

Salkowski Eğrisinin Birim Darboux Vektörünün Sabban Çatısından Elde Edilen Smarandache Eğrileri

Melek UZUN¹, Süleyman ŞENYURT^{2*}

ÖZET: Bu çalışmada ilk olarak Salkowski eğrisine ait birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrinin Sabban çatısı oluşturuldu. Daha sonra bu çatı konum vektörü olarak alınarak Smarandache eğrileri tanımlandı. Son olarak da her bir Smarandache eğrisinin geodezik eğrilikleri hesaplanarak esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadeleri elde edildi. Maple programı ile çizimleri yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Salkowski eğrisi, Darboux vektörü, Smarandache eğrileri, Sabban çatısı

Smarandache Curves According to Sabban Frame Generated by the Spherical Indicatrix Curves of the Unit Darboux Vector of Salkowski Curve

ABSTRACT: In this paper, we investigate special Smarandache curves according to Sabban frame of unit Darboux vector belonging to Salkowski curve. We also created Sabban frame belonging to this curve. We defined Smarandache curves generated by the position vector of the Sabban curves. Finally we calculated geodesic curvatures of these Smarandache curves.

Keywords: Salkowski curve, Darboux vector, Smarandache curves, Sabban frame

¹ Melek UZUN (Orcid ID: 0000-0002-1598-1345), Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu, Türkiye

² Süleyman ŞENYURT (Orcid ID: 0000-0003-1097-5541), Ordu Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ordu, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Süleyman ŞENYURT, e-mail: ssenyurt@odu.edu.tr

GİRİŞ

Erich Salkowski, (1881-1943) bir Alman matematikçidir. 1909'da "Zur Transformation von Raumkurven" isimli çalışmasında eğriliği sabit, torsiyonu sabit olmayan eğriler ailesini tanımlamıştır (Salkowski, 1909). Literatürde bu tür eğriler Salkowski eğrileri olarak bilinmektedir. 2009'da J. Monverde, Salkowski eğrisinin asli normalinin sabit doğrultu ile sabit açı yaptığını göstermiştir (Monverde, 2009). 2008'de M.Turgut ve S.Yılmaz, Minkowski space- time uzayında Smarandache eğrilerini tanımlamışlar bu tür eğrilerin özelliklerini vermişlerdir (Turgut ve Yılmaz, 2008). Daha sonra Öklid uzayında Smarandache eğrileri tanımlanmış ve yeni açılımlar elde edilmiştir (Ali, 2010; Bektaş ve Yüce, 2013; Şenyurt ve Sivas, 2013; Şenyurt ve Öztürk, 2018). 1990'da J.Koenderink, küresel bir eğrinin Sabban çatısına göre geodezik eğriliği tanımlamış (Koenderink,1990). Daha sonraki yıllarda S. Gür ve S. Şenyurt Salkowski eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin Frenet vektörlerini ve geodezik eğriliklerini (Gür ve Şenyurt, 2010), M. Tosun ve K. Taşköprü küresel bir eğrinin Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğriliklerini (Tosun ve Taşköprü, 2014) hesaplamışlardır.

MATERYAL VE YÖNTEM

Diferansiyellenebilir herhangi bir α eğrisinin Serre- Frenet vektörleri, eğrilikleri ve Frenet formülleri sırasıyla

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \wedge T, \quad B = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2},$$

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N$$

bağıntısıyla verilir. Eğri birim hızlı ise Frenet vektörleri

$$T = \alpha', \quad N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}, \quad B = T \wedge N$$

şeklinde olur (Sabuncuoğlu, 2006). Frenet vektörleri parametreye bağlı olarak eğri boyunca bir eksen etrafında döndüğü varsayılır. Bu eksene eğrinin Darboux (ani dönme) eksenini, bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre de Darboux vektörü adı verilir ve W ile gösterilir. Bu vektör

$$W = \tau T + \kappa B$$

bağıntısıyla verilir (Fencel, 1951). Bu vektör yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

olur. B ile W vektörleri arasındaki açı θ ile gösterilirse

$$C = \sin \theta T + \cos \theta B, \quad \cos \theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}},$$

şeklinde bulunur (Fencel, 1951).

γ vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrinin teğet vektörü t , γ ile t nin vektörel çarpımı $d = \gamma \wedge t$ ile gösterilsin. Bu vektörlerin oluşturduğu $\{\gamma, t, d\}$ ortonormal sistemine Sabban çatısı denir (Koenderink, 1990; Taşköprü ve Tosun, 2014). Bu çatıya göre Sabban formülleri,

$$\gamma' = t, \quad t' = -\gamma + \kappa_g d, \quad d' = -\kappa_g t, \quad \kappa_g = \langle t', d \rangle$$

şeklinde verilir. Burada K_g küresel eğrinin geodezik eğriliğidir (Koenderink, 1990).

Tanım 2.1: Herhangi bir $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m \neq 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, m bir reel sayı, olmak üzere

$$\gamma_m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\begin{array}{l} -\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)t) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)t) - \frac{1}{2} \sin(t), \\ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)t) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)t) + \frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{4m} \cos(2nt) \end{array} \right)$$

şeklinde tanımlı eğriye Salkowski eğrisi denir. Bu eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri

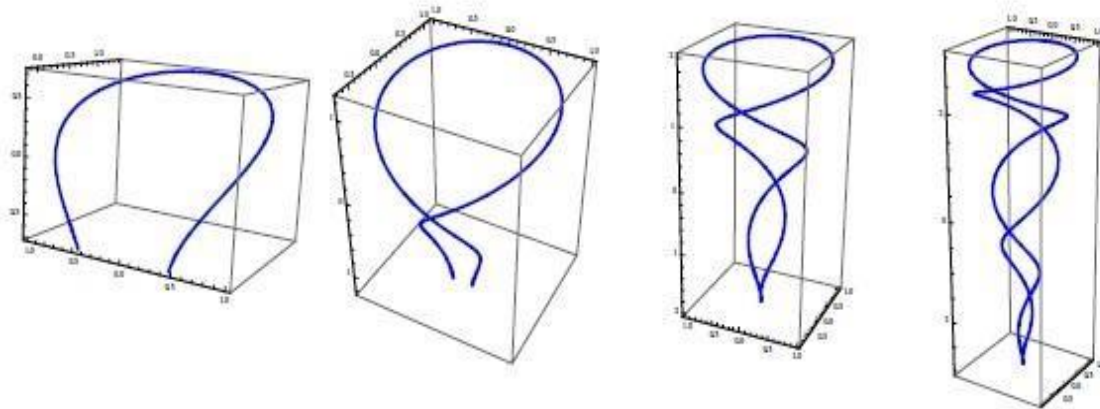
$$T = \left(\cos(t) \cos(nt) + n \sin(t) \sin(nt), \sin(t) \cos(nt) - n \cos(t) \sin(nt), \frac{n}{m} \sin(nt) \right)$$

$$N = n \left(\frac{\sin(t)}{m}, \frac{\cos(t)}{m}, -1 \right)$$

$$B = \left(-\cos(t) \sin(nt) + n \sin(t) \cos(nt), -\sin(t) \sin(nt) - n \cos(t) \cos(nt), \frac{n}{m} \cos(nt) \right),$$

$$\kappa = 1 \text{ ve } \tau = \tan(nt), \quad \|\gamma'_m(t)\| = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{1+m^2}}$$

şeklinde verilir (Salkowski, 1909; Monterde, 2008). $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için Salkowski eğrisine ait grafikler Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Salkowski eğrisi

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ilk olarak Salkowski eğrisine ait Frenet vektörlerinin, etrafında döndüğü birim Darboux vektörü ifade edildi. Daha sonra bu vektörün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı oluşturularak Smarandache eğrileri tanımlandı. Son olarak her bir Smarandache eğrisi Salkowski eğrisinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi verilerek geodezik eğrilikleri hesaplandı ve grafikleri çizildi.

Salkowski eğrisinin eğriliği $\kappa = 1$ ve torsiyonu $\tau = \tan(nt)$ olduğundan bu eğrinin birim Darboux vektörü

$$C = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B,$$

$$C = \frac{\tan(nt)}{\sqrt{1 + \tan^2(nt)}} T + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(nt)}} B,$$

$$C = \sin(nt)T + \cos(nt)B$$

şeklinde bulunur. Burada T ve B vektörü yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$C = \left(-\sin(2nt)\cos(t) + n\cos(2nt)\sin(t), -\sin(2nt)\sin(t) - n\cos(2nt)\cos(t), \frac{n}{m}\cos(2nt) \right)$$

olur. C vektörün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğri $\alpha_C(t) = C$ ile gösterilsin. Türev alınırsa T_C teğet vektörü

$$\frac{d\alpha_C}{ds} \frac{ds}{dt} = n\cos(nt)T + \sin(nt)T' - n\sin(nt)B + \cos(nt)B',$$

$$T_C = \cos(nt)T - \sin(nt)B.$$

T ve B vektörlerinin eşitleri burada yerine yazılırsa T_C teğet vektörü

$$T_C = \left(-\cos(t)\cos(2nt) - n\sin(2nt)\sin(t), -\sin(t)\cos(2nt) + n\sin(2nt)\cos(t), -\frac{n}{m}\sin(2nt) \right)$$

şeklinde bulunur. C ve T_C vektörleri vektörel çarpılırsa $C \wedge T_C = N$ olur. T_C vektörünün türev alınır ve sonra $C \wedge T_C$ ile iç çarpılırsa K_g geodezik eğriliği,

$$T_C' = -\sin(nt)T + \frac{1}{n}\sec(nt)N - \cos(nt)B,$$

$$K_g = \left\langle T_C', C \wedge T_C \right\rangle = \frac{\sec(nt)}{n}$$

olur. Buna göre C vektörünün küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrinin Sabban formülleri

$$C' = T_C, \quad T_C' = -C + \frac{\sec(nt)}{n} C \wedge T_C, \quad (C \wedge T_C)' = -\frac{\sec(nt)}{n} T_C$$

şeklinde elde edilir.

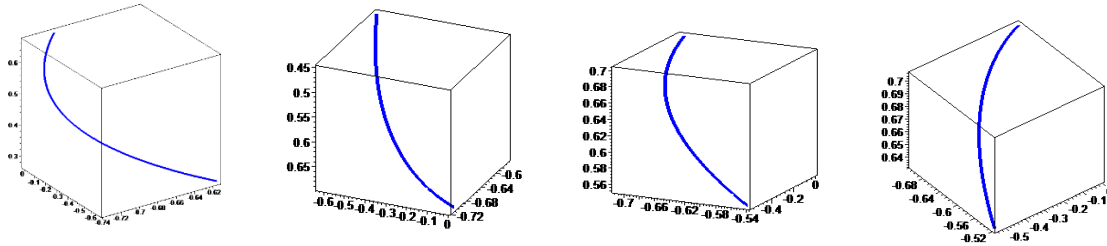
Tanım3.1: Salkowski eğrisine ait birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun.

$$\beta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C + T_C)$$

şeklinde tanımlı $\beta_1(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye CT_C Smarandache eğrisi denir. Burada C ve T_C nin yerine değerleri yazılırsa $\beta_1(t)$ eğrisi

$$\beta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{l} n \sin(t)(\cos(2nt) - \sin(2nt)) - \cos(t)(\cos(2nt) + \sin(2nt)), \\ -\sin(t)(\sin(2nt) + \cos(2nt)), \frac{n}{m}(\cos(2nt) - \sin(2nt)) \end{array} \right)$$

şeklinde bulunur (Şekil 2).



Şekil 2. $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için $\beta_1(t)$ Smarandache eğrisi

Teorem 3.1: $\beta_1(t)$ Smarandache eğrisinin $K_g^{\beta_1}$ geodezik eğriligi

$$K_g^{\beta_1} = \frac{n^5 \sqrt{2}}{\sqrt{(2n^2 + \sec^2(nt))^5}} \left(\frac{\sec^5(nt)}{n^5} + \frac{4\sec^3(nt)}{n^3} + 4\frac{\sec(nt)}{n} + \frac{2n^2 \cos^2(nt) \sin(nt) + \sin(nt)}{n^2 \cos^4(nt)} \right)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat: $\beta_1(t)$ eğrisinin türevi alınırsa T_{β_1} teğet vektörü

$$T_{\beta_1} = \frac{-C + T_C + K_g C \wedge T_C}{\sqrt{2 + K_g^2}}$$

olur. T_{β_1} ile C vektörünün vektörel çarpımı $C \wedge T_{\beta_1} = \frac{-K_g T_C + C \wedge T_C}{\sqrt{2 + K_g^2}} \cdot T_{\beta_1}$ in türevi

$$T_{\beta_1}' = \frac{\sqrt{2}}{(2 + K_g^2)^2} \left((K_g K_g' - K_g^2 - 2)C + (-K_g^4 - 3K_g^2 - K_g K_g' - 2)T_C + (K_g^3 + 2K_g + 2K_g')C \wedge T \right)$$

dır. T_{β_1}' , $C \wedge T_{\beta_1}$ ve K_g ifadeleri geodezik eğrilik bağıntısında yerine yazılırsa $K_g^{\beta_1}$ hesaplanmış olur.

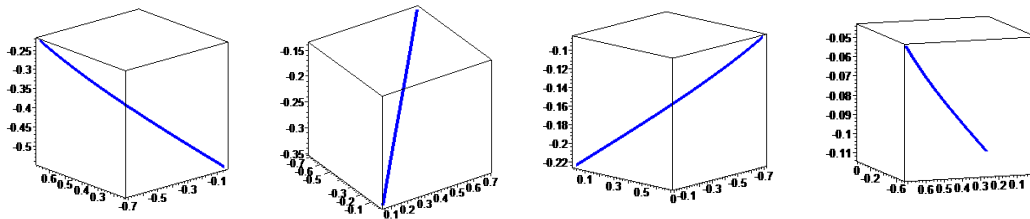
Tanım 3.2: Salkowski eğrisine ait birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun.

$$\beta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_C + C \wedge T_C)$$

şeklinde tanımlı $\beta_2(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_C C \wedge T_C$ - Smarandache eğrisi denir. Burada T_C ve $C \wedge T_C$ nin yerine değerleri yazılırsa $\beta_2(t)$ eğrisi

$$\beta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \cos(2nt) - n \sin(2nt) \sin(t) + \frac{n}{m} \sin(t), \\ -\sin(t) \cos(2nt) + n \sin(2nt) \cos(t) + \frac{n}{m} \cos(t), -n - \frac{n}{m} \sin(2nt) \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur (Şekil 3).



Şekil 3. $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için $\beta_2(t)$ Smarandache eğrisi

Teorem 3.2: $\beta_2(t)$ Smarandache eğrisinin $K_g^{\beta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}n^5 \left(4 \left(\frac{\sec^5(nt)}{n^5} + \frac{\sec^3(nt)}{n^3} \right) + \frac{2 \sin(nt) + \cos^2(nt)}{\cos^3(nt)} \right)}{(n^2 + 2 \sec^2(nt))^{\frac{5}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat: $\beta_2(t)$ eğrisinin türevi alınırsa T_{β_2} teğet vektörü

$$T_{\beta_2} = \frac{-C - K_g T_C + K_g (C \wedge T_C)}{\sqrt{1 + 2K_g^2}}$$

olur. T_{β_2} ile C vektörü vektörel çarpılırsa $C \wedge T_{\beta_2} = \frac{-K_g T_C - K_g (C \wedge T_C)}{\sqrt{1 + 2K_g^2}}$ bulunur. T_{β_2} nin türevi

$$T_{\beta_2}' = \frac{\sqrt{2}(2K_g^3 + 2K_g K_g' + K_g)C + \sqrt{2}(-2K_g^4 - 3K_g^2 - K_g' - 1)T_C + \sqrt{2}(-2K_g^4 - K_g^2 + K_g')(C \wedge T_C)}{(\sqrt{1 + 2K_g^2})^2}$$

dır. T_{β_2}' , $C \wedge T_{\beta_2}$ ve K_g ifadeleri geodezik eğrilik bağıntısında yerine yazılırsa $K_g^{\beta_2}$ hesaplanmış olur.

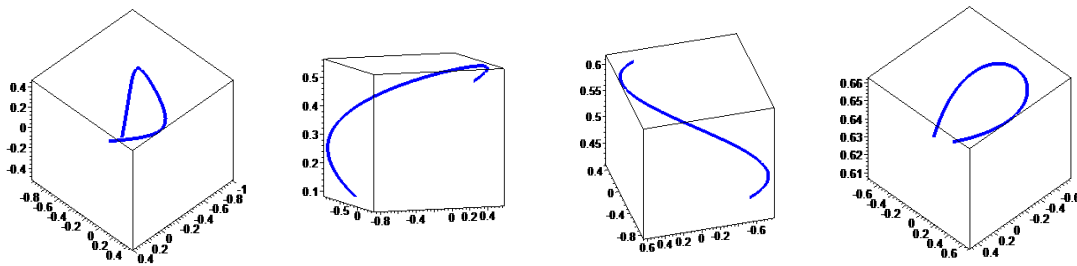
Tanım 3.3: Salkowski eğrisine ait birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun.

$$\beta_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C + C \wedge T_C)$$

şeklinde tanımlı β_3 vektörünün çizdiği regüler eğriye $CC \wedge T_C$ - Smarandache eğrisi denir. Burada C ve $C \wedge T_C$ nin yerine değerleri yazılırsa β_3 eğrisi

$$\beta_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin(2nt)\cos(t) + n\cos(2nt)\sin(t) + \frac{n}{m}\sin(t), -\sin(2nt)\sin(t) - n\cos(2nt)\cos(t) + \frac{n}{m}\cos(t), \frac{n}{m}\cos(2nt) - n \right)$$

şeklinde bulunur (Şekil 4).



Şekil 4. $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için $\beta_3(t)$ Smarandache eğrisi

Teorem 3.3: $\beta_3(t)$ Smarandache eğrisinin $K_g^{\beta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} \sec(nt)}{n - \sec(nt)}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat: $\beta_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C + C \wedge T_C)$ ifadesini türevi alınırsa T_{β_3} teğet vektörü

$T_{\beta_3} = T_C$ olur. Bu ifade C ile vektörel çarpılırsa $C \wedge T_{\beta_3} = C \wedge T_C$. T_{β_3} ün türevi alınırsa

$$T_{\beta_3}' = -\frac{\sqrt{2}C + \sqrt{2}K_g(C \wedge T_C)}{1 - K_g}$$

Olur. T_{β_3}' , $C \wedge T_{\beta_3}$ ve K_g ifadeleri geodezik eğrilik bağıntısında yerine yazılırsa $K_g^{\beta_3}$ elde edilir.

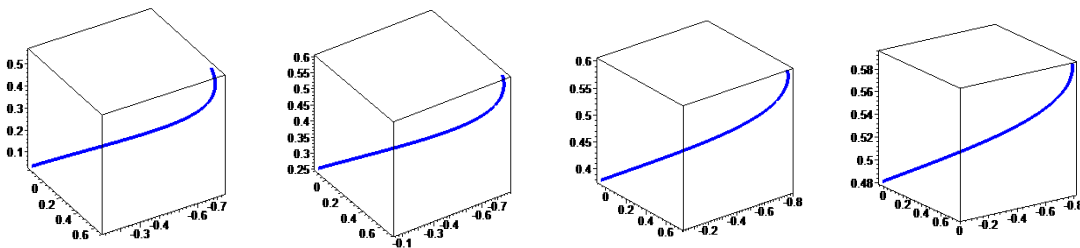
Tanım 3.4: Salkowski eğrisine ait birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun.

$$\beta_4(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C + T_C + C \wedge T_C)$$

şeklinde tanımlı β_4 vektörünün çizdiği regüler eğriye $CT_C C \wedge T_C$ Smarandache eğrisi denir. Burada C, T_C ve $C \wedge T_C$ vektörlerinin yerine değerleri yazılırsa β_4 eğrisi

$$\beta_4(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{l} n \sin(t)(\cos(2nt) - \sin(2nt)) - \cos(t)(\cos(2nt) + \sin(2nt)) + \frac{n}{m} \sin(t), \\ -\sin(t)(\sin(2nt) + \cos(2nt)) + \frac{n}{m} \cos(t), n \left(\frac{\cos(2nt)}{m} - \frac{\sin(2nt)}{m} - 1 \right) \end{array} \right)$$

şeklinde bulunur (Şekil 5).



Şekil 5. $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için $\beta_4(t)$ Smarandache eğrisi

Teorem 3.4: $\beta_4(t)$ Smarandache eğrisinin $K_g^{\beta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}n^5 \left(\begin{array}{l} 4 \frac{\sec^5(nt)}{n^5} - 8 \frac{\sec^4(nt)}{n^4} + 12 \frac{\sec^3(nt)}{n^3} - 8 \frac{\sec^2(nt)}{n^2} + 4 \frac{\sec(nt)}{n} + 2 \sec^3(nt) \tan(nt) \\ -2 \sec^2(nt) \tan(nt) + 2 \sec(nt) \tan(nt) \end{array} \right)}{4\sqrt{2} \left(n^2 - \sec(nt)n + \sec^2(nt) \right)^{\frac{5}{2}}}$$

İspat: $\beta_4(t)$ eğrisinin türevi alınırsa T_{β_4} teğet vektörü

$$T_{\beta_4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-K_g+K_g^2}} \left(-C + (1-K_g)T_C + K_g(C \wedge T_C) \right)$$

olur. Bu ifade C ile vektörel çarpılırsa $C \wedge T_{\beta_4} = \frac{-K_g T_C + (1-K_g)C \wedge T_C}{\sqrt{2}\sqrt{1-K_g+K_g^2}}$

bulunur. T_{β_4} ün türevi alınırsa

$$T_{\beta_4}' = \frac{\sqrt{3} \left(\begin{aligned} & \left(2K_g^3 - 4K_g^2 + 2K_g K_g' - K_g' + 4K_g - 2 \right) C + \left(-2K_g^4 + 2K_g^3 - 4K_g^2 - K_g K_g' - K_g' + 2K_g - 2 \right) T_C \\ & + \left(-2K_g^4 + 4K_g^3 - 4K_g^2 - K_g K_g' + 2K_g' + 2K_g \right) C \wedge T_C \end{aligned} \right)}{4(1-K_g+K_g^2)}$$

olur. T_{β_4}' , $C \wedge T_{\beta_4}$ ve K_g ifadeleri yerlerine yazılırsa $K_g^{\beta_4}$ elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak Salkowski eğrisine ait Frenet vektörlerinin, etrafında döndüğü birim Darboux vektörü ifade edildi. Daha sonra bu vektörün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrisinin Sabban çatısı oluşturularak Smarandache eğrileri tanımlandı. Son olarak da her bir Smarandache eğrisini Salkowski eğrisinin Frenet aparatları cinsinde ifadesi verilerik geodezik eğrilikleri hesaplandı ve Maple programı ile her bir eğrinin grafikleri çizildi.

KAYNAKLAR

- Ali A.T, 2010. Special Smarandache Curves in the Euclidean Space. International Journal of Mathematical Combinatorics, 2: 30-36.
- Bektaş Ö, Yüce S, 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in E3. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 3(1): 48-59.
- Fenchel W, 1951. On the differential geometry of closed space curves. Bull Amer Math Soc, 57: 44-54.
- Gür S, Şenyurt S, 2010. Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Spheric Indicators of Salkowski Curve in E3. Hadronic Journal, 33(5): 485.
- Monterde J, 2009. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non- constant torsion. Computer Aided Geometric Design, 26: 271-278.
- Sabuncuoğlu S, 2006. Diferensiyel Geometri. NobelYayınları, No:258, s.60-78, Ankara – Türkiye Salkowski E.L, 1909. Zur Transformation von Raumkurven. Mathematisch Annalen, 4(66): 517-557.
- Şenyurt S, Sivas S, 2013. Smarandache eğrilerine ait bir uygulama. Ordu University Journal of Science ve Technology, 3(1): 46-60.
- Şenyurt S, Öztürk B, 2018. Smarandache Curves of Salkowski Curve According to Frenet Frame. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 10: 190-201.
- Taşköprü K, Tosun M, 2014. Smarandache curves according to Sabban frame on S2. Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 32(1): 51-59.
- Turgut M, Yılmaz S, 2008. Smarandache Curves in Minkowski Space-Time. International J.Math. Combin., 3(2008): 51-55.