SUR LES LIGNES GÉODÉSIQES ET SUR CELLES DE DARBOUX

F. ŞEMİN

Étant donnée une surface de révolution, on a tout le long d'une ligne de DARBOUX de celle-ci : $(r - \bar{r})\, u \cos^3 \varphi = C^{te}$, où $r, \bar{r}$ sont les courbures principales, u le rayon du parallèle et φ l'angle entre la ligne de DARBOUX et la méridienne. Sur un hyperboloïde de révolution à une nappe le birapport $(P P', PB, PD, PG)$ reste le même tout le long d'une ligne de DARBOUX où $P P'$, PD sont tangents au parallèle et à la ligne de DARBOUX en un point P de celle-ci; PG et PB étant respectivement l'une des génératrices et l'une des bissectrices de l'angle DPG. Étant donnée une surface réglée minima, on a tout le long d'une géodésique de celle-ci: $R(1 - \sin 2\beta) = C^{te}$, où R est l'un des rayons de courbure principale, β étant l'angle que fait la géodésique avec l'une des directions principales. Pour une ligne de DARBOUX de la même surface, cette relation prend la forme: $r (\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi)^2 = C^{te}$, où r est l'une des courbures principales. Si les angles sont comptés à partir de la génératrice rectiligne de la même surface, ces deux relations deviennent respectivement: $\sqrt{-K}/\sin^2 \bar{\beta} = C^{te}$ et $\sqrt{-K} \sin^2 \bar{\varphi}\, (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})^2 = C^{te}$, où K est la courbure totale. On démontre que l'intégration de l'équation différentielle des lignes de DARBOUX se ramène à des quadratures dans les cas d'une surface de révolution, d'une surface minima réglée et d'un hélicoïde développable.

1. Introduction. On sait que si une géodésique d'une surface de révolution coupe la méridienne en un point régulier P sous un angle β, on a alors tout le long de cette géodésique

$$u \sin \beta = A = C^{te}, \tag{1.1}$$

où u désigne le rayon du parallèle en P. C'est le théorème bien connu de CLAIRAUT [1].

On sait également que ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général concernant les surfaces de LIOUVILLE, c'est-à-dire les surfaces pour lesquelles l'élément linéaire a la forme [2]

$$ds^2 = [U(u) + V(v)]\,(du^2 + dv^2). \tag{2.1}$$

Le théorème en question consiste en ceci :

Si une géodésique d'une surface de LIOUVILLE coupe une courbe coordonnée $v = C^{te}$ en un point régulier P sous un angle β, on a alors tout le long de cette géodésique

$$U(u) \sin^2 \beta - V(v) \cos^2 \beta = B = C^{te}. \tag{3.1}$$

Les relations (1.1) et (3.1) constituent en quelque sorte des intégrales premières pour les géodésiques des surfaces correspondantes. En effet, on déduit aisément de ces relations que l'obtention des géodésiques des surfaces en question se ramène à des quadratures. On trouve effectivement

$$(4.1) \qquad v = \varepsilon A \int \frac{\sqrt{1 + [f'(u)]^2}}{u \sqrt{u^2 - A^2}}\, du, \quad \varepsilon = \pm 1$$

($f(u)$ désignant la cote d'un point)

pour une surface de révolution, et

$$(5.1) \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{V(v) - B}} = \varepsilon \int \frac{du}{\sqrt{U(u) - B}}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

pour une surface de LIOUVILLE.

Dans ce qui suit, nons allons étendre ces relations à d'autres surfaces, et pour les lignes géodésiques et pour les lignes de DARBOUX (les lignes le long desquelles les sphères osculatrices sont tangentes à la surface). Ceci vas nous permettre de ramener à des quadratures l'intégration de l'équation différentielle des lignes de DARBOUX d'une surface de révolution [3], d'une surface minima réglée, et d'un hélicoïde développable [4].

L'équation différentielle des lignes de DARBOUX d'une surface est en général du second ordre [3 ; 357]. Rappelons qu'elle n'a été intégrée jusqu'à présent que dans les cas suivants:

a) Cyclide et quadrique (DARBOUX, 1871) [5].

b) Cylindre quelconque (SANTALÒ, 1945 ; ŞEMİN, 1952) [6 ; 3].

c) Cône quelconque (SANTALÒ 1947 ; ŞEMİN, 1952) [7 ; 3].

d) Surface de révolution (ŞEMİN, 1952) [3].

e) Hélicoïde développable (ŞEMİN, 1962) [4].

A cette liste assez courte nous ajoutons par le présent travail le cas d'une surface minima réglée et nous traitons en entier celui de l'hélicoïde développable qui n'a été présenté que sous la forme d'une courte communication au Congrès de STOCKHOLM en 1962 [4].

2. Surface de révolution. Supposons qu'une surface de révolution S soit rapportée à ses lignes de courbure, $v = C^{te}$ désignant les méridiennes. r et $\bar{r}$ représentant les courbures principales en un point régulier P de S, si l'on appelle

$$f_1, \; f_2, \; f_t$$

les dérivées invariantes [8] d'une fonction scalaire ou vectorielle de point f, dans les directions respectives des lignes de courbure et dans une direction quelconque, notre surface de révolution sera caractérisée par [9 ; 142]

$$(1.2) \qquad r_2 = 0, \quad \bar{r}_2 = 0$$

sur toute la surface.

Si donc on appelle φ l'angle que fait une ligne de DARBOUX [8, 352] C de la surface de révolution avec la méridienne en un point régulier P, et si l'on fait usage des relations (1.2), la dérivée invariante φ_1 de φ dans la direction C sera donnée par [8 ; 367]

$$\varphi_1 = \frac{r_1 \cos^2 \varphi}{3(r - \bar{r}) \sin \varphi}, \tag{2.2}$$

$\cos \varphi = 0$ donnant les parallèles.

La relation (2.2) peut s'écrire

$$tg\ \varphi\ \varphi_1 = \frac{r_1}{3(r-r)} \cos \varphi = \frac{r_1 - \bar{r}_1}{3(r - \bar{r})} \cos \varphi + \frac{\bar{r}_1}{3(r - \bar{r})} \cos \varphi . \tag{3.2}$$

Si d'autre part g et $\bar{g}$ sont les courbures géodésiques des méridiennes et des parallèles,on a évidemment

$$g = 0$$

sur toute la surface et la deuxième formule de CODAZZI [10, 179] peut s'écrire dans ce cas sous la forme

$$\bar{r}_1 = (r - \bar{r}) \bar{g} , \tag{4.2}$$

où [8 ; 176, 177]

$$\bar{g} = (\mathrm{Log} \sqrt{G})_1 , \tag{5.2}$$

G étant le troisième coefficient de la première forme fondamentale. Si la surface de révolution est définie par rapport à un système d'axes de coordonées orthogonales par les équations

$$x_1 = u \cos v , \ x_2 = u \sin v , \ x_3 = f(u), \tag{6.2}$$

de sorte que les lignes coordonées soient les lignes de courbure, $v = C^{te}$ désignant les méridiennes, on aura

$$G = u^2, \qquad \text{avec} \qquad G_2 = 0. \tag{7.2}$$

Ceci étant, (3.2) peut s'écrire à l'aide des formules (4.2), (5.2) et (7.2)

$$\mathrm{tg}\ \varphi\ \varphi_1 = \frac{r_1 - \bar{r}_1}{3(r - \bar{r})} \cos \varphi + \frac{1}{3} (\mathrm{Log} \sqrt{G})_1 \cos \varphi . \tag{8.2}$$

Comme pour une fonction scalaire ou vectorielle de point f on a [9]

$$f_1 = f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi ,$$

si l'on prend eu considération les relations (1.2) et (7.2), (8.2) prend la forme

$$-\{ \mathrm{Log} | \cos^3 \varphi | \}_1 = \{ \mathrm{Log} | r - \bar{r} | \}_1 + (\mathrm{Log} \sqrt{G})_1 ,$$

et en l'intégrant on obtient

$$u(r-\bar{r})\cos^3\varphi = a = C^{te}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME (1.2) *Étant donnée une ligne de* DARBOUX *C d'une surface de révolution, si l'on appelle φ l'angle que forme C avec une méridienne en un point régulier P, u le rayon du parallèle passant par P, r et $\bar{r}$ les valeurs des courbures principales en P, on a tout le long de C*

$$u(r-\bar{r})\cos^3\varphi = a = C^{te}. \tag{9.2}$$

Remarque (1.2). Le tore, le cône de révolution et le cylindre de révolution étant des cas particuliers des cyclides de DUPIN, les lignes de DARBOUX de ces surfaces doivent former des familles isogonales avec les lignes de courbure [3, 367] ce que l'on peut vérifier aisément à l'aide de la relation preécédente. En effet :

Cas du tore. Dans ce cas la méridienne est une circonférence de rayon

$$R = \frac{1}{r} = C^{te}.$$

Soient alors P un point quelconque de cette méridienne, O son centre, Q le point où la normale en P à la surface coupe l'axe, d la distance fixe de O à l'axe. Comme

$$\overline{PQ} = \bar{R},$$

on tire facilement des triangles rectangles semblables

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{u}{d},$$

c' est - à - dire

$$\frac{\bar{R}}{\bar{R}-R} = \frac{r}{r-\bar{r}} = \frac{u}{d},$$

ou bien

$$u(r-\bar{r}) = dr = C^{te}.$$

(9.2) donne alors

$$\cos^3\varphi = \frac{a}{dr},$$

autrement dit

$$\varphi = C^{te}.$$

Cas du cône de révolution. La méridienne étant une droite, on a

$$r = 0, \quad \bar{R} = \frac{1}{\bar{r}}, \quad \bar{R}\cos\alpha = u,$$

α étant le demi-angle au sommet. (9.2) devient alors

$$\cos^3 \varphi = -\frac{a}{\cos \alpha},$$

c'est - à - dire

$$\varphi = C^{te}.$$

Cas du cylindre de révolution. Il suffit de prendre $a = 0$ dans le calcul précédent.

Remarque (2.2). Rappelons que les lignes de DARBOUX des cônes et des cylindres de révolution sont [3, 364] des hélices, ce qui est évident ici.

Remarque 3.2. D'après (9.2) l'angle φ dépend de u seulement :

$$\operatorname{tg} \varphi = \psi(u).$$

D'autre part (6.2) donne

$$\psi(u) = \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} = \frac{u}{\sqrt{1 + [f'(u)]^2}} \frac{dv}{du},$$

d'où

$$v = \int \psi(u) \frac{1}{u} \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du.$$

On voit donc que :

L'intégration de l'équation différentielle des lignes de DARBOUX *d'une surface de révolution se ramène à des quadratures* [8, 381].

3. Quadrique de révolution. Si la surface de révolution est une quadrique, on a alors [11,415].

$$b \bar{r}^3 = r, \quad b = C^{te}. \tag{1.3}$$

(2.2) s'écrit dans ce cas

$$-\operatorname{tg} \varphi\ \varphi_1 = \frac{b \bar{r} \bar{r}_1}{1 - b \bar{r}^2} \cos \varphi,$$

ou en l'intégrant

$$(1 - b \bar{r}^2) \cos^2 \varphi = C^{te}$$

et d'après (1.3)

$$\left(1 - \frac{r}{\bar{r}}\right) \cos^2 \varphi = C^{te}. \tag{2.3}$$

On obtient en le comparant avec (9.2)

$$\bar{r}\, u \cos \varphi = C^{te}. \tag{3.3}$$

Dans le cas d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, la relation (2.3) est susceptible d'une interprétation géométrique que nons allons expliciter. L'angle ψ que forme une génératrice rectiligne avec la méridienne est donné d'après la formule d'EULER

$$\varrho_n = r \cos^2 \alpha + \bar{r} \sin^2 \alpha,$$

où ϱ_n est la courbure normale correspondant à la direction α formée avec la méridienne, par

$$\mathrm{tg}^2\,\psi = -\frac{r}{\bar{r}}\,. \tag{4.3}$$

A l'aide de (4.3), (2.3) prend alors la forme

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \mathrm{C^{te}}\,. \tag{5.3}$$

Sur un hyperboloïde de révolution à une nappe, soit C une ligne de DARBOUX de celui-ci, et en un point P de C considerons la tangente PD à C, la génératrice rectiligne PG, la tangente à la méridienne PM, et la tangente au parallèle PP'. La relation (5.3) se traduit alors par le théorème suivant:

THÉORÈME (1.3). *Étant donné un hyperboloïde de révolution à une nappe et une ligne C de* DARBOUX *de celui-ci, le rapport anharmonique des quatre droites*

$$(PP',\ PB,\ PD,\ PG) = \varepsilon\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,,\ (\varepsilon = \pm 1)$$

où PB est l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{DPG}$, est constant tout le long de C.

4. Surface minima de révolution. Comme dans ce cas

$$r + \bar{r} = 0\,, \tag{1.4}$$

(2.2) peut s'écrire

$$6\,\mathrm{tg}\,\varphi\ \ \varphi_1 = \frac{r_1}{r}\cos\varphi\,,$$

ce qui donne en l'intégrant

$$r\,\cos^6\varphi = \mathrm{Cte}. \tag{2.4}$$

Or si l'on se sert de (1.4), (9,2) se réduit dans ce cas à

$$2\,u\,r\cos^3\varphi = \mathrm{Cte}\,. \tag{3.4}$$

On déduit alors de (2.4) et de (3.4)

$$\frac{\cos^3\varphi}{u} = \mathrm{Cte}. \tag{4.4}$$

Remarquons en passant que la comparaison des relations (3.4) et (4.4) donne

$$r\,u^2 = \mathrm{Cte}. \tag{5.4}$$

Si l'on interprète géométriquement cette dernière égalité, on voit facilement que: la projection orthogonale du rayon du parallèle passant par P sur la normale à la surface en P est constante, quel que soit le point P sur C, ce qui est évident à priori puisque la méridienne est une chaînette.

5. Surface minima réglée. Si la surface est rapportée à ses lignes de courbure, on a tout d'abord

$$r + \bar{r} = 0. \tag{1.5}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit réglée est que l'une des familles des asymptotiques soit constituée de lignes droites. Si donc on prend en considération la formule de LIOUVILLE [12, 91]

$$\tilde{g} = \beta_1 + g \cos \beta + \bar{g} \sin \beta \tag{2.5}$$

où g, $\bar{g}$ sont les courbures géodésiques des lignes de courbure, $\tilde{g}$ étant celle d'une courbe quelconque tracée sur la surface et faisant un angle β avec la ligne de courbure $v = \mathrm{C^{te}}$, β_1 représentant sa dérivée invariante dans la direction β ; pour

$$\beta = \pi/4$$

par exemple, la courbure géodésique correspondante $\tilde{g}$ doit s'annuler identiquement, ce qui donnera

$$g + \bar{g} = 0. \tag{3.5}$$

Les formules de CODAZZI [10, 179] s'écrivent alors en se servant de (1.5) et de (3.5)

$$r_2 = 2rg, \quad \bar{r}_1 = -2rg \tag{4.5}$$

ce qui donnera à l'aide de (1.5)

$$r_1 = -\bar{r}_1 = r_2 = -\bar{r}_2. \tag{5.5}$$

Le cas des **géodésiques.** D'après (2.5) et (3.5), nous avons le long d'une géodésique quelconque

$$\beta_1 + \bar{g}\,(\sin \beta - \cos \beta) = 0,$$

ou bien si l'on prend en considération (4.3), (5,3) et [8, 179]

$$\frac{\cos \beta + \sin \beta}{\sin \beta - \cos \beta}\,\beta_1 = \frac{\bar{r}_1}{2\bar{r}}\,(\cos \beta + \sin \beta) = \frac{\bar{r}_1 \cos \beta + \bar{r}_2 \sin \beta}{2\bar{r}} = \frac{\bar{r}_1}{2\bar{r}},$$

c'est-à-dire en intégrant

$$\frac{\bar{r}}{(\sin \beta - \cos \beta)^2} = \frac{\bar{r}}{1 - \sin 2\beta} = A = \mathrm{C^{te}}. \tag{6.5}$$

On en déduit :

THÉORÈME (1.5). *Étant donnée une surface réglée minima, si β représente l'angle que fait une géodésique avce la direction principale $v = Cte$, on a alors tout le long de cette géodésique*

$$R\,(1 - \sin 2\beta) = \mathrm{C^{te}},$$

où R est l'un des rayons de courbure principale

Remarque (1.5). Comme les génératrices rectilignes d'une surface réglée minima font un angle de 45° avec les directions principales, si l'on pose

$$\beta = (\pi/4) + \bar{\beta},$$

on aura

$$\sin 2\beta = \cos 2\bar{\beta},$$

et la formule (6.5) prendra la forme

$$\frac{\bar{r}}{2 \sin^2 \bar{\beta}} = A ,$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{-K}}{\sin^2 \bar{\beta}} = 2A = \bar{A} = C^{te} .$$

K désignant la courbure totale.

Il suit de là que:

THÉORÈME (2.5). *Étant donnée une surface réglée minima, si $\bar{\beta}$ désigne l'angle que fait une géodésique avec la génératice rectiligne, on aura alors tout le long de cette géodésique*

$$\sqrt{-K}/\sin^2 \bar{\beta} = C^{te} = \bar{A} , \tag{7.5}$$

où K est la courbure totale.

Si l'on définit la surface réglée minima, à partir de sa ligne de striction prise comme le troisième axe de coordonnées, par

$$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = hv, \tag{8.5}$$

où h est une constante qui peut être considérée comme positive. On peut d'abord remarquer que le paramètre de distribution p de la surface est égal à h. On sait d'autre part que [13, 170

$$K = -\frac{h^2}{(u^2 + h^2)^2} . \tag{9.5}$$

En se servant de (8.5) et de (9.5), la relation (7.5) fournit alors

$$dv = \frac{\varepsilon \sqrt{h}\, du}{\sqrt{u^2 + h^2}\, \sqrt{\bar{A}\,(u^2 + h^2) - h}}$$

c'est - à - dire

$$v = \left(\varepsilon \sqrt{h} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + h^2}\, \sqrt{\bar{A}\,(u^2 + h^2) - h}} \right) + C^{te} ,$$

qui peut être évidemment obtenu directement.

Le cas des lignes de DARBOUX. Si φ désigne l'angle d'une ligne de DARBOUX avec la première direction principale, la dérivée invariante φ_1 de φ dans la direction de la ligne de DARBOUX sera donnée [3, 367] d'après (5.5) par

$$\varphi_1 = r_1 \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{6\, r \cos \varphi \sin \varphi} \,,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{6 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi)\, \varphi_1 = \frac{r_1}{r} (\cos \varphi + \sin \varphi) = \frac{r_1 \cos \varphi + r_2 \sin \varphi}{r} = \frac{r_1}{r}$$

et en l'intégrant

$$r\, (\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi)^2 = \mathrm{C^{te}} = B$$

où r est une des courbures principales.

On voit donc que :

THÉORÈME (3.5) *Étant donnée une surface réglée minima, si φ désigne l'angle que fait une ligne de* DARBOUX *avec la direction principale $v = Cte$, on a alors tout le long de cette ligne*

$$r\, (\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi)^2 = \mathrm{C^{te}} = B, \tag{10.5}$$

où r est le rayon de courbure principale correspondant à $v = Cte$.

De la même manière que précédemment, si $\bar{\varphi}$ désigne l'angle que fait une ligne de DARBOUX avec la génératrice rectiligne, on aura

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \bar{\varphi} \,,$$

et la relation (10.5) prendra la forme

$$\sqrt{-K}\, [\sin \bar{\varphi}\, (3 - 2\sin^2 \bar{\varphi})]^2 = \mathrm{C^{te}} = B \,.$$

On peut en déduire que :

THÉORÈME (4.5). *Étant donnée une surface minima réglée, si $\bar{\varphi}$ représente l'angle que fait une ligne de* DARBOUX *avec la génératrice rectiligne, on aura alors tout le long de cette ligne*

$$\sqrt{-K}\; [\sin \bar{\varphi}\, (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})]^2 = B = \mathrm{C^{te}}, \quad \text{où} \quad B > 0 \,. \tag{11.5}$$

Ce dernier théorème fournit à son tour le suivant :

THÉORÈME (5.5). *L'intégration de l'équation différentielle des lignes de* DARBOUX *d'une surface réglée minima se ramène à des quadratures.*

En effet, la représentation (9.5) donne immédiatement

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + h^2,$$

où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale. On oura alors

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \sqrt{G} \frac{dv}{du} = \sqrt{u^2 + h^2} \frac{dv}{du}. \tag{12.5}$$

L'égalité (11.5) fournit grâce à (9.5)

$$u^2 + h^2 = \frac{h}{B} \sin^2 \bar{\varphi} (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})^2, \tag{13.5}$$

qui donne à son tour par différentiation

$$du = 3\sqrt{\frac{h}{B}} \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \frac{(3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})(1 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})}{\sqrt{\sin^2 \bar{\varphi} (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})^2 - h B}} d\bar{\varphi}.$$

(12.5) s'écrit alors

$$dv = 3\,\varepsilon \sin \bar{\varphi} \frac{1 - 2 \sin^2 \bar{\varphi}}{\sqrt{\sin^2 \bar{\varphi} (3 - 2\sin^2 \bar{\varphi})^2 - h B}} d\bar{\varphi}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} u^2 &= \frac{h}{B} [\sin^2 \bar{\varphi} (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi}) - h B] \\ v &= \left(3\,\varepsilon \int \frac{\sin \bar{\varphi} (1 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})}{\sqrt{\sin^2 \bar{\varphi} (3 - 2 \sin^2 \bar{\varphi})^2 - h B}} d\bar{\varphi} \right) + \mathrm{C^{te}}, \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \right. \tag{14.5}$$

qui définissent les lignes de Darboux d'une surface minima réglée.

6. Hélicoïde développable. Considérons une surface développable définie par

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u) + v\, \mathbf{a}_1(u)$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ représente l'arête de rebroussement C, tandis que u et $\mathbf{a}_p(u)$, $(p = 1, 2, 3)$ désignent respectivement l'arc de l'arête de rebroussement et les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet de C.

Pour trouver l'équation différentielle des lignes de Darboux de cette surface, appliquons la formule [8, 357; (2-3)]

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{y}''' - 3(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{y}'') (\operatorname{Log} \sqrt{\mathbf{y}'^2})' = 0$$

où la dérivation s'effectue par rapport à l'arc u. On trouve alors

$$\left[\operatorname{Log} \frac{1 + \left(\frac{1 + v^{\cdot}}{\varrho v} \right)^2}{\left(\frac{\tau}{\varrho} \right)^{2/3}} \right]^{\cdot} = \frac{2}{3} \frac{1}{v}, \tag{1.6}$$

où ϱ et τ sont respectivement la courbure et la torsion de C.

Si l'on pose

$$\frac{\varrho v}{1 + v^{\cdot}} = \operatorname{tg} \varphi, \quad k = \frac{\tau}{\varrho}, \tag{2.6}$$

(1.6) s'écrit

$$[\operatorname{Log} | k \sin^3 \varphi |]^{\cdot} = - \frac{1}{v}, \tag{3.6}$$

où φ est l'angle formé par une ligne de DARBOUX avec la génératrice rectiligne.

Si l'on désigne par

$$\frac{d}{d\varphi} = '$$

la dérivation effectuée par rapport à φ, (3.6) peut se metre sous la forme

$$[\operatorname{Log} | k \sin^3 \varphi |]' \varphi^{\cdot} = - \frac{1}{v}. \tag{4.6}$$

On tire d'autre part de (2.6)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho v}{1 + v' \varphi^{\cdot}}$$

qui donne

$$\varphi^{\cdot} = \frac{1}{v'} (\varrho v \operatorname{cotg} \varphi - 1). \tag{5.6}$$

En égalant les valeurs de $\varphi^{\cdot}$ données par (4.6) et (5.6) et en posant

$$\frac{1}{v} = t$$

on obtient

$$\left(t + \frac{t'}{[\operatorname{Log} | k \sin^3 \varphi |]'} \right) \operatorname{tg} \varphi - \varrho = 0. \tag{6.6}$$

Supposons maintenant que la surface développable soit un hélicoïde développable, c'est-à-dire qu'elle soit engendrée par les tangentes à une hélice circulaire. Dans ce cas

$$\varrho = \mathrm{C^{te}}, \quad k = \frac{\tau}{\varrho} = \mathrm{C^{te}},$$

et (6.6) devient

$$(t \sin^3 \varphi + \varrho \cos^3 \varphi)' = 0. \tag{7.6}$$

En l'intégrant et en désignant par $C_1 \varrho$ la constante d'intégration, (7.6) nous fournit

$$t = \frac{1}{\nu} = \varrho \frac{C_1 - \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi},$$

ou bien

$$\nu = R \frac{\sin^3 \varphi}{C - \cos^3 \varphi}. \tag{8.6}$$

Si l'on fait usage de (8.6), (4.6) donne alors

$$u = -\left(3R \int \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{C_1 - \cos^3 \varphi} d\varphi \right) + C_2. \tag{9.6}$$

Les deux égalités (8.6) et (9.6) définissent alors les lignes de DARBOUX de l'hélicoïde déveppoble. D'où :

THÉORÈME (1.6). *L'intégration de l'équation d'ifférentielle des lignes de* DARBOUX *d'un hélicoïde développable se ramène à des quadratures* [4, 146] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLAIRAUT, A. C. : Mémoires Acad. Paris (pour 1733, 1735), 86.

[2] LIOUVILLE, J. : Journ. Mathé., 11, 345, (1846).

[3] ŞEMİN, F. : *On* DARBOUX *lines*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 17 ,351-383, (1952).

[4] ŞEMİN, F. : *Lignes de* DARBOUX *des hélicoïdes développables*, Abstract of Short Communications, Int. Congress of Mathematicians, STOCKHOLM, (1962).

[5] DARBOUX, G. : *Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface*, Comptes Rendus (PARIS), 73, 732 (1871).

[6] SANTALÓ, L. A. : *Superficies cuyas curvas D son geodesicas o Trayectorias isogonales de las lineas de curvature*, Universidad National Del Litoral, 5, 255, (1945).

[7] SANTALÓ, L. A : *Curvas D sobre conos*, Mathematicae Notae, f. 4, 179 (1947).

[8] ŞEMİN, F, : *Notes sur les dérivées invariantes*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec., Seri A, 19, 175-179, (1954).

[9] BLASCHKE, W. : Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, JULIUS SPRINGER, BERLIN, (1945).

[10] ŞEMİN, F. : *Généralisation de quelques formules relatives à la théorie des surfaces*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec., Seri A, 20, 173-180, (1955).

[11] DARBOUX, G. : Leçons sur le théorie générale des surfaces II, GAUTHIER-VILLARS, PARIS, (1915).

[12] ŞEMİN, F. : *On an extension of* LIOUVILLE'*s formula*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec., Seri A, 20, 91-94, (1955).

[13] WILLMORE, T. J. : An Introduction to Differential Geometry, CLARENDON Press, OXFORD, (1964).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL - TÜRKİYE

(Manusrit reçu le 12 décembre 1970)

ÖZET

Bir dönel yüzey verildiğine göre, bunun bir DARBOUX çizgisi boyunca : $(r - \breve{r})\, u \cos^3 \varphi =$ sâbittir ; bu bağıntıdaki $r, \bar{r}$ asal eğrilikleri, u paralelin yarıçapını ve φ de meridyenle DARBOUX çizgisi arasındaki açıyı göstermektedir. Bir yaygılı bir dönel hiperboloidin bir DARBOUX çizgisi boyunca $(P P', PB, PD, PG)$ çifte oranı sâbittir ; burada $P P'$ ve PD enlem çemberi ile DARBOUX çizgisinin bir P ortak noktasındaki teğetleri, PG ve PB de sırasıyle anadoğrulardan biri ve DPG açısının açıortaylarından biridir. Bir minima regle yüzeyin bir geodeziği boyunca : $R\,(1 - \sin 2\beta) =$ sâbittir ; bu bağıntıda, R asal eğrilik yarıçaplarından biri, β de geodezikle asal doğrultulardan biri arasındaki açıdır. Aynı yüzeyin bir DARBOUX çizgisi için bu bağıntı $r\,(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)^2 =$ sâbit şeklini alır ; burada r asal eğriliklerden biridir. Eğer açılar, anadoğrudan itibaren hesaplanacak olursa, bu son iki bağıntı sırasiyle $\sqrt{-K}/\sin^2\bar{\beta} =$ sâbit ve $\sqrt{-K}\,\sin^2\bar{\varphi}\,(3 - 2\sin^2\bar{\varphi})^2 =$ sâbit şekline girer; bu bağıntdardaki K da GAUSS eğriliğini göstermektedir. Dönel yüzey, minima regle yüzey ve açılabilir helikoid hallerinde DARBOUX çizgilerinin diferansiyel denkleminin integrasyonu kuvadratürlere ırca olunur.