Öneri, C:1 S:1
Haziran 1994, S:125-130

MARKOV SÜREÇLERİ

Arş. Gör.Ömer ÖNALAN*

1.GİRİŞ

İhtimaller teorisinin erken dönemlerinde daha çok bağımsızlık ve onun sonuçları üzerinde çalışılmıştır. Bağımsızlık, ihtimaller teorisini Analiz ve ölçü teorisindenayıran bir kavramdır. Eğer her $n \in N$ve R'nin her $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ Borel alt cümleleri için aşağıdaki eşitlik gerçekleniyorsa, $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ tesadüfi değişkenlerine bağımsızdır denir.

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}\right\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in A_i\} \qquad (1.1)$$

Stokostik süreçler teorisi, tesadüfi değişkenler arasındaki geçici ilişkiler ve bağımsızlık esasına dayanmaktadır. Buna göre stokastik süreçlerin dört büyük tipini karakterize edip bunlardan markov süreçleri üzerinde durulacaktır.

TANIM: Bir tesadüfi süreç, hepsi aynı ihtimal uzayı üzerinde tanımlanmış tesadüfi değişkenlerin bir topluluğudur.

TANIM: Parametre uzayının herhani bir $(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)$ alt cümlesi ve $h>0$ verilmiş olsun. Eğer

$X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3},\ldots,X_{t_n}$ ve $X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h},\ldots,X_{t_n+h}$ aynı bileşik dağılıma sahip ise sürece **kesinlikle durağandır** denir.

Durağanlık, sürecin ihtimal kuralına veya onun birinci ve ikinci moment yapısına göre değişmezdir.

Durağan süreç çalışmaları Fourier analizinin probablistik bir benzeridir. (9)

TANIM: En basit durumda aşağıdaki eşitliği sağlayan sonlu ortalamalara sahip tesadüfi değişkenlerin bir $X=\{X_n:e=0,1,\ldots\}$dizisi bir **martingale**'dir.

$E[X_{n+1}| X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n]=X_n \quad n=0,1,2,\ldots$,için (1.2)

Çok genel olarak her $n \in N$ için aşağıdaki koşulları sağlayan X süreci bir **martingaledir**.

i) $X_n,\mathcal{H}_n$ ölçülebilir.

ii) $E[|X_n|]<\infty$

iii) $E[X_{n+1}|\mathcal{H}_n]=X_n$ $\{\mathcal{H}_n:n\geq 0\}$, temel ihtimal uzayı üzerindeki σ-cebirlerinin artan bir ailesi

Bugün martingale teori kumar problemlerinde ileri düzeyde bir teknik olması yanında ihtimaller teorisi ve stokostik modellemede temel bir araçtır.

Martingale teori; Emilme ihtimallerinin hesaplanmasında, stokastik süreçler için eşitsizliklerin türetilmesinde, sürekli parametreli markov prosesinin eğri yapısının analizinde, kuyruk ve öteki uygulamamalarda ortaya çıkan nokta süreçlerinin tanımlanması ve kurulmasında kullanılır.

TANIM: Her n ve herbir A cümlesi için aşağıdaki koşul gerçekleniyorsa X dizisine markov süreci denir.

$P\{X_{n+1} \in A|X_0,X_1,\ldots,X_n\} = P\{X_{n+1} \in A|X_n\}$ (1.3)

(1.3) koşulu markov özelliği olarak bilinir.

Bu özellik iddia ederki; sürecin şu anki durumu X_n verildiğinde X_0, $X_1,\ldots,X_{n-1}$ geçmişi ve $X_{n+1},X_{n+2},\ldots$ geleceği şartı bağımsızdır.

(1.3) özelliği çok geneldir. Her zaman geçici homojenlik şartını içinde bulundurur.

$P\{X_{n+1} \in A|X_n=P(X_n,A)$ (1.4)

olmak üzere P(.,.)ye geçiş çekirdeği denir.

Parametre uzayının sürekli olması durumunda $X=\{X:t\leq 0\}$ sürecini düşüneceğiz. Her $s\geq 0$ ve $t \geq 0$ için aşağıdaki koşulu sağlayan X sürecine sürekli parametreli markov süreci denir.

$P\{X_{t+s} \in A|X_u:u\leq t\}=P\{X_{t+s} \in A|X_t\}$ (1.5)

ve homogendir eğer

$P\{X_{t+s} \in A|X_t\}=P_s(X_t ,A\}$ (1.6)

* Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü

Koşulu gerçekleşiyorsa, P(.,.)'ye geçiş fonksiyonu denir. Sürecin örneklem eğrilerinin sağ sürekli olduğunu kabul ediyoruz. Yani süreksizlikler sadece sıçrama noktalarındadır.

Geçmişin süreç üzerindeki etkisizliği; morkov özelliğini sağlayan tesadüfi zaman (random time)'larla da gösterilebilir. Tesadüfi zaman; N=0,1,2,... cümlesinde değerler olan bir T tesadüfi değişkendir.

TANIM:Her n için $\{T \leq n\}$ olayı $X_0, X_1, \ldots X_n$ ile belirlenebiliyorsa, T tesadüfi zamanı süreci için bir **durma zamanıdır**.

Kesikli durumda sabit zamanlar durma zamanlarıdır. Morkov özelliğinin durma zamanları için geçerli olması güçlü morkov özelliği olarak bilinir.

2. MARKOV ZİNCİRLERİ

Sonlu ya da sayılabilir S durum uzayı ile kesikli parametreli bir X markov sürecine markov zinciri denir.

Markov zincirinin, satırları ve sütunları S'nin elemanları ile indislenmiş bir P geçiş matrisi vardır.

$$P(i,A) = \sum_{j \in A} P(i,j) \qquad (2.1)$$

X'in ihtimal kuralı $P(i) = P\{x_0 = i\}$ başlangıç dağılımı ve P geçiş matrisi ile tam olarak belirlenebilir.

Geçiş matrisinin iki temel özelliği; her $i,j \in S$ için $P(i,j) \geq 0$ ve her i için $\sum_{j \in A} P(i,j) = 1$ olmasıdır.

Her $i,j,k \in S$ ve $n,m \in N$ için

$P_i\{X_{n+1} = k | X_0, X_1, \ldots, X_n = j\} = P(j,k) = P_j\{X_1 = k\}$ 'ye bir adım geçiş matrisi denir.

$P_i\{X_{n+m} = k | X_0, \ldots, X_n = j\} = P^m(j,k)$ (2.2)

'ye ise **m-adım geçiş matrisi** denir.

Çok genel olarak ,

$$P^{m+n}(i,j) = \sum_{k \in s} P^m(i,k) P^n(k,j) \qquad (2.3)$$

(2.3) eşitliğine **Chapman -Kolmgorov** denklemi denir

Durumların sınıflandırılması markov zincirileri için temel problemlerden birdir.

$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$ j durumuna ilk dönüş zamanı ve

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = j\}$$

olmak üzere

TANIM: a) $R(i,j) = E_i[|N|_j]$ X'in **potansiyel matrisi**'dir.

b) $F(i,j) = P_i\{T_n < \infty\}$, X'in hitting matrisi

Bunlar arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir.

$$R(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(i,j) \qquad P^0(i,j) = 1\{i=j\} \qquad (2.4)$$

$R(i,j) = F(i,j)\, R(j,j)$ $i \neq j$ için (2.5)

$R(j,j) = 1 / [1 - F(j,j)]$ (2.6)

TANIM:Bir j durumu,

a) geçişlidir. Eğer $R(j,j) < \infty$ ise, $(F(j,j) < 1)$

b) yeniden oluşumludur. Eğer $R(j,j) = \infty$ ise, $(F(j,j) = 1)$

TANIM: $E_j[T_j] = \infty$ ise, j durumu etkisiz yeniden oluşumludur.

Herhangi bir i durumundan diğer bir j durumuna herhangi bir adım sonunda ulaşmak mümkünse X'e **indirgenemez markov zinciri** denir.

İndirgenemez markov zincirinde bütün durumlar aynı türdendir.

Kendisi ile kapalı bir cümle teşkil eden duruma emici durum denir.

Sonlu durum uzayı ile indirgenemez bir markov zincirinin bütün durumları pozitif yeniden oluşumludur.

$P_j\{T_j$ δ nun bir tamsayı katı$\} = 1$ (2.7)

ise j durumu $\delta \geq 2$ ile periyodiktir. Aksi takdird J periyodik değildir j pozitif yeniden oluşumlu periyodik olmayan bir durum olsun. O zaman $\pi(j) = 1 / E_j[T_j]$ koşulunu sağlayan $\pi(j) = \lim_{n\to\infty} P^n(j,j)$ Lİmit ihtimali vardır.

X' P geçiş matrisi ile pozitif yeniden oluşumlu, periyodik olmayan bir markov zinciri ve π de yukarıda tanımlandığı gibi olsun. O zaman her i,j için X'in aşağıdaki şekilde tanımlanan π, limit dağılımı vardır.

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \pi(j) \tag{2.8}$$

n'in büyük değerleri için sürecin fonksiyoneller toplamının noırmal dağıldığı gösteilebilir. (1)

3.MARKOV SÜREÇLERİ:

$X=\{X_t: t\geq 0\}$ sonlu yada sayılabilir S durum uzayı ile bir markov süreci olsun. $P_t(i,j) = P_i\{X_t=j\}$, X'in aşağıdaki markov özelliğini sağlayan geçiş fonksiyonları topluluğudur.

$$P_i\{X_{t+s}=j|X_u:u\leq t\}=P_s(X_t,j) \tag{3.1}$$

$P_0=$ I olmak üzere her bir P_t bir markov matrisidir.
Chopman-Kolmogrov denklemi,

$$P_{t+s}(i,j) = \sum_{k\in S} P_t(i,k)\, P_s(k,j) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır.
Markov sürecinin yapısı:

A) Her i durumu için $\lambda(i) \in [0, \infty)$ vardır.

$$P_i.\{X_u = i, \text{ tüm } u \in [0,t] \text{ için}\} = P_i\{T_1>t\}= e^{-\lambda(i)t} \tag{3.3}$$

B) $i\neq j$ için $Q(i,j) = P_i\{X_{T_1}=j\}$ geçiş matrisi ile $Y=\{Y_n : n\geq 0\}$ dizisi bir markov zinciridir.

C) Her n ve i için,

$$P_i\{Y_{n+1}=k, T_{n+1}-T_n \leq t \mid X_u: u\leq T_n\} = Q(Y_n,k)[1-e^{-\lambda(Y_n)t}] \tag{3.4}$$

Y markov zincirine, **embedded markov zinciri** denir. Bu zincirin geçiş matrisi her i durumu için Q(i,i), ya 1 ya da 0 olmaktadır.

Tüm i durumları $P_i\{\sup_n T_n = \infty\}=1$ oluyorsa, X markov sürecine düzenlidir denir.
Embedded markov zincirinin tüm durumları yeniden oluşumlu ise X düzenlidir.
Markov sürecinin durumlarının sınıflandırılması embedded markov zincirine göre yapılmaktadır. (9)
Periyodiklik markov süreçlerinde tartışılan birkonu değildir.
X, $\lambda(i)$ ve Q (i,j) ile bir markov süreci olsun.

i) Her i,j için t------>P_t (i,j) sürekli türetilebilir ve aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$P_0^1(i,j) = \begin{cases} -\lambda(i) & i=j \text{ için} \\ \lambda(i)\; Q(i,j) & i\neq j \text{ için} \end{cases} \tag{3.5}$$

ii) $A = P_0^1$ ile geçiş fonksiyonu aşağıdaki ileriye ve geriye doğru olan kolmogorov denklemlerini sağlar.

$$P_t^1 = P_t A \tag{3.6}$$

ve

$$P_t^1 = A P_t \tag{3.7}$$

daha fazla bilgi için Bhattacharya (1)'e bakılabilir.

$k \neq j$ için A (k,j), X 'in k'dan J'ye geçiş oranı olmak üzere

Her i için $A(i,i) \leq 0$

$i \neq j$ için $A(i,j) \geq 0$

Her i için $\sum_{j \in s} A(i,j) = 0$ olur.

Düzenli X markov süreci için

$$P_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n / n! \tag{3.8}$$

geriye doğru denklemin $P_0 = I$ koşulunu sağlayan tek çözümdür. (1)

X indirgenemez ve yeniden oluşumlu olsun o zaman :

a) Başlangıç durumundan bağımsız limitler vardır.

$$\pi(j) = \lim_{t \to \infty} P(i,j) \tag{3,9}$$

b) ya $\pi \equiv 0$ ya da $\sum_{j \in s} \pi(j) = 1$ dir.

Bir indirgenemez yeniden oluşumlu markov sürecinde $\pi \equiv 0$ ise tüm durumlar etkisiz yeniden oluşumlu, $\sum_{j \in s} \pi(j) = 1$ ise tüm durumlar pozitif yeniden oluşumludur.

X,A infizitimal geçiş matrisi ile indirgenemez, pozitif yeniden oluşumlu markov süreci olsun. O zaman π limit dağılımı S üzerinde aşağıdaki lineer denklemi sağlayan tek ihtimal dağılımıdır.

$$\sum_{j \in s} \pi(i) A(i,j) = 0 , j \in s \tag{3.10}$$

Şimdi de markov süreciyle olan ilişkisinden dolayı kısaca diffizyon süreci, wiener süreci ve markov tesadüfi cismi üzerinde durulacaktır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir reel değerli X sürecine diffizyon süreci denir.

i) $t \to X_t$ (w) örneklem eğrileri süreklidir.

ii) X güçlü markov sürecidir.

Temel difizyon süreci **wiener süreci** 'dir.(Brownian Motion) öte yandan wiener süreci de Gaussian sürecin özel bir durumudur.

Her n tamsayı ve parametre cümlesinin herjhangi bir $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ alt cümlesi için $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ tesadüfi değişkenleri bileşik normal dağılmışlar ise $\{X_t : t \in T\}$ sürecine Gaussian (normal) süreç denir. Bir parçacığın bir doğru boyunca olan hareketi düşünüldüğünde, N (t), t zamanındaki çarpışmların sayısı ve Y_n, n. çarpışma neticesinde parçacığın pozisyonndaki değişmeyi göstermek üzere; $X_t = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$, t-zamanında parçacığın pozisyonunu gösterir $\{X_t : T > 0\}$ durağan bağımsız ortalamalarla bir stokastik süreçtir.

Wiener süreci $E[X_t] = 0$ ile, Gaussian sürecin özel bir durumudur (13)

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $W = \{W_t : t \geq 0\}$ Wienersüreci bir diffizyon sürecidir.

i) $W_0 = 0$;

ii) W bağımsız ve durağan artmalara sahip

iii) Her t için W O-ortalamalı t-varyanslı bir normal dağılıma sahiptir.

4. MARKOV TESADÜFİ CİSİMLERİ

Çok boyutlu bir parametre cümlesine sahip stokastik süreçler, genellikle tesadüfi cisimler olarak bilinirler.

Yüksek boyutlarda çalışmak için bir boyutlu parametre cümlesindeki zaman yerine uzaysal komşuluk kavramı alınır.G, V köşe ve E kenar kümeleri ile bir grafik olsun. Bir köşeden tekrar kendisine dönen bir kenarın olmadığı kabul edilsin. α ve β'yı birleştiren bir kenar varsa α ve β'ya komşu köşeler denir. α'nın komşulukları cümlesi $N_\alpha = \{\beta : \{\alpha, \beta\} \in E\}$ ile gösterilir. Ayrıca $\beta \in N_\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in N_\beta$ olmasıdır.

G'nin köşeleri ile indislenen bir uzaysal parametre cümlesine sahip bir $X=\{X_\alpha : \alpha \in V\}$ stokastik sürecine G üzerinde bir tesadüfi cisim denir.

Her $\alpha \in V$ ve $i \in S$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan S durum uzayına sahiğ bir tesadüfi X cismine G'ye göre bir markov tesadüfi cismi denir.

$$P\{X_\alpha = i | X_\beta : \beta \neq \alpha\} = P\{X_\alpha = i | X_\beta : \beta \in N_\alpha\} \tag{4.1}$$

Öte yandan markov tesadüfi cisimleri ve Gibbs dağılımları denk kavramlardır. Markov tesadüfi cisimleri ve markov sincirleri arasındaki en temel fark bir markov tesadüfi cisminin ihtimal kuralının lokal karakteristikler tarafından her zaman belirlenemeyişidir.(9)

SONUÇ

Her teorik disiplin, kendi amaçları doğrultusunda hızla gelişmektedir. Son gelişmelerden sadece konu ile ilgilenen belli sayıda uzman faydalanabilmektedir. Bu nedenle, yeni metod ve teknikleri öğrenip kullnamak uzman olmayanlar için zor olmaktadır. Bu ise markov sürecini yenileyici süreçler, martingale, stokastik denklemler ve öteki alanlardan üstün kılan bir durumdur.

Yukarıdaki nedenler ve markov süreçlerinin stokastik süreçler teorisi içindeki önemi de dikkate alınarak, önce kesikli parametreli markov zinciri sonra da, sürekli parametreli markov zincirleri üzerinde durulmuştur. Son olarak markov süreçleri ile ilgisinden dolyaı diffüzyon süreçleri wiener süreçleri , Gaussian süreçleri ve markov tesadüfi cismi üzerinde tanım düzeyinde durulmuştur.

Kaynaklar

(1) Bhattacharya, R.N., Waymire, E.,C.; (1990) Stochastic Processes with Applications, John Wiley Sons, inc., Canada

(2) ÇINLAR, E.; (1975) Introduction to Stochoctic Processes, Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs , New Jersey

(3) Daley, D.J., Jones ; (1988) An introduction to yhe Theory of Point Processes, Springer-Verlag, New York

(4) Eckmann B. (Editor) ; (1967) Symposium on Probability Methods in Analysis, Sums of Markov-Chains on finite Semigroups Springer-Verlag, Heidelberg

(5) Gani, J., TIN, P.; (1985) On aclass of Continuous - Time Markov Processes, J. Appl.Prob., 22, 804-805

(6) Glasserman, P.; (1992) Processes with Associated increments, J.Appl. Prob., 29, 313-333

(7) Grassmann, W., R.; (1990) Heyman, D., P., Sobel, M., J., (eds) Stochastic models, Compulational Metods in Probability Theory, Elsevier Science Publishers B.V.

(8) Heyman, D., P.; (1991) Appaximating The Stationary Distribution of an infinite Stochastic Matrix,J.Appl.Prob. 28,95-103

(9) Karr, A., F,; (1990) Heyman D.P., Sobel, M., J., (eds) Stochastic models,Markov Processes,Elsevier Science Publisher

(10) Krieger, U., R., Müller, B.; (1990) Modelling and Analysis of Communi cotson systems Based on Compulational Methods for Markov Chains, İEEE J. on Selected areas in Communications vol.8, No:9

(11) Meyer, P., A.; (1972) Martingales and Stochastic integrals I, Springer-Verlag, Heidelberg

(12) Rosenlung, S.,I.; (1981) Markov Chains in Small Time İntervels J. Appl. Prob. 18, 747-751

(13) Saaty.T., L., Alexander,J.,M. ; Thinking with Models Wheoton of Co. Ltd., Exeter s.79-99

(14) Serfozo, R., F.; (1990) Heyman, D.P., Sobel,M., J., Stochastic models,Point Process,Elsevier Science Publishers b.v.

(15) Syski, R. ; (1988) Boxmo, O.J.,Syski,R.(eds) Queueing Theory and its Applications Markov Processes and Teletraffic ,Elsevier Science Publishers B.V.

(16) Taylor, H.M.; (1990) Heyman D.P., Sobel,M.J., (eds) Stochastic models, Martingales and Random Walks, Elsevier Science Publishers B.V.

(17) TJOSTITEIM, D.; (1990) Nonlinear Time series and Markov Chains, Adv.Appl.Prob. 22, 587-611

(18) WONG, E., ZEKAİ, M. ; (1985) Markov Processes on Plane,Stochastics vol. 15, 311-333