Koordinat Dönüşümünde En Küçük Kareler ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemleri

Orhan AKYILMAZ[1], Mustafa ACAR[2], M. Tevfik ÖZLÜDEMİR[3]

Özet

Koordinat Dönüşümünde iki koordinat sistemi arasındaki transformasyon parametreleri her iki sistemde de koordinatları bilinen ortak noktalardan hesaplanır. Gereğinden fazla ortak nokta bulunması durumunda bu işlem "En Küçük Kareler (EKK)" yöntemi ile gerçekleştirilir. Koordinat dönüşümünde, hem gözlem vektörü hem de katsayılar matrisinin bazı elemanları stokastik özellikler taşır. Klasik EKK yaklaşımında bu genellikle göz ardı edilir ve bu durum çözüm sonuçları içinde bir belirsizlik olarak kalır. Oldukça yeni bir yöntem olan "Toplam En Küçük Kareler (TEKK)" yöntemi ile hem gözlemler hem de katsayılar matrisinin tamamı ya da bir parçası stokastik bileşen olarak alınabilir ve böylece bilinmeyen parametreler için daha gerçekçi değerler kestirilebilir. Bu çalışmada klasik EKK ile TEKK yöntemleriyle aynı veri kümesinde koordinat dönüşümü gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Sözcükler
En Küçük Kareler, Toplam En Küçük Kareler, koordinat dönüşümü

Abstract

Least Squares and Total Least Squares Methods in Coordinate Transformation

In coordinate transformation, point coordinates in one coordinate system can be obtained in another using common points whose coordinates are known in both systems. In the case of having more common points than required, this process is done by the least squares (LS) method. In coordinate transformation, both observation vector and some elements of the design matrix have some stochastic properties. In classical LS approach this is often neglected and remains as an uncertainty in the results. Using "total least squares (TLS)", a considerably new method, both observations and the whole or part of design matrix can be taken as stochastic components. Thus, more realistic values could be estimated for unknown parameters. In this study, coordinate transformation is conducted through both LS and TLS approaches using the same data set.

Key Words
Least Squares, Total Least Squares, coordinate transformation

1. Giriş

Jeodezik ağ noktalarının farklı koordinat sistemlerindeki koordinatlarının birbirleri ile olan ilişkilerinin ortaya konulması haritacılıkta yaygın bir uygulamadır. Bu nedenle, her iki sistemde koordinatları bilinen noktalar, sistemler arasındaki başlangıç noktaları ve eksenler arasındaki matematiksel ilişkiyi elde etmek için kullanılır. Bu problem, 2 Boyutlu (2B) koordinat dönüşümü için F.R. Helmert tarafından formüle edilmiştir ve bundan dolayı Helmert dönüşümü olarak bilinmektedir. Şekil benzerliğinin korunmakta olduğu ve bu nedenle de benzerlik dönüşümü olarak da anılan iki ve üç boyutlu koordinat dönüşümleri jeodezik ve fotogrametrik uygulamalarda yaygın olarak uygulanmaktadır (AKYILMAZ 2007).

İki farklı koordinat sistemi arasındaki matematiksel ilişki, dönüşüm parametreleri olarak isimlendirilen parametrelerle kurulur. 2B düzlemsel koordinat dönüşümünde, eksenler boyunca iki öteleme, ölçek ve sistemlerin koordinat eksenleri arasındaki dönüklük açısı olmak üzere toplam dört parametre söz konusudur. 3B dönüşümde ise eksenler boyunca üç öteleme, eksenler etrafında üç dönüklük açısı ve bir ölçek parametresi olmak üzere toplam yedi parametre vardır. Bu parametreler, iki koordinat sistemindeki ortak noktalara dayalı olarak belirlendiğinde, bir koordinat sistemindeki noktanın koordinatları diğer koordinat sisteminde kolaylıkla hesaplanabilir. Çözüm için bir sistemdeki noktaların koordinatları gözlem vektörü olarak ve dönüşüm parametreleri de bilinmeyenler vektörü olarak alınır.

Dönüşümde genellikle yeterinden fazla sayıda ortak nokta kullanılır ve bu durum dönüşüm parametrelerinin dengeleme ile kestirilmesini gerektirir. Klasik EKK yönteminde, her iki sistemdeki ortak noktalar ve ölçü kabul edilen tüm nokta koordinatları eşit ağırlıklı olarak alınır ve düzeltme denklemleri ile oluşturulan normal denklemlerin çözümü ile dönüşüm parametreleri kestirilir.

Diğer taraftan, dönüşüme altlık olan her iki sistemdeki ortak noktalar, kaba hata olmadığı varsayıldığında, belirli rastlantısal hatalara sahiptir. Örneğin, iki ayrı GPS kampanyasında yapılan ölçülerin ayrı ayrı dengelenmesi sonucu elde edilen nokta koordinatları varyans-kovaryans bilgileri ile birlikte mevcuttur. Dolayısıyla dönüşümde kullanılacak ortak noktalar da bu şekilde varyans-kovaryans değerleri ile mevcuttur. Bu durumda, sonraki bölümlerde de gösterileceği gibi dönüşümde kullanılacak katsayılar matrisinin bazı sütunlarındaki elemanları stokastik büyüklükler olarak ortaya çıkmaktadır. Söz konusu bu durumun ele alınmasında, bu çalışmanın konusu olan TEKK yöntemi kullanılabilir. TEKK yöntemi, ölçülerin yanında katsayılar matrisi elemanlarının tümünün ya da bir bölümünün hata içerdiği problemlerin çözümü için önerilmiş yeni ve güçlü bir yöntemdir. Bu

[1]Yrd. Doç. Dr., [2]Araş. Gör., [3]Yrd. Doç. Dr., İTÜ İnşaat Fakültesi, Jeodezi Anabilim Dalı, Maslak/İstanbul

yaklaşımı içeren modeller, değişkenlerin hata içerdiği (Errors-in-Variables) modeller olarak adlandırılmaktadır (ACAR vd. 2006, AKYILMAZ 2007).

2. Üç Boyutlu Helmert (Benzerlik) Dönüşümü

3B koordinat dönüşümü, yedi parametreli benzerlik dönüşümü olarak da bilinir. 3B ile bir koordinat sistemindeki noktalar bir diğerine transfer edilir (WOLF ve GHILANI 1997). Objelerin şekillerinin korunduğu benzerlik dönüşümünde parametrelerin hesabı için aşağıdaki formül kullanılır.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1+\lambda) \begin{bmatrix} 1 & -R_z & R_y \\ R_z & 1 & -R_x \\ -R_y & R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i \quad (1)$$

Burada

$(1+\lambda)$: ölçek

Rx, *Ry*, *Rz*: x, y, z eksenleri doğrultusundaki dönüklükler

Tx, *Ty*, *Tz*: x, y, z eksenleri doğrultusundaki ötelenmelerdir.*

$\boldsymbol{dk} = \left[\overline{T}_x \ \overline{T}_y \ \overline{T}_z \ (1+\lambda) \ R_x \ R_y \ R_z \right]$ ile gösterilen dönüşüm parametreleri vektörünün hesaplanması için EKK gözlem eşitliklerinin katsayılar matrisi $\boldsymbol{A}$ aşağıdaki şekli alır. Burada n, dönüşüm probleminde her iki sistemde de koordinatları bilinen ortak nokta sayısıdır.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -z_1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 & -y_1 & -x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & -z_2 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 & z_2 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 & z_2 & -y_2 & -x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & x_n & 0 & -z_n & y_n \\ 0 & 1 & 0 & y_n & z_n & 0 & -x_n \\ 0 & 0 & 1 & z_n & -y_n & -x_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Daha sonra buradan,

$$\boldsymbol{\ell} = \left\| \boldsymbol{X_1} \ \boldsymbol{Y_1} \ \boldsymbol{Z_1} \ \boldsymbol{X_2} \ \boldsymbol{Y_2} \ \boldsymbol{Z_2} \ldots \right\|^T$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{dk} - \boldsymbol{\ell} \quad (3)$$

lineer (doğrusal) gözlem denklemleri yazılabilir:

$x_s, \ y_s, \ z_s$ ağırlık merkezi koordinatları ve

$x_i = x_s + \Delta x_i, \ y_i = y_s + \Delta y_i, \ z_i = z_s + \Delta z_i \ \ i = 1, \ldots, n$

denirse,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_1 & 0 & -\Delta z_1 & \Delta y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_1 & \Delta z_1 & 0 & -\Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_1 & -\Delta y_1 & -\Delta x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta x_2 & 0 & -\Delta z_2 & \Delta y_2 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_2 & \Delta z_2 & 0 & -\Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_2 & -\Delta y_2 & -\Delta x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \Delta x_n & 0 & -\Delta z_n & \Delta y_n \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y_n & \Delta z_n & 0 & -\Delta x_n \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_n & -\Delta y_n & -\Delta x_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$-\boldsymbol{\ell} = \left[x_s - X_1 \ \ y_s - Y_1 \ \ z_s - Z_1 \right]^T$$

vektörü, kestirim probleminin gözlem vektörüdür. Transformasyon parametreleri EKK ile hesaplandıktan sonra, x_i, y_i, z_i koordinatları X_j, Y_j, Z_j koordinat sistemine dönüştürülür (AYAN 1981, AYAN 2001).

3. En Küçük Kareler Yöntemi

Dengeleme hesabında uygulanan Gauss Markov modelinde n sayıda gözlem, m sayıda bilinmeyen parametre ile gözlem hatalarının ya da bir başka ifadeyle istatistiksel olarak ölçülere getirilecek düzeltmelerin karelerinin ağırlıklandırılmış toplamının minimum olması esas alınır. $\boldsymbol{A}$ katsayılar matrisini göstermek üzere, lineerleştirilmiş fonksiyonel model,

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{dk} \qquad \text{rank}(\boldsymbol{A}) = m < n \quad (5)$$

şeklinde ve stokastik model,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \ \boldsymbol{P}^{-1} \quad (6)$$

olup burada

$\boldsymbol{\ell}$: nx1 boyutlu gözlem vektörü

$\boldsymbol{e}$: nx1 boyutlu gözlem hataları vektörü

$\boldsymbol{dk}$: mx1 boyutlu bilinmeyen parametreler vektörü

$\boldsymbol{P}$: nxn gözlemlerin ağırlık matrisi

ile ifade edilir. Problemin EKK çözümü, aşağıdaki amaç fonksiyonunu göz önüne alan gözlem eşitliklerine dayalı bir optimizasyon işlemidir.

Amaç:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{dk} \quad (7)$$

olmak üzere $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \ \boldsymbol{e} \rightarrow$ min. koşulunun sağlanmasıdır. Daha bilinen bir formda bu minimumlaştırma problemi aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

* Benzerlik dönüşümü için verilen bu formül, ancak küçük dönüklükler için geçerlidir. Diğer durumlar için yaklaşık benzerlik dönüşümü olarak düşünülebilir.

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{dk} - \boldsymbol{\ell})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{dk} - \boldsymbol{\ell}) = \min. \tag{8}$$

$\boldsymbol{dk}$'nın kestirim değeri $\hat{\boldsymbol{dk}}$'yı elde etmek için (8) eşitliğini min. yapan aşağıdaki eşitlik üretilir:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\ \hat{\boldsymbol{dk}} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

Buradan,

$$\hat{\boldsymbol{dk}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\ell} \tag{10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{dk}} - \boldsymbol{\ell} \tag{11}$$

bulunur. (10) denklemine göre bilinmeyen parametrelerin kestirimi, ümit değeri sıfır olan ve normal dağılımdaki hataların en iyi lineer ümit değere sadık kestirimdir. (10) denkleminde verilen EKK çözümü sadece bilinmeyen parametre sayısının gözlem denklem sayısından daha az ya da eşit olduğu zaman (rank (A)=$m \leq n$) geçerlidir. Bazı durumlarda gözlemler birbirine bağımlıdır. Bu durumda, $\boldsymbol{A}$ katsayılar matrisi rank (mertebe) düşüklüğüne sahiptir ve normal denklemler matrisinin Cayley tersi (inversi) yoktur. Bu tür modeller rank düşüklüğü olan Gauss Markov modeli olarak adlandırılır. Bu durumda, genel matris ters alma yönteminin özel bir şekli olan Moore-Penrose ters alma yöntemi uygulanır. Bu yöntem, EKK problemlerinde tek anlamlı öklit çözümünü elde etmek için kullanılır. Bu nedenle, lineer modellerdeki rank düşüklüğü durumlarında, parametreler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\boldsymbol{dk}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{+}\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\ell} \qquad \text{rank}\ (A) = m < n \tag{12}$$

Moore-Penrose tersi $(\ )^+$, normal denklemin "Tekil Değerlerin Ayrıştırması (TDA)" yöntemi kullanılarak hesaplanır.

4. Toplam En Küçük Kareler Kestirimi

EKK'de orijinal düzeltme denklemleri genellikle lineer olmadığı için, hem bilinmeyen parametrelerin hem de gözlem hatalarının düzeltme vektörleri önceden tanımlanmış eşik değerlerinden daha küçük oluncaya kadar iteratif bir çözüm yapılmak zorundadır. Bu nedenle, bu yaklaşım hem gözlem hem de katsayılar matrisi hatalı olduğu düşünülen modifiye edilmiş Gauss Markov modelinin gerçek çözümüne yakınsamayabilir (KOCH 1999).

Buna karşılık TEKK kestirim yöntemi, GOLUB ve VAN LOAN tarafından ilk olarak 1980 yılında ortaya atılmış, hem gözlemleri hem de katsayılar matrisi elemanları hatalı olan problemler için EKK yaklaşımına bir alternatif olarak sunulmuştur. Klasik TEKK'lerin fonksiyonel modeli aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e}_{\ell} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_A)\,\boldsymbol{dk} \qquad \text{rank}\ (A) = m < n \tag{13}$$

$\boldsymbol{E}_A$: katsayılar matrisinin ilgili bileşenlerinin nxm boyutlu hata matrisi

$\boldsymbol{e}_{\ell}$: gözlemlere ait nx1 boyutlu hata vektörüdür.

Gözlemlerin hata vektörü $\boldsymbol{e}_{\ell}$ ve katsayılar matrisinin hata matrisi $\boldsymbol{E}_A$'nın bağımsız, aynı varyansa sahip ve ortalama değerlerinin sıfır oldukları varsayılır.

TEKK yöntemi, (13) denklemi içinde hata bileşenlerinin toplamını minimize edecek şekilde aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümünü sağlar (MARKOVSKY vd. 2004, GOLUB ve VAN LOAN 1980, VAN HUFFEL ve VANDEWALLE 1991):

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Amaç fonksiyonu: } \min_{[\boldsymbol{e}_\ell;\boldsymbol{E}_A]} \left\| [\boldsymbol{E}_A ; \boldsymbol{e}_\ell] \right\|_F \\ \hline \text{Kısıt denklemleri: } \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e}_\ell = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_A)\,\boldsymbol{dk} \end{array}} \tag{14}$$

$\left\|\boldsymbol{H}\right\|_F$, yukarıda verilen amaç fonksiyonundaki $[\boldsymbol{E}_A; \boldsymbol{e}_l]$ matrisine karşılık gelen nxm boyutlu $\boldsymbol{H}$ matrisinin Frobenius normunu belirtmektedir ve aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\left\|\boldsymbol{H}\right\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij}^2} = \sqrt{iz(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})} \tag{15}$$

iz (.) : argümanı olan matrisin izi

$[\boldsymbol{E}_A ;\ \boldsymbol{e}_\ell]$: En sağdaki sütun olarak $\boldsymbol{E}_A$ hata matrisinin gözlem hataları, $\boldsymbol{e}_\ell$ sütun vektörü ile genişletilmiş $n\times(m+1)$ boyutlu matrisidir (LEON 2002, FELUS 2004).

$\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_A ; \tilde{\boldsymbol{e}}_\ell\right]$'nin minimizasyon işlemi yapıldıktan sonra, aşağıdaki eşitliği sağlayan herhangi bir $\boldsymbol{dk}$ değeri TEKK probleminin çözümüdür.

$$(\boldsymbol{A} - \tilde{\boldsymbol{E}}_A)\ \boldsymbol{dk} = \boldsymbol{\ell} + \tilde{\boldsymbol{e}}_\ell \tag{16}$$

Başka bir deyişle, verilen hatalı değerler içeren $[A; \boldsymbol{\ell}]$'yi, $[\boldsymbol{E}_A ;\ \boldsymbol{e}_\ell]$ Frobenius normuna göre en az çaba ile değiştirilir (modifiye edilir). Bu değişiklik, $[A; \boldsymbol{\ell}]$ genişletilmiş matrisinin sütunları arasında bir lineer ilişki yaratır. Buna ilaveten, m+1 ranga sahip genişletilmiş matris $[A;\ \boldsymbol{\ell}]$, m ranga sahip $[\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{E}_A;\ \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{e}_\ell] = \left[\hat{\boldsymbol{A}},\ \hat{\boldsymbol{\ell}}\right]$ ile değiştirilir ki bu da $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ sütununun $\hat{\boldsymbol{A}}$'nın sütunları ile lineer bağımlı olduğu anlamına gelmektedir. Genişletilmiş $[A; \boldsymbol{\ell}]$ matrisi, TDA ile üç matrisin çarpımı olarak ifade edilebilir.

$$[A;\ \boldsymbol{\ell}] = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T \tag{17}$$

$$\boldsymbol{U} = \left[u_{1,1},\ldots,u_{1,n},\ldots u_{n,1},\ldots,u_{n,n}\right] \in R^{n\times n}$$

$$\boldsymbol{V} = \left[v_{1,1},\ldots v_{1,m}, v_{1,m+1},\ldots v_{m,m+1}, v_{m+1,1},\ldots,v_{m+1,m+1}\right] \in R^{(m+1)\times(m+1)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{1,m+1},\ldots \sigma_{m+1,m+1},\ldots,\sigma_{n,1},\ldots,\sigma_{n,m+1}\right] \in R^{n\times(m+1)}$$

matrisi köşegen elemanları tekil değerlere, köşegen olmayan elemanları sıfıra eşittir. Kolaylık sağlaması bakımından bundan sonra $\boldsymbol{\Sigma} = diag\ (\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\sigma_{m+1})$ olarak $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin köşegen elemanları kullanılacaktır.

Teorem 1:
(17) denkleminin $[A; \boldsymbol{\ell}]$ genişletilmiş matrisinin TDA'sı, $\sigma_m > \sigma_{m+1}$ ve $v_{m+1,m+1} \neq 0$ olduğunu varsayalım. Böylece $[A; \boldsymbol{\ell}]$'nin TEKK kestirimi aşağıdaki formül ile verilir:

$$\left[\hat{A},\ \hat{\ell}\right] = U\hat{\Sigma}V^T \quad \Sigma = diag\ (\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\sigma_{m+1}) \tag{18}$$

$\sigma_m > \sigma_{m+1}$ ve $v_{m+1,m+1} \neq 0$ koşulları, A tam ranga sahip ise, genellikle sağlanır. Bu nedenle $\hat{A} = (A - E_A)$ ve $\hat{\ell} = \ell + e_\ell$ tanımları kullanılarak (13) denkleminin yeniden düzenlenmiş hali aşağıdaki şekilde olur:

$$\left[\hat{A}, \hat{\ell}\right]\begin{bmatrix} dk \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

$[dk;\ -1]^T$ vektörü $\left[\hat{A},\ \hat{\ell}\right]$ 'nin soldan sıfır uzayıdır ve bu nedenle TEKK çözumu TDA özellikleri kullanılarak elde edilebilir. V_{m+1} (V'nin son sütununun son bileşeni) -1 oluncaya kadar ölçeklendirilmesi ile $[dk;\ -1]$ vektörü elde edilir (FELUS 2004).

Teorem 2:

(14) denkleminde verilen koşullara göre elde edilen parametrelerin vektörü aşağıdaki eşitlikle hesaplanır:

$$\hat{dk} = -\frac{1}{v_{m+1,m+1}}\left[v_{1,m+1}, v_{2,m+1}, \ldots, v_{m,m+1}\right]^T \tag{20}$$

Diğer bir ifadeyle, TEKK probleminin tek çözümü; en küçük tekil değer ve $[A;\ \ell\ ]$ genişletilmiş matrisinin sağ tekil vektörüyle ilişkili olarak ifade edilir.

$[dk;\ -1]^T$ vektörü, aşağıdaki özvektör denklemini üreten $[A;\ell\,]^T[A;\ell\,]$'nin özdeğeri ile ilişkili özvektördür:

$$[A,\ \ell]^T\ [A,\ \ell]\begin{bmatrix} dk \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TA & A^T\ell \\ \ell^TA & \ell^T\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{dk} \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma^2_{m+1}\begin{bmatrix} \hat{dk} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Denklem (21)'in ilk satırı göz önünde tutulursa, bilinmeyen parametrelerin kestirimi olan $\hat{dk}$ için aşağıdaki denklem (TEKK hesabının normal denklemleri olarak düşünülebilir) yazılabilir.

$$(A^TA - \sigma^2_{m+1}\ I)\ \ \hat{dk} = A^T\ell \tag{22}$$

$\sigma_m > \sigma_{m+1}$ ve $v_{m+1,m+1} \neq 0$ yaklaşımlarından, $\left[A^TA - \sigma^2_{m+1}\ I\right]$ pozitif tanımlı bir matristir ve bu nedenle dk'nın $\hat{dk}$ kestirim değeri

$$\hat{dk} = (A^TA - \sigma^2_{m+1}\ I)^{-1}\ A^T\ell \tag{23}$$

ile elde edilir. Şu ana kadar verilen formülasyonlar TEKK problemleri için geçerlidir. Burada hem gözlem vektörü hem de katsayılar matrisi aynı varyansa sahiptir ve A matrisinin tüm sütunlarındaki bileşenlerin hatalı olduğu varsayılmıştır. Bu yüzden, bir ağırlıklandırma yöntemi uygulanmamıştır. Pratikte ise ne gözlemlerin ve katsayılar matrisinin varyansları aynıdır ne de katsayılar matrisindeki tüm sütunlar hatalıdır. Aşağıda, TEKK yönteminde katsayılar matrisinin sabit sütunları, gözlemler için farklı varyansların katkısı ve katsayılar matrisinin hatalı bileşenleri formüle edilmektedir.

4.1. TEKK yönteminde katsayılar matrisinin sabit sütunları

Yukarıdaki denklemlerde A matrisinin bütün bileşenlerinin hatalı olduğu düşünülmesine rağmen, çoğu durumda bazı sabit sütunlar vardır ki bunlar TEKK dengelemesi sonrasında değişmeden korunması gereken sabit değerlere sahiptir. Jeodezik uygulamaların tipik bir örneği, Helmert transformasyonu gibi geometrik koordinat dönüşümlerinin öteleme parametrelerinin katsayılarıdır. Bu sabitleştirme yöntemi, A matrisinin ve bilinmeyen vektörü dk'nın bölümlere ayrılmasını temel alır. Şöyle ki,

$$A = \left[A_1; A_2\right];\ A_1 \in R^{nxm_1}\ \ ve\ \ A_2 \in R^{nxm_2}$$
$$dk = \left[dk_1^T; dk_2^T\right]^T;\ dk_1 \in R^{m_1x1}\ \ ve\ \ dk_2 \in R^{m_2x1} \tag{24}$$

Burada A_1 ve A_2 orijinal A matrisinin sütunlarının bölünmüş şekli, dk_1 ve dk_2 ise bilinmeyen parametre vektörleridir.

A_1 matrisinin sütunlarının kesinlikle bilindiği varsayımına dayalı olarak TEKK optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ortaya konur:

Amaç fonksiyonu: $\min_{[\hat{A};\hat{\ell}]}\left\|\left[E_{A_2}; e_\ell\right]\right\|_F$
Kısıt Denklemleri: $\ell + e_\ell = \left[\hat{A}_1; \hat{A}_2\right]\begin{bmatrix} \hat{dk}_1 \\ \hat{dk}_2 \end{bmatrix}$

(25)

Bu optimizasyon problemini çözmek için bilinen sütunlarla diğerlerini ayırmak zorundayız. Bu da $\left[A_1; A_2; \ell\right]$ genişletilmiş matrisin QR çarpanlara ayırma yöntemi ile gerçekleştirilir. QR, çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak her dörtgen matris, bir ortogonal matris çarpımı Q ($Q^TQ=I$) ve bir üst üçgen matris R olarak ifade edilir. Genişletilmiş matrisin QR çarpanlara ayrılması $\left[A_1; A_2; \ell\right] = QR$ şeklinde ya da farklı şekilde

$$Q^T\left[A_1; A_2; \ell\right] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{1b} \\ 0 & R_{22} & R_{2b} \end{bmatrix} \tag{26}$$

ile gerçekleştirilir. Buradaki alt matrislerin boyutları aşağıda verildiği gibidir:

R_{11}=m_1 x m_1

R_{12}=m_1 x m_2

R_{12}=(n-m_1) x m_2

R_{1b}=m_1 x 1

R_{2b}=(n-m_1) x 1

Q matrisi, öklit formu 1'e Frobenius normu ise $\sqrt{n}$ 'ye eşit olan birim uzunluklu sütunlara sahiptir.

Bu karma problemin çözümü iki adımlıdır.

1) Önce parametre vektörü $\hat{dk}_2$, indirgenmiş sistem için Teorem 2 kullanılarak hesaplanır:

$$R_{22}\ dk_2 \cong R_{2b} \tag{27}$$

2) İkinci adım olarak aşağıdaki denklem sistemlerinde, hesaplanan yerine konularak $\hat{dk}_1$ hesaplanır:

$$\boldsymbol{R_{11}}\ \hat{\boldsymbol{dk}}_{1} = \boldsymbol{R_{1b}} - \boldsymbol{R_{12}}\ \hat{\boldsymbol{dk}}_{2} \tag{28}$$

Buraya kadar, karma modelin (model, katsayılar matrisi içinde hem sabit hem de hatalı sütunları içermektedir) TEKK çözümü formüle edilmiştir. Gözlemlerin ve katsayılar matrisinin sütun elemanlarının varyansları arasındaki farklar ihmal edilebilir, öyle ki onların aynı olduğu varsayılır, ancak genellikle gözlem vektörlerinin ve katsayılar matrisi bileşenlerinin varyans değerleri farklıdır. Her iki gerçek göz önünde tutulduğunda "Genelleştirilmiş TEKK (GTEKK)" yöntemi aşağıdaki açıklandığı gibi uygulanır.

nxn boyutlu $\boldsymbol{D}$ matrisi, köşegen gözlem denklemlerinin ağırlık matrisi olsun. $\boldsymbol{C}$, (m_2+1 × m_2+1) köşegen ağırlık matrisidir. Bu matris, $\boldsymbol{A_2}$'nin sütunlarındaki katsayılar matrisi bileşenlerine göre gözlemlerin bağıl doğruluklarını yansıtır. $\boldsymbol{C}$ matrisi kullanılarak $\boldsymbol{A_2}$'nin sütunlarına göre gözlemlerin ağırlıkları belirlenir. Bu tanımlara göre GTEKK yönteminin modeli aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\min_{[e_\ell; E_{A2}]} \left\| \boldsymbol{D}\ [\boldsymbol{E_{A2}}; \boldsymbol{e_\ell}]\ \boldsymbol{C} \right\|_F \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e_\ell} = [\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{E_{A2}}] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{dk}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{dk}}_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

VAN HUFFEL (1991)'de gözlem vektörü ve $\boldsymbol{A_2}$ matris bileşenlerinin dolu varyans-kovaryans matrisine sahip GTEKK problemlerinin çözümü için görece karmaşık bir çözüm verilmesine karşın, jeodezik uygulamalarda kovaryans matrisleri genelde blok-köşegen matrislerdir ve bu özellikten yararlanılarak bilinmeyen parametrelerin hesaplanması için bağımsız verilerle problem GTEKK problemine indirgenebilir.

Hem gözlemler hem de $\boldsymbol{A_2}$ matrisinin elemanları için köşegen ağırlıklar dikkate alındığında, problemin GTEKK çözümü üç adımdan oluşur.

1) $\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{A_2}; \boldsymbol{\ell}]$ genişletilmiş matrisi QR çarpanlarına ayrılır.

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{D}\ [\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{A_2}; \boldsymbol{\ell}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R_{11}} & \boldsymbol{R_{12}} & \boldsymbol{R_{1b}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R_{22}} & \boldsymbol{R_{2b}} \end{bmatrix} \tag{31}$$

2) (31) denkleminin 2'inci satırı kullanılarak, indirgenmiş sistem için klasik TEKK çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[\boldsymbol{R_{22}}; \boldsymbol{R_{2b}}]\,\boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{dk}}_2 \\ -\boldsymbol{\ell} \end{bmatrix} \right) \approx \boldsymbol{0} \tag{32}$$

(32) denkleminin çözümü için, tekrar $[\boldsymbol{R_{22}}; \boldsymbol{R_{2b}}]\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T$ eşitliğinin tekil değer ayrıştırması hesaplanır ve $\hat{\boldsymbol{dk}}_2$ değeri

$$\hat{\boldsymbol{dk}}_2 = -\frac{1}{v_{m_2+1,m_2+1}} \left[v_{1,m+1}, v_{2,m+1}, \ldots, v_{m,m+1} \right]^T \tag{33}$$

ile hesaplanır. Burada,

$\boldsymbol{C}_{1\ldots m_2} = diag(c_1, c_2, \ldots, c_{m_2})$: $\boldsymbol{C}$ matrisindeki ilk m_2 satırdakı (ya da sütun) köşegen terimler

c_{m_2+1} : $\boldsymbol{C}$ matrisinin en sağ (alttaki) köşegen terimidir ki, $\boldsymbol{A_2}$ sütunlarına göre gözlemlerin ağırlığıdır.

3) $\hat{\boldsymbol{dk}}_1$ parametresi, ikinci adımda hesaplanan $\hat{\boldsymbol{dk}}_2$ parametresinin (31) denkleminin ilk satırında yerine konarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\boldsymbol{R_{11}}\ \hat{\boldsymbol{dk}}_1 = \boldsymbol{R_{1b}} - \boldsymbol{R_{12}}\ \hat{\boldsymbol{dk}}_2 \tag{34}$$

ya da daha açık şekli ile

$$\hat{\boldsymbol{dk}}_1 = \boldsymbol{R_{11}}^{-1} (\boldsymbol{R_{1b}} - \boldsymbol{R_{12}}\ \hat{\boldsymbol{dk}}_2) \tag{35}$$

olarak ifade edilebilir.

Burada hem gözlem vektörleri hem de katsayılar matrisi elemanlarının köşegen varyans matrisi üzerine odaklanılmasına karşın, daha karmaşık bir algoritma ile kovaryans matrisli problemler için bir TEKK çözümü bulmak da mümkündür. Burada anlatılan kovaryans matrisi, ağ dengelemesinden elde edilen koordinatlar kümesindeki nokta koordinatlarının kovaryanslarından ziyade [$\boldsymbol{A_2}$; $\boldsymbol{\ell}$] genişletilmiş matrisinin sütunları arasındaki korelasyonu göz önünde bulunduran matristir. Buna ilaveten, her iki koordinat kümesinin kovaryans matrislerini de dikkate alan bir çözüm matematik bilimlerinde dahi henüz geliştirilmemiştir. [$\boldsymbol{A_2}$; $\boldsymbol{\ell}$] genişletilmiş matrisi için kovaryans matrisi, koordinat kümelerinin orijinal kovaryans matrislerinden türetilebilmektedir. Bu çözüm en azından belirli bir aralıkta orijinal kovaryans matrisleri ile arzulanan çözümü temsil edebilir. Öyle ki, bu çalışmada verilen sayısal örnek kovaryans matrislerine bağlıdır, çünkü dengeleme sonrası elde edilen bu matrisler köşegen olarak hayli baskındır ve bu nedenle diyagonal yaklaşım doğruluk kaybına neden olmamaktadır.

(12) denklemi ile tanımlanan değişkenlerdeki genel hata hesabı problemini düşünelim. Buna ilaveten, $\boldsymbol{C}$ matrisinin iki koordinat sistemindeki nokta koordinatlarının kovaryans matrislerinden türetilen [$\boldsymbol{A_2}$; $\boldsymbol{\ell}$] genişletilmiş matrisinin tekil olmayan kovaryans matrisi olduğu düşünülürse, TEKK problemi aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümüdür.

$$\boxed{\begin{aligned} &\min_{[e_\ell; E_{A_2}]} \left\| [\boldsymbol{E}_{A_2}; \boldsymbol{e_\ell}] \cdot \boldsymbol{R}_C^{-1} \right\|_F \\ &\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{e_\ell} = [\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{E}_{A_2}] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{dk}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{dk}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{36}$$

$\boldsymbol{R_C}$: $\boldsymbol{C}$ kovaryans matrisinin Cholesky çarpanlarına ayrılmasından elde edilen üst üçgen matristir ve $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R_C}^T \boldsymbol{R_C}$ eşitliği ile elde edilir. Bu problemin çözümü (13) denklemi ile başlar. QR ile çarpanlarına ayrıldıktan sonra $\boldsymbol{C}$ kovaryans matrisinin Cholesky çarpanlarına ayrılması takip eder. Bu adımda, diyagonal ağırlık matrislerinin dikkate alındığı durumdaki [$\boldsymbol{R}_{22}$; $\boldsymbol{R}_{2b}$]'nin TDA'sı yerine, [$\boldsymbol{R}_{22}$, $\boldsymbol{R}_{C}$] matris çiftinin genelleştirilmiş TDA'sı hesaplanır. Daha sonra, genelleştirilmiş TDA uygulamasından sonra elde edilen indirgenmiş yeni denklem seti (17) ve (18) denklemlerindeki problemlerin bilinmeyenlerini hesaplamak için kullanılır. Ayrıntılı bir tanımlama, VAN HUFFEL ve VANDEWALLE (1991) tarafından verilmektedir.

5. Sayısal Uygulama

EKK ve TEKK göre yapılan çözümlerin sayısal uygulaması amacıyla İstanbul Büyükşehir Belediyesi sınırları içinde kalan Gürpınar Beldesinde yer alan heyelanlı bir bölgede gerçekleştirilen deformasyon ölçme ve analizi çalışmasına ait olan veriler kullanılmıştır. Anılan çalışma kapsamında bölge içinde 13 noktadan oluşan bir deformasyon izleme ağı kurulmuştur. Kontrol noktaları heyelanlı bölgenin dışında kalan ve zemin yapısı sağlam olan yerlerde tesis edilmiştir. Heyelanlı bölgede bulunan deformasyon noktalarının yerleri ise, heyelan bölgesi içinde yapılmış olan zemin yapısı araştırmalarına göre belirlenmiştir. Bu çalışma kapsamında anılan ağda Haziran 1996 ve Mart 1998 yılları arasında gerçekleştirilen 4 kampanyaya ait veriler değerlendirilmiştir.

Öncelikle her periyottaki ölçmeler serbest ağ dengelemesi ile ayrı ayrı dengelenmiş ve varyans-kovaryans matrisleri hesaplanmıştır. Bundan sonra, periyotlar arasında Helmert koordinat dönüşümleri EKK ve TEKK ile gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen dönüşümde her iki sistemde de ortak olarak kullanılan noktalar Tablo 1'de verilmiştir.

GTEKK, aşağıdaki matris ve vektörler bölümlenerek formüle edilmiştir.

A = [$\boldsymbol{A}_1$; $\boldsymbol{A}_2$] olmak üzere,

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}_{n\times3};\boldsymbol{A_2}=\begin{vmatrix}x_1&0&-z_1&y_1\\y_1&z_1&0&-x_1\\z_1&-y_1&x_1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_n&0&-z_n&y_n\\y_n&z_n&0&-x_n\\z_n&-y_n&-x_n&0\end{vmatrix}_{n\times3};\boldsymbol{\beta_1}=\begin{vmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{vmatrix};\boldsymbol{\beta_2}=\begin{vmatrix}(1+\lambda)\\R_x\\R_y\\R_z\end{vmatrix} \quad (37)$$

ve gözlem vektörü aşağıdaki eşitlikle ifade edilir.

$$\boldsymbol{\ell}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & \cdots & X_n & Y_n & Z_n\end{vmatrix} \quad (38)$$

(31) ve (35) ile verilen GTEKK çözümü (37) ve (38) denklemlerinde uygulanır. (31) ve (35) eşitlikleri içerisindeki $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{D}$ olarak verilen varyans kovaryans matrisleri aşağıdaki eşitliklerle ifade edilir.

$$diag\ (\boldsymbol{D})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{X_1X_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{Y_1Y_1} & \boldsymbol{\Sigma}_{Z_1Z_1} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{X_nX_n} & \boldsymbol{\Sigma}_{Y_nY_n} & \boldsymbol{\Sigma}_{Z_nZ_n}\end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{tr(\boldsymbol{\Sigma}_{xyz})}{tr(\boldsymbol{D})} & 0 & 0 & 0 & 0\\ & \frac{tr(\boldsymbol{\Sigma}_{yz})}{tr(\boldsymbol{D})} & 0 & 0 & 0\\ & & \frac{tr(\boldsymbol{\Sigma}_{xz})}{tr(\boldsymbol{D})} & 0 & 0\\ & & & \frac{tr(\boldsymbol{\Sigma}_{xy})}{tr(\boldsymbol{D})} & 0\\ & & & & 1\end{bmatrix} \quad (40)$$

tr (.) : argümanı olan matrisin iz operatörüdür. $\boldsymbol{D}$ matrisinin bileşenleri 2. Sistem Koordinatlarındaki (X, Y, Z sisteminin koordinatları) gözlemlerin kovaryansıdır. Σ_{XYZ}, Σ_{YZ}, Σ_{XZ}, Σ_{XY} sırasıyla dönüşüm yapılan koordinat sistemindeki ortak noktaların dolu ve bölümlere ayrılmış alt varyans-kovaryans matrislerdir. Her iki yöntem çözümü sonucunda elde edilen dönüşüm parametreleri Tablo 2'de verilmiştir. EKK çözümü ile elde edilen dönüştürülmüş koordinatlar Tablo 3a ve GTEKK yöntemi ile bulunan dönüştürülmüş koordinatlar Tablo 3b'de verilmektedir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde her iki yöntemden elde edilen dönüşüm parametreleri oldukça farklı olmasına rağmen elde edilen sonuçların birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bu farklılık, GTEKK yönteminde uygulanan ağırlıklandırma stratejisinden kaynaklanmaktadır. EKK ve GTEKK yöntemleri kullanılarak elde edilen dönüştürülmüş koordinatlar arasındaki farklar Tablo 4'te verilmektedir. Koordinat farkları bazı noktalarda 1 cm'ye kadar değişmektedir. Bu büyüklükteki farklar, köprü, baraj ve büyük mühendislik yapılarındaki deformasyon izleme çalışmalarında önem taşımaktadır.

Tablo 1: Her iki sistemde koordinatı bilinen noktalar

Nokta	1. Sistem Koordinatları			2. Sistem Koordinatları		
No	x (m)	y (m)	z (m)	X (m)	Y (m)	Z(m)
3	4233187.8633	2308228.6927	4161469.1296	4233187.8344	2308228.6785	4161469.1229
185	4233190.6241	2308518.3296	4161336.2783	4233190.6059	2308518.3249	4161336.2582
2796	4233429.0995	2307875.2234	4161292.4023	4233429.1004	2307875.2240	4161292.4034
2996	4233259.8255	2307712.2949	4161553.4918	4233259.8205	2307712.3025	4161553.4880
5005	4233770.4576	2308340.5190	4160740.3186	4233770.4580	2308340.5240	4160740.3286

Tablo 2: EKK ve TEKK yöntemleri ile elde edilen koordinat dönüşüm parametreleri

	EKK	**GTEKK**
Tx	257.49230000	243.7681307
Ty	-197.42660000	-122.3680243
Tz	-106.36520000	-163.0632509
K	0.99999527	0.999998249
Alfa	0.00001473	0.00000118
Beta	0.00003780	0.00004088
Gama	-0.00003474	-0.00002870

Tablo 3a**:** EKK yöntemi ile elde edilen koordinatlar

	EKK yöntemi ile Dönüştürülmüş Koordinatlar			**Koordinat Farkları**		
Nokta No	**X (m)**	**Y (m)**	**Z (m)**	**dx (m)**	**dy (m)**	**dz (m)**
4	4233377.6316	2308363.2543	4161191.9469	-0.0048	-0.0066	-0.0037
9	4233224.8264	2307823.5146	4161590.8881	0.0248	-0.0026	-0.0228
1296	4233289.4694	2308332.2419	4161303.0125	-0.0002	-0.0012	0.0020
1896	4233317.6697	2308237.1954	4161294.4017	-0.0174	0.0344	0.0430
1996	4233368.3300	2308087.0599	4161292.5095	-0.2706	0.2172	0.2188
2296	4233140.8771	2307879.7376	4161660.1923	-0.0051	0.0003	0.0090
2396	4233420.0659	2307995.6235	4161257.6143	-0.5213	0.4381	0.2404
2496	4233323.2628	2307939.9228	4161415.4971	-0.3025	0.2734	0.2408

Tablo 3b: TEKK yöntemi ile elde edilen koordinatlar

	TEKK yöntemi ile Dönüştürülmüş Koordinatlar			**Koordinat Farkları**		
Nokta No	**X (m)**	**Y (m)**	**Z (m)**	**dx (m)**	**dy (m)**	**dz (m)**
4	4233377.6306	2308363.2526	4161191.9499	-0.0058	-0.0083	-0.0007
9	4233224.8204	2307823.5068	4161590.8845	0.0188	-0.0104	-0.0264
1296	4233289.4676	2308332.2392	4161303.0151	-0.0020	-0.0039	0.0046
1896	4233317.6674	2308237.1923	4161294.4031	-0.0197	0.0313	0.0444
1996	4233368.3269	2308087.0561	4161292.5090	-0.2737	0.2134	0.2183
2296	4233140.8710	2307879.7295	4161660.1894	-0.0112	-0.0078	0.0061
2396	4233420.0626	2307995.6196	4161257.6126	-0.5246	0.4342	0.2387
2496	4233323.2584	2307939.9172	4161415.4949	-0.3069	0.2678	0.2386

Tablo 4: GTEEK ve EKK ile dönüşüm sonucu elde edilen koordinatlar arasındaki farklar

Nokta No	**dx (m)**	**dy (m)**	**dz (m)**
4	0.0011	0.0017	-0.0030
9	0.0060	0.0078	0.0036
1296	0.0018	0.0028	-0.0026
1896	0.0023	0.0031	-0.0014
1996	0.0031	0.0038	0.0005
2296	0.0061	0.0081	0.0029
2396	0.0033	0.0039	0.0017
2496	0.0045	0.0057	0.0022

6. Sonuçlar

Lineer kestirim problemlerini çözmek için kullanılan geleneksel teknikler klasik EKK yöntemini temel alır. $L1$ normlu bazı robust yöntemleri var olmasına rağmen, EKK ve robust kestirim teknikleri sadece gözlem vektörlerinin hata yüklü olduklarını varsayar. Yine de bu yaklaşım her durumda geçerli değildir. Öyle bir probleme örnek, koordinat dönüşümüdür. Özellikle, deformasyon ölçmelerinde, izleme ağı noktalarının koordinatları her ölçme kampanyası kendi gözlem kümeleri kullanılarak bağımsız olarak hesaplanır. Her ölçme kampanyası bağımsız olarak değerlendirilir ve genellikle serbest ağ dengelemesi ile dengeleme yapılır. Bu nedenle, noktaların dengelenmiş koordinatları ve kovaryans matrisleri elde edilir. Koordinat kümeleri arasındaki koordinat dönüşümü dikkate alındığında gözlemler ve kısmen dönüşümün katsayılar matrisinin hatalı olduğu görülür. Bu problem için çözüm yollarından biri; dönüşüm parametrelerinin kestirimi için TEKK yönteminin kullanılmasıdır. TEKK yöntemi ile hatalı katsayılar matrisi ve ayrıca hesaplamalarda varyans bilgileri göz önüne alınır.

Benzerlik dönüşümü olarak isimlendirilen geleneksel yaklaşımla karşılaştırma yapmak için aynı veri kümesi üzerinde uygulama yapılmıştır. TEKK ve EKK'leri kullanarak kestirilen parametrelerdeki büyük fark, hatalar ve katsayılar matrisinin içerdiği noktaların koordinatlarının kovaryansından gelir. Bu nedenle farkın büyük bölümü her iki sistem koordinatlarının farklı kovaryansları yüzündendir ki, katsayılar matrisinin hatalı sütunları ve gözlem vektörü arasında bağıl ölçeklendirme de yaratır. Böylece, bir Helmert dönüşüm probleminin dönüşüm parametreleri eşlenik noktaların koordinatlarının doğruluğuna oldukça duyarlı olduğu sonucunu çıkarabilir. EKK ve TEKK çözümü arasında dönüşümle elde edilen obje noktalarının koordinat farkları santimetre seviyesindedir. Bu farklar, büyük deplasmanların olduğu çalışma alanlarında çok önemli olmamasına rağmen, bu seviyedeki farklar küçük değişimlerin kritik öneme sahip olduğu baraj ve mühendislik yapıları gibi durumlarda önemli bir role sahiptir.

Son olarak, EKK modelindeki belirsizlikleri azaltmak için jeodezik deformasyon analiz çalışmalarında uygulanmak üzere TEKK kestirimi tekniği önerilmektedir.

Kaynaklar

ACAR M., ÖZLÜDEMİR M.T., AKYILMAZ O., ÇELİK R.N. ve AYAN T.: **Deformation analysis with Total Least Squares**, Natural Hazards and Earth System Sciences, n.6 (2006), p.663–670.

AKYILMAZ O.: **Total Least Squares solution of coordinate transformation**, Survey Review, v.39, n.303 (2007), p.68–80.

AYAN T.: **Matematik istatistik ve hipotez testleri**, Lisansüstü ders notları, İstanbul Teknik Üniversitesi, 1981.

AYAN T.: **Dengeleme hesabı**, Lisans ders notları, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2001.

FELUS Y.: **Application of Total Least Squares for spatial point process analysis**, Journal of Surveying Engineering, v. 130, n. 3 (2004), p.126-133.

GOLUB H.G. ve LOAN F.C.: **An analysis of the Total Least Squares problem**, SIAM Journal of Numerical Analysis, v. 17, n. 6 (1980), p.883-893.

KOCH K.R.: **Parameter estimation and hypothesis testing in linear models**, 2nd Ed., Springer, ISBN-13: 978-3540652571, Berlin, 1999.

LEON S.: **Linear algebra with applications**, 6th Ed., Prentice Hall, ISBN-13: 978-0130337832, New Jersey, ABD, 2002

MARKOVSKY I., VAN HUFFEL S. ve KUKUSH A.: **On the computation of the multivariate structured Total Least Squares estimator**, Numerical Linear Algebra with Applications, n. 11 (2004), p. 591-608.

VAN HUFFEL S.: **The generalized Total Least Squares problem: formulation, algorithm and properties**, In: Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms, G. H. Golub and P. V. Dooren (Eds.), NATO ASI Series F No. 70, Springer, ISBN-13: 978-0387523002, Berlin, 1991.

VAN HUFFEL S. ve VANDEWALLE J.: **The Total Least Squares problem: computational aspects and analysis**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), ISBN-13: 978-0-898712-75-9, Philadelphia, ABD, 1991.

WOLF R.P. ve GHILANI D.C.: **Adjustment computations: statistics and least squares in surveying and GIS**, Wiley, ISBN-13: 978-0471168331, New York, ABD, 1997.