

GNSS Taşıyıcı Faz Ölçmelerinde Belirsizlik Çözümü için LAMBDA Yöntemi

Mevlüt YETKİN¹ ve Cevat İNAL²

Özet

GNSS ile yüksek presizyonlu bağıl konum belirleme için gerekli olan temel şartlardan birisi ikili farklı taşıyıcı faz belirsizliklerinin çözülmesidir. Belirsizlik çözümü için kullanılan yöntemlerden biri LAMBDA (Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment) yöntemidir. LAMBDA yöntemini kullanırken tamsayı en küçük kareler belirsizlik kestirimi iki adımda gerçekleştirilir. İlk önce belirsizlikler Z-transfomasyonu yardımıyla ilintisizleştirilir. Daha sonra tamsayı minimizasyon problemi belirsizlik araştırma elipsoidi olarak adlandırılan elipsoidal bir bölgede kesikli bir araştırma yapmak suretiyle hesaplanır. Bu çalışmada tamsayı belirsizlik kestiricilerinden tamsayı yuvarlatma yöntemi, ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi ve LAMBDA yöntemi incelenmiştir. Ayrıca yöntemlerle ilgili sayısal bir uygulamaya yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Bağıl Konum Belirleme, Belirsizlik Çözümü, Faz Gözlemleri, Tamsayı En Küçük Kareler Kestiricisi, İlintisizleştirme

Abstract

LAMBDA Method for Ambiguity Resolution in GNSS Carrier-Phase Measurements

One of the essential conditions for high precision relative positioning using GNSS is resolving the double differenced carrier phase ambiguities. One method used in ambiguity resolution is the LAMBDA (Least-squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment) method. When using the LAMBDA method, the integer ambiguity estimation is computed in two steps. First the ambiguities are decorrelated by means of Z-transformation. Then, the integer minimization problem is solved by a discrete search over an ellipsoidal region. This paper studies integer rounding, sequential conditional integer rounding and the LAMBDA method which are integer ambiguity estimators. Moreover a numerical example is presented.

Key Words

Relative Positioning, Ambiguity Resolution, Phase Observations, Integer Least Squares Estimator, Decorrelation.

1. Giriş

GNSS taşıyıcı faz ve kod gözlemlerini kullanarak yapılan presizyonlu bağıl konum belirlemede, jeodezik uygulamalar için yeterli bir presizyon elde edebilmek için, ölçü süresi boyunca uydu-alıcı geometrisinin önemli ölçüde değişmesi gerekir. Genellikle uydu-alıcı geometrisi yavaş bir şekilde değiştiğinden, cm düzeyinde veya daha presizyonlu konum belirleme yapabilmek için gözlem süresinin uzun tutulması gerekir. Bu da ekonomik açıdan GNSS teknolojilerinin daha verimli kullanılmasını engelleyebilir. Bununla birlikte daha kısa süreli gözlemler yapıldığı zaman (örneğin sadece bir epok) koordinat parametrelerinin presizyonu büyük ölçüde kod gözlemlerinin presizyonuna bağlı olacaktır. Jeodezik amaçlı uygulamalarda, gereken presizyon sağlanamayabilir. Bu nedenle duyarlı faz gözlemleri kullanılsa bile elde edilen koordinat presizyonu zayıf olur. Bunun sebebi faz verisindeki belirsizliklerdir (ODIJK 2002).

Faz gözlemlerinde temel düşünce taşıyıcı dalganın dalga boylarının sayılmasıdır. Taşıyıcı sinyallerin dalga boyları bilindiği için uydu-alıcı uzaklığı kolaylıkla hesaplanabilmektedir. Alıcı uydudan sinyal almaya başladığı an, diğer bir deyişle ilk ölçü epogundan itibaren, uydu-alıcı fazındaki tamsayı dalga boyu değişimleri belirlenebilir. Öte yandan başlangıç anında uydu-alıcı arasındaki taşıyıcı dalga fazındaki tam dalga sayısı bilinmez. Bu taşıyıcı dalga faz başlangıç belirsizliği ya da kısaca faz belirsizliği olarak adlandırılır (KAHVECİ ve YILDIZ 2005). GPS alıcısı tarafından belirlenemeyen bu tamsayı değerlerinin parametre (bağıl konum belirlemede baz bileşenleri) kestirimi çerçevesinde belirlenmesi gerekmektedir. Faz kesiklikleri (cycle slip) olmadığı sürece, yani alıcı uydudan sinyal aldığı sürece bütün epoklarda belli bir uydu-alıcı çifti için belirsizlik değeri aynıdır (ODIJK 2002).

Hızlı ve presizyonlu GNSS uygulamalarında taşıyıcı faz gözlemlerinin sağlamış olduğu doğruluk potansiyelinden yararlanabilmek için faz belirsizliklerinin uygun tekniklerle belirlenmesi gerekir. GNSS ile bağıl konum belirlemede matematiksel model, ikili farklar oluşturmak suretiyle kurulmuşsa uydu ve alıcı saat hatalarının ortadan kaldırılması, aynı zamanda uydu yörünge hataları, atmosferik etkiler ve yansımaya hatalarının etkilerinin özellikle kısa bazlarda önemli ölçüde azaltılabilmesi mümkün olmaktadır (KURT 2005). GNSS verilerinin işlenmesinde model, ikili farklar oluşturmak suretiyle kurulmuşsa, faz belirsizlikleri ikili farklı belirsizlikler olarak kestirilebilir. İkili fark alma suretiyle sinyalin başlangıç fazları elemine edildiği için ikili farklı belirsizlikler kesirli sayı yerine tamsayı değerlidir. GNSS verilerinin işlenmesinde belirsizliklerin bu tamsayı özelliği dikkate alınmalıdır. Tamsayı değerli belirsizlikler doğru bir şekilde belirlendikten sonra gerçekleştirilecek parametre kestiriminde ilgilenilen parametreler (baz bileşenleri ve atmosferik gecikmeler) belirsizliğin olmadığı faz verilerini kullanarak yüksek doğrulukta elde edilebilir (ODIJK 2002). İkili farklı taşıyıcı faz verisindeki bilinmeyen tamsayı belirsizlikleri doğru bir şekilde çözüldüğü zaman, taşıyıcı faz gözlemleri kavramsal olarak mm seviyesinde yüksek presizyonlu uzaklık (range) ölçmelerine dönüşeceği için, cm veya daha yüksek doğrulukla konum belirleme mümkün olabilir (KIM ve LANGLEY 2000).

Belirsizlik çözümünde önemli bir yaklaşım belirsizlik araştırma yöntemlerinin kullanılmasıdır. Başlıcaları şunlardır: FARA (Fast Ambiguity Resolution Approach) (FREI ve BEUTLER 1990), LAMBDA (Least squares AMBIGUITY Decorrelation Adjustment) (TEUNISSEN 1993), FASF (Fast Ambiguity Search Filter) (CHEN ve LACHAPPELLE 1995) ve OMEGA (Optimal Method for Estimating AMBIGUITIES) (KIM ve LANGLEY 1999). Belirsizlik araştırma yöntemlerinin önemli bir amacı, bir gözlem istasyonundaki gözlem süresinin azaltılmasıdır. Bu nedenle ne kadar çok sayıda uyduya gözlem yapılırsa, yöntemler o kadar iyi sonuç verir. Bu yöntemlerin önemli bir dezavantajı, sistematik hatalara karşı duyarlı olmalarıdır. Multipath, cycle slip, uyumsuz kod ölçüleri, iyonosferik ve troposferik

¹Arş. Gör., ² Prof. Dr., Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Konya

gecikme belirsizlik çözümünü olumsuz yönde etkileyebilir. Öte yandan belirsizlik çözümünü hızlı bir şekilde gerçekleştirmeleri hassas navigasyon, hızlı statik ve kinematik ölçmeler için uygun olmalarını sağlamaktadır. Ayrıca bu yöntemlerde belirsizliklerin tamsayı özelliği korunmaktadır (SEEBER 2003). Belirsizlik çözümü için kullanılan diğer yaklaşımlar geometrik yöntem, kod ve taşıyıcı faz gözlemlerinin kombinasyonu ve kombine yöntemlerdir (SEEBER 2003; MEKİK ve AKÇİN 1998).

Belirsizlik çözümünde kullanılan güçlü bir yöntem, Delft Teknoloji Üniversitesinde geliştirilen LAMBDA yöntemi (TEUNISSEN 1995; DE JONGE ve TIBERIUS 1996). Bu yöntemdeki temel düşünce, kesirli çözüm (float solution) sonucu elde edilen ve son derece korelasyonlu olan orijinal kesirli sayılı ikili farklı belirsizliklerin ilintisizleştirilmiş kesirli sayılı belirsizliklere dönüştürülmesidir. İlintisizleştirme, belirsizlikler arasındaki korelasyonların azaltılması olarak adlandırılabilir. Ayrıca belirsizliklerin doğrulukları da iyileştirilmiş olmaktadır. Bu işlemten sonra tamsayı en küçük kareler kestiricisi kullanılarak, tamsayı belirsizlikleri çok daha etkin bir şekilde belirlenebilmektedir. Kısacası LAMBDA yöntemi kestirilecek olan kimi parametrelerin (belirsizliklerin) tamsayı değerli olması hususunu dikkate alan bir belirsizlik çözüm yöntemidir. Temeli, pek çok bilim dalında olduğu gibi jeodezide de en yaygın parametre kestirim yöntemi olan en küçük kareler yöntemine dayanmaktadır. Daha kısa süreli gözlemlerle yüksek presizyonlu sonuçlar elde edebilmek ve başarılı bir belirsizlik çözümü gerçekleştirebilmek için LAMBDA yöntemi *ilintisizleştirme* işlemi adı verilen bir dönüşümden sonra uygulanmaktadır.

Bu çalışmada, GNSS teknolojisi ile bağlı konum belirlemede baz çözümü için gerçekleştirilen parametre kestirimi çerçevesinde tamsayı belirsizliklerinin LAMBDA yöntemiyle çözümü üzerinde durulmuştur. Bu yöntemle tamsayı belirsizlik çözümünün teorik detayları incelenmiştir. Ayrıca tamsayı yuvarlatma yöntemi ve ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi olmak üzere iki tamsayı kestiricisi daha incelenmiştir. Yöntemlerin bir karşılaştırmasını yapmak için sayısal bir uygulamaya yer verilmiştir.

2. GPS ile Yüksek Doğruluklu Bağlı Konum Belirlemede Matematiksel Modelin Çözümü

i alıcısı ile r uydusu arasında, taşıyıcı faz ölçüleri için gözlem denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \rho_i^r &= \rho_i^r - \lambda N_i^r + \delta\phi_i - \delta\phi_r + c(dt_i - dt^r) \\ &+ d\phi_{i-tropo}^r - d\phi_{i-iono}^r + \varepsilon_i^r \end{aligned} \quad (1)$$

burada, ρ_i^r i alıcısı ile r uydusu arasındaki gerçek geometrik uzaklık, λ dalga boyu, N_i^r dalga boylarının başlangıç tamsayı değeri olarak ifade edilen belirsizlik terimi, $\delta\phi_i$ ve $\delta\phi_r$ sırasıyla alıcı ve uydusu osilatörlerinin başlangıç fazları, c boşluktaki ışık hızı, dt_i ve dt^r ise sırasıyla alıcı ve uydusu saatlerindeki biaslardır. $d\phi_{i-tropo}^r$ ve $d\phi_{i-iono}^r$ sıra troposferik ve iyonosferik gecikmeleri ifade etmektedirler. Son olarak ε_i^r taşıyıcı faz ölçmelerindeki gürültüyü ifade etmektedir. En küçük kareler yöntemiyle güvenilir sonuçlar elde edebilmek için gürültünün normal

dağılımda olması beklenir (BASELGA ve GARCÍA-ASENJO 2008a, 2008b).

Uydu koordinatları (uyduların navigasyon mesaj dosyasında yayınladıkları efemeris verileri) ile i alıcısının yaklaşık koordinatları (X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}) bilinmek koşuluyla, uydusalıcı arasındaki yaklaşık mesafe

$$\rho_{i0}^r = \sqrt{(X^r - X_{i0})^2 + (Y^r - Y_{i0})^2 + (Z^r - Z_{i0})^2} \quad (2)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buna göre (1) eşitliğindeki gerçek geometrik uzunluk

$$\rho_i^r = \rho_{i0}^r + \left[\frac{\partial \rho_i^r}{\partial X_i} \right]_0 dX_i + \left[\frac{\partial \rho_i^r}{\partial Y_i} \right]_0 dY_i + \left[\frac{\partial \rho_i^r}{\partial Z_i} \right]_0 dZ_i \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. dX_i, dY_i ve dZ_i bilinmeyenleri, i alıcısının yaklaşık koordinatlarına gelecek olan düzeltme değerleridir.

i ve j alıcıları ile r ve s uyduları arasında gözlenmiş faz ölçüleri için ikili farklar

$$\nabla \Delta \phi_{ij}^{rs} = (\phi_j^s - \phi_i^s) - (\phi_j^r - \phi_i^r) = \phi_j^s - \phi_i^s - \phi_j^r + \phi_i^r \quad (4)$$

şeklinde hesaplanabilir. (1) eşitliğinden yararlanarak ikili farklar için gözlem denklemi

$$\nabla \Delta \phi_{ij}^{rs} = \nabla \Delta \rho_{ij}^{rs} - \lambda \nabla \Delta N_{ij}^{rs} + \varepsilon_{ij}^{rs} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi ikili farklar oluşturmak suretiyle uydu ve alıcı saat hatasının ikisi birden giderilebilmektedir. Bu yöntemde ayrıca kısa baz uzunlukları için troposferik ve iyonosferik etkiler de giderilmektedir (KAHVECİ ve YILDIZ 2005).

(5) eşitliği ile verilen matematiksel model, yermerkezli kartezyen koordinatlar cinsinden ifade edilebilir. Bazın bir uç noktasının koordinatlarının (X_i, Y_i, Z_i) bilindiği varsayılırsa diğer uç noktasının yaklaşık koordinatları (X_{j0}, Y_{j0}, Z_{j0}) olmak üzere, (3) eşitliğine ikili farklar uygulanırsa problem (X_{j0}, Y_{j0}, Z_{j0}) değerlerine getirilecek diferansiyel düzeltmelerin dX_j, dY_j, dZ_j ve ikili farklı belirsizliklerin $\nabla \Delta N_{ij}^{rs}$ çözümü haline getirilmiş olur. Buna göre (5) numaralı gözlem denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} &\left(\left[\frac{\partial \rho_j^r}{\partial X_j} \right]_0 - \left[\frac{\partial \rho_j^s}{\partial X_j} \right]_0 \right) dX_j + \left(\left[\frac{\partial \rho_j^r}{\partial Y_j} \right]_0 - \left[\frac{\partial \rho_j^s}{\partial Y_j} \right]_0 \right) dY_j \\ &+ \left(\left[\frac{\partial \rho_j^r}{\partial Z_j} \right]_0 - \left[\frac{\partial \rho_j^s}{\partial Z_j} \right]_0 \right) dZ_j - \lambda \nabla \Delta N_{ij}^{rs} = \nabla \Delta \phi_{ij}^{rs} - \nabla \Delta \rho_{ij0}^{rs} - \varepsilon_{ij}^{rs} \end{aligned} \quad (6)$$

Parametre kestirimi için yeteri kadar periyodik ölçmeler (örneğin 5 veya 15 saniyelik) yaparak bir gözlem denklemleri sistemi oluşturulabilir:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{I} + \mathbf{v} \quad (7)$$

A katsayılar matrisi, **x** bilinmeyenler vektörü, **I** küçültülmüş ölçüler vektörü, **v** ise düzeltmeler vektörüdür. **X** vektörü yaklaşık koordinatlara getirilecek diferansiyel düzeltmeler (kesirli sayı değerli) ile tam sayılı belirsizlik değerlerini içermektedir. (7) numaralı sistem uygun bir stokastik model ile en küçük kareler yöntemi ile çözümlerse baz bileşenleri

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_{j0} + dX_j - X_i \\ \Delta Y &= Y_{j0} + dY_j - Y_i \\ \Delta Z &= Z_{j0} + dZ_j - Z_i\end{aligned}\quad (8)$$

ile hesaplanabilir (BASELGA ve GARCÍA-ASENJO 2008a, 2008b).

GPS gözlem denklemleri için genişletilmiş Gauss-Markoff modeli,

$$E\{y\} = \mathbf{Aa} + \mathbf{Bb}, \quad y \in R^l, \mathbf{a} \in Z^q, \mathbf{b} \in R^p; D\{y\} = \mathbf{Q}_y \quad (9)$$

biçiminde yazılabilir. Bu modelde gözlem vektörü **y**, *l* boyutludur. Parametre vektörü ise **a** ve **b** olmak üzere iki kısma ayrılabilir. **a**, *q* × 1 boyutlu tamsayı değerli ikili farklı belirsizlikler vektörü, **b** ise *p* × 1 boyutlu kesirli sayı değerli diğer bilinmeyen parametreler vektörüdür. Bu vektör baz bileşenlerinden başka iyonosferik ve troposferik gecikmeleri de içerebilir. Gauss-Markoff modelinin çözümü için en küçük kareler kriteri

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \|y - \mathbf{Aa} - \mathbf{Bb}\|_{\mathbf{Q}_y}^2, \quad y \in R^l, \mathbf{a} \in Z^q, \mathbf{b} \in R^p \quad (10)$$

olur. Çözümde belirsizliklerin tamsayı değerli olması göz önünde bulundurulursa (10) numaralı amaç fonksiyonunun ayrıştırılmasıyla aşağıdaki gibi yeni bir amaç fonksiyonu yazılabilir (TEUNISSEN ve KLEUSBERG 1998):

$$\|y - \mathbf{Aa} - \mathbf{Bb}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \underbrace{\|\hat{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{Q}_y}^2}_1 + \underbrace{\|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2}_2 + \underbrace{\|\hat{\mathbf{b}}_{|a} - \mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_{b|a}}^2}_3 \quad (11)$$

Burada $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}^2 = (\cdot)^T \mathbf{Q}^{-1}(\cdot)$ ve $\hat{\mathbf{b}}_{|a}$ en küçük kareler ilkesine göre çözümü ifade etmektedir. Çözüm, koşullu bir dengelemedir. (11) amaç fonksiyonu yardımıyla (10) ölçütü 3 aşamalı çözüme dönüştürülür. Bu çözümler, sırasıyla kesirli çözüm (float solution), belirsizlik çözümü ve kesin çözümdür (fixed solution) (ODIJK 2002).

2.1 Kestirim İşlemi

Kesirli Çözüm

$\|\hat{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{Q}_y}^2$ düzeltmelerin karesel normudur. Bu karesel norma göre çözümde belirsizliklerin tamsayı olması zorunlu değildir. Parametre kestirimi,

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \|y - \mathbf{Aa} - \mathbf{Bb}\|_{\mathbf{Q}_y}^2, \quad \mathbf{a} \in R^q, \mathbf{b} \in R^p \quad (12)$$

ilkesine göre gerçekleştirilir. Çözüm sonunda bilinmeyen parametreler ve bunların kovaryans matrisi,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a & \mathbf{Q}_{ab} \\ \mathbf{Q}_{ba} & \mathbf{Q}_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

elde edilir (ODIJK 2002). Kesirli çözümün elde edilmesinde standart en küçük kareler algoritmasından başka Danimarka metodu gibi robust yöntemler veya Kalman filtresi gibi teknikler de kullanılabilir.

Bugünkü uydu dağılımı sayesinde kesirli çözümün doğruluğu gözlem süresi artırılarak uzun bazlar için bile önemli ölçüde iyileştirilebilmektedir. Bu nedenle temel jeodezik kontrol ağlarının kurulması ve yer kabuğu deformasyonlarının izlenmesi gibi uygulamalarda belirsizlik çözümü daha az önem taşımaktadır (SEEBER 2003). Gözlem süresi arttıkça kesirli çözümün doğruluğu belirsizlik çözümünden sonra elde edilen kesin çözümün doğruluğuna yaklaşmaktadır (TEEUNISSEN vd. 1995).

Belirsizlik Çözümü

Bu çözümde (11) eşitliğindeki ikinci karesel norm için,

$$\min_{\mathbf{a}} \|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2, \quad \mathbf{a} \in Z^q \quad (14)$$

amaç fonksiyonu ve çözüm için tamsayı kısıtlaması öngörülür. 3 numaralı bölümde incelenen çeşitli kestiriciler yardımıyla belirsizliklerin kesirli değerlerinden tamsayı değerleri ($\tilde{\mathbf{a}}$) elde edilebilir (ODIJK 2002).

Kesin Çözüm

Tamsayı belirsizliklerinin çözümünden sonra sıra parametrelerin (**b**) iyileştirilmiş bir çözümünü elde etmek için kesirli çözüm sonucu elde edilen çözümlerin ($\hat{\mathbf{b}}$), tamsayı belirsizliklere ($\tilde{\mathbf{a}}$) göre düzeltilmesine gelir. Bu işlem 11'deki 3. terim için öngörülen,

$$\min_{\mathbf{b}} \|\hat{\mathbf{b}}_{|a} - \mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_{b|a}}^2, \quad \mathbf{b} \in R^p \quad (15)$$

karesel normuna göre koşullu dengeleme ile gerçekleştirilir. Sonuç olarak,

$$\hat{\mathbf{b}}_{|a} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Q}_{b\hat{a}} \mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}) = \tilde{\mathbf{b}} \quad (16)$$

parametreleri ve bunların,

$$\mathbf{Q}_{b|a} = \mathbf{Q}_b - \mathbf{Q}_{b\hat{a}} \mathbf{Q}_{\hat{a}}^{-1} \mathbf{Q}_{\hat{a}b} \quad (17)$$

kovaryans matrisi elde edilir. (17)'ye göre $\mathbf{Q}_{b|a} \leq \mathbf{Q}_b$ olması nedeniyle belirsizlik çözümünden sonra elde edilen parametrelerin ($\tilde{\mathbf{b}}$) doğruluğu, belirsizlik çözümünden önceki parametrelerin ($\hat{\mathbf{b}}$) doğruluğundan genel olarak daha yüksektir veya en azından eşittir. Bu da belirsizlik çözümünün sağladığı faydayı göstermektedir (VERHAĞEN 2005).

Kısacası, GNSS taşıyıcı faz ölçmeleriyle konum belirlemede standart olmayan bir dengeleme problemi söz konusudur; baz bileşenleri gibi kimi parametreler kesirli sayılı değerler alabilirken taşıyıcı faz belirsizlikleri tamsayı değerlidir. Bu nedenle problemin çözümü 3 adımda gerçekleştirilir. Kesirli çözüm (float solution) aşamasında standart en

küçük kareler yöntemiyle hem baz bileşenlerinin hem de belirsizliklerin değerleri kesirli olarak belirlenir. Ölçü süresi arttırılarak kesirli çözümün doğruluğu iyileştirilebilir. Öte yandan GNSS teknolojisinden daha ekonomik bir şekilde yararlanabilmek için kısa süreli gözlemlerle konum belirleme yapılması gerekir. Buda taşıyıcı faz belirsizliği çözümünü zorunlu kılar. Bu nedenle kesirli çözüm ile elde edilen kesirli belirsizliklerin 3. bölümde incelenecek olan tamsayı kestiricileri ile tamsayılı değerlere dönüştürülmesi gerekir. Buna belirsizlik çözümü adı verilmektedir. Son olarak belirsizlik çözümü ile elde edilen tamsayı değerli belirsizlik değerleri sabit alınarak tekrar bir dengeleme yapılır. En küçük kareler yöntemiyle yapılan ve kesirli çözüm sonucu elde edilen baz bileşenlerinin tamsayılı belirsizliklere göre düzeltildiği bu işlem adımı ise kesin çözüm (fixed solution) olarak adlandırılmaktadır.

3. Tamsayı Belirsizlik Kestiricileri

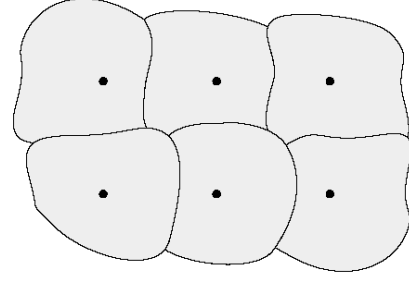
2. bölümde incelenen 3 adımlı kestirim işleminde tamsayı kestirimi q boyutlu bir kesirli sayılar uzayından yine q boyutlu bir tamsayılar uzayına bir F fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirilebilir. f frekans sayısı, r alıcı sayısı ve s uydu sayısı olmak üzere $q = f(r-1)(s-1)$ 'dir. Bir F fonksiyonunun kabul edilebilir ya da çözüme uygun olması için kimi ölçütleri sağlaması gerekmektedir (ODIJK 2002). Aşağıda bu ölçütler ve bunları sağlayan 3 tamsayı kestiricisi ele alınmaktadır.

Tamsayılar uzayı Z^q ayrık bir yapıya sahip olduğu için farklı kesirli sayılı belirsizlik vektörleri aynı bir tamsayı vektörüne dönüştürülebilir. Bu nedenle, her bir tamsayı vektörüne, R^q kesirli sayılar uzayında bir alt küme S_z atanabilir. Bu alt küme aynı bir tamsayı vektörüne karşılık gelen bütün kesirli sayılı belirsizlik vektörlerini içermektedir (VERHAGEN 2005). S_z alt kümesi Z tamsayı vektörünün çekim bölgesi (pull-in region) olarak adlandırılır (JONKMAN 1998). Böylece eğer bir kesirli çözüm z 'nin çekim bölgesi içinde bulunuyorsa tamsayı çözümü Z 'ye eşit olacaktır:

$$\hat{\mathbf{a}} \in S_z \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{z} \quad (18)$$

Bir tamsayı kestiricisi aşağıdaki ölçütleri sağlamalıdır:

1. Bütün çekim bölgeleri q boyutlu kesirli sayılar uzayını arada hiç boşluk kalmayacak şekilde kaplamalıdır. Aksi durumda bütün kesirli çözüm vektörleri bir tamsayı çözüme atanmayabilir (şekil 1).
2. İki farklı çekim bölgesi örtüşmemelidir; bir kesirli çözüm sadece bir tamsayılı çözüme karşılık gelmelidir (şekil 1).
3. Bir tamsayılı çözüm z kadar bir tamsayı değerinde ötelendiği zaman buna karşılık gelen tamsayı çözümü de aynı miktarda ötelenmelidir.



Şekil 1: Çekim bölgeleri (Verhagen 2005)

Kabul edilebilir bir tamsayı belirsizlik kestiricisinin çekim bölgeleri Şekil 1'de gösterilmeye çalışılmıştır. Yukarıda verilen ölçütleri sağlayan üç adet tamsayı belirsizlik kestiricisi bulunmaktadır: Tamsayı yuvarlatma (integer rounding), ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma (integer bootstrapping) ve tamsayı en küçük kareleri (integer least squares). Bu kestiricileri kullanabilmek için

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{a}_1}^2 & \sigma_{\hat{a}_1\hat{a}_2} & \cdots & \sigma_{\hat{a}_1\hat{a}_q} \\ \sigma_{\hat{a}_2\hat{a}_1} & \sigma_{\hat{a}_2}^2 & \cdots & \sigma_{\hat{a}_2\hat{a}_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_1} & \sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_2} & \cdots & \sigma_{\hat{a}_q}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

eşitlikleri ile verilen, kesirli belirsizlik çözüm vektörü $\hat{\mathbf{a}}$ ve kovaryans matrisi $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ hesaplanmış olmalıdır (ODIJK 2002).

3.1 Tamsayı Yuvarlatma Yöntemi

En basit tamsayı belirsizlik kestiricisi, kesirli belirsizlik çözümündeki değerlerin kendilerine en yakın tamsayı değerlerine yuvarlatılmaları yöntemidir. Kestirim sonucu genel olarak,

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{R,1} \\ \tilde{a}_{R,2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{R,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\hat{a}_1) \\ R(\hat{a}_2) \\ \vdots \\ R(\hat{a}_q) \end{bmatrix} \quad (20)$$

biçimindedir. $R(\cdot)$ kesirli sayıyı en yakın tamsayıya yuvarlatma operatörüdür. Çözüm sonuçları genel olarak (14) numaralı amaç fonksiyonunu sağlamaz. Bunun sebebi belirsizlikler arasındaki korelasyonun dikkate alınmamasıdır. Eğer (19)'da verilen belirsizlik kovaryans matrisi $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ dolu bir matris değil de köşegen bir matris olursa (belirsizlikler arasında korelasyon yoksa) tamsayı yuvarlatma yöntemi daha uygun bir çözüm verebilir (ODIJK 2002).

3.2 Ardışık Koşullu Tamsayı Yuvarlatma Yöntemi

Kesirli belirsizlikler arasındaki korelasyonu bir ölçüde dikkate alan bir tamsayı belirsizlik kestiricisidir. Kesirli çözümden tamsayılı çözüme geçiş için ilk belirsizlik değeri \hat{a}_1 en yakın tamsayı değerine yuvarlatılır. Daha sonra öteki belirsizliklerin kesirli değerleri, ilk belirsizlikle olan korelasyonları ölçüsünde düzeltilir. Son olarak düzeltilmiş belirsizlikler en yakın tamsayı değerlerine yuvarlatılır. Algoritma aşağıdaki gibi verilebilir (TEUNISSEN 1998):

$$\tilde{\mathbf{a}}_B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{B,1} \\ \tilde{a}_{B,2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{B,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\hat{a}_1) \\ R(\hat{a}_2 - \sigma_{\hat{a}_2\hat{a}_1} \sigma_{\hat{a}_1}^{-2} (\hat{a}_1 - \tilde{a}_{B,1})) \\ \vdots \\ R(\hat{a}_q - \sum_{i=1}^{q-1} \sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_i} \sigma_{\hat{a}_i}^{-2} (\hat{a}_{iI} - \tilde{a}_{B,i})) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Burada $I = 1, \dots, i-1$ dir. Ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma tekniğinde tamsayı çözümü seçilen ilk belirsizlik değerine göre farklılık gösterir. Örneğin belirsizlik sayısı iki ise, ilk seçilen belirsizliğe bağlı olarak iki farklı çözüm elde edilecektir. Bu nedenle çözüme en duyarlı kesirli belirsizlik ile başlanması önerilmektedir (VERHAGEN 2005). Ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma tekniği belirsizlikler arasındaki korelasyonu kısmen dikkate aldığı için sonuçlar, (14) numaralı amaç fonksiyonunu genel olarak minimize etmeyebilir (ODIJK 2002).

3.3 Tamsayı En Küçük Kareler Araştırma Algoritması

Tamsayı en küçük kareler kestiricisi (14)'de verilen ölçüte dayanmaktadır. Amaç fonksiyonu,

$$\min_{\mathbf{a} \in Z^q} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_a^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözümde belirsizlikler arasındaki tüm korelasyonlar (\mathbf{Q}_a) göz önüne alınmaktadır.

Pratikte belirsizlik vektörünün boyutları çok büyük olduğu için (22)'de verilen minimizasyon problemini çözmek kolay değildir. \mathbf{Q}_a matrisine *ilintisizleştirme (decorrelation)* işlemi uygulanarak çözüm kolaylaştırılabilir. Bunun için aşağıdaki yol izlenir (TEUNISSEN 1993):

$$(\hat{\mathbf{a}}' - \mathbf{a}) = \mathbf{L}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \quad (23)$$

Burada $\hat{\mathbf{a}}'$ ilintisizleştirilmiş belirsizlikler, \mathbf{L} ise \mathbf{Q}_a matrisinin \mathbf{LDL}^T şeklinde ayrıştırılmasıyla elde edilen alt-üçgen matristir:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\sigma_{\hat{a}_2\hat{a}_1}}{\sigma_{\hat{a}_1}^2} & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \frac{\sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_1}}{\sigma_{\hat{a}_1}^2} & \dots & & \frac{\sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_{q-1}, \dots, q-2}}{\sigma_{\hat{a}_{q-1}, \dots, q-2}^2} & & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Köşegen \mathbf{D} matrisi ise aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_{\hat{a}_1}^2, \sigma_{\hat{a}_{2I}}^2, \dots, \sigma_{\hat{a}_{qIQ}}^2) \quad (25)$$

Her iki matriste de koşullu varyans ve kovaryanslar bulunmaktadır. $\sigma_{\hat{a}_{jI}}^2$ ile belirtilen koşullu varyanslar aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\sigma_{\hat{a}_{jI}}^2 = \sigma_{\hat{a}_j}^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{\hat{a}_j\hat{a}_{jI}} \sigma_{\hat{a}_{jI}}^{-2}, \quad j = 1, \dots, j-1 \quad (26)$$

Buradan hareketle ardışık koşullu belirsizlikler olarak adlandırılan ilintisizleştirilmiş kesirli belirsizlik vektörü $\hat{\mathbf{a}}'$ ve kovaryans matrisi $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}'}$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\hat{\mathbf{a}}' = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_{2I} \\ \vdots \\ \hat{a}_{qIQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 - \sigma_{\hat{a}_2\hat{a}_1} \sigma_{\hat{a}_1}^{-2} (\hat{a}_1 - a_1) \\ \vdots \\ \hat{a}_q - \sum_{i=1}^{q-1} \sigma_{\hat{a}_q\hat{a}_i} \sigma_{\hat{a}_i}^{-2} (\hat{a}_{iI} - a_i) \end{bmatrix}; \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}'} = \mathbf{D} \quad (27)$$

İlintisizleştirme işlemi sonunda $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}'}^{-1} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1}$ olarak hesaplanır. Böylece (22)'de ki karesel norm

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_a^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) &= (\hat{\mathbf{a}}' - \mathbf{a})^T \mathbf{L}^T \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} (\hat{\mathbf{a}}' - \mathbf{a}) \\ &= (\hat{\mathbf{a}}' - \mathbf{a})^T \mathbf{D}^{-1} (\hat{\mathbf{a}}' - \mathbf{a}) \\ &= \sum_{i=1}^q (\hat{a}_{iI} - a_i)^2 / \sigma_{\hat{a}_{iI}}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

şeklinde q sayıda kareler toplamına dönüştürülmüş olur (ODIJK 2002).

Tamsayılar uzayının bütünü yerine daha küçük bir bölümünde çözümü gerçekleştirmek daha kolay olur. Bunun için kesirli çözüm $\hat{\mathbf{a}}'$ da merkezleştirilmiş bir hiper-elipsoitten yararlanır. Şekli $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}'}$ kovaryans matrisine bağlı olan ve belirsizlik araştırma uzayı olarak da adlandırılan bu hiper-elipsoit

$$\Omega_a = \{\mathbf{a} \in Z^q \mid (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_a^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \leq \chi^2\} \quad (29)$$

şeklinde tanımlanır. Araştırma uzayının büyüklüğünü belirleyen χ^2 belli bir pozitif sabittir. χ^2 araştırma uzayı en azından bir tamsayı vektörü içerecek şekilde yeterince büyük seçilmelidir. χ^2 , ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yönteminin çözümüne bağlı olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir (VERHAGEN 2005):

$$\chi^2 = (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_B)^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}'}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_B) \quad (30)$$

(28)'de verilen amaç fonksiyonu ve araştırma uzayı kavramına bağlı olarak tamsayı belirsizlikleri (q sayıda) aşağıdaki gibi sınırlandırılır:

$$\begin{aligned} (\hat{a}_1 - a_1)^2 &\leq \sigma_{\hat{a}_1}^2 \chi^2 \\ (\hat{a}_{211} - a_2)^2 &\leq \sigma_{\hat{a}_{211}}^2 \left[\chi^2 - (\hat{a}_1 - a_1)^2 / \sigma_{\hat{a}_1}^2 \right] \\ &\vdots \\ (\hat{a}_{q|Q} - a_q)^2 &\leq \sigma_{\hat{a}_{q|Q}}^2 \left[\chi^2 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

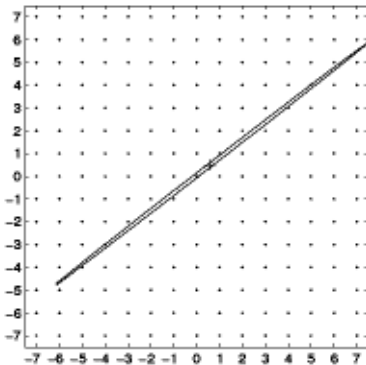
3.4 Belirsizliklerin İlintisizleştirilmesi

Tamsayı çözümünün araştırılması işleminin etkin bir şekilde ve kısa bir sürede yapılabilmesi için araştırma uzayının olabildiğince küresel bir şekle sahip olması gerekir (VERHAGEN 2005). Bununla birlikte, GPS uygulamalarında belirsizlikler arasında, özellikle GPS gözlem süresi kısa olduğunda yüksek korelasyonlar söz konusu olduğu için araştırma uzayı önemli ölçüde uzayabilmektedir (Şekil 2). Bunun için tamsayı en küçük kareler algoritmasıyla araştırma işlemine başlamadan önce daha küresel bir araştırma uzayı elde edebilmek için orijinal kesirli belirsizlik çözümünün ilintisizleştirilmesi suretiyle orijinal araştırma işlemi bir transformasyon işlemine tabi tutulmalıdır. Bununla birlikte belirsizliklerin tamsayı özellikleri kaybolabileceği için tam bir ilintisizleştirme işlemi önerilmemektedir (ODIJK 2002).

İlintisizleştirme işlemi sonunda $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ matrisi elemanları arasındaki korelasyon bir miktar azaltılmış olur. İlintisizleştirilmiş belirsizlik vektörü $\hat{\mathbf{z}}$ ve kovaryans matrisi aşağıdaki dönüşüm eşitlikleriyle elde edilir:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{a}}; \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Z} \quad (32)$$

İlintisizleştirici Z -dönüşümü olarak adlandırılan bu dönüşüm, tamsayı en küçük kareler araştırma tekniği ile birlikte LAMBDA yönteminin iki önemli yapı taşı oluşturmaktadır (TEUNISSEN 1993). Diğer bir deyişle tamsayı en küçük kareler araştırma algoritmasının ilintisizleştirme işleminden sonra uygulanması LAMBDA yöntemi olarak adlandırılmaktadır.



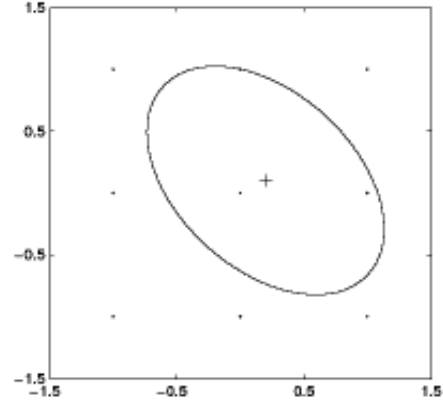
Şekil 2: İlintisizleştirme işleminden önceki araştırma uzayı (Verhagen 2005)

Z -dönüşümünün kabul edilebilmesi için iki özelliğe sahip olması gerekir: i) Belirsizliklerin tamsayı özelliklerinin korunması için hem \mathbf{Z} hem de \mathbf{Z}^{-1} matrisleri tamsayı elemanlardan oluşmalıdır. ii) Dönüşüm araştırma uzayı açısından hacim koruyan bir dönüşüm olmalıdır ($|\mathbf{Z}| = \pm 1$). Diğer bir deyişle \mathbf{Z} matrisinin tersi alınabil-

melidir (VERHAGEN 2005). Buna göre dönüştürülmüş araştırma uzayı şu şekilde verilir:

$$\Omega_z = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^q \mid (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2 \right\} \quad (33)$$

Şekil 3'de ilintisizleştirme işlemi sonunda elde edilen bir araştırma uzayı gösterilmiştir.



Şekil 3: İlintisizleştirme işleminden sonraki araştırma uzayı (VERHAGEN 2005)

İlintisizleştirilmiş belirsizliklere dayalı araştırma işleminde tamsayı en küçük kareler ölçütü aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) &= (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Z} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{Z}^T (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \\ &= (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (34)$$

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}$ matrisi \mathbf{LDL}^T şeklinde \mathbf{L} ve \mathbf{D} olarak iki matrise ayrıştırılırsa en küçük kareler ölçütü

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{z}_{i|I} - z_i)^2}{\sigma_{i|I}^2} \leq \chi^2 \quad (35)$$

şeklinde yazılabilir. $\hat{z}_{i|I}$ koşullu en küçük kareler kestiricisi, $\sigma_{i|I}^2$, \mathbf{D} matrisinden gelen koşullu varyanslardır. (35) denkleminde göre tamsayı belirsizlik çözümü araştırma uzayının

$$\begin{aligned} (\hat{z}_1 - z_1)^2 &\leq \sigma_1^2 \chi^2 \\ (\hat{z}_{21} - z_2)^2 &\leq \sigma_{21}^2 \left(\chi^2 - \frac{(\hat{z}_1 - z_1)^2}{\sigma_1^2} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (36)$$

şeklinde sınırlandırılmasıyla elde edilir (VERHAGEN 2005). (36) eşitsizlikleri esasında (31) eşitsizliklerinin dönüştürülmüş araştırma uzayına uygulanışıdır. Bu eşitsizlikleri kullanarak aday tamsayı belirsizlik çözümleri sistematik bir şekilde bulunabilir.

Kolay bir şekilde hesaplanan ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi aynı zamanda tamsayı en küçük kareler kestiricisine iyi bir yaklaşım sağladığı için araştırma uzayının büyüklüğünün belirlenmesinde kullanılabilir (VERHAGEN 2005). Buna göre χ^2

$$\chi^2 = (\hat{\mathbf{z}} - \check{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \check{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}}) \quad (37)$$

şeklinde hesaplanır. Son olarak elde edilen tamsayı çözümü $\check{\mathbf{z}}$, orijinal araştırma uzayına ters Z-dönüşümünü uygulayarak dönüştürülebilir:

$$\check{\mathbf{a}} = \mathbf{Z}^{-T} \check{\mathbf{z}} \quad (38)$$

Kısaca özetleyecek olursak; tamsayı yuvarlatma yönteminde kesirli belirsizlik değerleri kendilerine en yakın tamsayı değerlerine yuvarlatılmaktadır. Ardışık koşullu en küçük kareler dengelemesine dayalı ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yönteminde ise tamsayı çözümü şu şekilde hesaplanmaktadır: Eğer n tane belirsizlik değeri varsa bunlardan birisinin (tercihen en duyarlı olanı) kesirli değeri en yakın tamsayı değerine yuvarlatılır. Geri kalan kesirli belirsizlikler ise ilk belirsizlikle olan korelasyonları ölçüsünde düzeltilirler. Daha sonra düzeltilmiş ikinci kesirli belirsizlik değeri en yakın tamsayı değerine yuvarlatılır ve geri kalan n-2 tane belirsizlik bu kez ikinci belirsizlik değeriyle olan korelasyonları ölçüsünde düzeltilir. Bu yuvarlatma ve düzeltme işlemi (21) numaralı formüle göre bütün kesirli belirsizlikler için tamsayı değerleri elde edilinceye kadar sürdürülür.

Güçlü ve modern bir belirsizlik kestirim yöntemi olan LAMBDA yönteminin uygulanması iki aşamadan oluşmaktadır: (1) orijinal kesirli belirsizliklerin ilintisizleştirilmesi ve (2) ardışık koşullu en küçük kareler algoritmasına dayalı tamsayı çözüm araştırması. LAMBDA yönteminin etkinliği ilintisizleştirme işlemi ile açıklanabilir. Kısa bir gözlem süresi kullanıldığı zaman, kesirli çözüm sonunda elde edilen belirsizlikler son derece korelasyonlu olmakta ve varyansları oldukça büyük olmaktadır. İntisizleştirme işlemi sayesinde belirsizlik araştırma elipsoidinin şekli ikinci aşamada yapılacak olan araştırma işlemi için olabildiğince optimum hale getirilmektedir. Böylece dönüştürülmüş belirsizlikler arasındaki korelasyonlar büyük ölçüde azaltılmış olmakta ve belirsizliklerin varyansları da önemli ölçüde küçültülmektedir. Bu da tamsayı belirsizliği kestiriminin daha hızlı ve etkin bir şekilde yapılmasını sağlamaktadır.

4. Sayısal Uygulama

Bu makalede incelenen tamsayı kestiricilerinin daha iyi anlaşılması için aşağıda tamsayı yuvarlatma, ardışık koşullu yuvarlatma ve en küçük kareler yöntemleriyle tamsayı çözümünün gerçekleştirildiği küçük bir örnek verilmiştir. 2 boyutlu (2-D) bir kesirli çözüm vektörü ve kovaryans matrisi,

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2.56 \\ 2.14 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} 0.3768 & 0.2668 \\ 0.2668 & 0.1890 \end{bmatrix} \quad (39)$$

olsun. Bu örnekte korelasyon katsayısı 0.9998'dir. Yani neredeyse % 100'e yakın bir korelasyon söz konusudur. Tamsayı yuvarlatma çözüm sonucu (20)'den,

$$\check{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

çıkarak. Bu vektörle (39) arasındaki fark vektörünün karesel büyüklüğü $\|\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}}^2 = 2331.48$ 'dir. Optimizasyon

terminolojisinde amaç fonksiyonu değeri olarak adlandırılan bu değermin minimizasyon problemlerinde mümkün olduğunca küçük olması istenir.

Ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemine göre çözüm sonucu (21)'den, algoritma birinci belirsizlik değeri ile başlatılırsa,

$$\check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}^{(1)} = \begin{bmatrix} R(2.56) \\ R\left(2.14 - \frac{0.2668}{0.3768}(2.56 - 3)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

çıkarak. Buna göre amaç fonksiyon değeri, $\|\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}^{(1)}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}}^2 = 2331.48$ 'dir. İkinci belirsizlik başlangıç olarak alınırsa

$$\check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}^{(2)} = \begin{bmatrix} R\left(2.56 - \frac{0.2668}{0.1890}(2.14 - 2)\right) \\ R(2.14) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

çözüm sonucu elde edilir. Bu sonuca göre amaç fonksiyon değeri, $\|\hat{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}_{\mathbf{B}}^{(2)}\|_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}}^2 = 753.08$ olur. İkinci belirsizliğin

presizyonu birincinininkinden daha yüksek olduğu için (39 eşitliğinde verilen kovaryans matrisine bakınız) amaç fonksiyon değeri öncekine ilişkin olandan daha küçük çıkmıştır. Kesirli çözüm 2-D olduğu için ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi ile birbirinden farklı iki tamsayı çözüm sonucu elde edilmiştir. Sonuçlar, aynı zamanda tam sayı yuvarlatma yöntemi ile elde edilenden de farklıdır. Ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yönteminde belirsizlikler arasındaki korelasyonlar kısmen de olsa dikkate alındığı için tamsayı yuvarlatma yöntemine göre elde edilen tamsayı çözümlerin kesirli çözüme olan karesel uzaklığı daha küçük olmuştur. Buradan hareketle ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yönteminin tamsayı yuvarlatma yöntemine göre daha iyi bir yöntem olduğu söylenebilir.

Tamsayı en küçük kareler araştırma algoritması ile tam sayı çözümü (29) eşitsizliği ile tanımlanan bir elips (problem 2-D olduğu için) içerisindeki grid noktalarında araştırma yapılarak gerçekleştirilir. Belirsizlik araştırma uzayı χ^2 değeri 225 olarak seçildiğinde araştırma uzayı içerisinde dört aday tamsayı çözümü yer almaktadır. (31) numaralı eşitsizliklerden ilkinine göre birinci belirsizlik a_1 için aşağıdaki alt ve üst sınırlar çıkar:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq \hat{a}_1 - \sigma_{\hat{a}_1} \chi \approx -6.65 \\ a_1 &\leq \hat{a}_1 + \sigma_{\hat{a}_1} \chi \approx 11.77 \end{aligned} \quad (43)$$

Tablo 1'in 1. sütünü böylece oluşturulmuş olur. İkinci belirsizliğin sınırları ise koşullu belirsizlik $\hat{a}_{2|1}$ 'in değerine göre hesaplanır. $\hat{a}_{2|1}$ 'in değeri ise (27)'ye göre a_1 'in tamsayı aday çözümlerinin değerlerine göre elde edilir. Koşullu

belirsizliğin standart sapması (25)'e göre $\sigma_{\hat{a}_{21}} = 0.01$ 'dir.

(31) numaralı eşitsizliklere göre ikinci belirsizliğin sınırları

Tablo 1: Orijinal araştırma uzayında LAMBDA yöntemi sonuçları

a_1	\hat{a}_{21}	a_2 (min.)	a_2 (ma ks.)	a_2	$(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_a^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$
-6	-3.92	-3.98	-3.86	-	-
-5	-3.21	-3.30	-3.12	-	-
-4	-2.51	-2.62	-2.40	-	-
	-1.80	-1.92	-1.68	-	-

$$\begin{aligned}
 a_2 &\geq \hat{a}_{21} - \sigma_{\hat{a}_{21}} \sqrt{\chi^2 - (\hat{a}_1 - a_1)^2 / \sigma_{\hat{a}_1}^2} \\
 a_2 &\leq \hat{a}_{21} + \sigma_{\hat{a}_{21}} \sqrt{\chi^2 - (\hat{a}_1 - a_1)^2 / \sigma_{\hat{a}_1}^2}
 \end{aligned} \tag{44}$$

ile hesaplanır. Orijinal belirsizlik araştırma uzayına uygulanmış LAMBDA yönteminin sonuçları Tablo 1’de verilmektedir.

-2	-1.09	-1.22	-0.96	-1	145.11
-1	-0.38	-0.52	-0.24	-	-
0	0.33	0.19	0.47	-	-
1	1.04	0.89	1.19	1	20.80
2	1.74	1.59	1.89	-	-
3	2.45	2.30	2.60	-	-
4	3.16	3.01	3.31	-	-
5	3.87	3.73	4.01	4	215.94
6	4.58	4.44	4.72	-	-
7	5.28	5.15	5.41	-	-
8	5.99	5.87	6.11	6	79.29
9	6.70	6.59	6.81	-	-
10	7.41	7.32	7.50	-	-
11	8.12	8.06	8.18	-	-

Tablo 1’e göre araştırma uzayı içerisinde dört aday tamsayı vektörü yer almaktadır. a_1 ’in pek çok aday tam sayı değerine karşılık a_2 için hiçbir aday tamsayı bulunamamıştır. Bu çözümlere *ölü nokta* adı verilir (TEUNISSEN ve KLEUSBERG 1998). Bütün aday tamsayı çözümleri incelendiğinde $[1,1]^T$ vektörünün (22) ölçütü için en küçük değeri verdiği görülmektedir. Bu nedenle tamsayı en küçük kareler çözüm sonucu:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\text{ekk}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

olarak bulunur. Buna göre amaç fonksiyon değeri, $\|\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_{\text{ekk}}\|_{\mathbf{Q}_a}^2 = 20.80$ 'dir. Bu değer tamsayı yuvarlatma ve ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemleriyle elde edilen amaç fonksiyonu değerlerinden küçük çıkması, en küçük kareler yönteminin diğer iki yonteme olan üstünlüğünü göstermektedir.

Araştırma uzayında ölü noktaların bulunması en küçük kareler ile yapılan araştırma işlemi zaman alıcı ve etkisiz bir yöntem haline getirmektedir. Basit bir örnekte bile çok sayıda ölü noktanın bulunması gerçek GPS uygulamalarında bu problemin boyutunun daha önemli olacağını gösterir. Bunun yerine yine tamsayı en küçük kareler araştırma algoritmasını kullanarak ilintisizleştirilmiş belirsizliklere dayalı bir araştırma yapmak daha etkin olabilir.

\mathbf{Z}^T dönüşüm matrisinin orijinal belirsizliklere uygulanarak aşağıda verilen ilintisizleştirilmiş belirsizlikler ve bunların kovaryans matrisi elde edilir:

$$(46)$$

Bu kez korelasyon katsayısı 0.0348’dir. Daha önce de belirtildiği gibi \mathbf{Z} dönüşümü tamsayı en küçük kareler kestiricisi ile birlikte LAMBDA yönteminin iki önemli yapı taşı oluşturmuştur. Bununla birlikte \mathbf{Z} dönüşümü ile gerçekleştirilen belirsizliklerin ilintisizleştirilmesi, tamsayı yuvarlatma ve ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemlerinin sonuçlarını iyileştirmek için de kullanılabilir. Bu makalede incelenen

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1.30 \\ -2.18 \end{bmatrix}; \mathbf{Q}_z = \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_a \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0.0066 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0050 \end{bmatrix} \text{üç}$$

tamsayı kestiricisini (46)’da verilen ilintisizleştirilmiş kesirli çözüme uygulayarak sonuçları karşılaştıralım:

Tamsayı yuvarlatma yöntemi ile elde edilen çözüm sonucu aşağıda verilmiştir:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R(1.30) \\ R(-2.18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Buna göre amaç fonksiyon değeri, $\|\hat{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{R}}\|_{\mathbf{Q}_z}^2 = 20.80$ çıkar. Görüldüğü gibi orijinal belirsizliklere uygulanan tamsayı yuvarlatma yönteminden daha iyi bir sonuç elde edilmiştir. (38) eşitliğine göre hesaplanan orijinal belirsizlik uzayındaki çözüm sonucu aşağıda verilmiştir:

$$\tilde{\mathbf{a}}'_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Böylece tamsayı yuvarlatma yöntemi orijinal ve dönüştürülmüş araştırma uzaylarına uygulandığı zaman farklı çözümlerin elde edilebildiği görülmektedir.

Ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi, orijinal araştırma uzayında olduğu gibi dönüştürülmüş araştırma uzayına uygulandığı zaman da, kesirli belirsizlik çözümü 2-D olduğu için (41) ve (42)’ye benzer şekilde iki tamsayı çözümü elde edilebilir:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \mathbf{z}_{\mathbf{B}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Orijinal belirsizlik uzayından farklı olarak, elde edilen iki sonucun birbirine eşit olması ilintisizleştirme işleminin ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemindeki önemli bir avantajını göstermektedir.

Kesirli çözüme ilişkin amaç fonksiyon değeri ise

$$\|\hat{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}}^{(1)}\|_{\mathbf{Q}_z}^2 = \|\hat{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{B}}^{(2)}\|_{\mathbf{Q}_z}^2 = 20.80 \text{ 'dir.}$$

Orijinal araştırma uzayındaki çözüm sonucu (38) eşitliğine göre

$$\tilde{\mathbf{a}}_B^{(1)'} = \tilde{\mathbf{a}}_B^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

çıkar.

Dönüştürülmüş belirsizlik araştırma uzayına uygulanmış LAMBDA yönteminin sonuçları Tablo 2'de verilmektedir. Tablodan görüldüğü gibi her bir z_1 değerine karşılık z_2 için birden fazla tamsayı adayı elde edilmektedir. Oysa LAMBDA yöntemi orijinal araştırma uzayına uygulandığı zaman pek çok ölü nokta elde edilmişti. Bu durum belirsizlik ilintisizleştirme işleminin LAMBDA yöntemine sağladığı katkıyı göstermektedir.

Tablo 2: Dönüştürülmüş araştırma uzayında LAMBDA yöntemi sonuçları

z_1	$\hat{z}_{2 1}$	z_2 (min.)	z_2 (maks.)	z_2	$(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \mathbf{Q}_z^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})$
1	-2.19	-3.22	-1.16	-3	145.31
				-2	20.80
2	-2.16	-3.03	-1.29	-3	215.94
				-2	79.29

Tablo 2'ye göre dönüştürülmüş araştırma uzayındaki tam sayı en küçük kareler çözüm sonucu

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\text{ekk}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

çıkar. Bu sonuca ilişkin amaç fonksiyonu değeri $\|\hat{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}_{\text{ekk}}\|_{\mathbf{Q}_z}^2 = 20.80$ 'dir. Orijinal belirsizlik uzayındaki çözüm ise (38) eşitliğine göre

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\text{ekk}}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

olarak elde edilmiştir.

(34) numaralı eşitliğe göre en küçük kareler yönteminin orijinal ve dönüştürülmüş araştırma uzayındaki amaç fonksiyonları birbirine eşit olduğu için, diğer iki yöntemin aksine tamsayı en küçük kareler kestiricisi dönüştürülmüş araştırma uzayındaki çözümün orijinal araştırma uzayındaki çözüme eşit olduğu tek tamsayı kestiricisidir.

Her üç yöntem sonuçları incelendiğinde, sadece LAMBDA yönteminin hem orijinal araştırma uzayında hem de dönüştürülmüş araştırma uzayında aynı sonucu verdiği görülmektedir. Bu durum LAMBDA yönteminin diğer iki yönteme olan bir üstünlüğüdür. Aynı zamanda LAMBDA yöntemiyle elde edilen sonuçlara ilişkin karesel değerlerin, diğer iki yönteme ilişkin olanlardan daha küçük çıkması yöntemin daha iyi olduğunu göstermektedir. Tamsayı yuvarlatma ve ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemleriyle orijinal ve dönüştürülmüş araştırma uzaylarında farklı çözümler elde edilmekte, ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi orijinal belirsizlik araştırma uzayına uygulandığı zaman, kesirli belirsizlik çözümünün boyutuna bağlı

olarak çok sayıda çözüm elde edilebilmektedir. Benzer sonuçlar ODIJK (2002) tarafından da gösterilmiştir.

5. Sonuç

GNSS ile bağlı konum belirlemede kısa gözlem süreleri ile güvenli yüksek doğruluklu sonuçların elde edilebilmesi tamsayı ikili fark belirsizliklerinin etkin bir şekilde belirlenmesine bağlıdır. Bu nedenle belirsizlik çözümü GNSS gözlemlerinin jeodezik amaçlar için değerlendirilmesinde üzerinde en fazla durulan konulardan birisi olmuş, çok sayıda belirsizlik kestirim yöntemi geliştirilmiştir. Bu çalışmada tamsayı yuvarlatma yöntemi, ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi ve tamsayı en küçük kareler algoritması (dolayısıyla LAMBDA yöntemi) olmak üzere kabul edilebilir üç tamsayı kestiricisi incelenmiştir. LAMBDA yönteminin diğer yöntemlerle karşılaştırılması için sayısal bir uygulamaya yer verilmiştir.

Her üç yöntem sonuçları incelendiğinde sadece LAMBDA yönteminin hem orijinal araştırma uzayında hem de dönüştürülmüş araştırma uzayında aynı sonucu verdiği görülmektedir. Bu durum LAMBDA yönteminin diğer iki yönteme olan bir üstünlüğüdür. Aynı zamanda LAMBDA yöntemiyle elde edilen sonuçlara ilişkin karesel değerlerin, diğer iki yönteme ilişkin olanlardan daha küçük çıkması yöntemin daha iyi olduğunu göstermektedir. Tamsayı yuvarlatma ve ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemleriyle orijinal ve dönüştürülmüş araştırma uzaylarında farklı çözümler elde edilmekte, ardışık koşullu tamsayı yuvarlatma yöntemi orijinal belirsizlik araştırma uzayına uygulandığı zaman kesirli belirsizlik çözümünün boyutuna bağlı olarak çok sayıda çözüm elde edilebilmektedir. Benzer sonuçlar ODIJK (2002) tarafından da gösterilmiştir.

Kaynaklar

- BASELGA S. ve GARCÍA-ASENJO L.: **GNSS differential positioning by robust estimation**, Journal of Surveying Engineering, 134(1):21-25, 2008a.
- BASELGA S. ve GARCÍA-ASENJO L.: **Global robust estimation and its application to GPS positioning**, Computers and Mathematics, 56:709-714, 2008b.
- CHEN D. ve LACHAPPELLE G.: **A comparison of the FASF and least squares search algorithms for on-the-fly ambiguity resolution**, Navigation, 42(2):371-390, 1995.
- FREI E. ve BEUTLER G.: **Rapid static positioning based on the fast ambiguity resolution approach: theory and first results**, Manuscripta Geodaetica, 15:325-356, 1990.
- DE JONGE P.J. ve TIBERIUS C.C.J.M.: **The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects**, LGR-series, no. 12, Delft Geodetic Computing Centre, 1996.
- JONKMAN N.F.: **Integer GPS Ambiguity Estimation without the receiver-satellite geometry**, Delft Geodetic Computing Centre, LGR series No.18, Delft University of Technology, 95 sf., 1998.
- KAHVECİ M. ve YILDIZ F.: **Global konum belirleme sistemi**, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2005.
- KIM D. ve LANGLEY R.B.: **GPS ambiguity resolution and validation: methodologies, trends and issues**, 7th GNSS Workshop, International Symposium on GPS/GNSS, Seoul, Korea, 2000.
- KURT O.: **Başlangıç faz belirsizliği çözümünde geçerlilik testleri**, Deprem Sempozyumu, Kocaeli, 2005.
- MEKİK Ç. ve AKÇİN H.: **GPS'te tamsayı belirsizliği çözüm yöntemleri**, Harita ve Kadastro Mühendisleri Odası Dergisi, 84:35-50, 1998.

- ODIJK D.: **Fast Precise GPS Positioning in the presence of ionospheric delays**, PhD Thesis, TU Delft, ISBN: 90-80147-2-7, 2002.
- SEEBER G. **Satellite Geodesy**, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2003.
- TEUNISSEN P.J.G.: **Least squares estimation of the integer GPS ambiguities**, Invited Lecture, Section IV Theory and Methodology, IAG General Meeting, Beijing, 1993.
- TEUNISSEN P.J.G.: **The least squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation**, Journal of Geodesy, 70:65-82, 1995.
- TEUNISSEN P.J.G.: **Success probability of integer GPS ambiguity rounding and bootstrapping**, Journal of Geodesy, 72:606-612, 1998.
- TEUNISSEN P.J.G., DE JONGE P.J., TIBERIUS C.C.J.M.: **The LAMBDA-Method for fast GPS Surveying**. Proc. Int. Symposium GPS Technology Applications, Bucharest, Romania, pp. 203-210, 1995.
- TEUNISSEN P.J.G. ve KLEUSBERG A.: **GPS observation equations and positioning concepts**. In: PJG TEUNISSEN and A KLEUSBERG, GPS for geodesy, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- VERHAGEN S.: **The GNSS integer ambiguities: estimation and validation**, PhD Thesis, TU Delft, ISBN:90-804147-4-3, 2005.