

## Ölçülerin Korelasyonlu Olması Durumunda Robust Kestirim

Mevlüt YETKİN<sup>1</sup>, Cevat İNAL<sup>2</sup>, Cemal Özer YİĞİT<sup>1</sup>

### Özet

*M-Kestirimi uyumsuz ölçülerin etkisini azaltmak veya yok etmek için kullanılan robust bir yöntemdir. Bu makalede M-Kestiriminin korelasyonlu gözlemlere uyarlandığı bir yöntem olan ağırlık elemanlarının robust bifaktör indirgeme modeli (RBİM) incelenmiştir. Ağırlık elemanlarının bifaktör indirgeme modeline dayalı robust parametre kestiricisinde ağırlık elemanları için bir küçültme faktörü önerilmektedir. Bifaktör ağırlık elemanlarıyla oluşturulan yeni eşdeğer ağırlık matrisi simetriyi ve orijinal korelasyon katsayılarını korumaktadır. Bir simülasyon çalışması yapılarak yöntem test edilmiştir. Ayrıca en küçük kareler yöntemi ile RBİM'nin performansı karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışması sonucu en küçük kareler yöntemine göre RBİM'nin uyumsuz ölçüler olduğu zaman daha iyi (yansız) bir parametre kestirimi sağladığı görülmüştür.*

### Anahtar Sözcükler

Robust Kestirim, Korelasyonlu Gözlemler, Bifaktör İndirgeme Modeli, GPS Ağı, Uyuşumsuz Ölçüler

### Abstract

#### Robust Estimation for Correlated Observations

*M-estimation is a robust technique to reduce or remove the effect of outliers in geodetic networks. In this paper, bifactor reduction model of weight elements, which is the adaptation of M-estimation to correlated observations, is studied. A shrinking factor for weight elements is proposed in the robust parameter estimator based on a bifactor reduction model of weight elements. The new equivalent weight matrix composed by the bifactor weight elements preserves the symmetry and keeps the original correlation coefficients unchanged. The method is tested through a simulation study. Furthermore, the performances of the least squares method and the robust estimation for correlated observations based on the bifactor reduction model of weight elements (RECO) have been compared. From the findings of this study, it can safely be said that RECO is a more successful method in outlier detection compared with the least squares method. In other words, RECO has provided the best possible solution while the least squares method has yielded a highly contaminated solution.*

### Key words

Robust Estimation, Correlated Observations, Bifactor Reduction Model, GPS Network, Outliers

### 1. Giriş

Jeodezide çeşitli jeodezik gözlemlerle birbirine bağlı noktalardan oluşan ağlara jeodezik ağlar adı verilir. Jeodezik ağların temel amacı bir koordinat sisteminde koordinatları bilinen noktalar elde etmektir. Bu koordinatlar harita bilgilerinin üretilmesinde ve deformasyon izleme gibi çeşitli jeodezik uygulamalarda kullanılmaktadır. Jeodezik ağlarda yapılan gözlemler kaçınılmaz bir şekilde küçük rasgele hatalar ile yüküldür. Genelde bu hatalar merkezi limit teoreminden dolayı normal dağılımlı gözlem kümesini oluşturmaktadır (CRAMÉR 1946). Diğer pek çok bilimde olduğu gibi jeodezide de en yaygın parametre kestirim yöntemi olan en küçük kareler yöntemi (EKKY), doğru fonksiyonel ve stokastik modeller ile normal dağılımlı gözlemlere uygulandığı zaman, maksimum olasılık yöntemiyle özdeş sonuçlar vermektedir (KOCH 1999). Ayrıca ağırlık matrisi gözlemlerin varyans-kovaryans matrisinin tersi olarak seçildiğinde EKKY bir yansız (unbiased) ve minimum varyans kestirimidir. Bunların dışında EKKY parametre kestirimi için gözlemlerin dağılımı ile ilgili herhangi bir bilgiyi gerektirmemektedir (SIMKOOEI 2003). EKKY düzeltmelerin karelerinin toplamının minimum yapılması prensibine dayanmaktadır (DEMİREL 2003).

Bununla birlikte, gözlemler çoğu kez aynı dağılımda olmayan ölçüler (uyuşumsuz ölçüler) içerebilirler. Bu ölçüler EKKY ile elde edilen bilinmeyen parametreleri, düzeltmeleri, birim ağırlıklı karesel ortalama hataları, bilinmeyenlerin standart sapmalarını bozarlar. Bu nedenle uyuşumsuz ölçüler uyuşumsuz ölçü testleri veya robust tekniklerle belirlenmeli ve elemine edilmelidir (YAŞAYAN 1992, BERBER ve HEKİMOĞLU 2003). Bu işlemten sonra uyuşumsuz ölçülerden arınmış gözlemlere EKKY uygulanmalıdır.

Uyuşumsuz ölçü testleri matematik-istatistikteki hipotez testleri konusuna dayanır. İteratif olarak uygulanan bu yöntemlerde her defasında gözlem kümesinde yalnız bir ölçünün kaba hatalı olduğu varsayılır. Kaba hatalı çıkan ölçü, ölçü kümesinden atılır ve kalan ölçülerle tekrar dengeleme yapılır. Bu işleme hiç uyuşumsuz ölçü çıkmayınca kadar devam edilir. Jeodezide yaygın olarak Baarda (1968) ve Pope (1976) test yöntemleri kullanılmaktadır. Baarda yaklaşımı birim ağırlıklı ölçünün varyansının bilinmesini gerektirirken, Pope yaklaşımında buna gerek yoktur. Fakat Kuang (1996) ve Baselga (2007) Pope yönteminin uyuşumsuz ölçü düzeltilmesinin büyüklüğü kritik bir değeri aştığında uyuşumsuz ölçü belirlemede başarısız olabileceğini göstermiştir.

Robust teknikler uyuşumsuz ölçülerin bilinmeyenler üzerine etkisini azaltmak, hatta yok etmek için kullanılan istatistiksel yöntemlerdir. En yaygın olanları M-kestirim yöntem-

<sup>1</sup>Arş.Gör., <sup>2</sup>Prof. Dr., Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Konya

leri olmakla birlikte  $L_1$  norm yöntemi, R-, L- ve S-kestirim yöntemleri, işaret zorlamalı robust EKKY, genelleştirilmiş M-kestirim yöntemi, karelerin en küçük medyanı yöntemi gibi pek çok robust yöntem vardır (ANDREWS 1974; HUBER 1981; HAMPEL vd. 1986; ROUSSEEUW ve LEROY 1987; YAŞAYAN 1992; MONTGOMERY vd. 2001; SIMKOOEI 2003; XU 2005; İNAL ve YETKİN 2006; HEKİMOĞLU ve ERENOĞLU 2007; YETKİN vd. 2007; YETKİN 2008).

Kaba hatalara karşı robust bir yöntem olan M-kestirim yöntemi, bütün gözlemleri dikkate alır fakat gözlemler düzeltmelerinin büyüklüklerine göre farklı ağırlıklara sahip olabilirler. Buradaki temel hedef, düzeltmesi büyük olan bir ölçünün ağırlığının küçültülmesidir. Bu nedenle bir ölçüdeki uyumsuzluğun düzeltilmesine olabildiğince yansımaları istenir. Fakat EKKY'nin yayma etkisi buna izin vermeyebilir.

M-kestirimi, maksimum olasılık kestiriminin genelleştirilmiş halidir. Buradaki M harfi maksimum olasılık anlamına gelmektedir. Huber, Hampel, Andrews ve Ramsay yaygın olarak kullanılan M-kestirim yöntemleridir (GROSS 2003). Yöntem iteratif yeniden ağırlıklandırılmalı En Küçük Kareler (İAEK) algoritmasıyla gerçekleştirilebilir (HEKİMOĞLU ve BERBER 2003). M-kestiriminde gözlemlerin normal dağılımdan değil de kirlenmiş bir dağılımdan geldiği varsayılır. Örneğin Huber'in M-kestirim yönteminde belirli bir aralıkta gözlemlerin normal dağıldığı, bu aralığın dışındaki gözlemlerin ise Laplace dağılımına uyduğu varsayılır ve bu gözlemlerin ağırlıkları Huber'in ağırlık fonksiyonuna göre azaltılır (HUBER 1981).

Jeodezik ağlarda uyumsuz ölçüler robust yöntemler ile belirlenirken gözlemlerin korelasyonlu olmadığı varsayılmıştır (WICKI 1999; GÖKALP ve BOZ 2005; HEKİMOĞLU ve ERENOĞLU 2007). Oysa GPS ağları başta olmak üzere, korelasyonlu gözlemlerle sıkça karşılaşılabilir. Diğer bir deyişle köşegen bir ağırlık matrisi yerine blok-köşegen veya dolu bir ağırlık matrisi söz konusu olabilir. Bu nedenle robust parametre kestiriminde, gözlemler arasındaki korelasyonun dikkatli bir şekilde göz önünde tutulması gerekir (YANG vd. 2002; ERENOĞLU ve HEKİMOĞLU 2008).

Jeodezide korelasyonlu gözlemler için çeşitli robust yöntemler sunulmuştur. Xu (1989) iki değişkenli fonksiyonlar yardımıyla robust kestirimin korelasyonlu gözlemleri de kapsayacak şekilde genişletilmesini sağlamıştır. Diğer yöntemler ise IGGIII (Institute of Geodesy and Geophysics) yöntemi (YANG 1994) ile robust bifaktör indirgeme modelidir (RBİM) (YANG vd. 2002). Her üç yöntem de M-kestirimi ve eşdeğer ağırlık matrisi prensibine dayanmaktadır. Bu çalışmada ağırlık elemanlarının bifaktör indirgeme modeline dayalı robust parametre kestiricisi, bir GPS ağına uygulanmıştır. RBİM, M-kestiriminin korelasyonlu gözlemlere uyarlanmış hali olarak düşünülebilir. M-kestiriminde olduğu gibi burada da İAEK algoritması kullanılmaktadır. Ağırlık fonksiyonu olarak Huber, Andrews veya Hampel gibi yaygın M kestirici fonksiyonları kullanılabilir. RBİM ile gerçekleştirilen dengeleme hesabında, bifaktör ağırlık elemanlarından oluşan yeni eşdeğer ağırlık matrisi orijinal korelasyon katsayılarını değiştirmemekte ve simetriyi korumaktadır. Ayrıca robust yöntemlerin avantajlarından da yararlanılabilir. Bu makalede yapılan simülasyon çalışması RBİM' nin klasik

EKKY' ye göre uyumsuz ölçülerden daha az etkilendiğini göstermektedir.

## 2. EKKY'nin Yayma Etkisi

EKKY'nin önemli bir sakıncası, bir ölçüdeki uyumsuzluğu diğer ölçülere de yaymasıdır. Buna yayma etkisi denir (HEKİMOĞLU 2005). Diğer bir deyişle EKKY uyumsuz ölçülerin etkisini bütün gözlemlere yaydığı için bu tür ölçülerin belirlenmesi zorlaşmaktadır. Bu probleme karşı robust kestirim teknikleri alternatif olabilir. Yayma etkisi ölçülerle düzeltmeler arasındaki ilişkiyi tanımlayan şapka matrisi  $H$  ile açıklanabilir. Bir ölçünün düzeltilmesi bu matrisin elemanları ile

$$v_i = -(1 - h_{ii})l_i + \sum_{j=1}^n h_{ij}l_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

olarak ifade edilebilir.  $h_{ii}$  ve  $h_{ij}$   $H = A(A^T P A)^{-1} A^T P$  şeklinde hesaplanan şapka matrisinin sırasıyla köşegen ve köşegen olmayan elemanlarıdır. Bir ölçüdeki uyumsuz hatanın düzeltilmesine tam olarak yansiyabilmesi için o ölçüye ait  $h_{ii}$  değerinin 0'a yakın bir değer alması (yani  $i$  ölçüsünün kısmi redundans sayısı  $r_{ii} \approx 1$ ) ve (1) eşitliğinin ikinci teriminin 0 civarında olması gerekir. EKKY ile hesaplanan düzeltmeler ilgili ölçüde yapılan hatayı tam olarak yansıtmamaktadır. Örneğin normal dağılıma uyan iyi bir ölçü kaba hatalı bir ölçüden daha büyük bir düzeltme değerine sahip olabilir (batma etkisi). Benzer bir şekilde bir ölçüdeki kaba hata o ölçünün düzeltilmesine tam olarak yansımaz (gizleme etkisi). Bu durumlarda EKKY'ye dayalı uyumsuz ölçü test yöntemleri ile uyumsuz ölçü belirlemek oldukça zor olmaktadır (STAUDTE and SHEATER 1990; HEKİMOĞLU 1997; HEKİMOĞLU 2005). M-kestirimi de İAEK algoritmasıyla çözüldüğü için bu durumdan olumsuz bir şekilde etkilenebilir. Bununla birlikte robust yöntemlerde daha güvenilir parametre kestirimleri elde edildiği için kaba hataların ölçülerin düzeltilmelerine EKKY' den daha iyi bir şekilde yansıtıldığı söylenebilir.

## 3. Ağırlık Matrisi Elemanlarının Bifaktör İndirgeme Modeline Dayalı Robust Kestirici

Dengeleme hesabında gözlemlere ait varyans-kovaryans matrisi  $\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1}$  temel duyarlık ölçütü olduğundan, gözlemlerin stokastik özelliğini güvenilir bir şekilde yansıtmalıdır. Eğer bir gözlem uyumsuz ise varyansı artırılmalı, diğer bir deyişle ağırlığı azaltılmalıdır. Bu kural hem korelasyonsuz hem de korelasyonlu gözlemler için geçerlidir. Fakat uyumsuz korelasyonlu gözlemlerin ağırlıkları azaltılırken gözlemlerin korelasyon katsayılarının değişmemesi gerekir (YANG vd. 2002). Ayrıca başlangıçtaki ağırlık matrisinin simetrik olduğu gibi robust kestirimde kullanılan eşdeğer ağırlık matrisinin de simetrik olması gerekir. Simetri parametre kestirimini çok fazla etkilememekle birlikte, normal denklem katsayılar matrisinin  $N$  hesap yükünü azaltmak ve özellikle büyük boyutlu matrislerde bilgisayar hafızasını daha verimli kullanmak için önemlidir (YANG vd. 2002; STRANG ve BORRE 1997).

$l$ ;  $n \times 1$  boyutlu gözlem vektörü,  $v$ ;  $n \times 1$  boyutlu düzeltme vektörü,  $A$ ;  $n \times u$  boyutlu tasarım (dizayn) matrisi,

$\Sigma_{ll}$ ;  $n \times n$  boyutlu varyans-kovaryans matrisi,  $P$ ;  $n \times n$  boyutlu ağırlık matrisi ve  $x$ ;  $u \times 1$  boyutlu bilinmeyenler vektörü olmak üzere fonksiyonel modelin

$$Ax = E(l), \quad \Sigma_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (2.a)$$

ve bilinmeyenler  $\hat{x}$  tahmin (kestirim) değerleri vektörü ile;

$$l + v = A\hat{x} \quad (2.b)$$

olduğu lineer Gauss-Markoff modeli geçerli olmak üzere M-kestirimi düzeltilmelerin bir fonksiyonunu minimize etmekten ibarettir:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \min \quad (3)$$

Gözlem vektörünün önsel ağırlık elemanları ve robust M kestirim ilkesi göz önüne alınarak bilinmeyen parametrelerin M kestiricisi aşağıdaki koşul altında tanımlanır:

$$v^T \bar{P} v \rightarrow \min. \quad (4)$$

Burada  $\bar{P}$  eşdeğer ağırlık matrisidir. Robust M kestirimi

$$A^T \bar{P} v = 0 \quad (5)$$

eşitliği ile verilir. Gözlemlerin eşdeğer ağırlık matrisinin simetrik olması ve korelasyon katsayılarının değişmemesi için, yeni eşdeğer ağırlık elemanları

$$\bar{p}_{ij} = \gamma_{ij} p_{ij} \quad (6)$$

$$\text{ve} \quad \gamma_{ij} = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

eşitlikleri ile hesaplanır.  $\gamma_{ii}$  ve  $\gamma_{jj}$  ağırlık elemanlarının (bi-faktör) indirgeme faktörleridir. Robust kestirimde Huber'in ağırlık fonksiyonu kullanılırsa indirgeme faktörleri

$$\gamma_{ii} = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq c \\ \frac{c}{|v_i|} & |v_i| > c \end{cases} \quad (8)$$

olur. Burada  $v_i$ , (KOCH 1999)'a göre karesel ortalama ha-

tasına bölünerek ( $v_i = \frac{v_i}{m_{v_i}}$ ) studentleştirilen düzeltmedir.  $c$  1.5-2.0 aralığında seçilen bir sabittir. Ağırlık fonksiyonu olarak pek çok alternatif mevcuttur. Tablo 1'de yaygın bazı robust kestiriciler için indirgeme faktörleri verilmiştir.

Tablo 1: Bazı robust kestiriciler için indirgeme faktörleri

Robust Kestiriciler	İndirgeme Faktörleri	Sabitler
Ramsay	$\gamma_{ii} = \exp(-a v_i )$	$a = 0.3$
Andrews	$\gamma_{ii} = \begin{cases} \left(\frac{ v_i }{c}\right)^{-1} \sin \frac{ v_i }{c} &  v_i  \leq c\pi \\ 0 &  v_i  > c\pi \end{cases}$	$c = 1.339$
Hampel	$\gamma_{ii} = \begin{cases} 1 & 0 <  v_i  \leq a \\ \frac{a}{ v_i } & a <  v_i  \leq b \\ a(c -  v_i ) & b <  v_i  \leq c \\ \frac{ v_i (c - b)}{ v_i (c - b)} &  v_i  > c \end{cases}$	$a = 1.7$ $b = 3.4$ $c = 8.5$

İndirgeme faktörleri kullanılarak eşdeğer ağırlık matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} p_{11} & \gamma_{12} p_{12} & \dots & \gamma_{1n} p_{1n} \\ \gamma_{21} p_{21} & \gamma_{22} p_{22} & \dots & \gamma_{2n} p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} p_{n2} & \dots & \gamma_{nn} p_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Robust parametre kestirimi,

$$\hat{x} = (A^T \bar{P} A)^{-1} A^T \bar{P} l \quad (10)$$

bağıntısı ile elde edilir. M-Kestirimi korelasyonsuz gözlemlerde olduğu gibi yine İAEK algoritmasıyla çözümlür. İAEK algoritması ile korelasyonlu gözlemler için M-Kestirimi aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. EKKY ile bilinmeyenler kestirilir.
2. Düzeltmeler hesaplanır. Hesaplanan düzeltmeler ve seçilen ağırlık fonksiyonuna göre indirgeme faktörleri hesaplanır. Eşdeğer ağırlık matrisi oluşturulur.
3. 2. adımda elde edilen eşdeğer ağırlık matrisi ile EKKY uygulanır. 2.adıma dönülür. Parametre kestirimine istenilen yakınsama sağlayıncaya kadar iteratif olarak devam edilir.

Kestirilen parametrelerin sonsal varyans-kovaryans matrisi için;

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T \bar{P} v}{n - u} \quad (11)$$

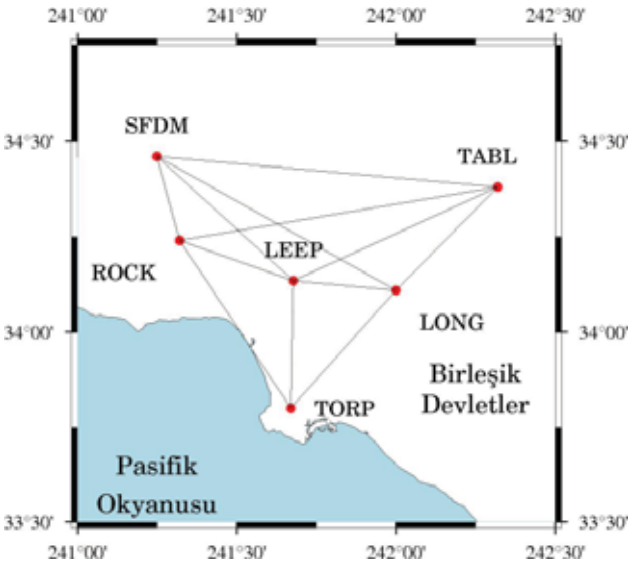
olmak üzere

$$\hat{\Sigma}_x = \hat{\sigma}_0^2 (A^T \bar{P} A)^{-1} \quad (12)$$

eşitliği geçerlidir (YANG vd. 2002).

#### 4. Sayısal Uygulama

Korelasyonlu gözlemler için ağırlık elemanlarının robust bi-faktör indirgeme modeline dayalı robust M-kestirim yöntemi ile EKKY'nin uyuşumsuz ölçülerden nasıl etkilendiğini incelemek için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunun için Uluslararası GNSS servisi (IGS) noktalarından oluşan bir ağ kullanılmıştır. Bu doğrultuda 6 adet IGS noktası seçilerek bu noktalara ait 24 saatlik veri dosyaları SOPAC (Scripps Orbit and Permanent Array Center) servisi veri tabanından alınmıştır. GPS ağı 12 adet bazdan oluşmaktadır. Toplam baz bileşeni sayısı 36, bilinmeyen sayısı 15 serbestlik derecesi ise 21'dir. Ağın datumu SFDM noktası sabit seçilerek tanımlanmıştır. Oluşturulan GPS ağı Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1: GPS ağı

Bu çalışmada Yang vd. (2002)'nin simülasyon yöntemi kullanılmıştır. GPS ağı ilk aşamada hassas ve anlık efemeris bilgileri kullanılarak uzun bazlar ve uzun oturum süreleri için önerilen strateji kullanılarak GAMIT akademik yazılımı ile değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonucu baz vektör bileşenleri ile bunlara ait deneysel kovaryans matrisi  $\hat{\Sigma}$  elde edilmiştir. Bulunan koordinat değerlerinden yararlanarak ilk önce  $\mathbf{l}$  hatasız gözlemler vektörü hesaplanmıştır. Daha sonra Monte Carlo yöntemiyle standart normal dağılımlı rasgele hatalar vektörü  $\Delta$  simüle edilmiştir. Simüle edilen rasgele hataları orijinal varyans-kovaryans matrisi ile uyumlu kılmak için  $\hat{\Sigma}$  ilk önce Cholesky çarpanlarına ayırma yöntemi (Strang ve Borre 1997) ile  $\Sigma = FF^T$  şeklinde çarpanlarına ayrılmış ve  $\Delta' = F\Delta$  ile de orijinal  $\hat{\Sigma}$  matrisine uygun rasgele hatalar vektörü elde edilmiştir.  $\Delta'$  vektörü  $\mathbf{l}$  vektörüne eklenerek  $\mathbf{l}'$  uyuşumlu ölçüler vektörü (normal dağılımlı ölçüler vektörü) elde edilmiştir.  $\hat{\Sigma}$ ,  $\mathbf{l}'$ 'nin varyans-kovaryans matrisi olmaktadır. Son olarak 4 adet uyuşumsuz ölçü (Tablo 2'de 5. sütundaki koyu ve italik değerlere bakınız) simülasyon ile oluşturularak  $\mathbf{l}'$  uyuşumlu ölçüler vektöründe ilgili gözlemlerle yer değiştirilmiştir. Bu çalışmada yalnızca bir bazın bileşenleri arasındaki korelasyon dikkate alınmıştır. Hem EKKY hem de RBİM kirletilmiş ölçüler kümesine

uygulanmıştır. İndirgeme faktörlerinin hesaplanmasında Ramsay' in ağırlık fonksiyonu kullanılmıştır. EKKY ile elde edilen düzeltmeler Tablo 2'de 6, 7 ve 8. sütunlarda RBİM ile elde edilen düzeltmeler ise 9, 10 ve 11. sütunlarda verilmiştir. Hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Tablo 2'de uyuşumsuz ölçüler için EKKY ve RBİM ile bulunan düzeltmeler ile simülasyon ile oluşturulan hatalar incelendiğinde RBİM' nin EKKY' ye göre, gözlemlerdeki uyuşumsuz düzeltmeleri daha iyi yansıttığı söylenebilir. Örneğin EKKY ile yapılan dengelemede uyuşumsuz düzeltmeler diğer düzeltmelere tam olarak yansımamaktadır. Öte yandan RBİM ile yapılan dengeleme uyuşumsuz düzeltmeleri daha başarılı bir şekilde göstermektedir.
2. Düzeltmelerle ( $v_i$ ) gerçek hatalar ( $\Delta_i$ ) arasında farkların karelerinin toplamları  $\sum (\Delta_i - v_i)^2$  Tablo 2'nin son satırında verilmiştir. Bu değerler RBİM yöntemi ile elde edilen düzeltmelerin EKKY'den elde edilen düzeltmelere göre gerçek hatalarla daha iyi uyduğunu göstermektedir.
3. Simülasyon çalışmasında GAMIT ile elde edilen koordinatlar hatasız koordinatlar olarak kabul edilmiştir. Böylece hangi yöntem ile daha güvenilir sonuçlar elde edilebileceği daha kolay yorumlanabilir. Tablo 3 dikkatle incelenirse EKKY hiç uyuşumsuz ölçü olmadığından oldukça iyi sonuç verirken uyuşumsuz ölçü olduğu zaman sonuçlar oldukça bozulmaktadır. RBİM ise uyuşumsuz ölçüler söz konusu olduğu zaman EKKY'den daha iyi sonuç vermektedir. Tablo 3'ün son satırında verilen hatasız koordinatlarla dengeleme sonucu bulunan koordinatların farklarının karelerinin toplamları bu sonucu doğrulamaktadır.



Tablo 2: Simülasyon ile oluşturulan hatalar, EKKY ve RBİM ile elde edilen düzeltmeler (m)

Gözlem No	Bazlar	Simülasyon ile oluşturulan hatalar			EKKY ile elde edilen düzeltmeler			Robust yöntemle elde edilen düzeltmeler					
		$(\Delta_i)$			$(v_i)$			$(v_i)$					
		X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z			
1	SFDM-TABL	-0.003	-0.007	<b>-0.978</b>	0.245	-0.193	1.724	0.173	-0.050	0.787			
2	LONG-SFDM	-0.018	-0.028	<b>1.510</b>	-0.322	0.436	-2.056	-0.075	0.253	-1.476			
3	LEEP-SFDM	-0.005	0.023	-0.003	-0.056	0.184	-0.726	0.032	-0.053	-0.102			
4	ROCK-SFDM	0.008	0.007	-0.003	0.052	0.339	0.174	0.130	0.462	-0.124			
5	LONG-TABL	-0.011	0.001	-0.006	-0.087	0.208	0.205	0.089	0.167	-0.151			
6	LEEP-TABL	-0.017	0.008	0.010	0.197	-0.001	0.006	0.214	-0.095	-0.306			
7	ROCK-TABL	-0.007	-0.002	<b>5.010</b>	0.308	0.148	-4.094	0.314	0.414	-5.328			
8	LONG-TORP	-0.010	-0.000	-0.000	0.162	-0.194	0.024	-0.034	-0.059	0.177			
9	LEEP-LONG	-0.015	-0.008	0.008	0.293	-0.194	-0.192	0.134	-0.247	-0.148			
10	LEEP-TORP	-0.016	-0.000	0.002	0.446	-0.396	-0.162	0.091	-0.314	0.034			
11	ROCK-TORP	0.006	0.006	0.000	0.544	-0.263	0.740	0.179	0.179	0.015			
12	LEEP-ROCK	0.007	0.005	<b>3.104</b>	-0.128	-0.144	2.204	-0.117	-0.504	3.126			
		$\sum_{i=1}^{36} (\Delta_i - v_i)^2$			0			5.386			1.527		

Tablo 3: EKKY ve RBİM ile kestirilen koordinatlarla hatasız kabul edilen koordinatlar arasındaki farklar (m)

İstasyonlar	EKKY (uyuşumsuz ölçü yok)			EKKY (uyuşumsuz ölçü var)			RBİM (uyuşumsuz ölçü var)		
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
TABL	0.0033	0.0066	0.0049	-0.2419	0.1999	-0.7451	-0.1705	0.0573	0.1912
LONG	-0.0013	0.0007	-0.0036	-0.3392	0.4084	-0.5458	-0.0919	0.2250	0.0350
LEEP	-0.0055	0.0121	-0.0009	-0.061	0.2065	-0.7295	0.0272	-0.0297	-0.1056
TORP	-0.0032	0.0088	-0.0005	0.0596	0.3457	0.1710	0.1376	0.4688	-0.1269
ROCK	0.0033	0.0058	0.0020	-0.4915	0.6031	-0.5694	-0.0485	0.2845	-0.1421
Farkların karelerinin toplamı	0.0004			2.8937			0.5002		

## 5. Sonuç

EKKY, dengeleme sonucunda ölçülere getirilecek düzeltmelerin kareleri toplamının minimum yapıldığı bir parametre kestirim yöntemidir. Normal dağılmış rasgele hatalı ölçülere doğru fonksiyonel ve stokastik modeller uygulandığında minimum varyans, yansızlık ve maksimum olasılık ilkelerine göre optimal çözümü veren bu yöntem uyuşumsuz ölçülere karşı duyarlı olmaktadır. Bu durumda uyuşumsuz ölçüler parametre kestirimi üzerinde bozucu bir etkiye sahip olabilmektedir.

Uyuşumsuz ölçüler bu nedenle etkin bir şekilde belirlenmeli ve ağırlıkları azaltılmalı veya gözlem kümesinden çıkartılmalıdır. Eğer gözlemler arasında korelasyon varsa uyuşumsuz ölçü belirleme aşamasında dikkate alınması gerekir. Bu çalışmada Yang vd. (2002) tarafından sunulan RBİM yöntemi bir simülasyon çalışmasında test edilmiştir. RBİM yönteminin parametre kestiriminde klasik EKKY'ye göre uyuşumsuz ölçülerden daha az etkilendiği görülmüştür.

## Kaynaklar

- ANDREWS D.: **A robust method for multiple linear regression**, Technometrics, 16:523-531, 1974.
- BAARDA W. **A testing procedure for use in geodetic networks**, Publications on Geodesy. New Series 2, no.5. Netherlands Geodetic Com., Delft, 1968.
- BASELGA S.: **Critical Limitation in use of  $\tau$  test for gross error detection**, J Surv Eng, 133(2): 52-55, 2007.
- BERBER M. HEKİMOĞLU Ş.: **What is the reliability of conventional outlier detection and robust estimation in trilateration networks?**, Surv Rev, 37(290):308-318, 2003.
- CRAMÉR H.: **Mathematical methods of statistics**, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- DEMİREL H.: **Dengeleme Hesabı**, YTÜ, İstanbul, 2003.
- ERENOĞLU R.C., HEKİMOĞLU Ş.: **An investigation to robust estimation applied to correlated GPS networks**, M.G. Sideris (Ed.), Observing our Changing Earth, International Association of Geodesy Symposia 133, 639-644, 2008.
- GROSS J.: **Linear regression**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- GÖKALP E., BOZ Y.: **Robust M-kestirimlerin GPS ağlarındaki uyuşumsuz baz vektörlerini belirlemede karşılaştırılması**, Harita Dergisi, Sayı: 134, 1-17, 2005.
- HAMPEL F., RONCHETTI E., ROUSSEEUW P., STAHEL W.: **Robust statistics: the approach based on influence functions**, Wiley, New York, 1986.
- HEKİMOĞLU Ş.: **Finite sample breakdown points of outlier detection procedures**, J Surv Eng, 123(1):15-31, 1997.
- HEKİMOĞLU Ş.: **Do robust methods identify outliers more reliably than conventional tests for outliers?**, ZfVermessungswesen, Vol. 05/03, 174-180, 2005.

- HEKİMOĞLU Ş., BERBER M.: **Effectiveness of robust methods in heterogeneous linear models**, J Geod 76:706-713, 2003.
- HEKİMOĞLU Ş., ERENOĞLU R.C.: **Jeodezik ağlarda uyuşumsuz ölçülerin klasik yaklaşım ve robust yöntemlerle belirlenmesi**, HKM Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi, Sayı: 97, 3-14, 2007.
- HEKİMOĞLU Ş., ERENOĞLU R.C.: **Effect of heteroscedasticity and heterogeneous on outlier detection for geodetic networks**, J Geod 81:137-148, 2007.
- HUBER P.J.: **Robust statistics**, Wiley, New York, 1981.
- İNAL C., YETKİN M.: **Robust yöntemlerle uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi**, S.Ü. Müh. Mim. Fak. Derg., c.21,s.3-4,2006.
- KOCH K.R.: **Parameter estimation and hypothesis testing in linear models**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- KUANG S. L.: **Geodetic network analysis and optimal design**, Ann Arbor Press, Ann Arbor, Michigan, 1996.
- MONTGOMERY D. C., PECKE E. A., VINING, G. G.: **Introduction to linear regression analysis**, 3rd edn. Wiley, New York.
- POPE A.J.: **The statistics of residuals and the outlier detection of outliers**, NOAA Technical reports NOS 65, National Geodetic Survey, Rockville, 1976.
- ROUSSEEUW P.J. LEROY A.M.: **Robust regression and outlier detection**, John Wiley, New York, 1987.
- SIMKOOEI A.A.: **Formulation of  $L_1$  norm minimization in Gauss-Markov Models**, J Surv Eng, 129(1):37-43, 2003.
- STAUDTE R. G. SHEATER S. J.: **Robust estimation and testing**, Wiley, New York, 1990.
- STRANG G. BORRE K.: **Linear algebra, geodesy and GPS**, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, USA, 1997.
- XU P.: **On the robust estimation with correlated observations**, Bull Geod 63:237:252, 1989.
- XU P.: **Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness**, J Geod 79:146-159, 2005.
- WICKI F.: **Robuste Schätzverfahren für die parameterschätzung in geodätischen netzen**, Institut für geodäsie und photogrammetrie an der ETH, Zürich, Mitt. Nr. 67, 1999.
- YANG Y.: **Robust estimation for dependent observations**, Manuser Geod 19(1):10-17, 1994.
- YANG Y. SONG L. XU T.: **Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights**, J Geod 76:353-358, 2002.
- YAŞAYAN A.: **Robust kestirim kavramı, ilkesi ve uygulamaları üzerine irdelemeler**, HKM Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi, Sayı: 72, 56-66, 1992.
- YETKİN M. İNAL C. YİĞİT C.Ö.: **Korelasyonlu GPS Baz Bileşenlerinin Robust Bifaktör İndirgeme Modeli ile Dengelenmesi**, 11. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, Ankara, 2007.
- YETKİN M.: **GPS Ağlarının Optimal Tasarımı ve Robust İstatistik Yöntemlerinin Kullanılabilirliği**, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. ABD Yüksek Lisans Tezi, 2008.