du milieu.

L'équation de la diffusion des neutrons thermiques s'écrit d'aprés la théorie de l'âge:

$$D \nabla^2 \Phi(\mathrm{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t) + e^{-B^2{}_g \tau}(1 - \beta) k_\infty \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t) + G(\mathrm{r}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathrm{r}, t)}{\partial t} \tag{1}$$

où β est la proportion des neutrons retardés et $G(\mathrm{r}, t)$ la densité des neutrons retardés thermalisés. Pour pouvoir écrire explicitement $G(\mathrm{r}, t)$, remarquons que le nombre de neutrons absorbés par cm³ dans l'intervalle de temps dt' entourant t' est donné par

$$\Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t')\, dt'.$$

Ceux ci vont donner lieu à

$$\frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t')\, dt'$$

neutrons (*rapides*) de fission. Par conséquent le nombre de noyaux-mères dans le même intervalle de temps émettant conformément aux lois quantitatives générales de la radioactivité des neutrons retardés appartenant au groupe i sera donné par

$$\beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t)\, dt'.$$

De ces noyaux-mères qui vont se désintégrer il n'en restera que

$$\beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t')\, e^{-\lambda_i(t-t')}\, dt'$$

à l'instant t. Donc le nombre de neutrons retardés à l'instant t dûs au flux neutronique à l'instant t' sera donné par

$$\lambda_i \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t')\, e^{-\lambda_i(t-t')}\, dt'. \tag{2}$$

Une fraction de ces neutrons retardés sera absorbée dans la région des résonances de la matière fissile et une autre fraction s'échappera du milieu pendant la modération avant d'atteindre le domaine thermique. La fraction qui atteindra le domaine thermique sera obtenue en multipliant l'expression (2) par la probabilité antitrappe p et par la probabilité antifuite $e^{-B_g{}^2\tau}$ pendant la modération; cette fraction sera donc:

$$p\, e^{-B_g{}^2\tau} \lambda_i \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t')\, e^{-\lambda_i(t-t')}\, dt'. \tag{3}$$

Il est évident que lorsque le milieu multiplicateur est «allumé» pour la première fois, le nombre de neutrons retardés doit être nul à cet instant d'«allumage». Or nous constatons que, tant que $\Phi(\mathrm{r}, t')$ reste fini, l'expression (3) n'est nulle que pour $t' = -\infty$. Donc l'instant $t' = -\infty$ doit être considéré d'après ce formalisme comme l'instant d'«allumage» du milieu multiplicateur. Par conséquent, le nombre de neutrons retardés du groupe t à l'instant t sera exprimé par l'intégrale de $t' = -\infty$ à $t' = t$ de l'expression (3). La somme de tous les neutrons retardés par unité de volume et de temps sera donc donnée par la somme des contributions de tous les groupes de nentrons retardés, c'est-à-dire par:

$$G(\mathrm{r}, t) = k_\infty \, e^{-B_g^2 \tau} \Sigma_a \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \int_{-\infty}^{t} \Phi(\mathrm{r}, t') \, e^{-\lambda_i (t-t')} \, dt'. \tag{4}$$

Dans ce cas, l'équation de diffusion (1) admettra après quelques arrangements convenables la forme:

$$\begin{aligned} & L^2 \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \left[(1-\beta) k_\infty \, e^{-B_g^2 \tau} - 1\right] \Phi(\mathbf{r}, t) + \\ & + k_\infty \, e^{-B_g^2 \tau} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i \int_{-\infty}^{t} \Phi(\mathrm{r}, t') \, e^{-\lambda_i (t-t')} \, dt' = l^* \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour pouvoir obtenir la formule de Nordheim nous admettrons:

1) que le milieu multiplicateur est trés proche de la criticalité, de sorte qu'il soit possible de se contenter du mode fondamental de la partie spatiale $R(\mathrm{r})$ du flux neutronique qui s'annulle à la frontière du milieu multiplicateur et qui satisfait de ce fait à l'équation

$$\nabla^2 R(\mathrm{r}) + B_g^2 R(\mathrm{r}) = 0 \tag{6}$$

où B_g^2 est le laplacien géométrique correspondant,

2) que le flux neutronique peut s'exprimer sous la forme de

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}) \cdot \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \, e^{\omega_j t}. \tag{7}$$

Si nous portons l'expression (7) dans (5) nous aurons, en tenant compte de (6):

$$(8)\quad \sum_{j=1}^{n}\Big\{-L^2 B_g^{\,2}+(1-\beta)\,k_\infty\, e^{-B_g^{\,2}\tau}-1+ + k_\infty\, e^{-B_g^{\,2}\tau}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\beta_i\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{\omega_j t'}\,e^{-\lambda_i(t-t')}}{e^{\omega_j t}}\,dt'-l^*\,\omega_j\Big]\,\varphi_j\,e^{\omega_j t}\,R(\mathrm{r})=0\,.$$

t et r étant des variables indépendantes, $e^{\omega_j t} R(\mathrm{r})$ peut prendre n'importe quelle valeur ; alors, pour que cette somme soit nulle il faut et il suffit que l'expression entre les accollades soit identiquement nulle pour chaque j. Après avoir évalué l'intégrale, celle-ci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(9)\qquad \frac{l^*\,\omega_j}{1+L^2 B_g^{\,2}}=(1-\beta)\,\frac{k_\infty\, e^{-B_g^{\,2}\tau}}{1+L^2 B_g^{\,2}}-1+\frac{k_\infty\, e^{-B_g^{\,2}\tau}}{1+L^2 B_g^{\,2}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\,\beta_i}{\omega_j+\lambda_i}\,,$$

$$(j=1,2,\ldots,n).$$

Or si nous remarquons que

$$(10)\qquad \frac{k_\infty\, e^{-B_g^{\,2}\tau}}{1+L^2 B_g^{\,2}}=k_{eff}$$

et que

$$(11)\qquad k_{eff}-1=\delta k_{eff}\,,$$

après avoir posé

$$(12)\qquad l_{eff}=\frac{l^*}{1+L^2 B_g^{\,2}}$$

et

$$(13)\qquad \beta=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\,,$$

nous aurons comme une expression analogue à (9)

$$(14)\qquad l_{eff}\,\omega_j=\delta k_{eff}+k_{eff}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\lambda_i\,\beta_i}{\omega_j+\lambda_i}-\beta_i\Big)= =\delta k_{eff}-k_{eff}\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega_j\,\beta_i}{\omega_j+\lambda_i}\,,$$

$$(j=1,2,\ldots,n).$$

D'autre part la réactivité étant définie par la relation

$$\varrho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} = \frac{\delta k_{eff}}{k_{eff}}, \tag{15}$$

l'expression (14) se réduit à la forme de

$$\frac{\delta k_{eff}}{k_{eff}} = \varrho = \frac{l_{eff}\,\omega_j}{k_{eff}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\omega_j\,\beta_i}{\omega_j + \lambda_i}, \tag{16}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Or ce sont des équations de $(m+1)^e$ degré en ω_j, et quelque soit j, chaque équation admet toujours la même forme; donc toutes ces équations ne sont qu'une même équation qui admet $m+1$ racines:

$$\varrho = \frac{l_{eff}\,\omega}{k_{eff}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\omega\,\beta_i}{\omega + \lambda_i}. \tag{17}$$

Cette équation unique dont les racines fournissent les arguments des exponentielles dans l'expression du flux neutronique (7) constitue, comme on le sait, l'équation de NORDHEIM.

Pour terminer, montrons également que l'on peut parvenir aux m équations classiques donnant la variation par rapport au temps de la concentration de chaque espèce de noyau-mère de neutrons retardés, à partir de l'expression de la concentration pour le groupe i établie plus haut.

En effet, nous avons vu qu'à l'instant t il existait par cm^3 du milieu multiplicateur

$$\beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathrm{r}, t') e^{-\lambda_i(t-t')}\, dt'$$

noyaux-mères d'espèce i dûs à la valeur du flux neutronique au temps t'; cela revient, en somme, à dire qu'à l'instant t, la valeur de la concentration des noyaux-mères de neutrons retardés appartenant au groupe i est donnée par

$$C_i(\mathrm{r}, t) = \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \int_{-\infty}^{t} \Phi(\mathrm{r}, t')\, e^{-\lambda_i(t-t')}\, dt', \tag{18}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

En se servant de la règle de la différentiation sous le signe intégral dérivons cette dernière expression par rapport à t. Nous obtenons ainsi:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{19}$$

qui, avec l'équation de diffusion des neutrons thermiques (5) réécrite en tenant compte des relations (18)

$$\begin{aligned} L^2 \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \left[(1-\beta) k_\infty \, e^{-B_g^2 \tau} - 1\right] \Phi(\mathbf{r}, t) + \\ + p \, e^{-B_g^2 \tau} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = l^* \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{20}$$

constituent les $m+1$ équations nécessaires pour la dérivation de l'équation de Nordheim telle qu'elle a été faite jusqu'a présent [1]. Ainsi venons-nous de démontrer que, pour obtenir l'équation (17), la méthode décrite dans cet article est, au fond, équivalente à la méthode classique mais qu'elle a pourtant l'avantage d'être plus succinte et de n'avoir recours qu'à l'équation de diffusion des neutrons thermiques tenant compte de la contribution des neutrons retardés au bilan neutronique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. GLASSTONE AND M. EDLUND : **The Elements of Nuclear Reactor Theory**, 6th print., Chapter X, D. VAN NOSTAAND CO. INC., Toronto, New York, London, (1957).

ÇEKMECE NÜKLEER ARAŞTIRMA
VE EĞİTİM MERKEZİ
İSTANBUL — TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 15 Mai 1963)

ÖZET

Bu makalede NORDHEIM denklemi, sâdece çoğaltkan bir ortamın ılık nötronlarının difüzyon denklemine dayanılarak çıkartılmaktadır. Bu, farklı *m* grup gecikmiş nötronun ortamın nötron bilânçosuna iştiraklerini uygun bir tarzda ifâde eden bir kaynak teriminin difüzyon denklemine ilâvesiyle gerçekleştirilmiştir.

NORDHEIM denklemini elde etmek için tek bir diferansiyel denklemin göz önüne alınmış olması, şimdiye kadar tatbik edilmekte olan ve ılık nötronların difüzyon denkleminden ve aynı zamanda gecikmiş nötron neşreden fisyon ürünü ana çekirdeklerin yoğunluklarını veren *m* adet kuple denklemden faydalanma esâsına dayanan metoda nisbetle âşikâr olarak mühim bir sâdelik arzetmektedir.