Sonlu Elemanlar Yönteminin Dönüşümlerde Kullanılması

Murat Selim ÇEPNİ[1], Rasim DENİZ[2]

Özet

Uluslararası referans sistemleri ve bu sistemleri kullanan gelişmiş uydu bazlı ölçme yöntemlerinin, tüm jeodezik uygulamalarda daha verimli bir şekilde kullanılabilmeleri için, istenilen nitelikleri sağlayabilecek dönüşüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bir koordinat dönüşümünden, doğruluk gereksinimlerini karşılamasının yanı sıra süreksizliklere yol açmaması, dayanak noktalarına düzeltme getirmemesi ve otomasyona uygun olması beklenmektedir. Özellikle, büyük alanları kapsayan jeodezik dönüşüm uygulamalarında süreklilik problemleri önemli bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu makalede dönüşümlerdeki süreklilik problemi irdelenmekte ve büyük alanlarda yetersiz kalan geometrik dönüşüm yöntemleri yerine sonlu elemanlar yaklaşımını temel alan modeller önerilmektedir.

Çalışmanın ana amacı jeodezik dönüşümlere sonlu elemanlar yöntemiyle farklı bir çözüm bulunabilmesiydi. Bu amaçla kurulan matematik modeller için bir yazılım geliştirilmiş ve gerçek bir jeodezik ağ üzerinde test edilmiştir. Sonuçlar, bu yöntemin bu alandaki kullanılabileceğini göstermektedir. Sonuçlar incelendiğinde süreklilik ile ilgili olarak istenen değerlerin elde edilebildiği görülmüştür. Ayrıca, üçgen elemanlar ile dönüşümün kesin değerinin enterpolasyonunda yüksek doğruluklara ulaşılabilmektedir.

Anahtar Sözcükler
Sonlu elemanlar, dönüşümler, parçalı tanımlı fonksiyonlar, üçgen elemanlar

Abstract

The Use Finite Elements Method in Transformations

In order to employ global reference frames and advanced space based measurement techniques more efficiently in geodetic applications, transformation methods that meet the expected requirements are needed. What is expected from a transformation is that it should meet the required accuracy, result in no discontinuity and no corrections for common points and it should be suitable for automation processes. In geodetic transformation applications in larger areas uncertainity is an important problem taking place. In this paper, uncertainity problems in transformation processes is investigated and suggested the models based on finite elements approach rather than geometric transformation methods that are insufficient in larger areas.

The main objective of this study was to find out a different solution for geodetic transformations using finite elements methods. For this purpose, a computer software for the created mathematical models have been developed and tested on a real geodetic network. The results show that this method can be applied in this field. When the results are analysed, it is seen that the required values regarding continuity can be obtained. In addition high accuracies can be achieved in the interpolation of absolute values transformation with triangular elements.

Key Words
Finite elements, transformations, piecewise defined trial functions, triangular elements

[1] Dr. Müh. TKGM, İstanbul
[2] Prof. Dr., İTÜ, İnşaat Fak. Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, İstanbul

1. Giriş

Günümüzde yüksek bilgi birikimi ve teknoloji kullanımı gerektiren mühendislik projelerinin uygulamaya geçirilmesi, bu uygulamalara altlık oluşturacak jeodezik ağların da beklentilere cevap verebilecek biçimde tesis edilmesini gerektirmektedir. Mekansal verileri kullanan bilgi ve yönetim sistemlerinde, konum bilgisinin kalitesini ifade eden doğruluk ve güvenilirlik, jeodezik altyapıya bağlı kavramlardır. Jeodezik ağların oluşturduğu jeodezik altyapının; ağın doğruluk ve güven ölçütlerine göre yüksek standartlı olmasının yanı sıra tek anlamlı, sürekli ve distorsiyonsuz (ölçek ve doğrultu sapmaları bulunmayan) olması da kalite kavramı ile birebir ilişkilidir. Uydu ve uzay sistemlerinin gelişimi ile bu tekniklerin kullanımı sonucu oluşturulan küresel, bölgesel ve ulusal GPS ağları, üç boyutlu, doğru, güvenilir ve distorsiyonsuz ağlar olarak jeodezinin beklediği doğrulukları sağlayan, noktalarına ait hız vektörlerinin belirlendiği dinamik ağlardır. Ancak, geleneksel olarak yapılandırılan, farklı yatay ve düşey datumlara dayalı ülke jeodezik ağları da varlığını sürdürmektedir ve var olan coğrafik bilginin büyük bir bölümü bu ağlara dayalı olarak üretilmiştir. O halde, mevcut veriden bir süre daha yararlanılması gerekliliği vardır. Bu nedenle, uzay ve uydu teknikleriyle oluşturulan üç boyutlu ağlar ile geleneksel yatay ve düşey ağlar arasındaki presizyonlu dönüşüm uygulamaları önem taşımaktadır.

Bir koordinat dönüşümünden beklenen niteliklerin başında doğruluk gelir. İki farklı datumda hesaplanan koordinatlar arasındaki dönüşümün doğruluğu;

- Her iki datumdaki ağların doğruluklarına ve distorsiyonlarına,
- Dönüşümde kullanılacak ortak nokta yoğunluğuna ve bu noktaların dağılımına,
- Dönüşüm yapılan alanın büyüklüğüne,
- Kullanılan dönüşüm modeline

bağlıdır. Bir başka önemli beklenti ise dönüşümün sürekliliğidir ve bu makalenin başlıca araştırma konusunu süreklilik problemi oluşturmaktadır. Dönüşüm yönteminin, dayanak noktalarına düzeltme getirmemesi de istenilmektedir.

Jeodezik bir ağda seçilen veya hesaplanan dış parametrelerin yani datum bilinmeyenlerinin ağdaki noktaların konum değerlerine etkisi o jeodezik ağın doğruluğunu belirleyen en önemli etmenlerdendir. Bağıl veya iç doğruluk ne denli yüksek olursa olsun, datum bilinmeyenleri gibi ağa ait dış parametrelerin sağlıklı olarak elde edilemediği durumlarda mutlak anlamda bir doğruluktan söz etmek mümkün olmaz. Yani, jeodezik ağların mutlak doğruluğu içinde dönüşüm yönteminin seçimi ve başarısı, ölçme yönteminin hassasiyeti kadar önemli bir yer tutar.

Genel olarak dönüşüm yöntemleri,

1. Geometrik dönüşüm yöntemleri (iki veya üç boyutlu)
   - Afin dönüşümü
   - Konform (Benzerlik) dönüşümü (Helmert, Bursa-Wolf, Molodensky Badekas, Weiss vb. modeller)
2. İki parametreli polinomlarla dönüşüm
3. Enterpolasyon yöntemleriyle dönüşüm
4. Sonlu elemanlar yöntemiyle dönüşüm

şeklinde sınıflandırılabilir.

Geometrik tabanlı dönüşümler küçük alanlar için yeterli çözümleri sağlayabilirler. Ancak, büyük alanlar söz konusu olduğunda geleneksel ağlardaki ölçek ve doğrultu sapmalarından kaynaklanan bozulmalardan dolayı geometrik dönüşüm yöntemlerinin sağladığı doğruluk azalmaktadır. Geometrik tabanlı dönüşüm yöntemlerinin büyük alanlarda da kullanılabilmesi için alanın küçük parçalara ayrılması halinde ise süreksizlikler ortaya çıkar. Bu nedenle, büyük alanlarda geometrik tabanlı dönüşüm yöntemlerinin kullanılması istenen sonuçları vermez. Ülke ağımız da distorsiyonlu bir yapıya sahip olduğundan, benzerlik dönüşümünde ortak alınan noktalar arasında sistematik uyuşumsuzluklar çıkmakta, farklı nokta grupları farklı davranışlar göstermekte ve alan büyüdükçe tüm noktaları içine alan bir geometrik dönüşümün yapılması mümkün olamamaktadır.

İki değişkenli polinomlar kullanılarak yapılan dönüşümlerde geometrik dönüşümlere oranla daha iyi sonuçlar alınabilmektedir (İGNA 1999). Ancak, çalışma alanlarının büyük olması durumunda iki değişkenli polinomların da dönüşüm için gerekli modellemeyi tam olarak yapabilmesi çok zordur. Tüm çalışma alanının tek bir eğri ile ifade edilmesi yeterli doğruluğu sağlayamamaktadır. Daha iyi modelleme için eğrinin derecesinin yüksek seçilmesi, gerçek olmayan eğilme ve bükülmeler meydana getirerek gerçek modelden sapmaya yol açabilir. Alanın birden fazla polinomla ifade edilmesi ise yine süreklilik probleminden ötürü tercih edilmez.

Dayanak noktalarına gelen düzeltmeler ise yöntemlerin bir başka olumsuzluğudur. Uygulamalarda dayanak noktalarının orijinal değerlerinin mi yoksa modelden elde edilen değerlerin mi alınacağı tartışma konusudur. Ayrıca farklı çalışmalardan elde edilen farklı dönüşüm değerleri de karışıklık doğurmaktadır. Yürürlüğe girmesi beklenen Büyük Ölçekli Harita ve Harita Bilgileri Üretim Yönetmeliğine göre de dönüşüm işleminde dayanak noktalarına düzeltme getirilmemesi gerekmektedir.

Jeodezik bir dönüşümden istenen, ortak nokta koordinatları sabit kalırken ağın yapısının tüm alan boyunca sürekli ve yeterli doğrulukta dönüştürülmesidir.

Bir çok mühendislik probleminin çözümünde uzun yıllardır kullanılan sonlu elemanlar yönteminin temel yaklaşımı, bütünün birim parçalara ayrılması ve bu birim elemanların birbirine bağlanması yoluyla sürekliliğin sağlanmasıdır. Yaklaşımı oluşturan geometrik model ile jeodezik ağların da benzer biçimde ifade edilmesi olanaklıdır. Bu nedenle son yıllarda sonlu elemanlar yaklaşımının dönüşümlerde kullanılması için çalışmalar yoğunlaşmıştır. Sonlu elemanlarla dönüşümlere ilişkin yazılımların öncülleri olarak; FINELTRA (İsviçre) ve HEIDI (Almanya) yazılımları geliştirilmiş ve Avrupa'daki EUREF çalışmaları çerçevesinde, ED-50 ile EUREF arasındaki dönüşümlerde kullanılmıştır (ÇEPNİ 2004).

Bu makalede; jeodezik dönüşümlerle ilgili olarak uygulamada karşılaşılan sorunlara sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak getirilen çözümler tartışılmaktadır. Bu çerçevede, bölge bölge nokta sıklaştırmalarının yapıldığı yerlerde, yatay (iki boyutlu) ve düşey (tek boyutlu) ağlarda, bindirme bölgeleri olmaksızın sonlu elemanların fermuar fonksiyonlarıyla dikişsiz sürekliliği sağlayan dönüşümün fonksiyonel ve stokastik modeli incelenerek, yöntemin uygulamaya aktarılmasının esasları sunulmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi üzerine kurulmuş iki yaklaşım ile; önce çalışma alanını çözüm bölgelerine ayırmak ve her bir çözüm bölgesinde parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları belirlemek, daha sonra bunları kullanarak üçgen elemanlar yardımıyla bir noktanın dönüşüm değerini hesaplamak çalışmanın ana fikrini oluşturmaktadır.

2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Genel Hatları

Sonlu elemanlar yöntemi, sürekli ortamların küçük birim bölgelere ayrılarak temsil edilmesi düşüncesine dayanır. Bu birim bölgelere ise "sonlu elemanlar" adı verilir. Yöntemin temel yaklaşımı; sıcaklık, basınç, gerilme veya deplasman vs. gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün küçük ve sürekli parçaların birleşmesi ile oluşan bir modele dönüştürülmesidir (ZIENKIEWICZ ve MORGAN 1983). Sonlu elemanlar yöntemi, birbirinden farklı davranışlar gösteren değişkenleri barındıran karmaşık sistemlerin veya kompleks bir yapı üzerindeki herhangi bir değişkenin karakterize edilebilmesine olanak sağlar.

Sonlu elemanlar yöntemi ile bir büyüklüğün ifade edilmesinde, problemin doğru biçimde tanımlanıp değişkenlerin seçilmesinin ardından yapılacak ilk iş, büyüklüğü elemanlara ayırmaktır. Elemanlara ayırma işleminin doğru biçimde yapılması, çözümün doğruluğu açısından oldukça önemlidir. Elemanlar uygun şekilde seçilmeli ve problemin yapısına uygun olarak yerleştirilmelidir. Eleman seçiminde, elemanların boyutları ve sayıları sistemi en iyi temsil edecek, hesapları da en aza indirgeyecek biçimde olmalıdır. Genel olarak değişkenin ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar küçük seçilir. Uygun elemanlar seçmek kadar bu elemanları ve onların düğüm noktalarını, yani elemanların köşe noktalarını uygun numaralamak da, yöntemin doğru çalışması için önemlidir. Elemanların köşe noktaları sistem içerisinde elemanların birleşme noktalarını oluşturur ve düğüm noktaları olarak adlandırılır. Jeodezik ağlar söz konusu olduğunda; ağın gözlem planı dolayısıyla taşımış olduğu üçgensel yapı, elemanların seçimi için uygun altlık oluşturmakta ve uygulamada büyük kolaylık sağlamaktadır.

Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra, ifade edilmek istenen büyüklüğün bölge içerisinde değişimini gösteren bir enterpolasyon fonksiyonu belirlenir. Fonksiyon, değişkenin yaklaşık değişimini verir ve gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözümdeki yaklaşıklık da o kadar fazla olur. Bu fonksiyon "şekil", "deneme" veya "baz fonksiyonu" olarak adlandırılmaktadır. Derecesi ve katsayıları problemin yapısına ve çözüm bölgesine göre belirlenecek iki değişkenli (bivaryant) polinomlar, sıkça deneme fonksiyonu olarak kullanılır.

Burada, sonlu elemanlar yönteminin özelliği, tüm alan için tek bir fonksiyonun değil, birden fazla deneme fonksiyonunun belirlenmesidir. Çözüm, bu deneme fonksiyonlarının birlikte genel ifadesi şeklindedir. Bütün alan için tek bir ifade yerine, birden fazla deneme fonksiyonu yazılarak alanın ifade edilmesi ile çözüme büyük katkı sağlanır. Birden fazla deneme fonksiyonu kullanılması nedeniyle alan içinde ortaya çıkacak süreksizlikler ise, süreklilik koşulları belirlenerek giderilir.

3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Jeodezik Ağlarda Kullanılması

Bir jeodezik ağ, noktaların oluşturduğu genellikle üçgen şekilli parçalardan (elemanlardan) oluşur. Bir elemanı ilgilendiren geometri, deplasman, gerilme gibi büyüklükler, elemanı çevreleyen noktalardaki büyüklüklerle karakterize edilir. Jeodezik ağa ilişkin bu yaklaşımla, sonlu elemanlar yönteminin yaklaşımı birebir örtüşür. Jeodezik ağ noktaları, sonlu elemanlar yöntemindeki düğüm noktaları ile özdeşleştirilebilir.

Bir jeodezik ağ içindeki tüm dayanak noktalarını kapsayan alan, bir "çözüm bölgesi" olarak alınabileceği gibi birden fazla çözüm bölgesine de ayrılabilir. Her çözüm bölgesi için deneme fonksiyonu belirlenmelidir. Dönüşüm için fonksiyon değerleri olarak; dayanak noktalarının koordinatları, koordinat farkları, yükseklikleri veya geoit yükseklikleri kullanılabilir. Bu çalışmada, yatay dönüşümler için dayanak noktalarının enlemleri ve boylamları arasındaki farklar ve düşey dönüşüm için geoit yükseklikleri alınacaktır. Deneme fonksiyonu olarak ise, sonlu elemanlar için en uygun seçim olan iki değişkenli polinomlar kullanılmıştır.

3.1. Çalışma Alanının Çözüm Bölgelerine Ayrılması

Sonlu elemanlar çözümünün jeodezik ağlarda kullanılmasına dönük ilk yaklaşım olarak, bir proje alanının tek bir çözüm bölgesi olarak alınması yerine birden fazla sayıda çözüm bölgesine ayrılması ve her çözüm bölgesi için ayrı bir deneme fonksiyonu belirlenmesi düşüncesinden hareket edilmiştir. Bütün proje alanını tek bir çözüm bölgesi üzerinden ifade eden bir $F(p_{ij}, x, y)$ deneme fonksiyonu yerine, alanın m adet çözüm bölgesine ayrılmasıyla her bir çözüm bölgesi için, $F^m(p^m_{ij}, x, y)$ şeklinde deneme fonksiyonları elde edilir. Deneme fonksiyonu olarak iki değişkenli polinomlar kullanılır.

Her çözüm bölgesi için ayrı bir deneme fonksiyonu belirlenmesinin sonucu olarak bölgeler arası süreksizlikler ortaya çıkacaktır. Çözüm bölgeleri arasındaki süreklilikler, "fermuarlama işlevi" gördüğü düşünülen cebirsel ifadeler yardımıyla sağlanmaktadır. Böylece iki komşu çözüm bölgesi, fermuarlayan fonksiyon yardımıyla ortak sınır boyunca bir hatla birbirine bağlanmakta ve bu yolla üst üste binen alanlar ortadan kaldırılarak, iki binmesiz çözüm bölgesi oluşturulmaktadır. Birleştirici özelliğe sahip olan bu hat "fermuarlayan hat" veya "ortak hat" olarak tanımlanabilir. Ortak hat, dayanak noktalarından bağımsız bir birleştirici doğru olabileceği gibi iki çözüm bölgesinin aralarında bulunan dayanak noktalarını birleştiren doğru olarak da seçilebilir.

Her bir çözüm bölgesi için deneme fonksiyonu olarak ifade edilen, iki değişkenli polinom katsayıları p^m_{ij} yalnızca m çözüm bölgesi içindir ve komşu çözüm bölgelerindeki polinomun katsayı setleri ile uyumluluğu, ortak hat boyunca yazılan koşullar ile denetlenir.

3.2. Süreklilik ve Süreklilik Koşullarının Tanımlanması

Sonlu elemanlar yönteminde süreklilik, çözüm bölgelerine ayrılmış bir proje alanında her bir çözüm bölgesindeki deneme fonksiyonlarının birleştirilmesi anlamını taşır.

Çözüm bölgesindeki deneme fonksiyonlarının tüm proje alanı boyunca oluşturduğu yapıya "parça parça" ya da "parçalı tanımlı" deneme fonksiyonları denilmektedir. Çözüm bölgelerindeki deneme fonksiyonlarının sürekliliği, bölgelerin sınırındaki ortak hatlar üzerinden yazılan koşullar ile sağlanır. Bu koşullar ortak hattın uçlarındaki noktalar yardımıyla yazılan analitik bağıntılardan oluşur ve süreklilik koşulları olarak isimlendirilir. Çözüm bölgeleri arasındaki her sınır için süreklilik koşul bağıntıları düzenlenir. Burada temel yaklaşım, çözüm bölgelerinde üst üste binen alanları sıfıra indirmek ve ortak hatla birbirine bağlamak üzerine kurgulanmıştır. Koşulları sağlanmış bir süreklilik ile, çözüm bölgeleri arasındaki binmeler ortadan kalkar ve geçişlerde deneme fonksiyonlarının değerleri için devamlılığa ulaşılır. Böylelikle, parçalı fonksiyonlar biçimindeki deneme fonksiyonları sürekli hale getirilir.

Süreklilik tanımı içinde C_0, C_1 ve C_2 süreklilikleri biçiminde bir sınıflandırma yapılabilir

C_0 sürekliliği, ortak hat boyunca F^m (p^m) ve F^n (p^n) eğrilerinin aynı fonksiyon değerlerini alması koşuludur.

C_1 sürekliliği, ortak hat boyunca F^m (p^m) ve F^n (p^n) eğrilerinin aynı teğet düzlemlere sahip olması koşuludur.

C_2 sürekliliği, ortak hat boyunca F^m (p^m) ve F^n (p^n) eğrilerinin aynı eğriliklere sahip olması koşuludur.

Herhangi iki komşu çözüm bölgesi için tanımlanan her bir süreklilik, o koşulu yerine getirecek kabullerden hareketle yazılan denklem takımlarından elde edilir.

3.2.1. C_0 Sürekliliği Eşitliklerinin Elde Edilmesi

Çözüm bölgelerinde, deneme fonksiyonu olarak kullanılan iki değişkenli polinomların bilinen genel ifadesi, (n) polinomun derecesi olmak üzere:

$$F(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} p_{jk} x^j y^k \quad (1)$$

şeklindedir. Deneme fonksiyonu olarak seçilen bu polinomun 3 boyutlu bir yüzeyin 3. boyutu için yazılmış olduğunu varsayalım. Komşu çözüm bölgelerindeki birim vektörler;

$$\mathbf{X_m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ F_m(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} p_{jk}^m x^j y^k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ F_n(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} p_{jk}^n x^j y^k \end{bmatrix} \quad (2)$$

biçimindedir.

C_0 sürekliliği, iki komşu çözüm bölgesine ait ortak hat üzerindeki her noktada komşu deneme fonksiyonlarının aynı fonksiyonel değerleri alması olarak betimlenir. Ortak hat bir t parametresi ile normladırılırsa, her $t \in (0,1)$ değeri için, fonksiyonel değerlerin farkının sıfıra denk olması C_0 süreklilik koşuludur.

$$\Delta_{mn} = X_m - X_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} dp_{jk}^{mn} (x_u + t\,dx)^j \, (y_u + t\,dy)^k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$dp_{jk}^{mn} = p_{jk}^m - p_{jk}^n \quad (3)$$

$$dx = x_u - x_v$$

$$dy = y_u - y_v$$

Fark vektörü, t'ye bağlı tek değişkenli bir polinom olarak ifade edilir ve derecesine göre açılarak sıfıra eşitlenirse,

$$A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + ... + A_{n-1} t^1 + A_n \equiv 0 \quad (4)$$

çıkar

(4) açılımı bir eşitlik değil bir denklik ifadesi olduğundan gerçeklenebilmesi mümkündür. C_0 eşitliğinin sağlanması için de bu denkliğin t'nin her $t \in (0,1)$ değeri için gerçekleşmesi gerekir. Denklem eşitliklerinin genel özelliklerinden bilindiği gibi, (4) sisteminin sıfıra denk olması için t değişkenine bağlı tüm katsayılar sıfır olmalıdır. Yani (4) açılımı basitçe, (i=1,n olmak üzere)

$$A_i = 0 \quad (5a)$$

$$A_i \, (p_m, p_n, x_u, y_u, x_v, y_v) = 0 \quad (5b)$$

formuna dönüşür. A_i katsayıları burada, komşu çözüm bölgelerindeki deneme fonksiyonlarına ait karşılıklı parametrelerin farklarına karşılık gelirler. Bunların tümünün sıfıra eşitlenmesi halinde, (5) eşitliği tanımlı olduğu alandaki tüm t değerleri için sağlanmış olacaktır. Polinomların yerine konulmasıyla (4) eşitlikleri (n+1) mertebeli homojen denklem sistemi oluştururlar ve problemin çözümü bu denklem takımlarının çözümü haline gelir. Katsayılar (5b)'de görüleceği gibi, dp_{jk}^{mn} parametre farkları ile ortak hattın uç noktalarının koordinatlarına bağımlıdır. Homojen denklem takımı çözülüp parametreler arası koşullar gerçekleştiğinde, (4) denkliği sağlanmış, dolayısıyla C_0 sürekliliği garanti edilmiş olur. Deneme fonksiyonlarının derecesi 3 olduğunda (n=3), dört adet C_0 süreklilik koşulu yazılır (DINTER vd. 1996).

3.2.2. C_1 Sürekliliği Eşitliklerinin Elde Edilmesi

C_1 sürekliliğinin geometrik tanımı, komşu alanlardaki uzay eğrilerinin ortak hat üzerinde aynı teğet düzleme sahip olmaları şeklinde yapılabilir. Bu tanımdan hareketle, C_1 sürekliliğine sahip olmayan iki komşu çözüm bölgesinde teğet düzlemlerin paralel olmayacağı, dolayısıyla teğet düzlemlere dik normal vektörlerin de ıraksak veya yakınsak olacağı söylenebilir. Şayet normal vektörler paralel olsaydı veya normal vektörlere paralellik ile ilgili koşul getirilmiş olsa idi, doğal olarak teğet düzlemler de paralel olacaktı. Bilindiği gibi iki paralel vektör bir yüzey parçası ifade etmez ve birim vektörlerinin çarpımları sıfıra eşittir. Paralel iki vektörün vektörel çarpımlarının sıfıra eşit olması C_1 süreklilik koşullarının çıkış noktasıdır. İki komşu çözüm bölgesindeki deneme fonksiyonu uzay eğrisine ait normal vektörlerin çarpımının sıfıra eşitlenmesi ile C_1 Sürekliliği için istenilen koşul denklemlerine ulaşılır. (3) ifadesindeki birim vektörlerde birinci kısmi türevler alınır ve modellenmeye çalışılan bileşene ait deneme fonksiyonlarının kısmi türevleri $f_{m,x}, f_{m,y}, f_{n,x}, f_{n,y}$ ile gösterilirse, iki yüzeyin normal vektörleri,

$$\mathbf{n_m} = [X_{m,x}, X_{m,y}, 1] = \begin{bmatrix} -f_{m,x} \\ -f_{m,y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n_n} = [X_{n,x}, X_{n,y}, 1] = \begin{bmatrix} -f_{n,x} \\ -f_{n,y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

biçiminde yazılabilir.

İki normal vektörün çarpımı sıfıra eşitlenirse,

$$f_{n,y} - f_{m,y} = 0$$

$$f_{n,x} - f_{m,x} = 0 \quad (7)$$

$$f_{m,x} . f_{n,y} - f_{m,y} . f_{n,x} = 0$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözümü ortak hat üzerinde kısmi türevlerin eşdeğer olması sonucunu verir. Kısmi türev farkları ifadesi (7) açılır ve ortak hat t parametresi ile normlandırılırsa,

$$A_1 t^2 + A_2 t + A_3 \equiv 0$$
$$B_1 t^2 + B_2 t + B_3 \equiv 0 \qquad (8)$$

denklikleri elde edilir. (8) denkliklerinin gerçekleşmesi için,

$A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0, B_3 = 0$

olmalıdır. A_i ve B_i ifadeleri 3. derece fonksiyon için açıldığında, altı polinom bulunur ve polinomların çözümünden C_1 süreklilik eşitliklerine ulaşılır.

3.2.3. C₂ Sürekliliği Eşitliklerinin Elde Edilmesi

C_2 sürekliliği, ortak hat üzerinde iki yüzey eğrisinin de hatta dikey oluşları, yani aynı normal eğriliklere sahip olmaları ile açıklanır. C_2 süreklilik koşullarını elde edebilmek için deneme fonksiyonlarının ikinci derece kısmi türevleri alınır, identik olmaları varsayımı ile C_0 ve C_1 sürekliliklerindekine benzer şekilde t parametresine göre düzenlenerek eşitlenirse,

$$\Delta_{mn} f_{xx} = f_{m,xx} - f_{n,xx}$$
$$\Delta_{mn} f_{xy} = f_{m,xy} - f_{n,xy} \qquad (9)$$
$$\Delta_{mn} f_{yy} = f_{m,yy} - f_{n,yy}$$

temel C_2 koşul eşitliklerine ulaşılır. (n=3) için düşünüldüğünde bu eşitlikler 1. derece polinomlardır.

$$A_1 t + A_2 \equiv 0$$
$$B_1 t + B_2 \equiv 0 \qquad (10)$$
$$C_1 t + C_2 \equiv 0$$

t değişkenlerine bağlı bu polinomların t'nin her $t \in (0,1)$ değerinde sağlanması ile bu denklikler gerçekleşir. Denkliklerin sağlanması için, A_i ve B_i katsayılarını oluşturan denklem takımları sıfıra eşitlenir ve çözümünden C_2 süreklilik koşulları çıkarılır.

3.3. Süreklilik Koşullarının Matematik Model İçinde Değerlendirilmesi

Süreklilik koşul eşitlikleri matematik model içerisinde birkaç farklı biçimde değerlendirilebilir. Birinci seçenekte eşitlikler, bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi modeli içine koşul denklemi olarak yerleştirilerek çözüme gidilir. Modelin çözümünde koşullara düzeltme getirilmediğinden süreklilik koşulları tam olarak yerine getirilir.

Diğer bir çözümde, süreklilik eşitlikleri ölçü olarak kabul edilir ve matematik model içerisinde düzeltme denklemi şeklinde yazılır. Burada, düzeltme denklemlerinin ağırlıklandırılması ile kullanıcının modeli kontrol etmesi mümkün olur. Süreklilik eşitliklerine ait düzeltme denklemlerinin ağırlıkları çok yüksek tutularak koşulların gerçekleşmesi sağlanır.

Bir başka çözüm ise; dengeleme hesabında geçici bilinmeyenlerin koşul denklemlerinde yerine konulması esasına dayanır (ŞERBETÇİ ve ÖZTÜRK 1992). Bu yöntem çalışma içinde eklemeli çözüm olarak adlandırılmıştır. Daha önce dönüşüm hesapları bitirilmiş bir bölgeye komşu bölgede dönüşüm yapılmak istendiğinde, yeni dönüşüm parametrelerinin, başka bir deyişle deneme fonksiyonu katsayılarının süreklilik koşullarına uygun biçimde bir önceki bölge ile uyuşumlu olarak elde edilmesi bu çözümün amacıdır. Önceki deneme fonksiyonu katsayıları koşul denklemlerinde yerine konulur ve bu denklemler yeniden düzenlenerek, yeni deneme fonksiyonu parametreleri, ilk çözümdekinin aynısı olarak elde edilir. Bu yöntem, pek çok kez çalışmaların aynı anda tüm bölge için yürütülmesi mümkün olmadığından, zaman içerisinde yapılacak tüm yeni çalışmaların sürekliliğini sağlamak açısından önemli ve kullanışlıdır.

3.4. Dönüşümün Kesin Değerinin Üçgen Elemanlar ile Enterpolasyonu

Sonlu elemanlar yönteminin jeodezik dönüşümlerde kullanımına ilişkin ikinci bir yaklaşım, çalışma alanını üçgen elemanlara ayıran ve sürekliliğe sahip üçgen elemanlar üzerinden, bir noktaya enterpolasyon yaparak dönüşüm değeri hesaplanmasıdır. Bu yöntemle uygulamada, gerek doğruluk beklentisini karşılaması, gerekse dayanak noktalarına düzeltme getirmemesi açısından oldukça kullanışlı ve yararlı bir çözüme ulaşılması amaçlanmaktadır. Sonlu elemanlar ve süreklilik kavramları bu çözüm için de hareket noktasını oluşturmaktadır.

Üçgen elemanlarla enterpolasyon yöntemi, C_2 sürekliliğine sahip, komşu üçgen elemanları arasında sürekli ve ayrılabilir geçişleri sağlayan enterpolasyon fonksiyonlarının elde edilmesi üzerine kurgulanmıştır. Bunun için ilk olarak, dayanak noktalarının üçgenlenmesi gerekmektedir. Üçgenleme ile çalışma alanı, köşe noktalarını dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen elemanlar ile kaplanmış olur. Üçgenin köşeleri olan üç dayanak noktası üçgen elemanın uç noktalarıdır. Daha sonra bir fonksiyon yardımıyla, üçgenin köşe noktalarında, fonksiyon değerleri ile fonksiyonun türev değerleri bulunup, bu değerlerden üçgen içi enterpolasyonda kullanılmak üzere beşinci dereceden bir polinom elde edilir. Bu çalışmada, üçgen köşelerindeki değerleri belirlemede kullanılan fonksiyon, bir önceki bölümde, üçgenin içinde yer aldığı çözüm bölgesi için hesaplanan deneme fonksiyonudur.

Yöntemin fonksiyonel modeli bir üçgen eleman üzerinde tanımlanan aşağıdaki üç varsayıma dayanmaktadır:

1. Enterpolasyon ile kesin değeri hesaplamak için, burada 5 alınan n polinomun derecesinde ;

$$F(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^{5} \sum_{k=0}^{5-j} p_{jk}\, x^j y^k \qquad (11)$$

   şeklinde x ve y değişkenlerine bağlı iki değişkenli bir polinom kullanılır.
2. (11) eşitliğindeki $F(x_i, y_i)$ Fonksiyon değeri ve onun 1. ve 2 derece kısmi türevleri

   $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$

   yardımıyla üçgenin köşelerini oluşturan 3 veri noktasında 18 bağımsız koşul denklemi yazılır.
3. Üçgenin her bir kenarına dik doğrultuda türevi alınmış

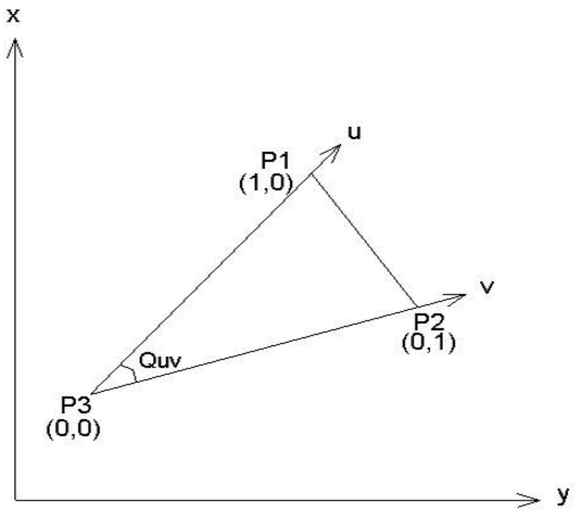
fonksiyonun kısmi türevi, üçgenin kenarı boyunca olan doğrultuda ölçülen değişken için, en fazla 3. derece bir polinomdur (AKIMA 1975, AKIMA 1978).

Bu kabul de 3 kenar için 3 ek koşul denklemi getirir.

Böylece 2. ve 3. varsayımlardan elde edilen 21 koşulla, ilk varsayımdaki 21 katsayıya sahip enterpolasyon fonksiyonu belirlenebilir.

3.4.1. Enterpolasyon Formüllerinin Elde Edilmesi

Enterpolasyon formüllerinin çıkarılması için öncelikle, Şekil 1'de de gösterilen bir üçgen koordinat sistemi tanımlanmalıdır.



Şekil 1: Üçgen Koordinat Sistemi

Sistemin başlangıcını oluşturan P3 noktasının koordinatları (0,0) diğerlerininki ise (1,0) ve (0,1) değerlerini alır. Bu üçgen koordinat sistemi u-v koordinat sistemi olarak adlandırılır. Üçgenin [P3-P1] ve [P3-P2] kenarları u-v sistemindeki birim vektörlerdir. u-v ve x-y koordinat sistemleri arasındaki transformasyonun ardından, (11) enterpolasyon fonksiyonu,

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{5} \sum_{k=0}^{5-j} q_{jk}\, u^{j} v^{k} \qquad (12)$$

biçimini alır. Kısmi türevler de u-v 'ye bağlı olarak ifade edilir. Kısmi türev formüllerinde P3(0,0), P2(0,1) ve P1(1,0) noktalarına ait u-v değerlerinin yerine konulması ile 18 koşul bulunur. Üç koşul da üçgen kenarlarına dik doğrultudaki kısmi türevlerden çıkarılır. Yöntemin tanımındaki 2. ve 3. varsayımlardan hareketle yazılan bu 21 eşitliğin çözümünden, q katsayıları elde edilerek, enterpolasyon fonksiyonu belirlenir (PREUSSER 1984).

Üçgen içi enterpolasyonu temel alan bu tip bir çalışmanın bazı önemli yararları şu şekilde sıralanabilir;

- Üçgen elemanın köşe noktalarını oluşturan dayanak noktalarında deneme fonksiyonunun kısmi türevleri hesaplanarak bu noktalardaki eğim ve eğriliklerin daha hassas elde edilmeleri ile enterpolasyondaki hatalar en aza indirilir.
- Dayanak noktalarına düzeltme getirilmediğinden, bu noktaların orijinal değerleri ile hesaplanan değerleri arasında bir çelişki oluşmaz. Ayrıca süreklilik sadece kenarlar boyunca değil, dayanak noktalarındaki değerler için de sağlanmış olur. Böylelikle, komşu üçgen elemanlar arasında ayrılabilir ve sürekli geçişlere ulaşılır.
- Üçgenler arası süreklilik ile üçgen elemanlara ayrılmış alan üzerinde süreklilik sağlanmış olur. Komşu üçgenlerdeki enterpolasyon fonksiyonlarının değerleri arasında sıçrama veya kesikliklerin önüne geçilir.
- Enterpolasyon fonksiyonu olarak çözümü ifade eden, uzay eğrisi ayrılabilir, ancak sürekli biçimde elde edilmiş olur.

4. Test Çalışmaları

Test çalışmaları için test ağı olarak, İstanbul Büyükşehir Belediyesi Metropoliten GPS Nirengi Ağı (İGNA) seçilmiştir. Yatay bileşenlerin ITRF-94 ve ED-50 datumları arası dönüşümü için her iki sistemde koordinatları bilinen 31 dayanak noktası, yüksekliklerin dönüşümü için ise nivelman yüksekliği ile elipsoidal yüksekliği bilinen yaklaşık 400 dayanak noktası bu çalışmada test verisi olarak kullanılmıştır.

4.1. Strateji

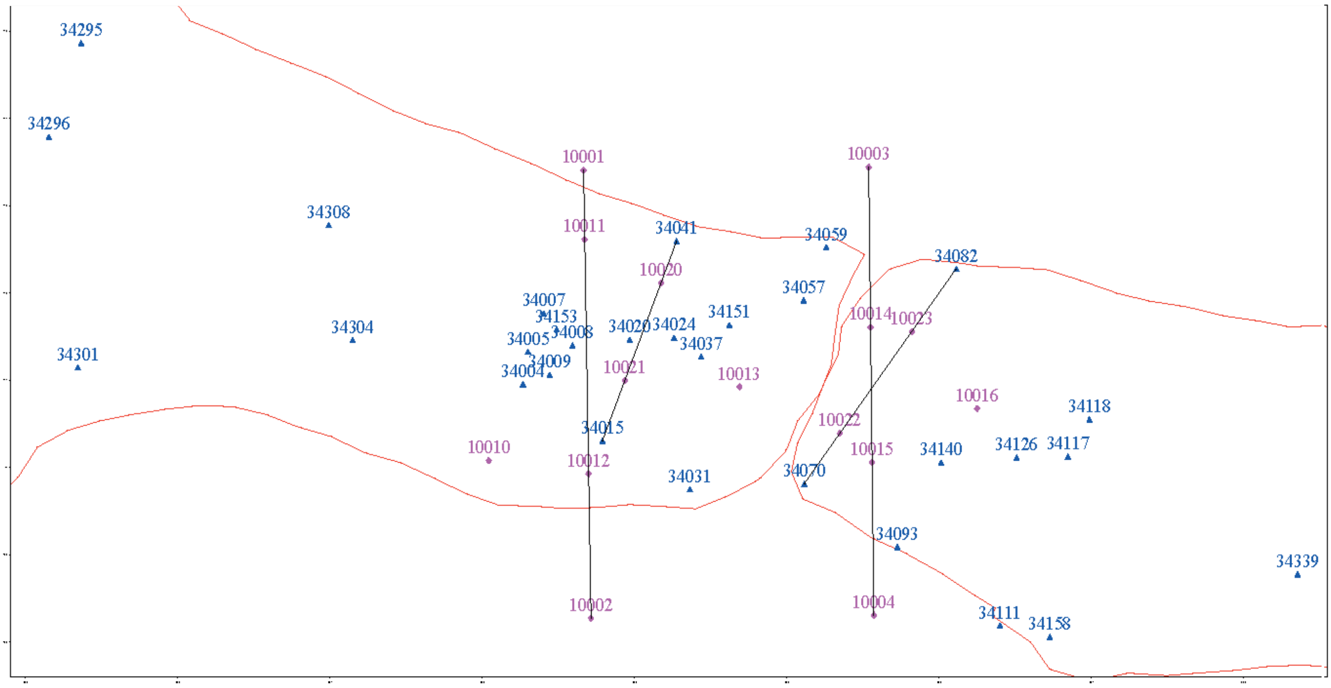
Sonlu elemanlar yönteminin amacına uygun biçimde seçilen çalışma alanı, doğu-batı doğrultusunda üç çözüm bölgesine ayrılarak her bölge için süreklilikleri sağlanmış deneme fonksiyonları yardımıyla dönüşüm parametrelerinin kestirilmesi amaçlanmıştır (Şekil 2).

Üç çözüm bölgesine ayrılan proje alanında, bölgelerin komşuluklarında yazılan süreklilik koşulları modele ilave edilerek çözüm gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmada, her çözüm bölgesi için ΔX, ΔY ve ΔH büyüklüklerine ait parça parça tanımlı deneme fonksiyonu olarak kullanılan iki değişkenli polinomların parametre setleri elde edilmiştir. Elde edilen parametre setleri sürekli fonksiyonlar tanımlamakta olup, süreklilik koşullarının üretildiği ortak hat üzerinde komşu fonksiyonlar aynı değerlere karşılık gelmektedirler. Böylece aynı zamanda seçilen hatların, fermuarlayan hat olma özelliklerinin test edilebilmesi olanağı sağlanmış olmaktadır.

Sonuçların karşılaştırmalı olarak irdelenebilmesi için, gerçek-leştirilen uygulamalar şu şekilde gruplanabilir;

- Tüm proje alanı için tek bir fonksiyon kestirilmesi,
- Üç çözüm bölgesi için süreklilik koşulları kullanılmadan fonksiyonların kestirilmesi,
- Üç çözüm bölgesi için sürekliliği sağlanmış fonksiyonların kestirilmesi,
- Bir çözüm bölgesi için kestirilen fonksiyonun devamı biçiminde fonksiyonların kestirilmesi.

Ayrıca, sonlu elemanlar çözümüne dayanan ve üçgen elemanları yardımıyla matematik modeli kurulan üçgen içi enterpolasyon yöntemi test ağı içersinde kullanılmıştır. Dayanak noktalarının oluşturduğu üçgensel bir alanda noktanın yeni sistemdeki kesin değerinin daha presizyonlu bir şekilde saptandığı üçgen elemanlarla dönüşüm uygulamaları yükseklik değerleri için gerçekleştirilmiştir.



İGNA Noktaları (Dayanak Noktaları): 34004,...,34339 34301

Konumlarına Göre Özel Seçimli Noktalar: 10010,...,10023 10012

Koşul Denklemi Türetilen Hattın Uç Noktaları:

Ortak Hat X-eksenine Paralel: 10001,...,10004 10003

Ortak Hat Dayanak Noktaları Arasında: 34015,...,34070 34041

Şekil 2 : Yatay bileşenlerin dönüşümü için dayanak noktalarının dağılımı ve çözüm bölgelerine ayırma şeması

4.2. ITRF-94 ile ED-50 Arasında Dönüşüm

İki sistem arasında dönüşüm değerlerinin hesaplanmasında, 31 dayanak noktasının bulunduğu bir veri kümesi kullanılmıştır. Üç çözüm bölgesinin her birinde en az 10 dayanak noktası bulunduğundan, her biri için deneme fonksiyonu olarak üçüncü derece iki değişkenli polinom kullanılmış olup her bir üçüncü derece polinomdaki 10 parametre için katsayılar belirlenmiştir. Çözüm bölgelerine ilişkin parçalı sürekli deneme fonksiyonlarının belirlenmesinde, ortak hattın dayanak noktalarından oluşması ve X eksenine paralel olması gibi iki ayrı durum denenmiştir.

Üçüncü derece polinomlar kullanıldığında, bir komşuluk ilişkisi için 4'ü C_0 3'ü C_1, ve 2'si C_2 sürekliliklerine ait olmak üzere 9 koşul yazılır. Üç çözüm bölgesinde iki komşuluk ilişkisi olduğundan modele konan koşul denklemi sayısı toplamı 18'dir. Koşul denklemlerinin hesabında ortak hatların X eksenine paralel olması durumunda elde edilen eşitlikler koşul 1, ortak hatların veri noktaları arasında olması durumunda elde edilen eşitlikler koşul 2 olarak adlandırılmıştır. Sürekliliğin sağlanıp sağlanmadığının irdelenmesi ile elde edilen sonuçlar Tablo 1'de verilmektedir. Üç bölgede ayrı ve süreklilik koşul denklemleri kullanılmadan yapılan çözümlerin sonuçları ile koşul denklemleri yazılarak gerçekleştirilen çözümlerin sonuçları, konumlarına göre özel seçimli noktalar üzerinde test edilmiştir. Test noktaları ortak hattın üzerinde seçilerek sürekliliğin irdelenmesi amaçlanmıştır. Ortak hat X eksenine paralel bağımsız bir doğru seçildiğinde, (10001-10002 ve 10003-10004 doğruları) 10011 ve 10012 noktaları 1. ve 2. çözüm bölgelerini birleştiren hattın, 10014 ve 10015 noktaları 2. ve 3. çözüm bölgelerini birleştiren hattın üzerindedir. Ortak hat veri noktalarını birleştiren doğru olarak alındığında ise, (34015-34041 ve 34070-34082) 10020 ile 10021 birinci hat üzerinde, 10022 ile 10023 ikinci hat üzerinde seçilmiştir (Şekil 2). Aşağıda ilk kısımda koşulsuz çözüm, ikinci kısımda ortak hattın X eksenine paralel alınmasına göre türetilen koşullarla çözüm (koşul_1), üçüncü kısımda ise ortak hattın veri noktaları arasında seçilmesi durumuna göre türetilen koşullarla çözüm (koşul_2) sonuçları özet biçimde sunulmuştur. Tablolar incelendiğinde koşul denklemleri yardımıyla, parça parça tanımlı fonksiyonlar biçiminde yapılan çözümde, ortak hatlar üzerinde seçilen noktaların komşu polinomlardan hesaplanan değerlerindeki özdeşlik görülmektedir.

Tablo 1a: Sağa Değerler İçin Sürekliliğe İlişkin Sonuçlar

Üç Bölge İçin Koşulsuz Çözüm			
10011	393995.3114	393994.7969	393991.1891
10012	393995.4357	393995.6287	393994.7601
10014	425339.8798	425341.3567	425340.9752
10015	425340.5502	425341.7073	425341.3712
10020	402338.2911	402338.4311	402336.2565
10021	398173.4496	398173.4079	398172.0953
10022	421822.2113	421823.1347	421822.9228
10023	429902.1670	429904.1555	429903.8014

Koşul 1 Tipi Çözüm (dy=0)			
10011	***393995.1330***	***393995.1330***	393995.0085
10012	***393995.3566***	***393995.3566***	393995.2322
10014	425341.3966	***425341.2367***	***425341.2367***
10015	425341.5523	***425341.3924***	***425341.3924***

Koşul 2 Tipi Çözüm (dy≠0)			
10020	***402338.4337***	***402338.4364***	402338.4344
10021	***398173.5198***	***398173.5230***	398173.5151
10022	421823.0410	***421823.0182***	***421823.0152***
10023	429903.9690	***429903.9093***	***429903.9065***

Tablo 1b:Yukarı Değerler İçin Sürekliliğe İlişkin Sonuçlar

Üç Bölge İçin Koşulsuz Çözüm			
10011	4570563.8063	4570564.0072	4570564.6785
10012	4540763.3427	4540763.3420	4540763.0986
10014	4559008.1238	4559006.6147	4559007.0022
10015	4541832.2789	4541831.1526	4541831.1388
10020	4564947.2332	4564947.1689	4564947.7091
10021	4552577.4968	4552577.4797	4552577.3699
10022	4545532.5621	4545531.5531	4545531.6494
10023	4558421.3632	4558419.4238	4558419.6948

Koşul 1 Tipi Çözüm (dx=0)			
10011	***4570563.9722***	***4570563.9722***	4570563.9486
10012	***4540763.2937***	***4540763.2937***	4540763.2700
10014	4559006.5222	***4559006.6132***	***4559006.6132***
10015	4541831.0327	***4541831.1237***	***4541831.1237***

Koşul 2 Tipi Çözüm (dx≠0)			
10020	***4564947.1259***	***4564947.1237***	4564947.1224
10021	***4552577.4473***	***4552577.4447***	4552577.4394
10022	4545531.5550	***4545531.5737***	***4545531.5717***
10023	4558419.3497	***4558419.3986***	***4558419.3967***

4.3. Eklemeli Çözüm

Bu uygulamada, zaman içersinde devam eden çalışmalarda her bir yeni çözüm bölgesinin bir önceki çözüm bölgesinin devamı niteliğinde sürekli bir biçimde devam ettirilebilmesi amacıyla, bir önceki alan için belirlenmiş fonksiyona bağlı olarak komşu alanda yapılacak yeni bir dönüşüm işlemi gerçekleştirilmiştir. Eklemeli çözüm uygulamaları tüm seçenekler için gerçekleştirilmiş, bunlardan birine örnek olarak sağa değerlere ait sonuçlar Tablo 2 'de gösterilmiştir. Tablo 2'de eklemeli çözüm ile elde edilen sonuçların, üç bölgenin aynı modelde değerlendirildiği sonuçlarla aynı olduğu görülmektedir.

Tablo 2: Eklemeli Çözüm Sonuçları (Sağa Değerler İçin)

Nokta Numaraları	Üç Bölgeli Koşullu Çözüm (dy=0 hali)	Üçüncü Bölge İçin Eklemeli Çözüm	Üçüncü Bölge İçin Bağımsız Çözüm
	3. Bölge	3. Bölge	3. Bölge
10010	382979.5810	382979.5810	382978.4513
10011	393995.0085	393995.0085	393991.1891
10012	393995.2322	393995.2322	393994.7601
10013	410789.0542	410789.0542	410788.4537
10014	425341.2367	425341.2367	425340.9752
10015	425341.3924	425341.3924	425341.3712
10016	437002.7031	437002.7031	437002.7433
10020	402338.3873	402338.3873	402336.2565
10021	398173.4417	398173.4417	398172.0953
10022	421823.0288	421823.0288	421822.9228
10023	429903.9022	429903.9022	429903.8014

4.4. Yüksekliklerin Dönüşümü

İstanbul Metropoliten Nivelman Ağı olarak seçilen proje alanında geoit yüksekliklerinin belirlenmesinde, her iki yükseklik sisteminde yükseklikleri bilinen toplam 340 dayanak noktası kullanılmış, yine geoit yükseklikleri bilinen 66 nokta ile de dönüşüm sonuçları test edilmiştir.

Geoit yüksekliklerinin belirlenmesi işleminde de sağa ve yukarı değerlerin dönüşüm işleminde olduğu gibi, proje alanı doğu-batı yönünde üç çözüm bölgesine ayrılmıştır. Toplam 340 dayanak noktasından 122'si birinci, 92'si ikinci ve 126'sı da üçüncü çözüm bölgesi içinde kalmaktadır. Yine karşılaştırma amacı ile kullanılan ve dayanak noktaları kümesine dahil edilmeyen 66 noktanın 18'i birinci, 10'u ikinci ve 38'i de üçüncü çözüm bölgesi içinde yer almaktadır.

Dönüşüm sonuçlarının gerçek değerlerden sapmalarını içeren bilgiler Tablo 3'te sunulmaktadır.

Tablo 3'de, ilk çözüm bölgesinde 18, ikinci çözüm bölgesinde 10, üçüncü çözüm bölgesinde ise 38 noktanın farklarının kareleri toplamları verilmektedir.

Tablo 3: Farkların Kareleri Toplamları (m)

Test Noktaları	Nokta Sayısı	Üç Çözüm Bölgesi Süreklilik Koşullu	Üç Bölge Koşulsuz	Tek Bölge
1. Çözüm Bölgesi	18	0.0277	0.0099	
2. Çözüm Bölgesi	10	0.0325	0.0201	0.2199
3. Çözüm Bölgesi	38	0.0944	0.0625	
Toplam	**66**	**0.1546**	**0.0925**	**0.2199**

4.5. Sürekliliğe Sahip Üçgen Elemanlar ile Dönüşüm

Dayanak noktalarının oluşturduğu ve dönüşüm değerinin bulunması istenen noktayı içine alan en küçük birim olan bir üçgen içerisinde, dayanak noktalarına düzeltme getirmeden ve süreklilik ilkesine uygun biçimde bir noktanın dönüşüm değerinin belirlenmesi amacıyla; test için kullanılan noktalar ve bunların etrafındaki en yakın dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen alanlardan yararlanılmıştır. Üçgen enterpolasyonu eşitliklerinde gerekli değerlerin hesaplanması için bir önceki çalışma adımında proje alanının çözüm bölgelerine ayrılmasıyla elde edilen sürekli deneme fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

Uygulama için veri olarak geoit yükseklikleri alınmış ve test için üç çözüm bölgesinde dokuz üçgen eleman kullanılmıştır. Bu üçgen elemanlar içindeki toplam onyedi test noktasına dönüşüm değeri hesaplanarak, gerçek değerler deneme fonksiyonundan bulunan değerler ile karşılaştırılmıştır. Tablo 4'te iki üçgendeki enterpolasyon sonuçları karşılaştırmalı biçimde verilmektedir.

Tablo 4: Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon

Üçgen Elemanın Köşe Noktaları : **15786 , 15788, 15789**					
N.N	Gerçek Değer	Süreklilik Koşullu Deneme Fonksiyonu	Fark (m)	Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon	Fark (m)
15787	48.2951	48.4765	0.1814	48.3271	-0.0320

Üçgen Elemanın Köşe Noktaları : **16306 , 16324 , 16326**					
N.N	Gerçek Değer	Süreklilik Koşullu Deneme Fonksiyonu	Fark (m)	Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon	Fark (m)
16307	229.8945	229.8408	0.0537	229.8914059	0.0031
16308	222.2149	222.1587	0.0562	222.2046419	0.0103
16315	256.0858	256.0277	0.0581	256.0828594	0.0029
16316	230.1974	230.1267	0.0707	230.1821281	0.0153
16325	221.0480	220.9623	0.0857	221.0194361	0.0286

Bu uygulamada kullanılan 17 test noktasına göre yukarıdaki tabloda bulunan farklar kullanılarak karesel ortalama hata hesabı yapılırsa;

Nokta Sayısı	Süreklilik Koşullu Deneme Fonksiyonu	Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon
17	**m_0= 7.73 cm.**	**m_0= 1.81 cm**

sonuçları elde edilir.

5. Sonuç ve Öneriler

Yaklaşımlardan ilki olan, parça tanımlı sürekli fonksiyonların belirlenmesine ilişkin sonuçlar incelendiğinde, sonlu elemanlar yönteminin ve süreklilik koşulları kullanılmasının dönüşüm işlemi sonuçları üzerinde hedeflenen etkileri gösterdiği söylenebilir. Proje alanının çözüm bölgelerine ayrılması sonrasında bu bölgeler için kestirilen parça tanımlı deneme fonksiyonları sürekli biçimde elde edilmişlerdir.

Sağa ve yukarı değerler için deneme fonksiyonu belirlenmesi sonuçlarında dikkat edilecek bir başka önemli nokta da; koşul denklemlerinin toplam çözüm üzerinde denetleyici bir rol oynaması ve dönüşüm modelini iyileştirmesidir. Koşul denklemlerinin yazıldığı çözümlerde, koşul denklemi yazılmamış duruma göre daha iyi sonuçlar alındığı görülmektedir. Özellikle proje alanının uç bölgelerinde yer alan ve de etrafında fazla dayanak noktası bulunmayan test noktalarında koşul denklemleri tüm alanın genel trendini bu noktalara taşımakta ve fonksiyonun anlamsız değerler vermesini engellemektedir.

Çalışmada özellikle araştırması yapılan bir diğer yöntem ise, sürekliliklerin sağlanması için tüm çözüm bölgelerinin aynı modelde değerlendirilmesi yerine, zaman içerisinde farklı modelden hesaplanan sonuçların da sürekliliğe uygun olarak elde edilmeye çalışılmasıdır. Eklemeli çözüm olarak sunulan yöntem ile, dönüşüm çalışmaları gerçekleştirilen alanların komşuluğundaki yeni alanlar için, kesiklikler ve tutarsızlıklara yol açmadan, komşu alanlarla sürekliliği sağlanmış biçimde, yeni dönüşüm parametreleri hesaplamak mümkün olabilmektedir. Yeni çözüm bölgesi için bulunan deneme fonksiyonun tanımladığı uzay eğrisinin, bir önceki deneme fonksiyonunun tanımladığı uzay eğrisinin devamı niteliğinde elde edilmesi olanaklıdır. Yani, parça tanımlı deneme fonksiyonları için sürekliliğin zaman içinde devam ettirilmesi olanaklı hale gelmektedir.

Yükseklilerin dönüşümünde, parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonlarından, geoit yüksekliklerinin modellenmesiyle ortometrik yükseklikler elde edilmiştir. Proje alanını üç çözüm bölgesine ayırarak parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları ile gerçekleştirilen çözümün, tüm alan için tek bir fonksiyonla yapılan çözüme göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenebilmektedir. Proje alanının daha büyük olduğu durumlarda bu farkın daha da büyüyeceği açıktır.

Bu uygulamada, üç bölge için süreklilik koşulları olmaksızın bulunan sonuçlar sonlu elemanlar çözümü sonuçlarına göre biraz daha iyi gözükmekle birlikte, bu çözümde süreksizlikler büyük oranda ortaya çıkmakta ve proje alanı boyunca tek anlamlı olmayan binmeli ya da kesikli durumlar oluşmaktadır. Bu nedenle, geoit modelinin, proje alanı boyunca sürekliliği sağlanamamış farklı çözümlerden oluşturulması kabul edilebilir bir seçim olmamaktadır. Test ağı olarak seçilen alan çok büyük olmamasına karşın, alanın çözüm bölgelerine ayrılmasıyla parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları kullanılarak yapılan çözümün yararları açıkça görülmektedir. Proje alanının daha büyük seçildiği uygulamalar için yaklaşım daha yararlı ve kullanışlı hale gelecektir.

Üçgen elemanlar kullanılarak sürekliliği olan dönüşüme dönük uygulamalar incelendiğinde, bir noktayı içine alan dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen eleman içinde yapılan dönüşümün beklentiler doğrultusunda çok iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Deneme fonksiyonlarından bir nokta için hesaplanan dönüşüm değerine göre, bu deneme fonksiyonunun kullanılmasıyla yapılan üçgen enterpolasyonu sonunda, test noktalarının gerçek değerlerine çok daha yakın değerler elde edilmiştir. Yöntemin bu başarısında, sürekli biçimde belirlenen parça tanımlı deneme fonksiyonlarının da etkisi büyüktür. Üçgen elemanların dönüşüm yöntemi olarak kullanılması, gerek fonksiyonun sağlayamadığı doğruluğa ulaşılması, gerek dayanak noktalarına düzeltme getirilmeden dönüşüm hesabının gerçekleştirilmesi ve gerekse sürekliliklerin sağlanmış olması açısından önemli yararlar sağlamaktadır. Ayrıca yöntem, anlaşılması ve uygulanması açısından rahat olup, işlem kolaylığı da sağlamaktadır.

Sonlu elemanlar yönteminin temel ilkelerinden yola çıkılarak gerçekleştirilen çalışmalar sonucunda, matematik modelleri oluşturulan iki farklı sonlu elemanlar yaklaşımının birlikte kullanılmasıyla elde edilen çözümün, dönüşümlerde yaşanan sorunların aşılmasına katkı yapacağı inancı taşınmaktadır.

Yöntemin otomasyona uygun olarak yapılandırılması ve tüm ülke ulusal ağını kapsayacak çalışmalar yürütülmesi hedeflenmektedir.

Kaynaklar

AKIMA H.: **A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting For values given at irregularly distrubuted points**, *OT Peport*, Washington D.C, U.S.A, 1975

AKIMA H.: **A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distrubuted data points**, *Acm Trans. Math. Software*, 4, 2, 148-159, 1978

ÇEPNİ M S.: **Jeodezik dönüşümlerde sürekliliğin irdelenmesi**, Doktora Tezi, İTÜ, 2004

DINTER G., ILLNER M. ve JAGER R.: **A synergetic approach for the transformation of elipsoidal heights into a standart height reference system**, *Reports of The EUREF Technical Working Group*, München, 1996

ÖZTÜRK E. ve ŞERBETÇİ M.: **Dengeleme Hesabı III**, K.T.Ü Yayınları, Trabzon, 1992.

PREUSSER U A.: **Bivariate interpolation über dreickselementen durch polynome 5. ordung mit C1- kontinuität**, *Zfv*, 6, 292-301, 1984

ZIENKIEWICZ O C. ve MORGAN K.: **Finite Elements And Approximation**, A Wiley–Interscience Publication, New York, 1983

İGNA RAPOR, İTÜ Jeodezi Anabilim Dalı, İstanbul, 1999