

Uyarlamalı Filtreler ile Gerçek Zamanlı Navigasyon

Bahadır AKTUĞ¹

Özet

Özellikle kentsel alanlardaki gerçek zamanlı navigasyon doğruluğu uygun kinematik model ve filtrelerin uygulanmasına bağlıdır. Araçların manevraları, ani hız değişimleri ve duraklamalar gibi kinematik modele yansıtılmayan olgulara ait bozucu etkilerin filtrelenmesi gerekmektedir. Bu anlamda Kalman Filtresi Tekniğinin başarısı, bozucu etkilerin modellenmesinde anahtar rolü oynayan gürültü modellerinin, uygun şekilde oluşturulmasıyla yakından ilişkilidir. Uygun kinematik ve gürültü modeli ile Kalman Filtresinin optimal şekilde çalışması ve navigasyon çözümlerinin önemli ölçüde iyileştirilmesi sağlanabilir.

Bu çalışmada GPS destekli araç izleme ve navigasyon sistemlerinde en yaygın veri olan NMEA formatındaki veriler ile gerçek zamanlı Kalman Filtresi simülasyonu oluşturulmuş, sabit hız, sabit ivme, zaman korelasyonlu hız ve zaman korelasyonlu ivme modelleri teori ve uygulama açısından incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler

GPS, Navigasyon, Kalman Filtresi, NMEA, Gürültü, Kinematik Modeller, Markov Süreçleri.

Abstract

Real-time Navigation with Adaptive Filters

The accuracy of navigation, particularly in metropolitan areas, depends on application of appropriate kinematic models and filters. It is needed to filter the perturbing effects of phenomena like maneuvers, sudden accelerations and irregular stops of vehicles. In this respect, the success of Kalman Filtering is closely related to forming noise models which play a key role in representing the perturbations. With appropriate kinematic and noise modeling, Kalman Filter can be implemented optimally and navigation solutions can be improved to a greater extent.

In this study, a simulation of a real time Kalman Filtering Application with NMEA-formatted data, the most common format in navigation and tracking applications, is carried out, and constant velocity, constant acceleration, time-correlated velocity and time-correlated acceleration models are investigated in view of both theory and practice.

Keywords

GPS, Navigation, Kalman Filtering, NMEA, Noise, Kinematic Models, Markov Processes.

1.Giriş

Hareketli sistemlerin hareketlerinin incelenmesinde iki temel yaklaşımdan söz edilebilir: Dinamik ve Kinematik yaklaşım. Navigasyon ile ilgili çalışmalarda kullanılan ve parametreler ile parametrelerin zamana bağlı değişimleri arasında ilişki kuran modeller için kinematik ve dinamik model ifadeleri değişimli olarak kullanılmaktadır.

Ancak hareketi; onu doğuran sebepler açısından inceleyen “dinamik” ile hareketin sonuçları açısından inceleyen “kinematik” in birbirinden farklı olduğu hatırlanmalıdır. Bu anlamda navigasyon ile ilgili çalışmalarda kullanılan modeller genellikle hareketin sonuçları (konum, hız, ivme, drift) ile ilgilendiğinden, navigasyon için oluşturulan ve parametreler ile zamana bağlı değişimleri arasında ilişki kuran modellerin “kinematik model” şeklinde isimlendirilmesi yerinde olacaktır.

Kalman Filtresi Tekniği ilk olarak tanıtıldığı Kalman (1960)'dan beri hareketli sistemlerin modellenmesinde yoğun olarak kullanılmaktadır (GREWAL vd. 2001), (FARRELL ve BARTH 1999), (HERRING 1999), (CROSS 1990), (SALZMAN 1993). Ancak gerçek hayattaki fiziksel olgular hiçbir zaman kusursuz olarak modellenememektedir. Bu sorunu aşmak için yaygın olarak uyarlamalı (adaptive) filtreler tercih edilmektedir (MOORE 2001), (MOORE 2002). Temel olarak uyarlamalı filtreler, Kalman Filtresi tekniğinde kinematik modelden elde edilen parametre değerleri ile ölçülerden fonksiyonel modelle elde edilen parametre değerleri arasındaki farkı ifade eden innovasyon dizisinin her epokta kontrolü ve buna uygun olarak kinematik modelin revizyonunu ifade etmektedir. Uyarlamalı filtre kapsamında değerlendirilebilecek diğer yaygın bir uygulama ise kinematik modelden olan sapmaların zaman korelasyonlu olarak modellenmesidir (HERRING 1990), (MOORE 2001). Manevra, ani hız ve ivme değişimleri nedeniyle öngörülen modelden sapmaların korelasyonlu olduğu düşünüldüğünde, uygun gürültü modelleri ile filtrenin optimal çalışması sağlanabilir ve navigasyon çözümleri iyileştirilebilir.

Navigasyon ile ilgili çalışmalarda konum-hız-ivme-drift kavramları arasındaki ilişkiler diferansiyel denklem sistemleri içerisinde “derece (degree)” şeklinde ifade edildiğinden, Markov süreçleri ile karışmaması amacıyla Markov süreçleri ile ilgili derecelendirmeler “mertebe (order)” olarak adlandırılacaktır.

¹Yük.Müh.,Harita Genel Komutanlığı, 06100 Cebeci/Ankara

İkinci bölümde, gürültü modellerinin üretilmesinin temeli olan Markov Süreçleri kısaca açıklanmakta, üçüncü bölümde çeşitli kinematik modellerin (sabit hız, sabit ivme, zaman korelasyonlu hız ve zaman korelasyonlu ivme) hareket denklemi ve Markov süreçleri yardımıyla elde edilmesi gösterilmektedir. Çalışmanın bütünlüğü açısından, 3 boyutlu bir sistemde, olası dört farklı gürültü modeli ile tüm formüller oluşturulmuş olup, bu bölümde sunulmuştur. Dördüncü bölümde Kalman Filtresi Tekniğinin formülasyon ve işlem adımları açıklanmakta, beşinci bölümde ise daha önce şehirsal alanda toplanmış, GPS-NMEA formatındaki veriler ile söz konusu kinematik ve gürültü modellerinin test edildiği bir uygulama sonuçlarına yer verilmektedir.

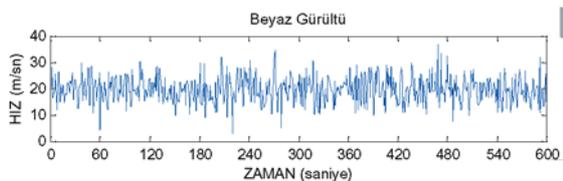
2. Markov Süreçleri

Kinematik modeller Markov süreçleri ile oluşturulacağından, burada sadece Markov süreçleri hakkında kısaca bilgi verilecektir. Rastlantısal değişkenler ve rasgele süreçler ile ilgili temel bilgiler çeşitli kaynaklarda bulunabilir (LIEBELT 1967), (GELB 1974), (STRANG ve BORRE 1997), (HEKİMOĞLU 1981).

Markov süreçleri beyaz gürültü (white noise) ve diferansiyel eşitlikler ile tanımlanır (GELB 1974). Sıfıncı mertbe Markov süreci,

$$x(t) = \omega(t) \quad (1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada rasgele süreç $x(t)$, beyaz gürültü ise $\omega(t)$ ile gösterilmiştir. Beyaz gürültü bizim ilgileneceğimiz durağan süreçler için epoktan bağımsız olacağından sadece ω ile gösterilecektir. Beyaz gürültünün değerleri normal dağılmış rasgele değişkenin değerleri olarak düşünülebilir. Beyaz gürültü kavramını açıklamak üzere 10 dakikalık (600 sn) bir süre için 20 m/sn (72 km/saat) ortalama hız üzerine bindirilmiş 5 m/sn² (ivme) standart sapmaya sahip beyaz gürültü nedeniyle oluşan sapmalar Şekil-1’de gösterilmiştir. Normal dağılımlı bir kümeden örnekleyerek oluşturulan bu simülasyonda, ortalama 20 m/sn hız etrafında korelasyonsuz rasgele sapmalar (beyaz gürültü) kolaylıkla gözlenebilmektedir.



Şekil 1. Beyaz gürültü örneği.

Birinci mertbe Markov süreci ise,

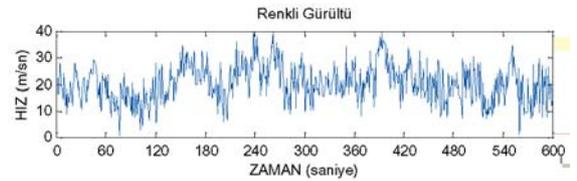
$$x(t) + \alpha(t) = \omega \quad (2)$$

şeklinde tanımlanır (LIEBELT 1967), (GELB 1974). Burada

korelasyon fonksiyonu olup, durağan süreçler için epoktan bağımsız ve sadece korelasyon aralığına bağlı olarak tüm süreç için sabittir (SCHWARZ ve LACPAPPELLE 1990), (SCHWARZ vd. 1989). Korelasyon zamanı ile $\alpha(t)$ ilişkisi,

$$\alpha(t) = \frac{1}{T} \quad (3)$$

biçiminde olup, T korelasyon zamanıdır. Bu şekilde üstel olarak korelasyonlu rasgele fonksiyon bazı kaynaklarda “renkli gürültü” olarak da adlandırılır (MERMINOD 1989). Korelasyon zamanı, rasgele süreçlerde, korelasyonlu rasgele fonksiyonun ardışık değerleri arasındaki ilişkinin zaman aralığı olarak ifadesidir. 15 saniye korelasyon zamanına sahip korelasyonlu bir rasgele değişkenin grafiği Şekil-2’de verilmektedir. Bu grafikte korelasyon zamanına bağlı olarak, üstel olarak korelasyonlu sapmalar gözlenmektedir.

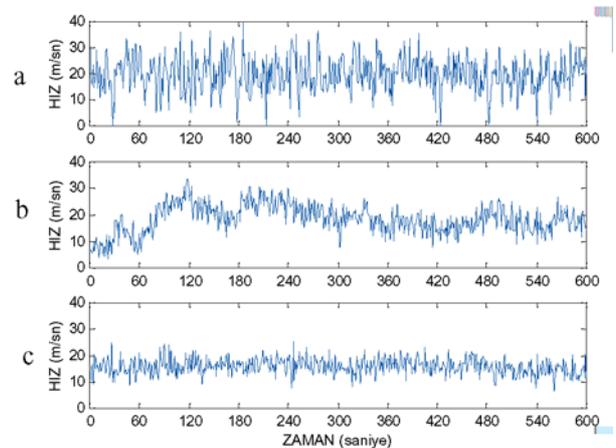


Şekil 2. Bir renkli gürültü örneği

Navigasyon çözümlerinde pek sık kullanılmamakla birlikte ikinci mertbe Markov süreci ise

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha(t)\dot{x}(t) + \alpha^2(t)x(t) = \omega \quad (4)$$

ile ifade edilir. Korelasyon zamanının etkisi Şekil-3’de gösterilmektedir. Yukarıdaki eşitliklerde ifade edilen beyaz gürültü herhangi bir dağılıma sahip rasgele fonksiyon olabilir. Bu çalışmada beyaz gürültünün $\omega(t)$ genliklerinin normal dağılımlı olduğu kabul edilmiştir. Bu tür Markov süreçlerine Gauss-Markov süreçleri denir (GELB 1974), (STRANG 1997), (SCHWARZ vd. 1989).



Şekil 3. Korelasyon zamanının etkisi. Korelasyon zamanı (a)’da 1 saniye, (b)’de 1 dakika, (c)’de ise 1 saat olarak tanımlanmıştır.

Markov süreçlerinde, korelasyon zamanı $T = \infty$ olduğunda yada diğer ifade ile $\alpha(t) = 0$ olduğunda, birinci mertebeye Gauss-Markov Süreci,

$$\dot{x}(t) = \omega \quad (5)$$

şekline, İkinci mertebeye Gauss-Markov Süreci ise,

$$\ddot{x}(t) = \omega \quad (6)$$

şekline dönüşür. Bu haliyle, (5) ve (6) eşitlikleri sırasıyla, “rasgele yürüyüş (random walk)” ve “ikinci mertebeye (veya entegre) rasgele yürüyüş (2nd order (or integrated) random walk)” süreçlerini ifade etmektedir. Navigasyon ile ilgili çalışmalarda, gerek Markov süreçleri gerekse bunun özel halleri olarak rasgele yürüyüşler ile çok sıkça karşılaşmaktadır. Uygulamada rasgele yürüyüş veya beyaz gürültü korelasyon zaman fonksiyonlarının özel halleri olarak elde edilebilmektedir. Örneğin Şekil 3’te (a)’daki sinyal, korelasyon aralığının çok kısa olması nedeniyle beyaz gürültüyü, (c)’deki sinyal korelasyon aralığının nispeten uzun olması nedeniyle rasgele yürüyüşü oluşturmaktadır.

Kullanılan kinematik modele uygun olarak oluşan bu süreçler, rasgele olmakla beraber tanımlanan korelasyon aralığına göre daha düşük türevlerini etkilemektedir. Örneğin sabit hız modelinden olan sapmalar, korelasyonlu beyaz gürültü şeklinde ivmelenmeler olarak (1. mertebeye Gauss-Markov süreci) modelendiğinde, hız üzerinde 1. değil 2. mertebeye bir Gauss-Markov Süreci oluşturacaktır. Aynı şekilde beyaz gürültü şeklindeki bu ivmelenmeler, konum üzerinde 3. mertebeye Gauss-Markov süreci yaratacaktır.

3. Kinematik Model Ve Gürültü Kavramı

Fiziksel yasalar çoğu zaman diferansiyel denklem sistemleri şeklinde ifade edilir (SCHWARZ vd. 1989), (GELB 1974). Buna bağlı olarak parametrelerin farklı epoklardaki değerleri arasındaki ilişkiler de diferansiyel denklem sistemleri şeklinde elde edilir. Hareket denklemlerinin diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilmesinin bir faydası da, sürekli olan denklem sisteminin kesikli olarak ifade edilebilmesi, dolayısıyla modelenebilmesini olanaklı hale getirmesidir. Parametrelerin farklı epoklardaki değerleri ve parametrelerin zamana bağlı değişimleri arasındaki ilişkiler;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F x, \\ x_{t+\Delta t} &= \Phi x_t, \\ \dot{\Phi} &= F \Phi \end{aligned} \quad (7)$$

biçiminde yazılabilir (MERMINOD 1989). Burada Φ parametrelerin farklı epoklardaki değerleri arasında ilişki kuran geçiş matrisi, F ise parametreler ile parametrelerin zamana bağlı değişimleri arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyondur. Öngörülen modelden olan sapmaları gürültü (zamana bağlı

olarak değişen rasgele gözlem hataları) olarak yazarsak, (7)’de verilen $\dot{x} = F x$ eşitliği,

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (8)$$

şekline dönüşür. Burada u kaynak gürültü (driving noise), G ise kaynak gürültünün sisteme nasıl gireceğini belirleyen, diğer bir ifade ile kaynak gürültüyü sistem gürültüsüne dönüştüren matristir (MERMINOD 1989). Kinematik modelin oluşturulması için geçiş matrisinin (Φ), F yardımıyla bulunması gerekmektedir. Bu amaçla (7) eşitliği ve

$$\dot{\Phi} = F \Phi = F^2 \Phi, \quad \ddot{\Phi} = F \dot{\Phi} = F^3 \Phi, \dots \quad (9)$$

eşitlikleri yardımıyla geçiş matrisi Taylor serisine açıldığında;

$$\Phi_{t,t+\Delta t} = \Phi_{t,t} \left(I + F \Delta t + \frac{1}{2!} F^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} F^3 \Delta t^3 + \dots \right) \quad (10)$$

eşitliği elde edilir (LIEBELT 1974). Bu şekilde elde edilen geçiş matrisi kullanılarak, sistem gürültüsünün kovaryans matrisi,

$$C_{ww} = \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t, t+\Delta t) G \sigma^2 G^T \Phi^T(t, t+\Delta t) dt \quad (11)$$

şeklinde verilmektedir (STRANG ve BORRE 1997). Kinematik modeller, kullanılan gürültü modeli ve kestirilen parametrelere göre (durum vektörü) sınıflandırılabilir. Örneğin sadece konum ve hızların bulunduğu bir kinematik model 1. derece kinematik model olarak değerlendirilir. İvme de parametre olarak durum vektörüne dahil edilirse, 2. derece kinematik model oluşturulmuş olur. Kullanılan gürültü modeline göre sınıflandırma ise, hangi parametre üzerinde beyaz gürültü tanımlandığıyla ilgilidir. Önceki bölümde açıklandığı üzere beyaz gürültünün türevi bulunmadığından tüm gürültü modelleri beyaz gürültü vasıtasıyla elde edilir. Örneğin sabit hızlı bir sistemde sistem hatası olarak rasgele ivmelenmeler şeklinde gürültü düşünülürse, beyaz gürültü ivme üzerinde tanımlandığından, 2. mertebeye bir sistem olarak adlandırılır. Bu iki sınıflandırmayı birleştirecek bir örnek vermek gerekirse; 3. mertebeye, ikinci derece kinematik model, konum, hız ve ivmenin parametre olarak kestirildiği, sistemde beyaz gürültü olarak ivme driftinin bulunmasını ifade eder. Bu modele göre ivme üzerinde 1. derece, hız için 2. derece, konum için ise 3. derece Markov süreci tanımlıdır. Kinematik modeller için boyut kavramı bir sınıflandırma ölçütü olarak değerlendirilmemiştir. Bunun en önemli nedeni tek boyutlu sistemler için geliştirilen kinematik modellerin kolaylıkla daha fazla boyutlar için genelleştirilebilmesidir. Farklı boyutlardaki kinematik modellerin farklı gürültü modelleri ile oluşturulması, tek boyutlu bir sistem için elde edilen eşitliklerin iki ve üç boyutlu sistemlere genelleştirilmesi ile gerçekleştirilebilir.

Navigasyon çalışmalarında tek boyutlu bir sistem için genel kinematik model, sabit ivmeli ve kaynak gürültü olarak ivme driftinin bulunduğu diferansiyel denklem sistemi olarak

gösterilebilir. Bu ivme driftinin 1. mertebe Gauss-Markov modeli ile ifade edilebilen korelasyonlu gürültüye sahip olduğu bir sistem olduğu düşünüldüğünde;

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (12)$$

elde edilir (LIEBELT, 1974). Burada x konum vektörü olup, diğer parametreler ise önceki eşitliklerde verildiği gibidir. Görüleceği üzere ivme drifti,

$$\ddot{x} = -\alpha \dot{x} + \omega \quad (13)$$

şeklinde 1. mertebe Gauss-Markov süreci şeklinde tanımlanmıştır. Daha önce verilen sınıflandırma kuralları ile bu modelin 2. derece, 3. mertebe bir kinematik model olduğu açıktır. (12) eşitliğinde dikkat edilmesi gereken diğer bir konu ise sadece ivme drifti üzerinde gürültü tanımlanmış olması, ivme, hız ve konum üzerinde oluşacak hataların ivme driftinin zaman aralığındaki entegrasyonundan kaynaklanmasıdır. Örneğin hız bileşeninin ayrıca gürültüye (1. mertebe Gauss-Markov) sahip olması arzu edilseydi (12) eşitliğinin,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (14)$$

şeklinde ifade edilmesi gerekecekti. Uygulamada bu tip sistemlerin bulunması pek olanaklı olmasa da gürültü modellerinin oluşturulmasını göstermek açısından önemlidir. (12) eşitliğiyle verilen denklem sisteminden geçiş matrisini (10) eşitliğiyle elde etmek için (12) eşitliğinin sağ tarafındaki matrisin kuvvetlerinin alınması gereklidir. Daha sonra gösterileceği üzere kuvvet serisi açılımı oluşturacak bu değerlerin elde edilmesi için öncelikle ikinci, üçüncü, dördüncü kuvvetleri alınırsa;

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & -\alpha^3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$F^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & -\alpha^3 \\ 0 & 0 & \alpha^4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

elde edilir (MERMİNOD 1989). Geçiş matrisi $\Phi_{t,t}$ nin aynı epoktaki değerinin birim matris olduğu hatırlanırsa (10) eşitliği yardımıyla $\Phi_{t,t+\Delta t}$;

$$\Phi_{t,t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (18)$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$a = \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{-\alpha \Delta t^3}{3!} + \frac{\alpha^2 \Delta t^4}{4!} + \frac{-\alpha^3 \Delta t^5}{5!} + \dots \quad (19)$$

$$b = \Delta t + \frac{-\alpha \Delta t^2}{2!} + \frac{-\alpha^2 \Delta t^3}{3!} + \frac{-\alpha^3 \Delta t^4}{4!} + \dots \quad (20)$$

$$c = 1 - \alpha \Delta t + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2!} + \frac{-\alpha^3 \Delta t^3}{3!} + \frac{\alpha^4 \Delta t^4}{4!} + \dots \quad (21)$$

olarak verilir. Bu eşitlikler kuvvet serisi açılımına uygun olarak yeniden düzenlenirse;

$$\alpha^2 (a + 1 + \alpha^2 \Delta t) = 1 + \frac{(-\alpha \Delta t)}{1} + \frac{(-\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (22)$$

$$-\alpha (b + 1) = 1 + \frac{(-\alpha \Delta t)}{1} + \frac{(-\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (23)$$

$$c = 1 + \frac{(-\alpha \Delta t)}{1} + \frac{(-\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\alpha \Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (24)$$

elde edilir. BRONSHTEIN ve SEMANDYAYEV (1978)'de verilen kuvvet serisi açılımının,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (25)$$

olduğu hatırlanırsa, a, b ve c

$$a = \frac{e^{-\alpha \Delta t} - 1 + \alpha \Delta t}{\alpha^2}; \quad b = \frac{1 - e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha}; \quad c = e^{-\alpha \Delta t} \quad (26)$$

şeklinde elde edilir. Geçiş matrisi elde edildikten sonra (11) eşitliği ile sistem gürültüsü kovaryans matrisi;

$$C_e = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad (27)$$

şeklinde dir. Burada;

$$a = \frac{(1 + 2\alpha \Delta t - 2\alpha^2 \Delta t^2 + \frac{2\alpha^3 \Delta t^3}{3} - 4\alpha \Delta t e^{-\alpha \Delta t} - e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha^5} \quad (28)$$

$$b = \frac{(1 - 2\alpha \Delta t + \alpha^2 \Delta t^2 - 2\alpha \Delta t e^{-\alpha \Delta t} - 2e^{-\alpha \Delta t} + e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha^4} \quad (29)$$

$$c = \frac{(1 - 2\alpha \Delta t e^{-\alpha \Delta t} - e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha^3} \quad (30)$$

$$d = \frac{(-3 + 2\alpha \Delta t + 4e^{-\alpha \Delta t} - e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha^3} \quad (31)$$

$$e = \frac{(1 - 2e^{-\alpha \Delta t} + e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha^2} \quad (32)$$

$$f = \frac{(1 - e^{-2\alpha \Delta t})}{2\alpha} \quad (33)$$

şeklinde dir. Zaman korelasyonlu bu modelde korelasyon zamanı $T \rightarrow \infty$, diğer bir ifade ile $\alpha \rightarrow 0$ olduğunda ivme drifti

korelasyonsuz beyaz gürültüye sahip olacaktır. Buna bağlı olarak da, ivme üzerinde rasgele yürüyüş, hız üzerinde 2. mertebe rasgele yürüyüş, konum üzerinde de üçüncü mertebe rasgele yürüyüş oluşacaktır. Uygulamada korelasyon zamanı sonsuz olmasa bile ölçü aralığına göre oldukça büyükse, yine aynı durumdan söz edilebilir. Buna göre (18) eşitliğinde verilen geçiş matrisi $\Phi_{t,t+\Delta t}$;

$$\Phi_{t,t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

biçimine, (27) eşitliğiyle verilen gürültü kovaryans matrisi ise ;

$$C_\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^5}{6} & \frac{\Delta t^4}{2} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{20}{6} \Delta t^4 & \frac{8}{2} \Delta t^3 & \frac{6}{2} \Delta t^2 \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{bmatrix} \quad (35)$$

biçimine dönüşür. Bu şekilde sabit ivme modeli ile gürültünün zaman korelasyonlu ve rasgele yürüyüşe sahip olduğu iki örnek verilmiş olmaktadır. Bu örnekler kullanılarak çalışmanın bütünlüğü amacıyla kinematik modelleri üç boyutlu bir sistem için, sırasıyla sabit hız, zaman korelasyonlu sabit hız, sabit ivme, zaman korelasyonlu sabit ivme varsayımı için kinematik model hesaplanmış ve aşağıda özetlenmiştir:

• Sabit Hız Modeli (1. derece, 2. mertebe, 3 Boyutlu Model)

Bu modelde beyaz gürültü şeklinde ivmelenmeler mevcut olup, sonucunda hız üzerinde rasgele yürüyüş, konum üzerinde ise ikinci mertebe rasgele yürüyüş oluşur. Bu modelde sırasıyla geçiş matrisi ve sistem gürültü kovaryans matrisi aşağıdaki gibi oluşturulabilir;

$$\Phi_{t,t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$C_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (37)$$

• Zaman Korelasyonlu Sabit Hız Modeli (1. derece, 2. mertebe, 3 Boyutlu Model)

Bu modelde renkli gürültü (üstel korelasyonlu) şeklinde ivmelenmeler mevcut olup, hız üzerinde 1. derece Gauss-Markov, konum üzerinde ise 2. mertebe Gauss-Markov süreci oluşur. Bu modelde sırasıyla geçiş matrisi ve sistem gürültü kovaryans matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & e^{-\alpha\Delta t} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$C_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & e \\ e & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (39)$$

Burada d, e ve f , (31), (32) ve (33) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

• Sabit İvme Modeli (2. derece, 3. mertebe, 3 Boyutlu Model)

Bu modelde beyaz gürültü şeklinde ivme driftleri mevcut olup, sonucunda ivme üzerinde rasgele yürüyüş, hız üzerinde ikinci mertebe rasgele yürüyüş, konum üzerinde ise üçüncü mertebe rasgele yürüyüş oluşur. Bu modelde sırasıyla geçiş matrisi ve sistem gürültü kovaryans matrisi;

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C_{\text{xx}} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^5}{20} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^5}{20} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (41)$$

şeklinde elde edilebilir.

• Zaman Korelasyonlu İvme Modeli (2. derece, 3. mertebe, 3 Boyutlu Model)

Bu modelde renkli gürültü (üstel korelasyonlu) şeklinde ivme driftleri mevcut olup, sonucunda ivme üzerinde birinci mertebe Gauss-Markov, hız üzerinde ikinci mertebe Gauss-Markov, konum üzerinde ise üçüncü mertebe Gauss-Markov gürültüleri oluşur. Bu modelde sırasıyla geçiş matrisi ve sistem gürültü kovaryans matrisi şöyledir:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C_{\text{EE}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & e \\ c & 0 & 0 & e & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & e & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & e & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (43)$$

Geçiş matrisinde geçen a, b ve c (26)'da verildiği şekildedir. Sistem gürültü kovaryans matrisinde geçen a, b, c, d, e, ve f, (28), (29), (30), (31), (32), (33) eşitliklerinde verildiği gibidir.

4. Kalman Filtresi

Parametre tahmininde çoğunlukla kestirilen parametrelerin sistematik sapmalardan arıtılmış (unbiased) ve minimum varyansla elde edilmesi amaçlanır (GREWAL vd. 2001), (FARRELL ve BARTH 1999). Diğer bir kavram ise özyineleme (recursion) dir (LIEBELT 1967), (GELB 1974), (STRANG ve BORRE 1997). Özyineleme, kısaca ekstrapolasyon ile hesaplanabilecek parametrelerin yeni ölçülerle hesaplanabilmesidir. Kalman filtresi tekniği de dinamik (navigasyon için kinematik) model ile ölçüleri birleştiren optimal ve özyinelemeli bir parametre kestirim yöntemidir. (HERRING 1999), (GELB 1974).

Kalman filtresi uygulamasında her yeni epokta bir önceki epoka ait parametre kestirim değerleri ve kovaryans matrisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle ilk epok çözümü için başlangıç değerleri bulunmalıdır. Başlangıç değerleri (parametre kestirim değerleri ve varyansları), NMEA formatındaki gerçek zamanlı GPS navigasyon çözümleri için başka bir kaynak mevcut değilse aşağıdaki şekilde bulunabilir:

a. Parametre olarak konum ve hızın kullanıldığı sabit hız varsayımı bir model için, genel hareket denklemi ve ilk iki epok (t ve $t+1$) ölçüleri kullanılarak üçüncü epoktaki koordinat ve hız değerleri;

$$v_{t+2} = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t_{t,t+1}} \quad (44)$$

$$x_{t+2} = x_{t+1} + \Delta t_{t+1,t+2} v_x \quad (45)$$

şeklinde elde edilebilir.

b. Parametre olarak konum, hız ve ivmenin kullanıldığı sabit ivme varsayımı bir model için, genel hareket denklemi ve ilk üç epok (t , $t+1$ ve $t+2$) ölçüleri kullanılarak 4ncü epoktaki koordinat, hız ve ivme değerleri;

$$a_{t+3} = \frac{v_{t+1,t+2} - v_{t,t+1}}{\Delta t_{t+1,t+2}} \quad (46)$$

$$v_{t+3} = v_{t+2} + \Delta t_{t+2,t+3} a_{t+3} \quad (47)$$

$$x_{t+3} = x_{t+2} + \Delta t_{t+2,t+3} v_{t+2} + \frac{a_{t+3} \Delta t_{t+2,t+3}^2}{2} \quad (48)$$

şeklinde elde edilebilir.

c. Ölçülerin a priori varyanslarının bulunması için başlangıç varyans ve kovaryanslarının bulunması:

I. İki boyutlu modellerde HDOP (Horizontal Dilution of Precision; Yatay Duyarlılık Bozulması) ve UERA (User Equivalent Range Accuracy; Kullanıcının elde edebildiği Mesafe Doğruluğu) kullanılarak;

$$HDOP * UERA = \sqrt{\sigma_{DOĞU-BATI}^2 + \sigma_{KUZEY-GÜNEY}^2} \quad (49)$$

eşitliği yazılabilir. Daha sonra toplam hatayı kuzey ve doğu bileşenlerine ayırmak amacıyla “varyanslar oranı” olarak tanımlanırsa

$$\Psi = \frac{\sigma_{KUZEY-GÜNEY}^2}{\sigma_{DOĞU-BATI}^2} \quad (50)$$

elde edilir.

Her epokta doğu ve kuzey koordinat bileşenlerinin hatası;

$$\sigma_{DOĞU-BATI}^2 = \frac{(HDOP * UERA)^2}{1 + \Psi} \quad (51)$$

$$\sigma_{KUZEY-GÜNEY}^2 = \frac{\Psi * (HDOP * UERA)^2}{1 + \Psi} \quad (52)$$

şeklinde bulunabilir.

II. Üç boyutlu modellerde ise PDOP (Position Dilution of Precision; Konum Duyarlık Bozulması) ve UERA değerleri kullanılarak;

$$PDOP * UERA = \sqrt{\sigma_{DOĞU-BATI}^2 + \sigma_{KUZEY-GÜNEY}^2 + \sigma_{YÜKSEK}^2} \quad (53)$$

eşitliği yazılabilir. Daha sonra iki boyutlu modelde olduğu gibi her bileşen için “varyanslar oranı” tanımlanarak her epokta ölçülen koordinat bileşenlerinin varyansları bulunabilir. Kalman Filtresinde ilk epok çözümü için gerekli parametre değerleri ve kovaryans matrisleri elde edildikten sonraki işlem adımları aşağıdaki şekildedir :

- Kinematik Modelden Parametre değerlerinin prediksyonu:

$$\bar{x}_{t+1} = \Phi_{t,t+1} \hat{x}_t \quad (54)$$

- Kinematik Modelden Kovaryans matrisinin prediksyonu:

$$\bar{Q}_{t+1} = \Phi_{t,t+1} \hat{Q}_t \Phi_{t,t+1}^T + Q_{\epsilon\epsilon} \quad (55)$$

- Kazanç Matrisinin Hesaplanması:

$$G_{t+1} = \bar{Q}_{t+1} A_{t+1}^T (Q_{II} + A_{t+1} \bar{Q}_{t+1} A_{t+1}^T)^{-1} \quad (56)$$

- Innovasyon vektörünün hesaplanması:

$$v_{t+1} = l - A_{t+1} \bar{x}_{t+1} \quad (57)$$

- Filtrelenmiş Parametre Değerlerinin Hesaplanması:

$$\hat{x}_{t+1} = \bar{x}_{t+1} + G_{t+1} v_{t+1} \quad (58)$$

- Filtrelenmiş Parametre Kovaryans Matrisinin Hesaplanması:

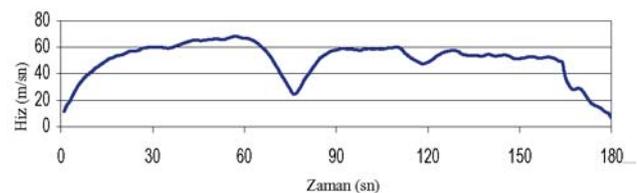
$$\hat{Q}_{t+1} = \bar{Q}_{t+1} - G_{t+1} (Q_{II} + A_{t+1} \bar{Q}_{t+1} A_{t+1}^T) G_{t+1}^T \quad (59)$$

(LIEBELT 1967), (GELB 1974), (STRANG ve BORRE 1997), (MERMINOD 1989) ve (SCHWARZ vd. 1989).

5. Uygulama

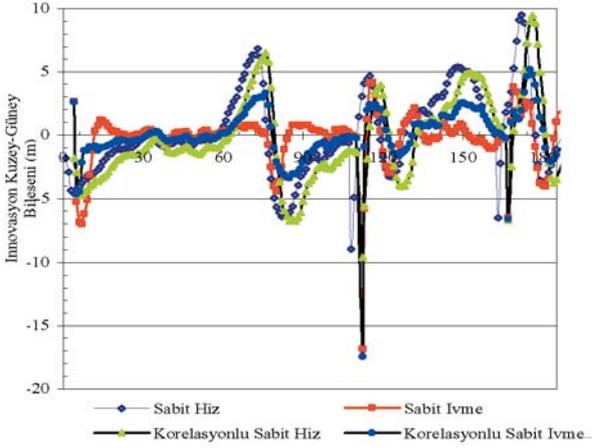
Uyarlamalı Filtreler ile ilgili farklı yöntemler mevcuttur (GREWAL vd. 2001), (FARRELL ve BARTH 1999), (MOORE ve WANG 2001), (MOORE ve WANG 2002). Bu çalışmada navigasyon çözümlerinde kolaylıkla kullanılacak olan ve korelasyonlu Markov süreçlerine dayanan Kalman Filtresi tekniği test edilmiştir. Çalışma gerçek zamanlı yerine büroda yapılmakla birlikte, AKTUĞ ve ÇELİK (2002)’de verilen gerçek zamanlı olarak toplanmış NMEA formatındaki verilerden yararlanılmıştır.

Farklı modellerin etkisini göstermek amacıyla hareket hindeki bir araç ile toplanmış NMEA formatındaki veriler alınmıştır. Şehirsel alanda bir aracın tipik hareketlerini temsil eden üç dakikalık bir zaman dilimine ait bu verilerle daha önce açıklanan dört farklı model test edilmiştir. Söz konusu zaman diliminde hızın artışı Şekil 4’de gösterilmektedir. Simülasyon yerine gerçek verilerin kullanılmasının amacı gerçek anlamda korelasyonlu veriler üretebilmektir. Örneğin Şekil 4’te verilen verilerde 65-75 sn aralığında aracın yavaşladığı, 75-90 sn aralığında tekrar hızlandığı ve 160 sn den sonra tekrar yavaşladığı görülmektedir. Kentsel trafik koşulları içerisinde ani yavaş hareketleri, trafik ışıkları, sollamalar ve ani yavaşlamalar gibi düzenli olmayan bu hareketlerin, zaman korelasyonlu olduğu düşünülebilir.



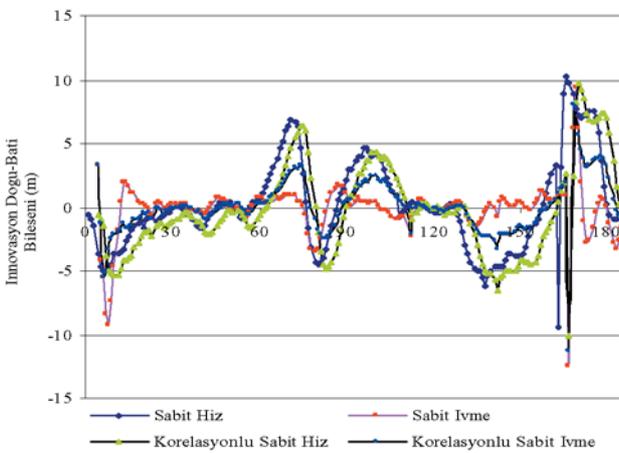
Şekil 4. Değişken hızla sahip (ivmeli) hareket

Farklı kinematik modellerin, bu düzensiz hareket üzerindeki etkisini göstermek üzere innovasyon vektörünün değerleri hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 5 ve Şekil 6’da gösterilmiştir. İnnovasyon vektörünün değerleri, genel yapı olarak hiçbir modele tam olarak uymayan bu düzensiz harekette kinematik model ve gürültü modelinin ölçülerle uyumunu göstermektedir. Kalman Filtresi Tekniğinin özyinelemeli doğası gereği, kinematik model ile önceki konum ve hız değerlerine bağlı olarak sonraki epokta konum ve hız değerleri kestirilmektedir.



Şekil 5. Farklı kinematik ve gürültü modellerine ait innovasyon Kuzey-Güney bileşeni.

Verilen örnekte sabit hız ve zaman korelasyonlu sabit hız modellerinin 15-60 sn aralığındaki nispeten düzenli olan harekete uyumlu olduğu gözlenirken, 65-75, 75-90 ve 160-180 sn aralıklarında oluşan ani ivme değişimlerine uyum sağlayamadığı ve büyük innovasyon değerlerinin olduğu gözlenmektedir. Buna karşın sabit ivme ve korelasyonlu ivme modellerinin bu düzensiz hız değişimlerinin bulunduğu aralıklarda ani hız değişimlerine daha uyumlu tepki verdiği görülmektedir. Burada dikkat çeken en önemli konu sabit hızlı veya zaman korelasyonlu sabit hızlı modellerin, ani hız değişimleri ardından sistem tekrar düzenli (sabit hıza yakın) bir harekete geçse bile, kinematik model ile önceki evrelerden gelen değerler sebebiyle düzenli harekete çabuk uyum sağlayamamasıdır. Bu durum 80. sn' deki ani hız değişiminin ardından nispeten sabit hızlı sayılabilecek 90-110 sn aralığında ve 120. sn' deki ani hız değişimini takip eden 130-150 sn aralığında açıkça görülmektedir. Sabit hızlı ve zaman korelasyonlu sabit hızlı modeller 80 ve 120. sn deki ani değişimler sonrasında ancak sırasıyla 110 ve 165. sn' lerde sabit hızlı sisteme uyum sağlayabilmektedir.



Şekil 6. Farklı kinematik ve gürültü modellerine ait innovasyon Doğu-Batı bileşeni.

6. Sonuçlar ve Öneriler

Kentsel alanlarda yaya geçişi, trafik sıkışıklığı, uzun beklemler vb. nedenlerden dolayı tek bir kinematik model ile gerçek hareketin modellenmesi olanaklı değildir. Ancak manevra, ani hız ve ivme değişimleri nedeniyle öngörülen modelden sapmaların korelasyonlu olduğu düşünüldüğünde, uygun gürültü modelleri ile filtrenin optimal çalışması sağlanabilir ve navigasyon çözümleri iyileştirilebilir.

Uygulamada rasgele yürüyüşler veya beyaz gürültü korelasyonlu modellerin özel halleri olarak elde edilebilmektedir. Örneğin Şekil 3'teki ilk grafikte verilen çok kısa korelasyon aralığı (1 sn) beyaz gürültü, son grafikteki nispeten uzun korelasyon aralığı (3600 sn) rasgele yürüyüş oluşturmaktadır. Özellikle kullanılacak korelasyon zamanının seçimi için çeşitli simülasyonlar yapılmalıdır. Bu çalışmada kullanılan korelasyon zamanı, günlük trafik içerisindeki hareketler değerlendirilerek 20-30 sn olarak alınmıştır.

Zaman korelasyonlu modellerin çok çabuk şekilde hareket niteliğinin değişimine uyabildiği söylenebilir. Bu tip modeller sadece navigasyonda hareket niteliği değil, korelasyonlu GPS ölçü (alıcı saat, yansıma, atmosferik etkiler vb.) hatalarından kaynaklanan hataların modellenmesi açısından da önemlidir.

Sabit hızlı olmayan bir sistemde sabit hızlı modeller (sabit hızlı ve zaman korelasyonlu sabit hız) genel olarak diğer modellere göre daha uyumsuz sonuç vermekte, sistemin ani değişimleri ardından düzenli harekete geçmesine de geç uyum sağlamaktadır. Bu çalışmada kullanılan veri niteliğinin, bir aracın kentsel trafik koşullarında tipik hareketini yansıttığı kabul edilirse, kentsel alanda genel olarak ivmeli bir hareketin ağırlıklı olduğu söylenebilir. Özellikle sabit hızlı modellerin ani hız değişimleri ardından sabit hızlı hareketlere uyum sağlaması için sabit hız sayılabilecek bir harekete 30-40 epok devam etmesi gerektiği gözlenmiştir. Bu anlamda kentsel alandaki navigasyon uygulamalarında sabit ivmeli ve zaman korelasyonlu sabit ivmeli modellerle daha iyi sonuç alınacağı, çevresel koşullar ve aracın ağırlıklı olarak sergilediği hareketler dikkate alınarak korelasyon zamanının belirlenmesi gerektiği değerlendirilmektedir.

Kuşkusuz uyarlamalı filtreler korelasyonlu kinematik gürültü modelleri ile sınırlı değildir. Ancak korelasyonlu filtreler uyarlamalı filtreler olarak oldukça basit ve etkin şekilde kullanılabilir. Sabit GPS İstasyonları zaman serisi analizi, periyodik deniz seviyesi değişimlerinin incelenmesi, navigasyon uygulamaları gibi farklı nitelikte hata kaynakları ve gürültüler etkisindeki verilerle parametre kestirimi yapılmasının ilk adımının uygun gürültü modelleriyle söz konusu etkilerin modellenmesi olduğu bilinmektedir. Bu anlamda, uygun kinematik ve gürültü modelleriyle birlikte kullanılması durumunda, Kalman Filtresi tekniğinden bir parametre kestirim yöntemi ötesinde, etkin bir veri analiz tekniği olarak yararlanılabileceği değerlendirilmektedir.

Kaynaklar

- AKTUĞ B. ve ÇELİK R. N. : **Kinematik Objelerin GPS ile İzlenmesi: Sayısal Harita Destekli Bir Navigasyon Sistemi**, HKM, Sayı:88, 2003.
- BRONSHTEIN I. N. ve SEMENDYAYEV K. A. : **Handbook of Mathematics**, Verlag Harri Deutch, Thun and Frankurt, Main, ISBN 3871446440, 1978.
- CROSS P. A. : **Advanced Least Squares Applied to Position Fixing**, Working Paper, No.6, Department of Land Surveying, Polytechnic of East London., 1990.
- FARRELL J. A. ve BARTH M. : **The Global Positioning System & Inertial Navigation**, McGraw-Hill, USA, 1999. FARRELLA. : **Applied Optimal Estimation**, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- GREWAL S. G., WEILL L. R., ANDREWS, P. A. : **Global Positioning systems, Inertial Navigation and Integration**, John Wiley & Sons, USA, 2001.
- HERRING T. A. : **Global Positioning System and its Applications**, Graduate Course, Machusetts Institute of Technology, Cambridge, 1999.
- HERRING T. A. : **Geodesy by Radio Interferometry: The Application of Kalman Filtering to the Analysis of Very Long Baseline Interferometry Data**, Journal of Geophysical Research, Vol.95, B8, pp. 12,561-12,581, 1999.
- HEKİMOĞLU Ş. : **Rasgele Süreçler**, Araştırma Raporu Serisi, No.1, KTÜ Basımevi, Trabzon, 1981.
- KALMAN R. E. : **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**, Journal of Basic Eng., 82D, 35-45, 1960.
- LIEBELT P. B. : **An Introduction to Optimal Estimation**, Addison-Wesley, Massachusetts, 1967.
- MERMİNOD B. : **The Use of Kalman Filters in GPS Navigation**, UNISERV, S-35, School of Surveying, The Universtiy of New South Wales, Australia, 1989.
- MOORE M. ve WANG J. : **Adaptive dynamic modelling for kinematic positioning**, IAG Scientific Meeting, Budapest, Hungary, 3-8 September, 2001.
- MOORE M. ve WANG J. : **An extended dynamic model for kinematic positioning**, submitted to Navigation, 2002.
- SALZMAN M. : **Least Squares Filtering and Testing for Geodetic Navigation Applications**, Netherlands Geodetic Commission, N.37, 1993.
- SCHWARZ K. P., CANNON M. E., WONG R. V. C. : **A Comparison of GPS Kinematic Models For The Determination Of Position And Velocity Along A Projectory**, Manuscripta Geodaetica, 14, 345-353, 1989.
- SCHWARZ K. P. ve LACHAPPELLE G. : **Kinematic Systems in Geodesy, Surveying, and Remote Sensing**, Symposium No.107, International Association of Geodesy, 1990.
- STRANG G. ve BORRE K. : **Linear Algebra, Geodesy, GPS**, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1997.