

Geçiş Eğrisi Olarak 4.Dereceden Parabol

Atınc PIRTI¹

Özet

Modern karayolu projelerinde geçiş eğrisi, alıynman (doğru) ve kurba (daireye) eşdeğer bir güzergâh elemanıdır. Keskin kurbalarda merkezkaç kuvvetinin ani değişimlerini önlemek için, geçiş eğrisi uygulanması zorunludur. Dünyanın birçok ülkesinde geçiş eğrisi olarak klotoid kullanımı yaygındır. Bu çalışmada, klotoidin yüksek hızlarda oluşturduğu sakıncaların giderilmesi amacıyla dördüncü dereceden parabol (Bikuadratik parabol) geçiş eğrisi olarak incelenmiştir. Sonuç olarak yol dinamiği bakımından dördüncü dereceden parabol klotoid oranla, önemli avantajlar sunmaktadır.

Anahtar Sözcükler

4.dereceden parabol, yol güzergâhı, klotoid, geçiş eğrisi

Abstract:

The Fourth Degree Parabola as Transition Curve

The transition curves in the modern road construction are route elements equally crucial as alignment and curve (circular). In order to prevent the sudden change of the centrifugal force, the transition curve must be applied due to the impact of the motion in the sharp curve. Over the years the application of the clothoid has become widespread in many countries in the world. However, in this study, in order to eliminate the problems concerning the road dynamics, created by a clothoid for vehicles at high speed, the fourth degree parabola is examined. Thus, beside the clothoid, some important advantages relating to the road dynamics are obtained.

Key Words

Fourth Degree Parabola, Highway Route, Clothoid, Transition Curve

1. Giriş

Demiryolu, tramvay hattı, karayolu tasarımında, bilindiği gibi farklı eğriliğe sahip geçki elemanları arasında geçiş eğrileri yerleştirilir. Bunların işlevi, yolculuk konforunu iyileştirmek ve taşıtlardan kaynaklanan yol kaplamasındaki aşınmayı en aza indirmektir. Bu eğri sayesinde merkezkaç kuvvetinin taşıta olan etkileri belirli bir uzunluk boyunca dağıtılmış, doğrudan daireye giriş noktasındaki ani etki ortadan kaldırılmış olur. Bu çalışmada klotoidin yüksek hızlarda oluşturduğu sakıncalardan dolayı, geçiş eğrisi olarak kullanılan 4. dereceden parabolün genel özellikleri incelenmiştir.

2. Geçiş Eğrisi Olarak Klotoid

2.1. Genel Bilgiler

Şekil 1’de görüldüğü gibi klotoidin temelini, lineer artan bir eğrilik ve dever diyagramı oluşturmaktadır. Klotoidin herhangi bir noktasındaki eğriliği

$$k = \frac{k_E}{L_E} L \text{ ya da}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R L_E} L \quad (1)$$

eşitliğiyle elde edilmektedir. Yukarıdaki eşitliklerdeki k geçiş eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğrilik değerini ifade ederken, k_E geçiş eğrisince bağlanılan dairenin eğrilik değerini, r geçiş eğrisinin herhangi bir noktasındaki yarıçap değerini ve R ise geçiş eğrisi tarafından bağlanılan daire yayının yarıçap değeridir.

k_E = Klotoidin bitim noktasının (E) eğrilik değeri
 L = Başlangıç noktasından (O) herhangi bir noktaya olan yay uzunluğu
 L_E = Klotoidin uzunluğu

dur.

(1) eşitliği yardımıyla klotoidin genel denklemi

$$R L = R L_E = A^2 \quad (2)$$

olmaktadır. Eşitlik 2 deki A değeri klotoidin parametresidir ve sabittir. Klotoid geçiş eğrisinde eğrilik, dever ve serbest yanal ivme diyagramlarındaki sıçramalar (değişimler) küçülmüş olmakla beraber fonksiyonlar başlangıç ve bitim noktalarında süresizdirler. Klotoidde yüksek hızlarda yolun güvenliği ve konforuna ilişkin sakıncalar ortaya çıkmaktadır. Bunlar şu şekilde sıralanabilir:

- Geçiş eğrisi boyunca, dönme hareketi başlangıç noktasında aniden başlamakta ve bitim noktasında aniden son bulmaktadır.
- Dever diyagramı, başlangıç ve bitim noktalarında kırıklıklar oluşturur (Şekil 1). Bu noktalarda düşey ivme ani değişimler gösterir. Bu durum, eğrilik ve dever arasındaki fonksiyonel ilişkinin bozulmasına neden

¹ Yrd. Doç. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Müh. Fak., Harita Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa, İstanbul.

olmaktadır. Böyle bir durumda rampa kırık noktalarının yuvarlatılması öngörülmektedir.

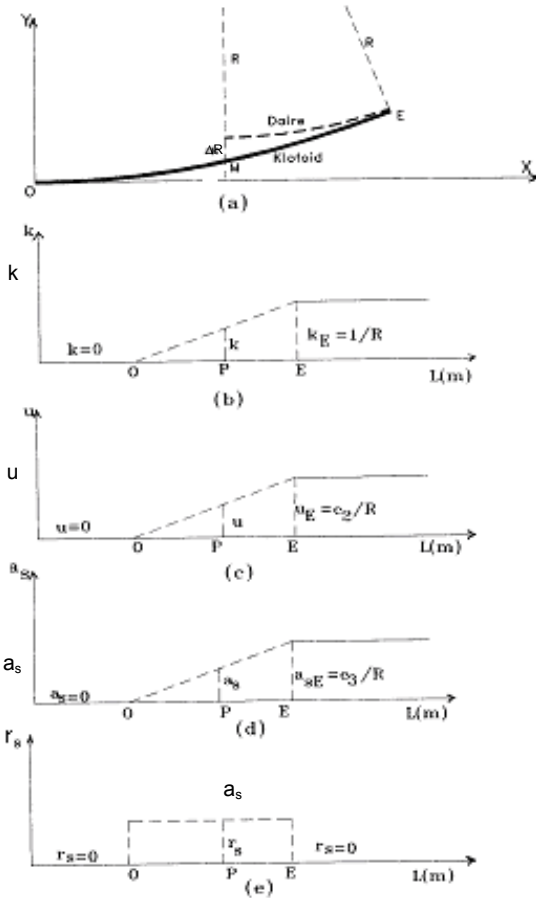
Serbest yanal ivmenin lineer artması sonucu, geçiş eğrisi boyunca sabit büyüklükte r_s yanal sademesi (Serbest yanal

ivmenin birim zamandaki türevi $rs = \frac{da_s}{dt} \left(\frac{m}{s^3} \right)$, sabit hız

için ise $dt = \frac{dL}{V} = \frac{dX}{V}$ den $rs = \frac{da_s}{dX} V \left(\frac{m}{s^3} \right)$ elde edilir.

Klotoide yanal sademe, başlangıç noktasında aniden ortaya çıkmakta ve bitim noktasında yine aniden sıfır olmaktadır (Şekil 1). Buna karşılık rahat bir yolculuk için yanal sademenin süreklilik göstermesi istenmektedir (HENNECKE vd. 1990), (JACOBS 1987), (KASPER vd. 1968), (TUDEŞ 1989).

Klotoidin yüksek hızlarda oluşturduğu sakıncalar ve tekniğin günümüzdeki düzeyi dikkate alınarak, yüksek hız istenen yol inşaatlarında dördüncü dereceden parabol (Biküadratik parabol), üstün geçiş eğrileri arasında yer almaktadır (WITTE ve SCHMIDT 1995), (HENNECKE vd. 1990).



Şekil 1. Klotoide (a) konum, (b) eğrilik, (c) dever, (d) serbest yanal ivme, (e) yanal sademe diyagramları

2.2. Geçiş Eğrisi Olarak Dördüncü Dereceden Parabol

Dördüncü dereceden parabol, klotoide göre birtakım avantajlara sahip olan geçiş eğrisidir. Bu eğri iki ayrı parabolden oluşmaktadır (Şekil 2) (HENNECKE vd.1990), (JACOBS 1987), (WITTE ve SCHMIDT 1995).

Geçiş eğrisinin birinci kısmı (Parabol I) için eğrilik,

$$k = a x^2 \quad (3)$$

olup

$$x = L_E \text{ alınarak}$$

geçiş eğrisinin M orta noktası,

$$x_M = \frac{L_E}{2} \quad (4)$$

ve orta noktanın eğriligi

$$k_M = \frac{1}{2R} \quad (5)$$

olup, (5) eşitliği (3)' de yerine konursa;

$$\frac{1}{2R} = a \frac{L_E^2}{4} \quad (6)$$

$$a = \frac{2}{RL_E^2} \quad (7)$$

olmaktadır. Parabol I'in eğrilik eşitliği,

$$k_I = \frac{2x^2}{RL_E^2} \quad (8)$$

elde edilmektedir.

Parabol II için ise $x = L_E$ ve $k = 1/R$ alınarak eğrilik,

$$k_{II} = \frac{1}{R} - \frac{2(L_E - x)}{RL_E^2} \quad (9)$$

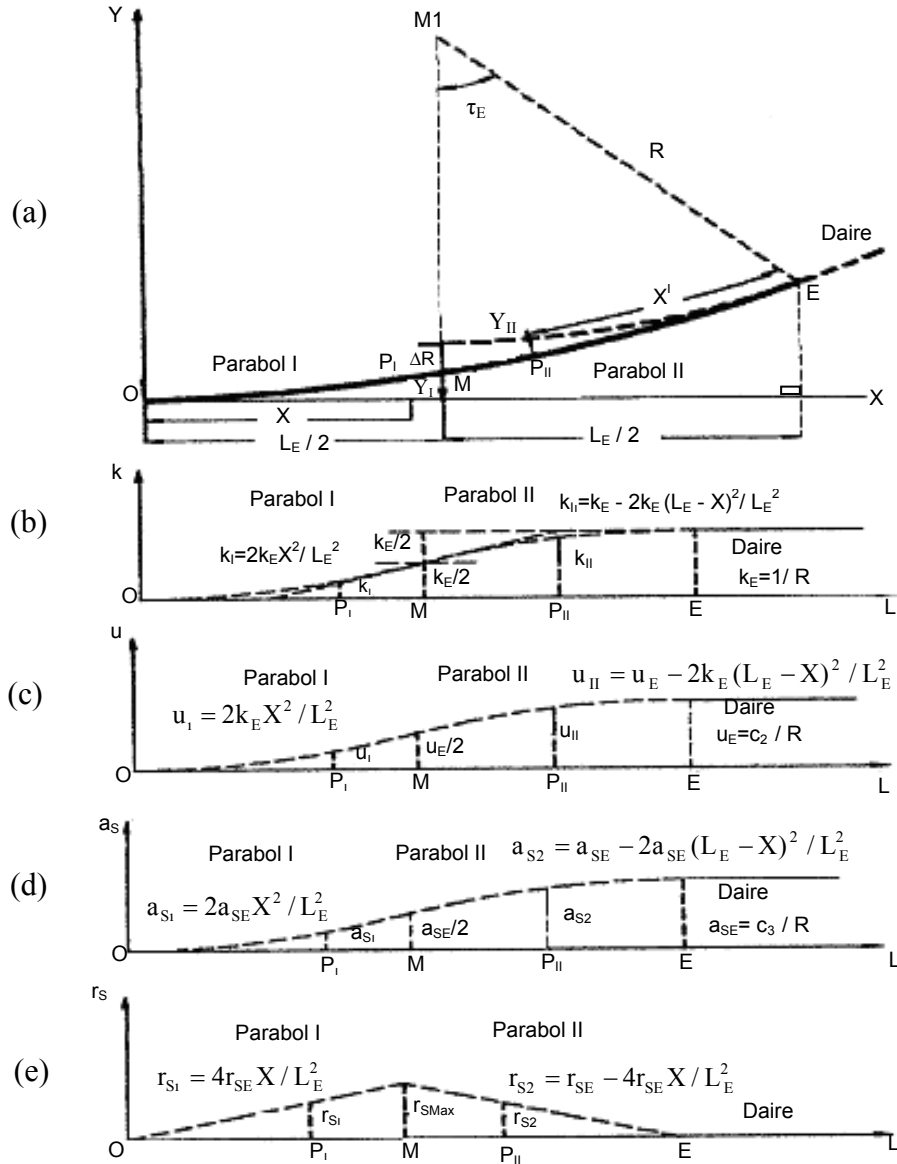
$$L_E - x = x^1 \quad (10)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Parabol I için geçiş eğrisi eşitliği,

$$\tau = \int_0^L k dx \approx \tan \tau = \frac{dy}{dx} \quad (11)$$

$$y = \int_0^L \int_0^L k dx^2 + c \quad (c = 0, y = 0, \text{ iken } x = 0) \quad (12)$$



Şekil 2. Geçiş eğrisi dördüncü dereceden parabolde (a) geçki yatay geometrisi, (b) eğrilik, (c) dever, (d) serbest yanıl ivme ve (e) yanıl sademe diyagramları (JACOBS 1987)

$$y_I = \int_{x=0}^{L_E/2} \int_{x=0}^{L_E/2} \frac{2x^2}{RL_E^2} dx^2 + c$$

Genel denklemleri,

$$y_I = \frac{x^4}{6RL_E^2}, \quad x \approx L \quad \text{alınarak} \quad (13)$$

$$Y_{II} = \int_{x=0}^{L_E/2} \int_{x=0}^{L_E/2} \frac{1}{R} - \frac{2x^2}{RL_E^2} dx^2 + c \quad (14)$$

$$Y_{II} = \frac{x^2}{2R} - \frac{x^4}{6RL_E^2} + c \quad (15)$$

$$Y_{II} = Y_{DAİRE} - Y_{4.DER. PARABOL} \quad (16)$$

elde edilir (HENNECKE vd. 1990), (JACOBS 1987), (WITTE ve SCHMIDT 1995).

elde edilmektedir.

Parabol II bölümü için eşitlikler,

Bu şekilde iki parabolün dördüncü dereceden denklemi,

eşitlikleriyle elde edilir (Şekil 3), (HENNECKE vd. 1990), (KASPER vd. 1968), (WITTE ve SCHMIDT 1995), (JACOBS 1987).

Şekil 3’de gösterilen dördüncü dereceden parabol ($L_E = 250$ m, $R=1000$ m), yapılan program yardımıyla Tablo 1 ve Tablo 2’dehhi koordinat değerleri hesaplanmıştır.

Tablo 1. Parabol I bölümü için elde edilen koordinatlar (O noktasındaki teğet esas alınarak)

Parabol I		
Başlangıca Mesafe (m)	X (m)	Y (m)
0	0	0
50	50.000	0.017
100	99.999	0.267
117	116.998	0.500
118	117.997	0.517
119	118.997	0.535
120	119.997	0.553
121	120.997	0.572
122	121.997	0.591
123	122.997	0.610
124	123.996	0.630
125	124.996	0.651
126	125.996	0.672

Dönüşüm için temel teşkil eden koordinatlar

Tablo 2. Parabol II bölümü için elde edilen koordinatlar (E noktasındaki teğet esas alınarak)

Parabol II		
Başlangıca Mesafe (m)	X (m)	Y (m)
0	0.0000	0.0000
50	49.980	1.233
100	99.854	4.730
124	123.741	7.051
125	124.736	7.154
126	125.730	7.258
127	126.725	7.363
128	127.719	7.468
129	128.714	7.574
130	129.708	7.680
131	130.702	7.787
132	131.697	7.894
133	132.691	8.001

Dönüşüm için temel teşkil eden koordinatlar

Parabol I ve Parabol II’nin uygulaması için gerekli olan dik koordinatlar, verilen R (yarıçap) ve L_E (Geçiş eğrisi uzunluğu) değerleri ile (13) ve (15) eşitlikleri kullanılarak yapılan programda hesaplanmıştır. Programda geçiş eğrisinin uzunluğu, 1 metrelik eşit yay parçalarına bölünerek koordinat değerleri bulunmuştur (Tablo 1 ve Tablo 2).

Parabol I ve Parabol II koordinatları arasında Helmert koordinat dönüşümü uygulanarak, dördüncü dereceden para-

bolün aplikasyon değerleri 50 m aralıklarla Tablo 3’deki gibi elde edilmiştir.

Tablo 3. Dördüncü dereceden parabolün koordinatları ve asal eleman değerleri (JACOBS 1987) ($R=1000$ m, $L_E=250$ m)

Başlangıca Mesafe (m)	Dördüncü Dereceden Parabol	
	X (m)	Y (m)
0	0.000	0.000
50	50.000	0.017
100	99.999	0.267
150	149.986	1.348
200	199.907	4.096
250	249.651	9.104
τ_E	7.9577 gon	
ΔR	1.302 m	
X_M	124.978 m	
T_K	73.023 m	
T_L	177.200 m	

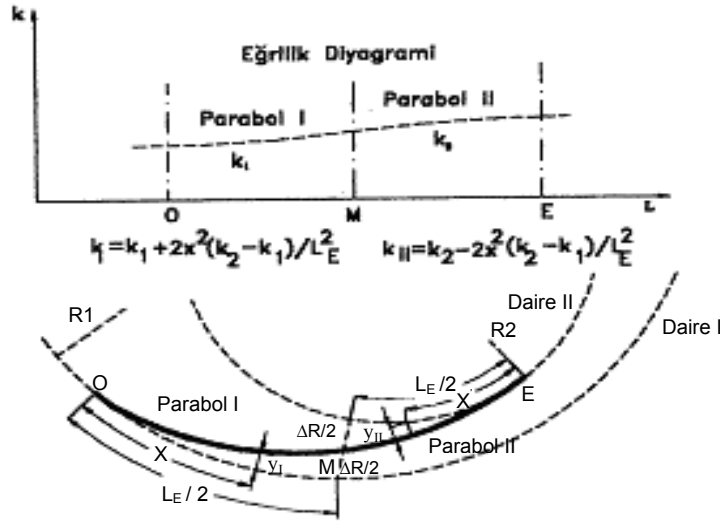
Böylece geometrik açıdan, geçiş eğrisinin başlangıç ve bitim noktalarında bağlanılan geçici elemanlarının (Aliynman, Kurp) dever ve eğrilik diyagramları için uygun geçişe ulaşılmış (Şekil 2) ve klotoidde göre yol dinamiği bakımından aşağıdaki avantajlar elde edilmiştir.

- Tekerlek akslarının dönme hızı, eğrinin başlangıç noktasında yavaş yavaş artmaya başlamakta, geçiş eğrisinin ortasında en büyük değerine ulaşmakta ve bundan sonra yine yavaş yavaş bitim noktasında sifıra düşmektedir. Dever diyagramında kırık noktaların bulunmaması düşey ivmedeki ani değişimleri önlemektedir.
- Şekil 2 deki yanal ivme diyagramına bakıldığında düzenli ve sürekli bir gidiş görülmektedir.

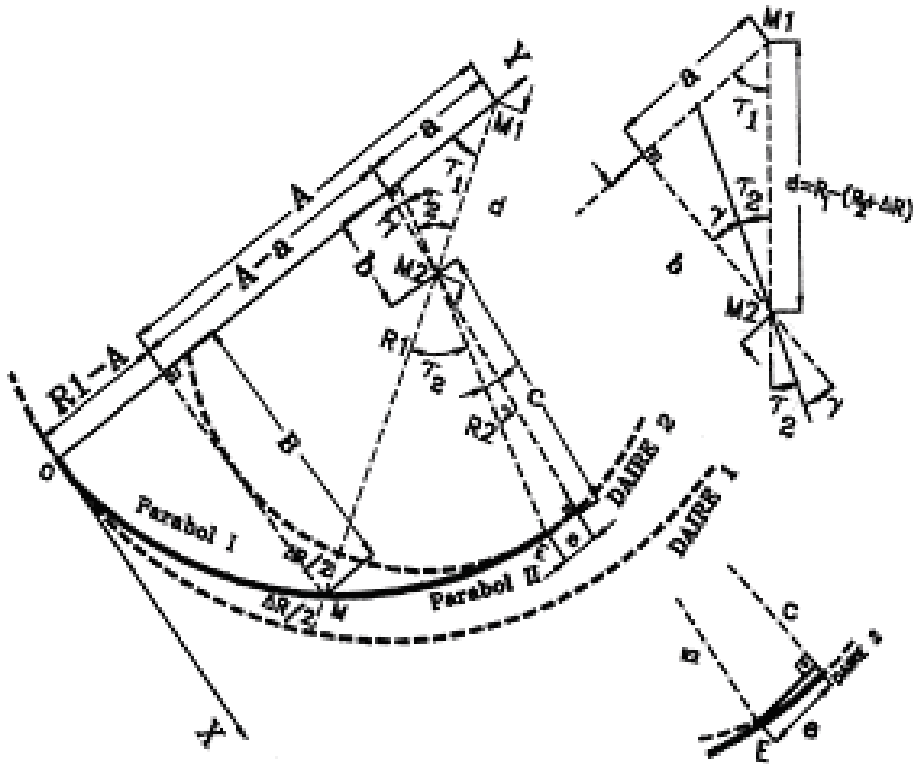
Bu özelliklere karşın geçiş eğrisinin başlangıç ve bitim noktalarında, ayrıca geçiş eğrisinin orta noktasında r_s yanal sademesinin sürekliliğinin bozulmasıyla, seyahat konformu konusunda kesin bir sonuca ulaşılamamaktadır (Şekil 2). Bu nedenlerden dolayı dördüncü dereceden parabol, hızlı demiryolu ve yol güzergâhlarında, inşaat üst yapısı dikkate alınarak uygulanmaktadır (HENNECKE vd. 1990), (KASPER vd. 1968), (WITTE ve SCHMIDT 1995), (JACOBS 1987).

2.3. İki ayrı yönlü daire yayı arasında dördüncü dereceden parabol (Yumurta eğrisi olarak)

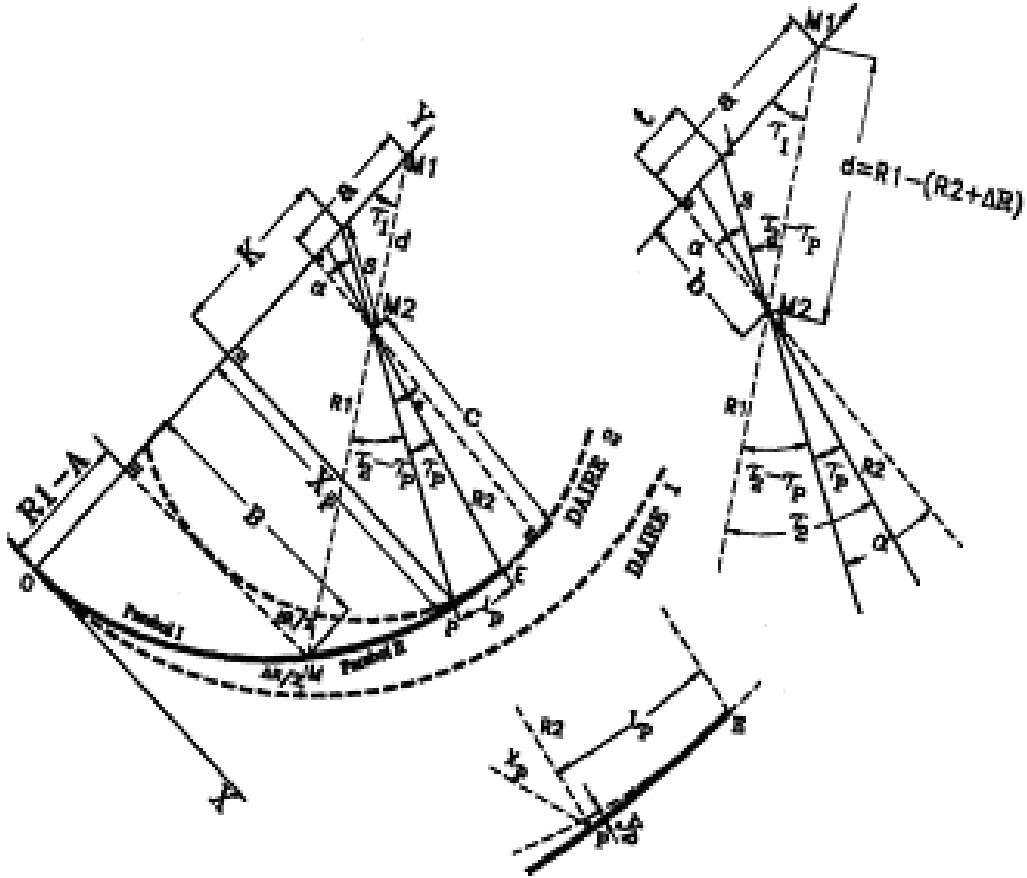
R_1 yarıçaplı daire yayı ile R_2 yarıçaplı daire yayı arasında aşağıdaki gibi geçiş eğrisi uygulanmaktadır (Şekil 4).



Şekil 4. Aynı yönlü iki daire yayı arasında dördüncü dereceden parabolün yumurta eğrisi olarak uygulanması ve eğrilik diyagramı



Şekil 5. İki daire yayı arasında dördüncü dereceden parabolün matematiksel olarak hesaplama diyagramı.



Şekil 6. Yumurta eğrisi olarak kullanılan dördüncü dereceden parabolde, herhangi bir P noktasının koordinatlarını matematisel olarak hesaplama diyagramı.

(8) eşitliği esas alınarak Parabol I için eğrilik denklemi,

$$k_I = \frac{1}{R_1} + \frac{2x^2(k_2 - k_1)}{L_E^2} \tag{30}$$

Parabol II için eğrilik denklemi

$$k_{II} = \frac{1}{R_2} - \frac{2x^2(k_2 - k_1)}{L_E^2} \tag{31}$$

şeklindedir (HENNECKE vd. 1990), (KASPER vd. 1968), (WITTE ve SCHMIDT 1995), (JACOBS 1987).

(14) eşitliği alınarak elde edilen Parabol I ve Parabol II 'ye ait genel denklem eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

$$Y_I = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{x^4(R_1 - R_2)}{6L_E^2 R_1 R_2} \tag{32}$$

$$Y_{II} = \frac{x^2}{2R_2} - \frac{x^4(R_1 - R_2)}{6L_E^2 R_1 R_2} \tag{33}$$

Rakordman payı, (22) eşitliğine göre,

$$\Delta R = \frac{L_E^2 (R_1 - R_2)}{48R_1 R_2} \tag{34}$$

elde edilmektedir.

Daire yayına göre ordinatların hesaplanmasında,

$$y_1 = y_{II} = \frac{x^4 (R_1 - R_2)}{6L_E^2 R_1 R_2} = \frac{x^4 (R_1 - R_2)}{6L_E^2 R_1 R_2} \quad (35)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır (HENNECKE vd. 1990), (KASPER vd. 1968), (WITTE ve SCHMIDT 1995), (JACOBS 1987).

Tablo 4. Parabol I bölümü için elde edilen koordinatlar (O noktasındaki teğet esas alınarak)

Parabol I		
Başlangıça Mesafe (m)	X (m)	Y (m)
0	0	0
50	49.985	1.046
100	99.879	4.241
149	148.579	9.617
150	149.570	9.751
151	150.560	9.887
152	151.551	10.023
153	152.542	10.161

Dönüşüm için temel teşkil eden koordinatlar

Tablo 5. Parabol II bölümü için elde edilen koordinatlar (E noktasındaki teğet esas alınarak)

Parabol II		
Başlangıça Mesafe	X (m)	Y (m)
0	0	0
50	49.968	1.557
100	99.747	6.165
147	146.226	13.111
148	147.211	13.285
149	148.195	13.460
150	149.180	13.635
151	150.164	13.812

Dönüşüm için temel teşkil eden koordinatlar

Şekil 5'de yumurta eğrisi olarak tanımlanan dördüncü dereceden parabolün $R_1 = 1200$ m, $R_2 = 800$ m ve $L_E = 300$ m değerleri için yapılan program yardımıyla Tablo 4 ve Tablo 5'deki koordinat değerleri hesaplanmıştır.

Parabol I ve parabol II için gerekli aplikasyon değerleri Helmert dönüşümü kullanılarak Tablo 6' da ki gibi elde edilmiştir. Tablo 6' da ayrıca dördüncü dereceden parabolün koordinatları ve asal eleman değerleri de verilmektedir.

Tablo 6.

Başlangıça Mesafe (m)	Dördüncü Dereceden Parabol	
	X (m)	Y (m)
0	0.000	0.000
50	49.985	1.046
100	99.879	4.241
150	149.570	9.751
200	198.905	17.840
250	247.690	28.760
300	295.716	42.640
τ_E	19.8944 gon	
ΔR	0.78125 m	
X_M	149.560 m	
$M_1 M_2$	399.219 m	

Daire 1 ve Daire 2 yarıçapları ile geçiş eğrisi uzunluğu L_E değerleri verilmiş olup, eşitlik 34'de yerine konularak ΔR değeri elde edilmiştir. Geçiş eğrisinin bitim noktasının (E) koordinatları aşağıdaki eşitliklerden hesaplanmaktadır.

$$\tau_1 = \frac{L_1 200}{\pi R_1} \quad (36)$$

$$\tau_2 = \frac{L_2 200}{\pi R_2} \quad (37)$$

$$M_1 M_2 = d = R_1 - (R_2 + \Delta R) \quad (38)$$

$$\gamma = 100 - (\tau_1 + \tau_2) \quad (39)$$

$$b = d \sin \tau_1, c = R_2 \cos \gamma \quad (40)$$

$$a = d \cos \tau_1, e = R_2 \sin \gamma \quad (41)$$

$$A = (R_1 - \Delta R / 2) \cos \tau_1 \quad (42)$$

$$B = (R_1 - \Delta R / 2) \sin \tau_1 \quad (43)$$

$$Y_M = R_1 - A \quad (44)$$

$$X_M = B \quad (45)$$

$$Y_E = R_1 - a - e \quad (46)$$

$$X_E = b + c \quad (47)$$

Şekil 6'da yumurta eğrisinde E noktasından L_P mesafedeki bir P ara noktasının koordinatları, (36), (37), (38) eşitliklerinden hesaplanmaktadır.

$$\tau_P = \frac{200 L_P}{\pi R_2} \quad (48)$$

$$\alpha = 100 - (\tau_1 + \tau_2 - \tau_p) \quad (49)$$

$$b = d \sin \tau_1 \quad (50)$$

$$S = b / \cos \alpha, t = S \sin \alpha \quad (51)$$

$$y_p = \frac{L_p^4 (R_1 - R_2)}{6L_E^2 R_1 R_2} \quad (52)$$

$$a = d \cos \tau_1 = (R_1 - (R_2 + \Delta R)) \cos \tau_1 \quad (53)$$

$$K = (R_2 + S + y_p) \cos(\tau_1 + \tau_2 - \tau_p) \quad (54)$$

$$Y_p = R_1 + t - a - K \quad (55)$$

$$X_p = (R_2 + S + y_p) \sin(\tau_1 + \tau_2 - \tau_p) \quad (56)$$

Sonuç

Bir yolun tasarımındaki geometrik ve dinamik kıstaslar dikkate alındığında, geçiş eğrisinin uygulanması zorunlu hale gelmektedir. Yol tasarımında, geçiş eğrisi güvenlik ve estetik bakımlardan zorunlu bir elemandır. Aynı şekilde yapay nehir ve kanal inşaatında da güzergâhın geçiş eğrisi ile donatılması gitgide önem kazanmaktadır. Bu makalede açıklanan dördüncü dereceden parabol (Biküadratik parabol), çeşitli ülkelerde özellikle hızlı trenlerin ihtiyacı olan demiryollarının rahat ve güvenli bir şekilde tasarlanmasında kullanılmaktadır. Klotoidin yüksek hızlarda ortaya çıkardığı sorunlar bu çalışmada açıklanan 4. dereceden parabol ile ortadan kaldırılabilir.

Kaynaklar

- HENNECKE F, MÜLLER G, WERNER H ::**Handbuch Ingenieurvermessungs Verkehrsbau-Trassen**, Berlin, 1990.
- JACOBS E.: **Die Sinusoide als neuzeitlich Trassierungselement**, Vermessung Ingenieur, Mülheim a.d. Ruhr, 1/1987.
- KASPER H., SCHÜRBA W., LORENZ H.: **Die Klotoide als Trassierungselement**, Dümmlerbuch 7801 Hannover-München Ferd. Dümmlers Verlag-Bonn, 1968.
- TÜDEŞ T. : **Aplikasyon**, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 3.Baskı, Trabzon, 1989
- WITTE B. ve SCHMİDT H.: **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen**, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1995.