SUR LE PROBLÈME DE L'ÉLASTICITÉ

ROGER BOUDET

La présente étude a pour but final la résolution par des méthodes numériques des problèmes de l'élasticité. Elle n'est cependant relative qu'à la phase préparatoire qui consiste à définir des fonctions de déplacement ou de contraintes et à établir les équations aux dérivées partielles que ces fonctions vérifient.

Introduction. L'étude débute par l'établissement d'une expression, pour le déplacement, de la solution de l'équation d'équilibre, cette expression étant présentée d'une manière très générale de façon à laisser la possibilité du choix des fonctions inconnues au mieux des conditions particulières des problèmes à traiter.

Compte tenu de cette solution sur le déplacement, le calcul des contraintes est ensuite abordé de la même manière très générale, les différentes possibilités de particularisation des fonctions inconnues devant alors permettre d'envisager la plus large diversité de fonctions. En particulier, les plus connues parmi celles-ci, comme les fonctions d'AIRY, de LOVE, de SOUTHWELL, sont retrouvées très naturellement, d'autres sont établies à titre d'exemple.

Il résulte de la marche adoptée que l'étude intéresse les problèmes où les conditions aux limites sont relatives, au seul déplacement, ou aux seules contraintes, ou d'une manière mixte en partie au déplacement, en partie aux contraintes.

L'établissement des équations d'équilibre est ici repris d'une manière propre à justifier la suite de l'exposé et plus particulièrement le choix de deux fonctions inconnues auxiliaires.

Nota : On appliquera fréquemment les relations suivantes ou a est un scalaire, $\mathbf{A}$ un vecteur :

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}, \tag{1}$$

et S étant une surface fermée, limitant un volume v, de normale extérieure $\mathbf{n}$ (de longueur unité)

$$\iint_S a \, \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_v \text{grad } a \, d\tau, \tag{2}$$

(3) $$\iint_s \mathrm{n} \wedge \mathbf{A}\, d\sigma = \iiint_v \mathrm{rot}\, \mathbf{A}\, d\tau ,$$

(4) $$\iint_s \frac{d\,\mathbf{A}}{d\,n}\, d\sigma = \iiint_v \Delta\, \mathbf{A}\, d\tau .$$

Par ailleurs, on utilisera souvent, et sans la mentionner, la relation suivante

$$\lambda + 2\,\mu = \frac{2\,\mu\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}$$

qui lie les coefficients de LAMÉ λ et μ, et le coefficient de POISSON $\nu = \lambda/[2(\lambda+\mu)]$.

Equations générales. 1°) Les forces en présence sont, au point courant M du solide élastique, supposé homogène et isotrope :

— Les efforts intérieurs représentés par des forces superficielles :

Sur tout élément de surface centré sur M, d'aire unité, orthogonal au vecteur n, s'exerce une force $\mathbf{T}_n\,(M)$ qui admet l'expression suivante en fonction du déplacement $\mathbf{V}\,(M)$ que subit le point M dans la déformation du solide:

(5) $$\mathbf{T}_n = (\lambda\ \mathrm{div}\ \mathbf{V})\ \mathrm{n} + 2\,\mu \left(\frac{d\,\mathbf{V}}{dn} - \frac{\mathrm{rot}\ \mathbf{V}}{2} \wedge \mathbf{n}\right).$$

— Les forces appliquées représentées par des forces de volume $\mathbf{F}\,(M)$, $\mathbf{F}\,(M)$ étant la résultante des forces qui s'exercent au point M sur un élément de volume centré sur M, de mesure l'unité.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que le champ des vecteurs $\mathbf{F}\,(M)$ est connu sous la forme de la somme d'un champ lamellaire grad $\dfrac{\Omega\,(M)}{1-2\,\nu}$ et d'un champ solénoïdal rot $\mathbf{H}\,(M)$.

2°) Les conditions d'équilibre s'obtiennent en écrivant l'égalité

(6) $$\iint_s \mathbf{T}_n\, d\sigma = \iiint_v \left(\mathrm{grad}\,\frac{\Omega}{1-2\nu} + \mathrm{rot}\ \mathbf{H}\right) d\tau,$$

pour toute surface fermée S, de normale extérieure n, limitant le volume v.

On a par (2) et (3)

(7) $$\iiint_v \left(\mathrm{grad}\ \frac{\Omega}{1-2\nu} + \mathrm{rot}\ \mathbf{H}\right) d\tau = \iint_s \left(\frac{\Omega}{1-2\nu}\ \mathrm{n} + \mathrm{n} \wedge \mathbf{H}\right) d\sigma$$

et (6) devient :

(8) $$\iint_s \left(\mathbf{T}_n - \frac{\Omega}{1-2\nu}\ \mathrm{n} - \mathrm{n} \wedge \mathbf{H}\right) d\sigma = 0$$

ou, en posant,

$$C_n = T_n - \frac{\Omega}{1-2\nu}\, n - n \wedge H, \tag{9}$$

$$\iint_S C_n \, d\sigma = 0. \tag{8$'$}$$

Le vecteur C_n est la contrainte, due tant aux efforts intérieurs qu'aux forces apppliquées, que subit l'élément de surface défini par le vecteur n. L'on voit par (8) que les conditions d'équilibre peuvent s'obtenir par la seule annulation d'une intégrale de surface étendue à toute surface fermée S.

3°) On va retrouver l'équation d'équilibre en V sous sa forme habituelle et pour cela exprimer C_n en fonction du vecteur

$$U_n = (\operatorname{div} V)\, n + \operatorname{rot} V \wedge n - \frac{dV}{dn}, \tag{10}$$

qui s'interprète géométriquement comme la variation en grandeur et direction, dans la déformation, de l'élément d'aire défini par n. U_n possède de plus la propriété remarquable suivante, qu'on peut déduire des relations (2), (3), (4) et (1) :

Quelle que soit la surface fermée S on a

$$\iint_S U_n \, d\sigma = \iiint_v (\operatorname{grad} \operatorname{div} V - \operatorname{rot} \operatorname{rot} V - \Delta V)\, d\tau = 0. \tag{11}$$

Un calcul simple montre alors que

$$C_n = \left[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} V - \frac{\Omega}{1-2\nu} \right] n - n \wedge (\mu \operatorname{rot} V + H) - 2\mu\, U_n \tag{12}$$

ou encore, en remplaçant pour simplifier le crochet et la parenthèse du second membre par m et $-$ l,

$$C_n = m\, n + n \wedge l - 2\mu\, U_n, \tag{12$'$}$$

et l'on voit qu'on peut passer immédiatement de l'expression (12) (ou (12)′) de C_n à l'équation (13) en V (ou (13)′ en m et l):

$$\operatorname{grad} \left[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} v - \frac{\Omega}{1-2\nu} \right] - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} V - \operatorname{rot} H = 0, \tag{13}$$

ou encore

$$\operatorname{grad} m + \operatorname{rot} l = 0, \tag{13$'$}$$

grâce à l'élimination de U_n, donnée par (11), dans la sommation (8). En résumé la solution du problème sera obtenue par la résolution en V du système, aux inconnues auxiliaires m et l:

$$(14) \quad \boxed{\begin{array}{ll} (1) & \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} \mathbf{l} = 0 \\ (2) & \operatorname{rot} \mathbf{V} = -\dfrac{1}{\mu}\left(\mathbf{l} + \mathbf{H}(M)\right), \\ (3) & \operatorname{div} \mathbf{V} = \dfrac{1}{2\mu(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\, m + \Omega(M)\right] \end{array}}$$

Solution du système (14)

Posons :

$$m = \operatorname{div} \mathbf{R}, \tag{15}$$

R étant un vecteur vérifiant

$$\Delta \mathbf{R} = 0. \tag{16}$$

On va démontrer que **l** est alors nécessairement de la forme

$$\mathbf{l} = -\operatorname{rot} \mathbf{R} + \operatorname{grad} p. \tag{17}$$

En effet, soit :

$$\mathbf{h} = \mathbf{l} + \operatorname{rot} \mathbf{R}.$$

On a

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{l} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{R}$$

et par (1), (15), (16) et (14-1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{l} - \Delta \mathbf{R} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{l} + \operatorname{grad} m = 0,$$

et **h** est bien de la forme grad p.

Supposons maintenant **H** mis sous la forme

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{K} + \operatorname{grad} \vartheta.$$

On a par (14-2) et par (17),

$$\mu \operatorname{rot} \mathbf{V} = -\mathbf{l} - \mathbf{H}, = \operatorname{rot} \mathbf{R} - \operatorname{grad} p - \operatorname{rot} \mathbf{K} - \operatorname{grad} \vartheta,$$

soit

$$\operatorname{grad}(p + \vartheta) + \operatorname{rot}(\mu \mathbf{V} - \mathbf{R} + \mathbf{K}) = 0, \tag{18}$$

ou, en remplaçant les parenthèses du permier membre par m_1 et $\mathbf{l}_1$:

$$\text{grad } m_1 + \text{rot } \mathbf{l}_1 = 0.$$

On obtient donc une équation analogue à l'équation (14-1). Posons, de la même manière

(19) $$p + \vartheta = m_1 = \text{div } \mathbf{P},$$

P étant tel que

(20) $$\Delta \mathbf{P} = 0.$$

On peut alors dire, comme précédemment que le vecteur

$$\mathbf{l}_1 = \mu \mathbf{V} - \mathbf{R} + \mathbf{K}$$

est de la forme

$$\mu \mathbf{V} - \mathbf{R} + \mathbf{K} = \mathbf{l}_1 = - \text{rot } \mathbf{P} + \text{grad } Q,$$

d'où

(21) $$\mu \mathbf{V} = \mathbf{R} - \text{rot } \mathbf{P} + \text{grad } Q - \mathbf{K}.$$

Q ne peut pas être pris arbitraire, mais doit être tel que l'équation (14-3) soit vérifiée. On a

(22) $$\mu \text{ div } \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{R} + \Delta Q - \text{div } \mathbf{K},$$

d'où en remplaçant μ div **V** et m par leurs valeurs (22) et (15) dans (14-3) :

(23) $$\triangle Q = \frac{1}{2(1-\nu)} (-\text{div } \mathbf{R} + \Omega) + \text{div } \mathbf{K}.$$

Finalement, on a la solution

(24)

(0)	$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{R} - \text{rot } \mathbf{P} + \text{grad } Q - \mathbf{K}),$
	où **R**, **P**, Q vérifient le système
(1)	$\Delta \mathbf{R} = 0,$
(2)	$\Delta \mathbf{P} = 0;$
(3)	$\Delta Q = \frac{1}{2(1-\nu)} [-\text{div } \mathbf{R} + \Omega (M)] + \text{div } \mathbf{K} (M),$
	K étant une solution quelconque* de l'équation
(4)	$\text{rot rot } \mathbf{K} = \text{rot } \mathbf{H} (M).$

* Par exemple solénoïdale de manière à simplifier l'équation (24—3). Sous réserve de facilité d'intégration du système (24), le choix à un gradient près est indifférent, **K** n'intervenant dans l'expression des $\mathbf{C}_n$ que par son rotationnel.

Fonctions de déplacement

Grâce à la part d'arbitraire qui entre dans la définition de **R** et **P** (on peut par exemple choisir les supports de ces vecteurs) il est possible de présenter le système (24) de différentes façons.

Plaçons nous, par exemple, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, **i**, **j**, **k** étant les vecteurs de base,

$$\mathbf{M} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

le point courant,

$$\mathbf{V}\,(M) = u\,(x, y, z)\;\mathbf{i} + v\,(x, y, z)\;\mathbf{j} + w\,(x, y, z)\;\mathbf{k},$$

le vecteur déplacement, et limitons nous pour simplifier au cas (de l'élasticité thermique en particulier) où $\mathbf{H} = 0$.

1°) Si l'on prend **R** et **P** tous deux colinéraires à **i** :

$$\mathbf{R} = \mathrm{R}\;\mathbf{i}\;,$$

$$\mathbf{P} = \mathrm{P}\;\mathbf{i}\;,$$

compte tenu de ce que

$$\mathrm{rot}\;(P\;\mathbf{i}) = -\;\mathbf{i} \wedge \mathrm{grad}\;P,$$

on obtient :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu}\;(R\;\mathbf{i} + \mathbf{i} \wedge \mathrm{grad}\;P + \mathrm{grad}\;Q)^{*}, \tag{25}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{\mu}\left(R + \frac{\partial Q}{\partial x}\right), \\ v &= \frac{1}{\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \\ w &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right). \end{aligned}\right. \tag{26}$$

R, *P*, *Q* vérifient le système

---

* Moyennant quelques modifications, une solution de cette forme est utilisée pour la résolution du problème de BOUSSINECQ - voir "**Physique mathématique classique**" de TH. VOGEL, p. 155, A. COLIN, PARIS, 1956.

$$
(27) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta R = 0, \\
&\Delta P = 0, \\
&\Delta Q = \frac{1}{2(1-\nu)} \left(- \frac{\partial R}{\partial x} + \Omega (x, y, z) \right).
\end{aligned}
\right.
$$

2°) On peut prendre encore

$$
\mathbf{R} = R\ \mathbf{i}, \qquad \mathbf{P} = P\ \mathbf{j},
$$

on obtient

$$
(28) \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{\mu} (R\ \mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} Q),
$$

ou encore

$$
(29) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&u = \frac{1}{\mu} \left(R + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \\
&v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial y}, \\
&w = \frac{1}{\mu} \left(- \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les scalaires R, P, Q verifient le même système que le système (27).

Fonctions de contraintes

Le calcul des contraintes ne présente pas de difficultés si les conditions aux frontières ne portent que sur le déplacement.

En effet, les fonctions $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, Q ayant été définies, au mieux des conditions particulières du problème à traiter, et calculées en résolvant (24), on pourra en déduire aisément tous les $\mathbf{C}_n$ par l'application des relations (5) et (9), ou (10) et (12)' par exemple.

Si les conditions aux frontières sont mixtes, ou ne portent que sur les contraintes, on peut avoir intérêt à choisir les fonctions inconnues de telle manière qu'elles donnent des expressions aussi simples que possible des $\mathbf{C}_n$.

Nous allons chercher quelques expressions de la contrainte $\mathbf{C}_\varepsilon$ s'exerçant sur un élément de surface perpendiculaire à un vecteur unitaire *fixe* $\vec{\varepsilon}$. La connaissance d'une $\mathbf{C}_\varepsilon$ est intéressante dans le cas de symétrie plane ($\vec{\varepsilon}$ devant se trouver dans le plan des x, y) ou de révolution (d'axe parallèle à $\vec{\varepsilon}$) car elle suffit à elle seule, si la composante de $\mathbf{V}$ suivant la direction perpendiculaire à $\vec{\varepsilon}$ est connue, à la détermination de toutes les autres contraintes. Dans le cas général l'égalité

$$\mathbf{C}_n \cdot \vec{\varepsilon} = \mathbf{C}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} + 2\,\mathbf{n} \wedge \vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{H} \tag{30}$$

montre qu'elle permet au moins de déterminer les projections de tous les $\mathbf{C}_n$ sur l'axe fixe support de $\vec{\varepsilon}$.

De l'égalité bien connue

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,\varepsilon} = \vec{\varepsilon}\,(\mathrm{div}\ \mathbf{A}) - \mathrm{rot}\ (\vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{A}) \tag{31}$$

on déduit

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \mathrm{rot}\ \mathbf{V} \wedge \vec{\varepsilon} + \mathrm{rot}\ (\vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{V}),$$

et par (12)'

$$\mathbf{C}_\varepsilon = m\,\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{l} - \mathrm{rot}\ (\vec{\varepsilon} \wedge 2\,\mu\,\mathbf{V}). \tag{32}$$

Remarque :

Cette relation montre que $\mathbf{C}_\varepsilon$ peut se mettre sous la forme, $\mathbf{L}_\varepsilon$ étant un vecteur à déterminer,

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \mathrm{rot}\ \mathbf{L}_\varepsilon. \tag{33}$$

En effet, $\mathbf{C}_\varepsilon$ est bien un rotationnel car

$$\mathrm{div}\ (m\,\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{l}) = (\mathrm{grad}\ m + \mathrm{rot}\ \mathbf{l})\,.\,\vec{\varepsilon} = 0.$$

La relation (33) montre en particulier que le calcul de l'intégrale

$$\iint_S \mathbf{C}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}\ d\sigma$$

étendue à toute surface S limitée par le contour fermé C, de normale $\mathbf{n}$, peut se ramener à l'intégrale de ligne

$$\int_C \mathbf{L}_\varepsilon \cdot d\,\mathbf{M}.$$

On se placera dans ce qui suit, pour simplifier, au cas ou $\mathbf{H} = \mathbf{O}$. On a alors

$$m = \mathrm{div}\ \mathbf{R}, \qquad \mathbf{l} = -\ \mathrm{rot}\ \mathbf{R} + \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{P}. \tag{34}$$

On déduit de (32) :

$$\mathbf{C}_\varepsilon = (\mathrm{div}\ \mathbf{R})\,\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{R} - \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{P} - 2\ \mathrm{rot}\ [\,\vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{R} - \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{P} + \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{grad}\ Q].$$

En utilisant l'égalité

$$\vec{\varepsilon}\,(\mathrm{div}\ \mathbf{A}) + \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \mathrm{grad}\,(\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{A}) + \mathrm{rot}\,(\vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{A}), \tag{35}$$

on obtient après simplifications

$$\boxed{\mathbf{C}_{\varepsilon} = \mathrm{grad}\,(\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{R}) + \mathrm{rot}\,[-\vec{\varepsilon} \wedge (\mathbf{R} + \mathrm{grad}\,2Q) + \vec{\varepsilon}\,(\mathrm{div}\ \mathbf{P}) + 2\vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{P}]} \tag{36}$$

Grâce à la part d'arbitraire, déjà signalée, qui entre dans la définition de **R** et **P** (on peut en particulier choisir les supports de ces vecteurs) il est possible d'apporter à l'exprcssion (36) de $\mathbf{C}_{\varepsilon}$ des simplifications notables.

1°) Choisissons **P** tel que

$$\mathbf{P} = P\,\vec{\varepsilon}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,[\vec{\varepsilon}\,(\mathrm{div}\ \mathbf{P}) + 2\,\vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{rot}\ \mathbf{P}] &= \mathrm{rot}\left[\vec{\varepsilon}\,\frac{dP}{d\varepsilon} - 2\,\vec{\varepsilon} \wedge (\vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{grad}\ P)\right] \\
&= \mathrm{rot}\left(2\ \mathrm{grad}\ P - \vec{\varepsilon}\,\frac{dP}{d\varepsilon}\right) \\
&= \mathrm{rot}\left(-\vec{\varepsilon}\,\frac{dP}{d\varepsilon}\right) \\
&= \vec{\varepsilon} \wedge \mathrm{grad}\,\frac{dP}{d\varepsilon}.
\end{aligned}$$

2°) En prenant **R** colinéaire ou orthogonal à $\vec{\varepsilon}$ on élimine rot $(-\vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{R})$ ou grad $(\vec{\varepsilon} \,.\, \mathbf{R})$ dans (36).

3°) On a vu que $\mathbf{C}_{\varepsilon}$ est un rotationnel, il en est donc de même de grad $(\vec{\varepsilon} \,.\, \mathbf{R})$, ce qui se vérifie d'ailleurs immédiatement puisque

$$\Delta\,(\vec{\varepsilon} \,.\, \mathbf{R}) = 0.$$

Prenons $\vec{\varepsilon}$ pour support de **R** :

$$\mathbf{R} = R\,\vec{\varepsilon}.$$

Si $\vec{\psi}$ est tel que $\Delta\,\vec{\psi} = 0$, on peut poser

$$R = \mathrm{div}\,\vec{\psi},$$

d'où

$$\mathrm{grad}\,(\vec{\varepsilon} \,.\, \mathbf{R}) = \mathrm{grad}\ R = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \vec{\psi}.$$

On obtient alors :

$$\operatorname{grad}(\vec{\varepsilon}\,.\,\mathbf{R}) + \operatorname{rot}[-\vec{\varepsilon} \wedge (\mathbf{R} + \operatorname{grad} 2Q)] = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{\psi} - \vec{\varepsilon} \wedge \operatorname{grad} 2Q).$$

Si on prend $\vec{\psi}$ tel que $\vec{\psi} = \psi\,\vec{\varepsilon}$, le second membre de l'égalité ci-dessus devient, en posant $\varphi = -(\psi + 2Q)$:

$$\operatorname{rot}(\vec{\varepsilon} \wedge \operatorname{grad}\varphi).$$

Exemple :

Combinons, à titre d'exemple, le 1°) et le 3°).

En faisant $\vec{\varepsilon} = \mathbf{i}$ on obtient :

$$\mathbf{C}_i = \operatorname{rot}\left(\mathbf{i} \wedge \operatorname{grad}\varphi - \mathbf{i}\,\frac{\partial P}{\partial x}\right). \tag{37}$$

Les contraintes $\mathbf{C}_j$ et $\mathbf{C}_k$ se calculent sans difficulté par (36)

$$\mathbf{C}_j = \operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + \mathbf{j} \wedge \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{k} \wedge \operatorname{grad} P\right],$$

$$\mathbf{C}_k = \operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) - \mathbf{j} \wedge \operatorname{grad} P + \mathbf{k} \wedge \operatorname{grad}\varphi\right].$$

Le déplacement $\mathbf{V}$ est donné par

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \mathbf{i} \wedge \operatorname{grad} P - \operatorname{grad}\frac{\varphi + \psi}{2}\right). \tag{38}$$

Le système vérifié par ψ, P et φ se déduit facilement de (27) en remplaçant $\Delta P = 0$ par $\Delta\psi = 0$ et en combinant la première et la dernière équation :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, \\ \Delta P = 0, \\ \Delta\varphi = \dfrac{1}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \Omega\right). \end{cases} \tag{39}$$

Cas de la symétrie plane ou de révolution

Un calcul simple montre que **P** peut être pris nul.

Dans le cas de symétrie plane (en x, y), ou de révolution (en x, r), on a alors :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{R} + \operatorname{grad} Q), \tag{40}$$

R et Q vérifiant

$$(41) \qquad \begin{cases} (1) & \Delta \mathbf{R} = 0, \\ (2) & \Delta Q = \dfrac{1}{2(1-\nu)} [- \operatorname{div} \mathbf{R} + \Omega(M)], \end{cases}$$

et, par l'application de la relation (36),

$$(42) \qquad \mathbf{C}_i = - \operatorname{rot} [\mathbf{i} \wedge (\mathbf{R} + 2 \operatorname{grad} Q)] + \operatorname{grad} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{R}).$$

On envisagera le cas de la symétrie de révolution, le cas de la symétrie plane pouvant se déduire du précédent en faisant tendre $1/r$ vers zéro et en remplaçant r par y.

ϑ étant l'angle du plan méridien courant P avec un plan méridien fixe, $\vec{\alpha}(\vartheta)$ sera un vecteur unitaire radial du plan P, le point courant M de P ayant pour expression :

$$\mathbf{M} = x\,\mathbf{i} + r\,\vec{\alpha}.$$

On posera

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\alpha}}{d\vartheta} = \mathbf{i} \wedge \vec{\alpha}$$

R *est pris colinéaire à* **i**.

1°) Soit $\mathbf{R} = R\,\mathbf{i}$.

Posons pour introduire quelques simplifications dans l'écriture des équations

$$\psi = \frac{R}{1-\nu}, \qquad \varphi = 2Q.$$

On a la solution

$$(43) \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \left[(1-\nu)\,\psi\,\mathbf{i} + \operatorname{grad} \frac{\varphi}{2} \right],$$

avec

$$(44) \qquad \begin{cases} \Delta \psi = 0, \\ \Delta \varphi = - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\Omega(x, r)}{1-\nu}. \end{cases}$$

$$(45) \qquad \mathbf{C}_i = - \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\beta} \right) + \operatorname{grad} (1-\nu)\,\psi.$$

Si C est une courbe du plan x, r, de tangente $\mathbf{t}$ orientée dans le sens des arcs s croissants, de normale $\mathbf{n}$ telle que le trièdre $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\vec{\beta}$ soit direct on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\beta} \right) &= \mathbf{t} \wedge \vec{\beta} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{n} \wedge \vec{\beta} \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \vec{\beta} \wedge \left(- \frac{\vec{\alpha}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ &= - \mathbf{n} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{t} \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \mathbf{i} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{C}_i = + \mathbf{n} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) - \mathbf{t} \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) - \mathbf{i} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1-\nu) \operatorname{grad} \psi,$$

et en particulier

$$\mathbf{C}_i \cdot \mathrm{n} = \mathbf{C}_n \cdot \mathrm{i} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) - (\mathrm{i} \cdot \mathrm{n}) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1-\nu) \frac{d \psi}{dn},$$

on obtient facilement

(46)
$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (2-\nu)\psi\right] - \frac{\Omega}{1-\nu},\\
\sigma_\vartheta &= \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Omega}{1-\nu} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r},\\
\sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1-\nu)\psi\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r},\\
\tau_{rx} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1-\nu)\psi\right].
\end{aligned}$$

2°) Si les conditions aux frontières ne portent pas sur la composante axiale $\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}$ du déplacement on peut avoir avantage à choisir pour fonction inconnue la composante radiale de celui-ci. Les contraintes peuvent alors s'exprimer par des dérivées partielles du premier ordre au plus, des fonctions inconnues.

En posant

$$\psi = \frac{R}{1-\nu}, \qquad \varphi = 2\mu\, \mathbf{V} \cdot \vec{\alpha} = 2 \frac{\partial Q}{\partial r},$$

on a la solution

(47)
$$\mathbf{V} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\varphi}{2\mu},$$

avec

(48)
$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta \psi = 0,\\
&\Delta \varphi - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\, \partial x} + \frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\Omega(x, r).
\end{aligned}\right.$$

(49)
$$\left\{\begin{aligned}
\mathbf{C}_i &= -\operatorname{rot}(\varphi \vec{\beta}) + (1-\nu) \operatorname{grad} \psi,\\
&= \mathrm{n} \frac{d\varphi}{ds} - \mathrm{t} \frac{d\varphi}{dn} - \mathrm{i} \frac{\varphi}{r} + (1-\nu) \operatorname{grad} \psi
\end{aligned}\right.$$

et

$$\sigma_x = (1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r},$$

(50)
$$\sigma_{\vartheta} = \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Omega}{1-\nu} + \frac{\varphi}{r},$$

$$\sigma_r = \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Omega}{1-\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$\tau_{xr} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

3°) *Fonctions de* LOVE*.

En faisant

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \mathbf{i}$$

on obtient la réduction à deux dimensions x, r de la solution (38):

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\, \mathbf{i} - \operatorname{grad} \frac{\varphi + \psi}{2} \right),$$

(51)
$$= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\, \mathbf{i} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\, \vec{\alpha} - \operatorname{grad} \varphi \right).$$

avec

(52)
$$\left\{ \begin{aligned} & \Delta \psi = 0, \\ & \Delta \varphi = \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \Omega(x, r) \right]. \end{aligned} \right.$$

On a

(53)
$$\mathbf{C}_i = \operatorname{rot} (\mathbf{i} \wedge \operatorname{grad} \varphi),$$

$$= \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\, \vec{\beta} \right),$$

$$= -\mathbf{n} \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{t} \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{i}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

et

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

(54)
$$\sigma_{\vartheta} = \nu \Delta \varphi - \Omega - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \psi)$$

* A. E. H. LOVE, "Theory of Elasticity", 4 ème éd., 1926, ch. XI.

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \psi),$$

$$\tau_{xr} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial r}$$

R *est pris colinéaire à* $\vec{\alpha}$.

4°) Soit $\mathrm{R} = R\,\vec{\alpha}$.

Posons

$$\psi = \frac{R}{1-\nu}, \qquad \varphi = 2\,Q.$$

On a

(55) $$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \left[(1-\nu)\, \psi\, \vec{\alpha} + \operatorname{grad} \frac{\varphi}{2} \right]$$

avec

(56) $$\left\{ \begin{aligned} & \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} = 0, \\ & \Delta \varphi = - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} + \frac{\Omega(x, r)}{1-\nu}. \end{aligned} \right.$$

On a

(57) $$\mathbf{C}_i = - \operatorname{rot} \left[(1-\nu)\, \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \vec{\beta}$$

et

(58) $$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu)\, \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \left[(1-\nu)\, \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \\ \sigma_\vartheta &= \nu \frac{\partial \psi}{\partial r} + (2-\nu) \frac{\psi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\Omega}{1-\nu}, \\ \sigma_r &= (2-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \nu \frac{\psi}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{\Omega}{1-\nu}, \\ \tau_{rx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\nu)\, \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

5°) *Fonctions de SOUTHWELL* *.

Posons, pour simplifier l'expression de $\mathbf{C}_i$ donnée par (57).

---

* R. SOUTHWELL "*Some Practically Important Stress-System in Solides of Revolution*" Proceedings of the Royal Society-A, 180, 367-396, 1942,

$$\varphi = (1 - \nu)\,\psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

on obtient

(59) $$\mathbf{V} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2\mu}\,[\varphi + (1 - \nu)\,\psi],$$

avec, après dérivations par rapport à r de la deuxième équation (56),

(60) $$\left\{\begin{array}{l} \Delta\,\psi - \dfrac{\psi}{r^2} = 0, \\[2mm] \Delta\,\varphi - \dfrac{\varphi}{r^2} = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{1}{1-\nu}\,\dfrac{\partial\,\Omega}{\partial r}\,(x, r). \end{array}\right.$$

On a

(61) $$\mathbf{C}_i = -\operatorname{rot}\,(\varphi\,\vec{\beta}),$$

$$= \mathbf{n}\,\frac{d\varphi}{ds} - \mathbf{t}\,\frac{d\varphi}{dn} - \mathbf{i}\,\frac{\varphi}{r},$$

et

(62) $$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} - \dfrac{\varphi}{r}, \\[2mm] \sigma_\vartheta = \nu\,\dfrac{\partial\psi}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\,(\varphi + \psi) - \dfrac{\Omega}{1-\nu}, \\[2mm] \sigma_r = \dfrac{\partial}{\partial r}\,(\varphi + \psi) + \nu\,\dfrac{\psi}{r} - \dfrac{\Omega}{1-\nu}, \\[2mm] \tau_{rz} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}. \end{array}\right.$$

6°) *Fonction d'*AIRY *

Dans le cas de symétrie plane on a, si $\mathbf{R} = R\,\mathbf{i}$,

$$\mathbf{l} = \mathbf{i} \wedge \operatorname{grad} R,$$

$$= l\,\mathbf{k}, \qquad \text{avec} \qquad l = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Soit L la fonction harmonique conjuguée de R, et ψ une fonction telle que

$$L = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

* Voir par ex. TIMOSHENKO "**Théorie de l'Élasticité**" n° 15, 56 et 57.

On a

$$\Delta \psi = 0 .$$

La fonction $L + i R$ est fonction analytique de la variable complexe $\omega = x + iy$, et primitive de la fonction $f(\omega) = l + i m$.

Par ailleurs, pour toute courbe du plan x, y de normale n, l'interprétation géométrique de $\mathbf{U}_n$ montre que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n &= \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{V}}{ds} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \wedge \mathbf{t} \\ &= \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{V}}{ds} . \end{aligned}$$

D'où par (12)' :

$$\mathbf{C}_n = m\ \mathbf{n} + l\ \mathbf{t} - 2\,\mu\ \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{V}}{ds} ,$$

et

$$\int \mathbf{C}_n\ ds = \int (m\ \mathbf{n} + l\ \mathbf{t})\ ds - 2\,\mu\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{V} .$$

On peut remarquer que l'extrémité du vecteur $(m\ \mathbf{n} + l\ \mathbf{t})\ ds$ coïncide dans le plan x, y avec l'image de la quantité complexe $f(\omega)\ d\omega$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{C}_n\ ds &= L\ \mathbf{i} + R\ \mathbf{j} - 2\,\mu\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{V} \\ &= L\ \mathbf{i} - R\ \mathbf{j} - \mathbf{k} \wedge \operatorname{grad} (2\,Q) \\ &= - \mathbf{k} \wedge \operatorname{grad} (\psi + 2\,Q), \end{aligned}$$

ou en posant comme pour la solution (38) :

$$\varphi = - (\psi + 2\,Q) ,$$

d'où

$$\int \mathbf{C}_n\ ds = \mathbf{k} \wedge \operatorname{grad} \varphi ,$$

et

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{k} \wedge \frac{d}{ds} \operatorname{grad} \varphi .$$

Toutes les contraintes ne s'expriment plus que par une seule fonction φ, la fonction ψ n'intervenant que dans le déplacement.

On a comme au 3°) :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\mathbf{j} - \operatorname{grad}\varphi\right) \tag{63}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta \psi = 0, \\ &\Delta \varphi = \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \Omega(x, y)\right]. \end{aligned}\right. \tag{64}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_\vartheta &= \nu\,\Delta\varphi - \Omega, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, y}. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

(Manuscrit reçu le 14 Janvier 1966)

ÖZET

Bu araştırmanın nihaî gâyesi, elastisite problemlerini nümerik metotlarla çözmekten ibarettir. Bununla beraber bu araştırmada sadece yerdeğişimi ve zorlama fonksiyonlarının sağladıkları kısmî türevli denklemleri kurma safhasiyle ilgilenilmiştir.