International Journal of Educational Studies in Mathematics, 2020, 7(1), 14-25

International Journal of Educational Studies in Mathematics

IJESIM

EDUGARDEN

Examination of Awareness of Gifted Students on Euclidean's 5th Postulate and The Non-Euclidean Geometries

Mehmet Arslan[1], **Oğuzhan Nacaroğlu**[2]

[1]*Dr., Mathematic Teachers, Ministry of Education, Malatya Science and Art Center, Malatya, Turkey*
[2]*Science Teacher, Ministry of Education, Malatya Science and Art Center, Malatya, Turkey*

ABSTRACT

In this research, it was aimed to examine the awareness of gifted students on Euclid's 5th Postulate and non-Euclidean geometries. Phenomenology design, one of the qualitative research methods, was used in the research. The research group consisted of 76 gifted students studying at the Science and Art Center in a province in the Eastern Anatolia Region in the 2018-2019 academic years. Argument test was used as data collection tool. Data were analyzed by descriptive analysis method. At the end of the argumentation activities, it was seen that 78.94 percent of the students did not express any contradictions regarding Euclid's fifth postulate and accepted it clearly with other drawings that could be given or created. In addition, they stated that no matter how much they tried, the result would not change; they did not think that there would be a clearer and easy expression, they adhered to their logic, and that these postulates were the basic knowledge taught to them. It was seen that 14.47 percent of the students questioned the 5th postulate. These students stated that the parallels should be determined according to the ground, it is not true when considered in three dimensions, it does not fit to the hyperbolic and spherical plane, but they do not make a rational explanation, but they have doubts. Suggestions were made in line with the findings.

ARTICLE INFO

Article History:
Received:13.11.2019
Received in revised form:13.01.2020
Accepted:10.03.2020
Available online: 26.03.2020
Article Type: Standard paper
Keywords: argumentation, Euclid, postulate, awareness, gifted students

1. Introduction

In about 300 BC Euclid wrote The Elements the 5th postulate can be expressed in two ways: 1. If a straight line crossing two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, then the two lines inevitably must intersect each other on that side if extended far enough. 2. Given a line and a point not on it, at most one parallel to the given line can be drawn through the point. This postulate has been a problem that mathematicians have dealt with for centuries. With the emergence of hyperbolic geometry and elliptical geometry in the 1800s, the 5th postulate was now interpreted in three different ways. One and only one parallel line can be drawn from a point other than a line on a flat surface. More than one line can be drawn parallel to the line passing through a point other than a line on the hyperbolic surface. Since the lines on the spherical surface are large circles intersecting at two points, a line passing through a point other than a line and parallel to the line cannot be drawn. Today, Euclidean geometry is dominant in secondary and high school mathematics curriculum. In addition, non-Euclidean geometries are included in the activity content in Science and Art Centers (BİLSEM) and especially encountered in project studies. However, it is necessary to determine the level of knowledge of the students regarding the 5th postulate of Euclid and to take necessary measures to

[1] Corresponding author's address: Malatya Science and Art Center, Malatya, Turkey
e-mail: marslanmat@gmail.com

eliminate any misconceptions. Argumentation method is one of the methods used to determine students' misconceptions, if any. Argumentation can be defined as the process of proving claims by supporting the data by proving the reasons. Argumentation based activities enable students to correct and misunderstand misconceptions.

Misconceptions that arise when students make any meaning different from the field expert, contrary to scientific facts and ideas, and often make misinterpretations due to lack of knowledge. It is an important problem that mathematical concepts are perceived to be incomplete or out of scientific meaning and should be addressed. One of the most important steps that should be taken in order to provide students with various skills in mathematics teaching is to teach concepts correctly. In this research, it was aimed to examine the awareness of gifted students on Euclid's 5th Postulate and non-Euclidean geometries.

2. Method

Phenomenology design, one of the qualitative research methods, was used in the research. The study group consisted of 76 private, 7th, 8th, 9th, 10th, 11th, 12th graders in a city in Eastern Anatolia in the 2018-2019 academic year are talented students. In the research, the data collection tool was used to form the arguments created by the researchers. Descriptive analysis was carried out in the analysis of the data.

3. Conclusions and Discussion

At the end of the argumentation activities, it was seen that 78.94 percent of the students did not express any contradictions regarding Euclid's fifth postulate and accepted it clearly with other drawings that could be given or created. In addition, they stated that no matter how much they tried, the result would not change; they did not think that there would be a clearer and easy expression, they adhered to their logic, and that these postulates were the basic knowledge taught to them. It was seen that 14.47 percent of the students questioned the 5th postulate. These students stated that the parallels should be determined according to the ground, it is not true when considered in three dimensions, it does not fit to the hyperbolic and spherical plane, but they do not make a rational explanation, but they have doubts. When the written arguments of the students were examined, it was seen that few of the students had difficulty in explaining their claims with scientific justifications and supporters, and another part was able to produce scientific justifications. At the end of the process, it was observed that the changes in the students' conceptual understanding of Euclid's fifth postulate and thus the existence of different geometries occurred. In addition, students' scientific thinking skills and scientific creativity have been improved. The difference of our study from various studies on mathematical misconceptions is that the concept we question is not directly present in current mathematics curriculum.

Özel Yetenekli Öğrencilerin Öklid'in 5. Postulatı ile Öklid Dışı Geometriler Hakkındaki Farkındalıklarının İncelenmesi

Mehmet Arslan[1], **Oğuzhan Nacaroğlu**[2]

[1]*Dr., Matematik Öğretmeni, Malatya Bilim ve Sanat Merkezi, Malatya, Türkiye*
[2]*Fen Bilimleri Öğretmeni, Malatya Bilim ve Sanat Merkezi, Malatya, Türkiye*

ÖZ

Bu araştırmada, özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatı ile Öklid dışı geometriler hakkındaki farkındalıklarının incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemi desenlerinden fenomenoloji kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, 2018-2019 eğitim -öğretim yılında Doğu Anadolu Bölgesi'nde bir ilde yer alan Bilim ve Sanat Merkezi'nde öğrenim gören 76 özel yetenekli öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada veri toplama aracı olarak Argüman Oluşturma Testi kullanılmıştır. Veriler, betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Yapılan argüman oluşturma etkinlikleri sonunda öğrencilerin yüzde 78.94'ünün Öklid'in 5. postulatına ilişkin çelişkiler ifade etmeyerek verilen ya da oluşturulabilecek başka çizimlerle Öklid'in 5. postulatını apaçık doğru kabul ettikleri tespit edilmiştir. Ayrıca bu öğrenciler, ne kadar denenirse denensin sonucun değişmeyeceğini, daha açık ve kolay bir anlatımın olacağını düşünmediklerini, mantıklarına uyduğunu, bu postulatın kendilerine öğretilen temel bilgiler olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin yüzde 14.47'sinin ise 5. postulatı sorguladıkları görülmüştür. Bu öğrenciler, paralelliğin bulunduğu zemine göre belirlenmesi gerektiğini, üç boyutlu olarak düşünüldüğü zaman doğru olmadığını, hiperbolik ve küresel düzleme uymadığını, mantıklı bir açıklama yapamasalar da şüphe duyduklarını belirtmişlerdir. Elde edilen bulgular doğrultusunda önerilerde bulunulmuştur.

MAKALE BİLGİ

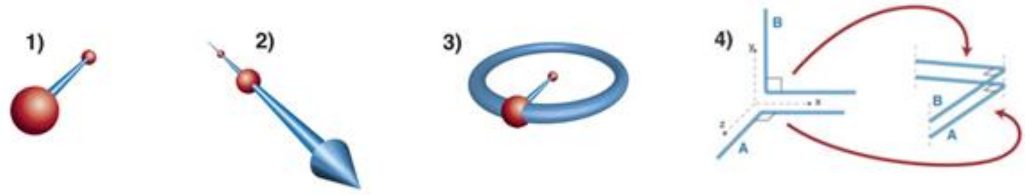
Makale Tarihçesi:
Alındı:13.11.2019
Düzeltilmiş hali alındı:13.01.2020
Kabul edildi:10.03.2020
Çevrimiçi yayınlandı:26.03.2020
Makale Türü: Standart makale

Anahtar Kelimeler: argümantasyon, Öklid, postulat, farkındalık, özel yetenekli öğrenci

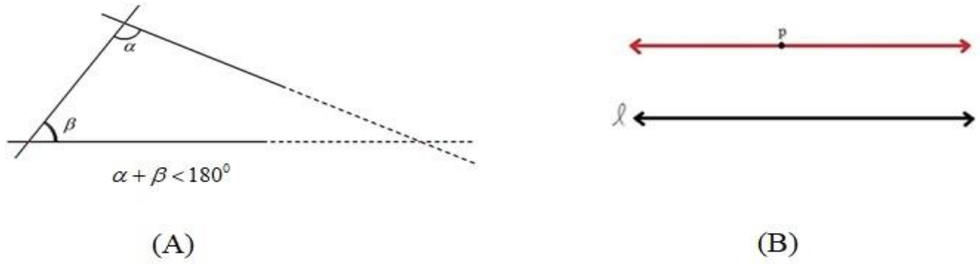
1. Giriş

Geometri; nokta, doğru, düzlem ile uzayda tasarlanabilen cisim ve şekillerle beraber bunların özelliklerini, birbirleriyle ilişkilerini inceleyen, bireylerin evreni anlamalarına, problemleri analiz ederek çözmelerine fırsatlar sunan matematik dalıdır (TDK, 2019; Struchens, Harris ve Martin, 2001). Bu alana önemli katkılar sunmuş bilim insanlarından birisi Öklid'dir. Öklid, o zamana kadar bilinen geometri bilgilerinin büyük kısmını içeren, birçok dile çevrilmiş ve 1000'in üzerinde değişik baskısı yapılmış 13 ciltlik "Elemanlar" adlı eseriyle, geometrinin temellerini oluşturan M.Ö. 300'lü yıllarda yaşamış bir matematikçidir (Alpay, 1996; Sertöz, 2018). Öklid'in düzlem geometrisi matematik tarihinde yaklaşık 2000 yıl tek geometri sistemi olarak hüküm sürmüştür. Günümüzde ilkokul, ortaokul ve lise öğrenimi boyunca öğretilen geometri, Öklid'in ortaya koyduğu düzlem geometridir. Öklid düzlemi her doğrultuda sınırsız uzayan düz pürüzsüz yüzeydir. Öklid düzlem geometrisinde temel elemanlar, noktalar ile doğrulardır. Öklid geometrisi; tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar olmak üzere üç temel kavram üzerinde oluşturulmuştur. Tanımlar, kendine özgü bir takım özellikleri olan geometrik nesneleri belirlemek ya da diğerlerinden ayırmak için onlara verilen isimlerdir (Demirel, 2010). Aksiyom, doğruluğundan şüphe duyulmayan ispat gerektirmeden (Gerstein, 2012) kabul edilen temel önermelerdir. Postulatlar ise aksiyomların geometrideki karşılığı (Arıkan ve Halıcıoğlu, 2016) olarak tanımlanabilir. Öklid'in temel beş postulatı aşağıdaki gibidir:

i. Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.
ii. Herhangi bir doğru parçası bir doğrultuda istenildiği kadar uzatılabilir.
iii. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde çizilecek bir çember vardır.
iv. Dik açılar birbirine eşittir.
v. (A) İki doğru bir doğru tarafından kesildiğinde bu iki doğru ile oluşan iç açılar 180 dereceden küçükse, bu iki doğru yeterince uzatılınca kesişir.
(B) Bir doğru için dışındaki bir noktadan çizilebilecek sadece bir paralel doğru vardır.



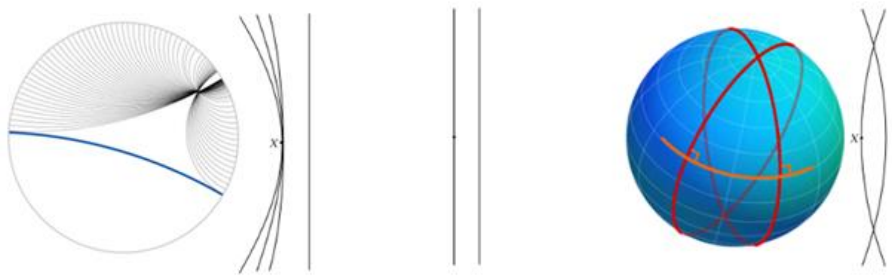
Şekil 1. Öklid'in ilk dört postulatı



Şekil 2. Öklid'in 5. postulatı

İlk dört postulatın doğruluğundan şüphe duyulmamaktadır. Matematikçiler, Şekil 2'de gösterilen 5. postulat üzerinde uzun yıllarca tartışmış ve 5. postulat yerine daha kolay anlaşılacak başka bir bilgi oluşturmaya çabalamışlardır (Alpay, 1996). Ömer Hayyam, Nasirüddin el-Tûsî (Nasr, 1981), Gauss, Bolyai, Lobaçevski, Beltrami, Riemann ve Poincaré (Houzel, 2005) bu matematikçilerden bazılarıdır. 1832 yılında Janos Bolyai ve 1855 de Nikolai Ivanovch Lobachevsky paralellik posülatına karşılık Lobacevski aksiyomunu (bir doğru için dışındaki bir noktadan çizilebilecek birden fazla paralel doğru olduğunu kabul eden aksiyom) koyarak, hiperbolik geometri olarak adlandırılacak olan yeni bir geometrinin temellerini atmışlardır (Demirel, 2010).

1854'de Öklid dışı geometrilerin zemin bulmaya başladığı on dokuzuncu yüzyılın 1854'ünde Bernhard Riemann, Riemann geometrisi olarak da bilinen eliptik geometriyi keşfederek matematik dünyasına yeni bir çalışma ortamı sunmuştur. Bu çalışmalar, 5. postulatın içinde yer almadığı yeni geometrilerin doğmasına yol açmıştır (Alpay, 1996). Bu gelişmeler ışığında 5. postulat üç farklı şekilde yorumlanmıştır. Düz bir yüzeyde bir doğru için dışındaki bir noktadan çizilebilecek sadece bir paralel doğru vardır. Hiperbolik yüzeyde bir doğru için dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olacak birden fazla doğru çizilebilir. Küresel bir yüzeyde doğru için yüzey üzerindeki büyük çemberler tanımlandığından ve bu çemberler iki noktada kesişeceğinden, bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel çizilebilecek hiçbir doğru yoktur.



Şekil 3. Hiperbolik, öklid ve eliptik geometri temsilleri

Farklı ülkelerin öğretim programları incelendiğinde Öklid dışı geometrilere rastlanmaktadır (Kaya, 2004). Fakat ülkemizde güncel ilkokul, ortaokul ve lise matematik öğretim programlarında sadece Öklid'in düzlem geometrisi görülmektedir. Bununla birlikte Bilim ve Sanat Merkezlerinde (BİLSEM) Öklid dışı geometriler, etkinlik içeriklerinde yer almakta ve özellikle de proje çalışmalarında derinlemesine incelenmektedir. BİLSEM'lerde özel yetenekli öğrencilere yönelik; Uyum Eğitimi, Destek Eğitimi, Bireysel Yetenekleri Fark Ettirme (BYF), Özel Yetenekleri Geliştirme (ÖYG) ve Proje Üretimi ve Yönetimi şeklinde farklı öğretim programları uygulanmaktadır. BİLSEM'lerde yürütülen bu programların temel amacı, özel yetenekli öğrencilerin sahip oldukları yeteneklerinin farkına varmalarını ve bu yeteneklerini geliştirmelerini sağlamaktır. Bu kapsamda destek eğitimi programı, uyum programından sonra özel yetenekli öğrencilerin temel becerilerinin geliştirilmesi için uygulanan programdır. BYF programında öğrencilerin yaratıcılıklarını ve problem çözme becerilerini geliştirmek için uygun programlar hazırlanır ve uygulanır. BYF programından başarı gösteren öğrenciler ÖYG programına alınır ve bu programda özel yetenek alanlarına uygun bilimsel ve sanatsal çalışmalar yürütülür. BİLSEM'de öğrencilere yönelik uygulanan son program ise proje üretimi ve yönetimi programı olup bu programda öğrenciler, bireysel ve grup çalışmaları şeklinde güncel problemlere çözüm üretmek için bilimsel ve teknolojik tabanlı proje çalışmaları yürütürler. Dolayısıyla mevcut çalışmanın odak noktasını, BİLSEM'e devam eden özel yetenekli öğrenciler oluşturmaktadır. Çünkü özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatına ilişkin farkındalıklarının tespit edilip, varsa kavram yanılgılarının giderilmesi noktasında gerekli önlemlerin alınması gerekmektedir. Ayrıca matematik kavramlarının eksik ya da bilimsel anlamı dışında algılanması önemli bir problem olduğundan matematik öğretim süreçlerinde öğrencilere kavramların doğru bir şekilde öğretilmesi de büyük önem arz etmektedir (Breigheith ve Kuncar, 2002).

Kavram yanılgıları, öğrenen kişilerin herhangi bir konu üzerinde bilgi eksikliklerinden kaynaklanan ve alan uzmanlarından farklı anlamlandırmalar yapmalarıyla oluşan hatalı düşünceleri (Baki, 2006; Ojose, 2015), anlamada zorlandıkları kavramları kendi anladıkları gibi yorumlamaları (Mayer, 1987) olarak tanımlamak mümkündür. Öğrencilerde kavram yanılgıları; büyük oranda kişisel deneyimler sonucu oluşmuş, bilimsel gerçek ve düşüncelerle çelişen, anlamlı öğrenmeye engel oluşturan (Özkan, Tekkaya ve Geban, 2001) ve doğru bilinerek savunulan bilgilerdir (Çıldır ve Şen, 2006). Geleneksel öğretim yöntemleri ile giderilmesi güç olan (Jonnes ve Tanner, 2000) kavram yanılgıları sonucunda öğrenciler yanlış genellemeler yapabilirler ve öğretmenler özel çabalarla bunları açığa çıkarmaya çalışırlar (Moss ve Case, 2001). Bu şekilde kavramsal bir değişim sağlanacaksa öğrenen bireyin ilgili kavram yanılgıları ile yüzleşmesi sağlanmalıdır (NRCS, 1997). Etkili bir öğretim sağlayabilmek için öğrencilerin kavram yanılgılarının tespit edilmesi önemlidir (Ryan & Williams, 2007). Matematik kavram yanılgısı da, öğrencilerin matematiksel gerçeklerle çeliştiği halde ısrarla doğru kabul ettiği, birçok durumda ortaya çıkan eksik ya da hatalı kavramalardır (Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2010). Matematik öğretiminde matematiksel kavramların bilimsel anlamlarıyla çelişmeyecek bir biçimde, uygun yöntemlerle öğretilmesi gerekmektedir (Breigheith ve Kuncar, 2002). Bu yöntemlerden birisi de argümantasyon yöntemidir.

Argümantasyon, gerekçeleri belirlenerek ortaya atılan iddiaların verilerle desteklendiği kanıtlanma süreci (Toulmin, 1958), bir konu hakkında doğru ve kabul edilebilecek alternatif fikirlerle karşıdakini ikna etmeye dayanan grupla ya da bireysel etkileşimlerle gerçekleşen öğrenme süreci (Sampson ve Douglas, 2008) şeklinde farklı bakış açıları ile tanımlanmaktadır. Argüman ise bir modeli, bir sonucu ya da tahminleri çürütmek ya da desteklemek için ortaya atılan teorilerin veya kanıtların bir arada kullanılması olarak ifade edilmektedir (Toulmin, 1958). Bir argüman oluşturulurken iddia, veri ve gerekçe öğeleri ile beraber destekleyici, çürütme ve sınırlayıcı öğelerini de kapsamasına dikkat edilmelidir. Argümantasyon tabanlı etkinliklerle öğrencilerin doğru algılamaları sağlanarak kavram yanılgıları düzeltilebilir. Muhakeme becerileri ile donatılmış öğrencilerle bir matematik konusu ile ilgili geçerli argümanlar ya da ispatlar üretilerek ve bu argümanlar kritik edilerek daha etkili çalışmalar gerçekleştirebilir (Ross, 1998). Bilimsel tartışmaların yapıldığı argümantasyon yönteminde muhakeme yapılarak doğru bilgiler elde edilebilir.

Bu çalışmada, özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatı ile Öklid dışı geometriler hakkındaki farkındalıklarının incelenmesi ve öğrencilerin geometrik bilişsel yapılarının, argümantasyon etkinlikleri sonunda zihinsel değerlendirmelerle yeniden yapılandırılması amaçlanmıştır. Çalışmanın matematiksel kavram yanılgıları ile ilgili yapılmış çeşitli çalışmalardan farkı sorguladığımız kavramın güncel geometri öğretim programlarında direkt olarak bulunmamasıdır. Çalışma yürütülürken özel yetenekli öğrencilerin argüman testinde yer alan maddelere içtenlikle cevap verdikleri varsayılmaktadır. Buna karşın Anadolu'da yer alan bir ildeki özel yetenekli öğrencileri kapsaması çalışmanın sınırlılıkları arasındadır. Özellikle ülkemizde bu konuda çalışmaların yetersiz olduğu dikkate alındığında, yürütülen çalışmanın alan yazına katkı sağlayacağı ve elde edilen bulguların ileride yapılacak uygulamalara, çalışmalara ve bu alanda çalışmalar yapmak isteyen araştırmacılara yardımcı olacağı düşünülmektedir. Buradan hareketle aşağıda ifade edilen problemlere cevap aranmıştır:

1. Özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatına ilişkin iddiaları nasıldır?
2. Özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatına ilişkin ortaya koydukları iddialara yönelik kanıtları nasıldır?
3. Özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatına ilişkin ortaya koydukları iddialara yönelik gerekçeleri nasıldır?

2. Yöntem

2.1. Araştırma Modeli

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemi desenlerinden fenomenoloji deseni kullanılmıştır. Fenomenolojide, bireylerin tecrübe ve yaşantılarından bir kavram veya olguyu nasıl anımsadıklarını ve anlamlandırdıklarını ortaya koymak amaçlanır (Patton, 2014). Bu çalışmada da özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatı ile

Öklid dışı geometriler hakkındaki farkındalıklarının incelenmesi amaçlandığından fenomenoloji deseni tercih edilmiştir.

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu, 2018-2019 eğitim - öğretim yılında Doğu Anadolu Bölgesi'nde bir şehirde okullarında 7., 8., 9., 10., 11., 12. sınıflarda öğrenim görüp ayrıca BİLSEM'e devam eden 76 özel yetenekli öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmanın örneklemi uygun örnekleme yöntemine göre belirlenmiş olup çalışma grubuna yönelik demografik bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur:

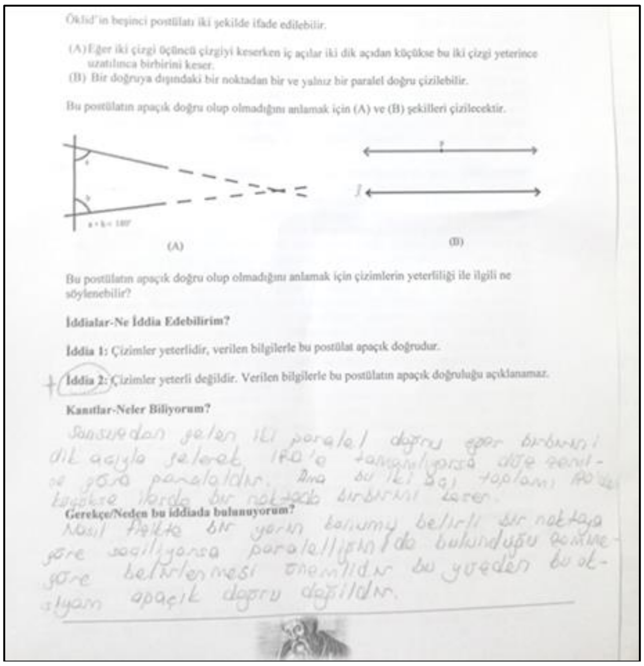
Tablo 1. Katılımcılara ait demografik bilgiler

Kişisel özellikler		f	%
Cinsiyet	Kız	40	52.63
	Erkek	36	47.36
Yaş	11-15	45	59.52
	16-20	31	40.78
BİLSEM grubu	BYF (Bireysel Yetenekleri Fark Ettirme)	24	31.57
	ÖYG (Özel Yetenekleri Geliştirme)	35	46.05
	Proje Üretimi ve Yönetimi	17	22.36

Tablo 1 incelendiğinde; katılımcıların %52.63'ünü kadın katılımcı, %47.36'sını erkek katılımcı oluşturmaktadır. Bu katılımcıların; %31.57'si BYF programında, %46.05'i ÖYG programında ve %22.36'sı proje programında öğrenim görmektedir.

2.3. Veri Toplama Aracı

Araştırmada veri toplama aracı olarak Argüman Oluşturma Testi kullanılmıştır. Veri toplama aracının oluşturulmasında öncelikle alan yazın taranmış ve matematik eğitiminde uzman iki kişinin görüşleri alınmıştır. Bu kapsamda oluşturulan formda öncelikle Öklid'in 5. postulatı ile ilgili iki durum ve bu durumları ifade eden iki çizim verilmiştir. Daha sonra öğrencilere çizimlerin yeterliği ile ilgili kanıtlarını ortaya koyabilecekleri iki iddia ortaya atılmıştır. Bu iddialara yönelik öğrencilerden kanıtlar ve bu kanıtlarını destekleyen gerekçelerini sunmaları istenmiştir. Katılımcı 42'ye ait örnek cevap formu Şekil 4'te verilmiştir:


Öklid'in beşinci postülatı iki şekilde ifade edilebilir.

(A) Eğer iki çizgi üçüncü çizgiyi keserken iç açılar iki dik açıdan küçükse bu iki çizgi yeterince uzatılınca birbirini keser.

(B) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.

Bu postülatın apaçık doğru olup olmadığını anlamak için (A) ve (B) şekilleri çizilecektir.

(A) (B)

Bu postülatın apaçık doğru olup olmadığını anlamak için çizimlerin yeterliliği ile ilgili ne söylenebilir?

İddialar-Ne İddia Edebilirim?

İddia 1: Çizimler yeterlidir, verilen bilgilerle bu postülat apaçık doğrudur.

İddia 2: Çizimler yeterli değildir. Verilen bilgilerle bu postülatın apaçık doğruluğu açıklanamaz.

Kanıtlar-Neler Biliyorum?

Gerekçe/Neden bu iddiada bulunuyorum?

Şekil 4: Katılımcı 42'ye ait cevap formu

2.4. Verilerin Analizi

Bu araştırmada verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Bu kapsamda verilerin analizinde; öğrenci cevaplarının iddia, kanıt ve gerekçe bağlamında gruplandırılması, eksik ve yanlış doldurulan cevap kağıtlarının ayıklanması, cevaplara yönelik uygun kodlama işlemlerinin yapılması, her bir koda yönelik frekans ve yüzde hesaplamalarının yapılması ve yorumlanması şeklinde aşamalar izlenmiştir (Corbin & Strauss, 2007).

Çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini tehdit eden faktörleri kontrol altına almak için bir takım çalışmalar yürütülmüştür: BİLSEM'de farklı öğretim kademelerinde öğrenimlerine devam eden öğrencilerle çalışılmıştır (Çeşitlilik). Veri toplama aracı öğrencilere sessiz bir ortamda uygulanmıştır (İç güvenirlik). Her uygulama sonucu öğrencilerle birebir görüşülerek iddia, kanıt ve gerekçeleri teyit edilmiştir (Katılımcı teyidi). Kullanılan yöntemin seçilme nedeni, çalışma grubu, çalışmanın uygulanma süreci, veri toplama aracı ve analiz süreci detaylı bir şekilde açıklanmıştır (Dış geçerlik). Bulgularda katılımcıların görüşlerine doğrudan yer verilmiştir (İç güvenirlik). Elde edilen veriler, bulgular doğrultusunda tartışılmıştır (Dış güvenirlik). Her bir katılımcıya gizlilik kapsamında K1, K2, K3, …, K76 şeklinde kodlar verilmiştir.

3. Bulgular

3.1. Katılımcıların İddialarına Yönelik Bulgular

Katılımcılara uygulama formunda verilen *"Çizimler yeterlidir, verilen bilgilerle bu postulat apaçık doğrudur."* şeklindeki İddia 1 ile *"Çizimler yeterli değildir. Verilen bilgilerle bu postulatın apaçık doğruluğu açıklanamaz."* Şeklindeki İddia 2 yöneltilmiştir. Katılımcıların iddialara yönelik cevaplarının frekans ve yüzde değerleri Tablo 2'de verilmiştir:

Tablo 2. İddialara verilen cevaplara yönelik frekans ve yüzde değerleri

İddialar		f	%
İddia 1	Çizimler yeterlidir, verilen bilgilerle bu postulat apaçık doğrudur.	60	78.94
İddia 2	Çizimler yeterli değildir. Verilen bilgilerle bu postulatın apaçık doğruluğu açıklanamaz.	11	14.47
	Yetersiz açıklama yapanlar	5	6.57

Tablo 2 incelendiğinde, katılımcıların %78.94'ü İddia 1'i, %14.47'si ise İddia 2'yi savunmuşlardır. Bununla birlikte yetersiz açıklamalarda bulunan katılımcı sayısı ise 5'tir.

3.2. İddialara Yönelik Ortaya Konulan Kanıtlar

Katılımcılardan savundukları iddiaları destekleyecek kanıtlar sunmaları istenmiştir. Bu kapsamda elde edilen bulgular Tablo 3'te sunulmuştur:

Tablo 3. İddialara yönelik ortaya atılan kanıtlar

İddialar	Kanıtlar	*f*	%
İddia 1	Çizilen her dikme 90 derecedir.	3	5.00
	180^0 den küçük açı ile uzayan doğrular bir noktada kesişir.	6	10.0
	Öklid'in aksiyomları için bir kanıta ihtiyaç yoktur.	4	6.66
	Bir çelişki yoktur.	2	3.33
	İki doğrunun eğimi eşitse paralel olur.	6	10.0
	İki noktadan bir doğru geçer.	5	8.33
	Dik üçgene göre düşünmek gerekir.	3	5.00
	Tüm dik açıların ölçüleri eşittir.	2	3.33
	Dik üçgende yüksekliğin karesi kestiği iki parçanın çarpımıdır	5	8.33
	Bir çizgi istenildiğinde sonsuza kadar uzatılabilir.	1	1.66
	Öklid geometrinin temelidir	9	15.0
	Üçgenler ve benzerlik kanunları önemlidir.	3	5.00
	Bir noktadan sadece bir paralel geçer.	4	6.66
	Merkezi ve yarıçapı verildiğinde bir çember çizilebilir.	1	1.66
	Dikten dik inerse Öklid kuralları doğar.	1	1.66
	İki doğru uzatılırsa bir noktada kesişir.	1	1.66
	Uzay çalışmalarında düzlem kullanılır.	2	3.33
	Akla ve mantığa uygun olduğundan şekil üzerinde somut bir şekilde anlatılabilir.	1	1,66
	Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir paralel doğru çizilir.	1	1.66
İddia 2	İki boyutlu geometride paralel olmayan iki doğru kesişir.	2	18,18
	Öklidin 5. postulatı düz zeminlerde doğrudur.	5	45,45
	Hiperbolik ve küresel zeminde A ve B şekli değişebilir.	2	18,18
	İki açının toplamı 180^0 den küçükse bir noktada kesişir.	1	9,09
	Hiperbolik geometriye göre yanlıştır.	1	9,09

Tablo 3 incelendiğinde katılımcılar İddia 1'e yönelik en çok *"Öklid geometrinin temelidir."* kanıtını ortaya attıkları (%15) görülmektedir. Bununla birlikte ikinci sırada ise en çok *"180^0 den küçük açı ile uzayan doğrular bir noktada* *kesişir.”* ve *“İki doğrunun eğimi eşitse paralel olur.”* kanıtlarını ortaya atmışlardır. İddia 2’nin doğruluğunu kabul eden katılımcıların en çok *“Öklid’in 5. postulatı düz zeminlerde doğrudur.”* kanıtını ortaya attıkları (%8.33) tespit edilmiştir. Bununla birlikte ikinci sırada ise en çok *“İki boyutlu geometride paralel olmayan iki doğru kesişir.”* ve *“Hiperbolik ve küresel zeminde A ve B şekli değişebilir.”* kanıtlarını ortaya atmışlardır.

İddia 1’e yönelik ortaya atılan kanıtlara ait örnek öğrenci görüşleri şunlardır:

“Öklid’in teorileri akla ve mantığa uygun olmakla birlikte şekil üzerinde somut bir şekilde anlatılabilir.” (K22)

“Üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğundan iki açının toplamı 180°’den küçük ise mutlaka bir açı daha olmalıdır. Bu açının oluşması için de iki doğrunun birbirini kesmesi gerekir.” (K71)

“Bir doğrunun dışındaki bir noktadan sonsuz doğru çizilebilir. Paralel olması ise eğimin eşit olduğu yalnız bir durumdur.” (K5)

“İki paralel doğruyla üçüncü bir doğru kesiştirilirse doğruların aynı tarafta kalan açılarının toplamı 180° dir.” (K33)

“İki çizgi üçüncü çizgiyi keserken iki çizgi paralelse 180° olur. 180°’den büyük olursa da kesişmez.” (K26)

İddia 2’ye yönelik ortaya atılan kanıtlara ait örnek öğrenci görüşleri şunlardır:

“Bu postulatlar geometrinin temelini oluştururken kullanılan postulatlar sayesinde birçok yeni formül ve kural oluşmuştur. Ancak Öklid’in beşinci postulatında düz bir platform kullanıldığını biliyorum.” (K3)

“Beşinci postulat sadece Öklid geometrisinde geçerlidir. Hiperbolik ve küresel geometride değişir.” (K59)

“Sonsuzdan gelen iki paralel doğru eğer birbirini dik açıyla gelerek 180’e tamamlıyorsa düz zemine göre paraleldir.” (K42)

“İki doğruyu kesen 3. doğru ile oluşturdukları açıların toplamı 180 dereceden küçükse iki doğru kesişir. Ama hiperbolik ve küresel düzlemde A ve B şekli değişebilir.” (K16)

“Hiperbolik geometriye göre bunlar yanlış.” (K11)

3.3. İddialara Yönelik Ortaya Konulan Gerekçeler

Katılımcılardan savundukları iddialarda bulunma gerekçelerini sunmaları istenmiştir. Bu kapsamda elde edilen bulgular Tablo 4’te sunulmuştur:

Tablo 4. İddialara yönelik gerekçeler

	Gerekçeler	*f*	%
İddia 1	Paralel olan iki doğruyu üçüncü dik bir doğrunun kesmesi gerekir.	1	1.66
	180 dereceden küçük açıya sahip iki doğru kesişir.	8	13,28
	Her durumda doğrudur.	3	5.00
	İddialara yönelik çelişki bulunmamaktadır.	2	3.33
	Paralel olmayan doğrular kesişir.	1	1.66
	Bu postulatlar bize öğretilen temel bilgilerdir.	1	1.66
	Sayısal olarak doğru sonuç veriyor.	3	5.00
	Her doğru doğrusaldır.	2	3.33
	Her çizimde sonuç aynı çıkar.	8	13,28
	Paralel iki doğru hiçbir zaman kesişmez.	2	3.33
	Bu iki açı 180°’den küçükse bir üçgen oluşur.	1	1.66
	Yetersiz gerekçe ortaya koyanlar.	26	43,16
İddia 2	3 boyutluda postulat doğru değildir.	1	9,09
	Zemin önemlidir.	1	9,09
	Hiperbolik ve küresel düzlemde farklı olur.	6	54,54
	Hiperbolik geometride bu postulat açıklanamaz.	3	27,27
	Yetersiz gerekçe ortaya koyanlar.	2	3.33

Tablo 3 incelendiğinde katılımcıların İddia 1’e yönelik gerekçelerini tam olarak ortaya koyamadıkları görülmektedir (%43,16). Bununla birlikte katılımcılar en çok *“180 dereceden küçük açıya sahip iki doğru kesişir.”* ve *“Her çizimde sonuç aynı çıkar.”* gerekçesini en çok ifade ettikleri tespit edilmiştir. İddia 2’yi savunan katılımcıların gerekçeleri incelendiğinde en çok *“Hiperbolik ve küresel düzlemde farklı olur.”* gerekçesini ortaya attıkları görülmüştür.

İddia 1’e yönelik ortaya atılan gerekçelere ait örnek öğrenci görüşleri şunlardır:

"*Çünkü bu belirtilen özelliklere uyan hangi boyutta veya hangi yönde olduğu önemli olmaksızın başka çizimlerle de bu sonuçlar elde edilebilir.*" (K18)

"*Öklid'in beşinci postulatının apaçık doğru olduğunu düşünüyorum. Çünkü eğer bu iki açı 180°'den küçükse ileride kesişerek bir üçgen oluşturur ve üçgenin açılarının top=180'dir. Büyükse zaten zıt yöne gider.*" (K74)

"*a+b<180° olduğu takdirde üçüncü bir açı için birleşip 180'e tamamlar.*" (K33)

"*İddia 1 apaçık doğrudur. Her durumda ve şekilde A maddesindeki gibi doğrular arasında kalan açılar toplamı 90°+90° değilse bir tarafta ve bir yerde kesişmek zorundadır. B maddesindeki gibi bir doğrunun dışında alınan bir noktadan geçen doğru (d1 olsun), ilk doğru (d0 olsun) ve bunları kesen üçüncü bir doğru (d2 olsun) arasındaki açıların 90°+90° olmasını sağlayan tek bir tane d1 doğrusu vardır.*" (K57)

"*Çizimler yeterince açıklayıcı ve bu postulatların doğruluğu bence kesin. Zaten bu postulatlar bize öğretilen temel bilgilerdir.*" (K1)

İddia 2'ye yönelik ortaya atılan gerekçelere ait örnek öğrenci görüşleri şunlardır:

"*2. İddiayı destekliyorum çünkü üç boyutlu düşündüğümüz zaman postulat doğru değildir.*" (K36)

"*İddia 2'yi desteklememin sebebi Öklid'in paralellik ilkesinin düz bir platformda gerçekleşmesidir. Platform düz (yatay veya dikey) bir platformdan çıkartılıp karmaşık bir platformda uygulandığında gerçekleşmez.*" (K3)

"*Nasıl fizikte bir yerin konumu belirli bir noktaya göre seçiliyorsa paralelliğinde bulunduğu zemine göre belirlenmesi önemlidir. Bu yüzden bu aksiyom apaçık doğru değildir.*" (K42)

"*Zemin eğer daire, eğri bir zemin ise A'da kesişmeyebilir, B'de kesişebilir.*"(K49)

"*Burada düzlemin hangi şekilde olduğu belli değildir.*" (K8)

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada argüman oluşturma testi kullanılarak, özel yetenekli öğrencilerin Öklid'in 5. postulatı ile Öklid dışı geometriler hakkındaki farkındalıklarının incelenmesi ve öğrencilerin geometrik bilişsel yapılarının, argümantasyon etkinlikleri sonunda zihinsel değerlendirmelerle yeniden yapılandırılması amaçlanmıştır. Yapılan argüman oluşturma etkinlikleri sonunda öğrencilerin yüzde 78.94'ünün Öklid'in 5. postulatına ilişkin çelişkiler ifade etmeyerek verilen ya da oluşturulabilecek başka çizimlerle Öklid'in 5. postulatını apaçık doğru olarak kabul ettikleri görülmüştür (Tablo 2). Ayrıca bu öğrenciler, ne kadar denenirse denensin sonucun değişmeyeceğini, daha açık ve kolay bir anlatımın olacağını düşünmediklerini, mantıklarına uyduğunu, bu postulatların kendilerine öğretilen temel bilgiler olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin yüzde 14.47'sinin ise 5. postulatı sorguladıkları görülmüştür (Tablo 2). Bu öğrenciler, paralelliğin bulunduğu zemine göre belirlenmesi gerektiğini, üç boyutlu olarak düşünüldüğü zaman doğru olmadığını, hiperbolik ve küresel düzleme uymadığını, mantıklı bir açıklama yapamasa da şüphe duyduklarını belirtmişlerdir. Elde edilen bu bulgu doğrultusunda özel yetenekli öğrencilerin Öklid dışı geometriye yönelik yeterli bilgiye sahip olmadıkları yorumu yapılabilir. Bu kapsamda BİLSEM'de yürütülen matematik çalışmalarında bu alana yönelik etkinliklerin ve projelerin yapılması önem arz etmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin yüzde 6.57'si ise yetersiz açıklama yapmışlardır (Tablo 2). Bu öğrencilerin yetersiz açıklama yapma nedenlerinin nitel çalışmalarla derinlemesine incelenmesi önemli görülmektedir. Yazılı argümanlar incelendiğinde öğrencilerin iddialarını ifade ederken ve gerekçelerken düşüncelerini açık bir şekilde, rahatça ifade ettikleri (Chi ve VanLehn, 1991; Bell ve Linn, 2000), öğrencilerin az bir kısmının iddialarını bilimsel gerekçeler ve destekleyicilerle açıklamakta zorlandıkları (Mayer, 1987), diğer bir kısmının da bilimsel gerekçeler üretebildikleri görülmüştür.

Öğrencilerin önemli bir kısmı İddia 1'e kanıt olarak, Öklid'i geometrinin temeli olarak gördüklerini ve 180^0 den küçük açı ile uzayan doğruların bir noktada kesinlikle kesişeceğini ortaya atmışlardır (Tablo 3). Bu bulgu, öğrencilerin hiperbolik geometriye yönelik farkındalıklarının yeterli düzeyde olmadığını ve kavram yanılgısına sahip olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte altı katılımcı sonuçların hiperbolik ve küresel düzlemde farklı olabileceğini savunmuşlardır (Tablo 3). Dolayısıyla öğrencilerin Öklid dışı geometriye yönelik ortaya attıkları iddiayı yeterli düzeyde savunamadıkları ve bu alanda yetersiz bilgiye sahip oldukları yorumuna varılabilir. Aynı şekilde katılımcılar ortaya attıkları iddialara yönelik gerekçelerini ortaya koyma noktasında yetersiz oldukları da tespit edilmiştir (Tablo 4). Katılımcılardan savundukları iddialarda bulunma gerekçelerini sunmaları istendiğinde İddia 1'i savunan katılımcıların önemli bir kısmı (f:26) yetersiz gerekçe ortaya koymuşlar ve ortaya attıkları kanıtlar ile gerekçelerinin benzer olduğu tespit edilmiştir. Bu durum İddia 2'yi ortaya atan katılımcılarla benzerlik göstermektedir. Dolayısıyla katılımcıların Öklid'in 5. postulatına yönelik savundukları iddialara yönelik yeterli düzeyde kanıt ve gerekçe ortaya koyamadıkları yorumu yapılabilir.

Argüman oluşturma testi sonucunda öğrencilerde Öklid'in 5. postulatı ve dolayısıyla farklı geometrilerin varlığına ilişkin kavramsal anlamalarında değişimlerin meydana geldiği gözlemlenmiştir (NRCS, 1997). Ayrıca öğrencilerin, bilimsel düşünebilme kabiliyetlerinin ve bilimsel yaratıcılıklarının bazı kaynaklara paralel olarak geliştiği fark edilmiştir (Duschl & Osborne, 2002; Lawson, 2003). Argüman tabanlı çalışmalar öğrencilerin muhakeme düzeylerini arttırmakta (Eşkin, 2008; Ross, 1998) ve neticede öğrencilerin kanıt göstermede ve bu kanıtlar arasındaki ilişkiyi etkin kullandıkları görülmüştür (Ryu & Sandoval, 2012). Bu açıklamalar neticesinde aşağıda ifade edilen önerilerde bulunulmuştur:

Yaşadığımız çağda öğrencilerin bilimsel gelişmeler, teknolojik değişim ve dönüşümlerin hızını yakalayabilmeleri, evreni anlayıp yorumlayabilmeleri için hiperbolik ve eliptik geometrilere de hakim olmaları gerektiği düşünülmektedir. Bu nedenle, Milli Eğitim Bakanlığı ortaöğretim matematik dersi öğretim programları güncellenirken Öklid'in 5. postulatı üzerinde yapılan tartışma süreçleri ile beraber Öklid dışı geometrilere de yer verilmesi, hiperbolik ve eliptik geometriler, kazanımları ve programlardaki ağırlıkları belirlenerek gerekli ders saatlerinde yerlerini almaları önerilmektedir.

Alan yazında BiLSEM öğrencileri argümantasyon tabanlı etkinlikleri tercih ettiklerini ve bu sayede etkinliklere katılımın artacağını, eğlenceli olacağını, sorgulayarak öğrenme ile kalıcı bilgiye ve kolay öğrenmeye ulaşacaklarını ifade etmişlerdir (Şahin, 2016). Özel yetenekli öğrenciler için geliştirilen eğitim programları, eleştirel düşünme bileşenleri içermelidir (Davis ve Rimm, 2004). Buradan hareketle BİLSEM'lerde argümantasyon tabanlı etkinliklerin ve dolayısıyla Öklid dışı geometrileri içeren iyi planlanmış etkinliklerin sayısının arttırılması önerilmektedir.

Özel yetenekli öğrenciler için yaptığımız çalışma örneklem sayısı artırılarak tekrarlanabilir. Ek olarak farklı okul türlerindeki öğrenciler içinde yapılabilir.

5. Kaynakça

Alpay. Ş. (1996). Paralellik Aksiyomu Üzerine. *Matematik Dünyası, 1,* 2-6.

Arıkan, A., & Halıcıoğlu, S. (2016). *Soyut matematik.* Ankara: Palme Yayıncılık.

Baki, A.(2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi* (3. Baskı). İstanbul: Derya Kitabevi

Baykul, Y. (2003). *İlköğretimde Matematik Öğretimi* (7. Baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Belbachir, H., Németh, L., & Szalay, L. (2016). Hyperbolic pascal triangles. *Appl. Math. Comp., 273*, 453-464.

Bell, P. & Linn, M. C. (2000). Scientific arguments as learning artifacts: Designing for learning from the web with KIE. *International Journal of Science Education, 22*(8), 797-817.

Breigheith, M., & Kuncar, H.(2002). *Mathematics and Mathematics Education*, S. Elaydi, S. K. Jain, M. Saleh, R. Ebu-Saris, E. Titi (Ed), Misconceptions in Mathematics (pp. 122-134). Singapore: Word Scientific Printers.

Chi, M. T. H., & VanLehn, K. (1991). The contents of physics self-explanations. *The Journal of the Learning Sciences, 1,* 69-105.

Corbin, J., & Strauss, A. (2007). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Çıldır, I., & Şen, A. İ. (2006). Lise öğrencilerinin elektrik akımı konusundaki kavram yanılgılarının kavram haritalarıyla belirlenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30,* 92-101.

Demirel, O. (2010). *Hiperbolik geometrinin poincaré yuvar modeli üzerine.* Doktora Tezi. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon

Duschl, R. A., & Osborne, J. (2002). Supporting and promoting argumentation discourse in science education. *Studies in Science Education, 38,* 39-72.

Ellison, C. (2004). *Cryptography Timeline.* Erişim adresi: http:// world .std.com /~cme/html/timeline.html

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B., & Ersoy, Y. (2010). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim, 34*(152), 44-59.

Erduran, E., Simon, S., & Osborne, J. (2004). Tapping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's argument pattern for studying science discourse. *Science Education, 88,* 915-933.

Erduran, S., & Jimenez-Aleixandre, M. P. (2007). *Argumentation in Science Education: an Overview.* In S. Erduran & M. P. Jimenez-Aleixandre (Eds.), Argumentation in Science Education: Perspectives from classroom-based research, Dordrecht, s. 3-27. Springer.

Eşkin, H. (2008). *Fizik dersi kapsamında öğretim sürecinde oluşturulan argüman ortamlarının öğrencilerin muhakemesine etkisi.* Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi. İstanbul.

Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to Mathematical Structures and Proofs.* New York: Springer.

Houzel, C. (2005). *The Birth of Non-Euclidiean Geometry,* 1830-1930: A Century of Geometry Epistomology, History and Mathematics, Eds. L.Boi, D.Flament, J.-M.Salanskis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 3-21.

Ito, T. (2007). *Hyperbolic Non-Euclidean World,* Erişim adresi: http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us3_poinc.htm

Jones, S., & Tanner, H. (2000). *Becoming a Successful Teacher of Mathematics.* London: Routledge Falmer.

Joyce, D.E. (2002). Hyperbolic Tessellations, Erişim adresi: https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/poincare/tilings.html

Katz, J., & Lindell, Y. (2008). *Introduction to modern cryptography : principles and protocols,* Chapman & Hall.

Kaya R. (2004). Geçmisten günümüze geometri ögretimi ve euclid dısı geometrinin ögretimdeki yeri ve önemi, Erişim adresi: Matder.org

Koç, Ç. (Ed)., (2009). *Cryptographic Engineering,* Springer-Verlag

Kuhn, D. (1992). Thinking as argument. *Harvard Educational Review, 62*(2),155-178.

Kurbay, İ. (2007). *Hiperbolik geometride bazı uygulamalar.* Yüksek Lisans Tezi. Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

Lawson, A. E. (2003). The nature and development of hypothetico-predictive argumentation with implications for science teaching. *International Journal of Science Education, 25*(11), 1387-1408.

Mayer, R. E. (1987). *Educational Psychology: A Cognitive Approach.* New York: Harper Collins.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2010). *Ortaöğretim Geometri Dersi 9.-10. Sınıflar Öğretim Programı.* Ankara, Türkiye.

Moss, J., & Case, R. (2001). Developing children's understanding of the rational numbers: A new modal and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 122-147.

Nasr, S. H. (1981). *"Al-Tusi," Dictionary of Scientific Biography,* Vol.13, New York: Charles Scribner's Sons, s.508-514, içinde s.510.

NRCS. (1997). *Science Teacher Reconcidered:* A Handbook. Washington: National Academy Press.

Ojose, B. (2015). Students' misconceptions in mathematics: Analysis of remedies and what research says. *Ohio Journal of School Mathematics, 72,* 30-34.

Özdeş, H., & Elitok-Kesici, A. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin doğal sayılar konusundaki hata ve kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 23*(3), 1277-1292.

Özkan, Ö., Tekkaya, C., & Geban, Ö. (2001). *Ekoloji konusundaki kavram yanılgılarının kavramsal değişim metinleri ile giderilmesi.* Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu Bildirileri, Maltepe Üniversitesi, İstanbul. 191-193

Patton M.Q. (2014). *Nitel Araştırma ve Değerlendirme Yöntemleri*. (M Bütün, SB Demir Çev.). Ankara: Pegem Akademi.

Paar, C., & Pelzl, J., (2010). *Understanding Cryptography* A Textbook for Student and Practitioners, Springer.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics, 4-15: Learning from Errors and Misconceptions.* New York: Open University Press.

Ryu, S., & Sandoval, W. (2012) Improvements to elementary children's epistemic understanding from sustained argumentation. *Science Education, 96*(3), 488–526.

Sampson, V., & Douglas, B. (2008). Assessment of the ways students generate arguments in science education: Current perspective sand recommendations for future directions. *Wiley Inter Science,* 447–472.

Sertöz, A. S. (2018). *Öklid ve Elemanlar.* Erişim Adresi: http://sertoz.bilkent.edu.tr/depo/BT-2018-01.pdf

Struchens, M. E., Harris, K. A., & Martin, W. G. (2001). Assesing geometric and measurement understanding using manipualtives. *Mathematics Teaching in Middle School, 6*(7), 402-405.

Şahin, E. (2016). *Argümantasyon tabanlı bilim öğrenme yaklaşımının üstün yetenekli öğrencilerin akademik başarılarına üstbiliş ve eleştirel düşünme becerilerine etkisi.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

TDK, (2019). *Geometri.* Erişim adresi: https://sozluk.gov.tr/?q=geometri&aranan

Tennant, R. (1992). Constructing Tessellations and Creating Hyperbolic Art, Symmetry. *Culture and Science 3,* 367-383

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.