Öneri, C.1, S.2
Ocak, 1995, ss.3-15

Fuzzy Mantık (Bulanık Mantık)

Prof. Dr. Necdet Tekin*
Arş. Gör. Salih Karanfil**

- Temel Felsefesi, kuralları, Keskin (Crisp) Mantıkla karşılaştırılması ve Uygulama Alanları-

I. Giriş :

Önce Fuzzy Mantığın ne olduğunu ortaya koymaya çalışalım. Fuzzy Mantık terimi biri "dar anlamda Fuzzy Mantık" diğeri "geniş anlamda Fuzzy Mantık" olmak üzere iki farklı anlamda kullanılır.

a)Dar anlamda Fuzzy Mantık: Bu anlamı ile Fuzzy Mantık bir "mantıksal sistemdir". Bu mantıksal sistem; insan aklının (usavurma-muhakeme) kesinden ziyade "yaklaşık" modları (durumları) için yaşayan koşullara en iyi uyumu veren bir "model" ortaya koymayı amaçlar.

b) Geniş anlamda Fuzzy Mantık: Geniş anlamda Fuzzy Mantık temelde Fuzzy Küme (Set) Teoriyi kapsar. Fuzzy Küme Teorisinin tüm kurallarını kendi çıkarımlarında esas olarak kullanır. Fuzzy Küme Teori ise "Fuzzy bağıntılı sınıfların" bir teorisidir. Bu açıdan bakıldığında, dar anlamda Fuzzy Mantık, geniş anlamda Fuzzy Mantığın bir alt kümesidir.

Fuzzy Küme Teori; Fuzzy kümelerini, küme işlemlerini, üyelik fonksiyonlarını, Fuzzy bağıntılarını, Fuzzy sayılarını, bunlarla ilgili özellikleri, haritalanmaları ve diğer Fuzzy işlemleri içerir.

Kesin kavramlardan ziyade, Fuzzy kavramlar ve hemen hemen tüm Fuzzy bağlı sınıflar gerçeğinden yola çıkar.

Özetle Fuzzy küme teori :
- Dar anlamda Fuzzy Mantık
- Fuzzy Sistemler
- Fuzzy Matematiksel Programlama
- Fuzzy Aritmetik
- Fuzzy Model Tanımlama
- Fuzzy Topoloji
- Fuzzy Karar Analizi

ana başlıklarını kapsar. Sonuç olarak en geniş anlamda Fuzzy Mantık; Fuzzyleştirilmiş Keskin Mantığın bir bileşimidir.

Fuzzy Mantığın birinci amacı, kesinden ziyade yaklaşık mantık metodları ile ilgili tekniklerin, akıl yürütme ve hesaplanabilir, kavramları belli, matematik tekniklerle "Kavram Sistemleri" haline getirecek temelleri sağlamaktır.

Fuzzy Mantıkta kesin hüküm vermeler, çıkarımlar ve usavurmalar sadece yaklaşık usavurmaların bir limit durumu olarak ortaya çıkar. Sonuçta da Fuzzy Mantıkta her şey bir dereceye yani bir öneme sahiptir.

II. Mantıksal Sistemler

Mantıksal sistemleri temel başlıkları ile şöyle sıralayabiliriz.

1.Önermesel Mantık
2.Doğrulayıcı (Predictive) Mantık
3.Şekli Mantık
4.Çok Değerli Mantık
5.Olasılıksal Mantık
6.Zamansal Mantık
7.İspatlanamayan (Default) Mantık

Fuzzy Mantıksal Sistemleri ise yukarıda sıraladığımız temel mantıksal sistemlerin başına Fuzzy sözcüğünü getirerek oluşturabiliriz.

1.Fuzzy Önermesel Mantık
2.Fuzzy Doğrulayıcı Mantık
3.Fuzzy Şekli Mantık
4.Fuzzy Çok Değerli Mantık
5.Fuzzy Olasılıksal Mantık
6.Fuzzy Zamansal Mantık
7.Fuzzy İspatlanamayan Mantık

Şekilsel olarak mantığı
1- Standart Mantıklar
2- Standart Olmayan Mantıklar
olarak iki sınıfta toplayabiliriz.

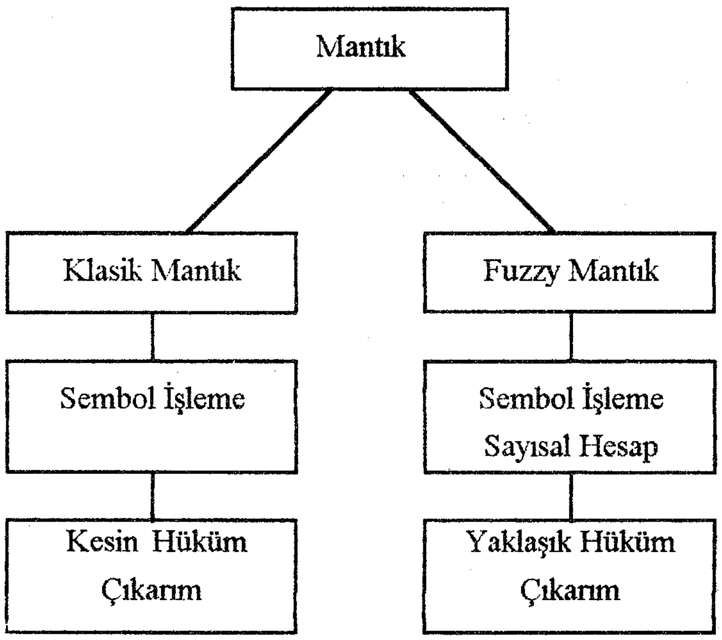
Standart Mantıklar
a) Önermesel hesap
b) Doğrulama
işlevlerinden oluşur.

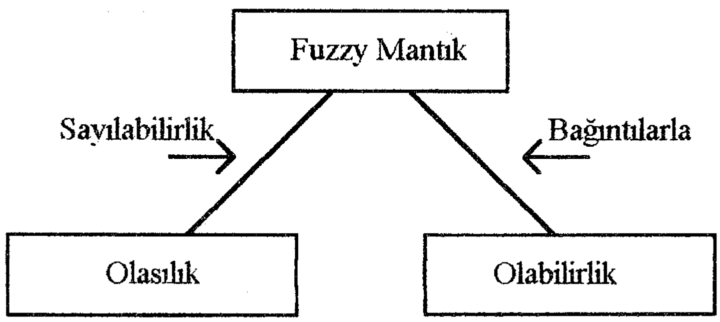
Standart Olmayan Mantıklar
a) Çok değerli mantık
b) Şekli mantık
c) Geçici mantık
d) Kendi kendine bilgi edinme -

* M.Ü. İktisadi İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı Öğretim Üyesi
** Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi

üretme, bilgi kuramı-mantığı
e) Sezgisel (intutionistic) mantık
f) Non-monotonik mantık
g) Probabilistik mantık
h) Fuzzy mantık
başlıklarını kapsar.

ŞEMATİK OLARAK MANTIK BİLMİ





Öneri, C.1, S.2
Ocak, 1995, ss.3-14

III. Keskin (Crisp) Mantık ve Temel Kuralları

George Boole ve De Morgan'ın öncülük ettiği ve daha pek çok bilim adamı ve filozofun çalışmaları ile meydana getirdiği bir bilim dalıdır. Keskin Mantıkta dualist felsefe egemen olmuştur. Bu nedenle bu mantığa iki değerli mantık (keskin mantık) da denilmektedir. Keskin Mantıkta sadece doğru ve yanlış vardır. Ayrıca doğru ve yanlış ancak ve ancak sezgisel olarak kavranabilen ve biri kullanılmadan diğeri tanımlanamayan nesnel kavramlardır. Keskin Mantıkta, bir kümeyi oluşturan elemanlar, keskin elemanlar olup bir eleman bir kümenin ya elemanıdır ya da değildir. X evrenindeki bir A alt kümesi için tüm $x \in X$ değerleri için karakteristik fonksiyon,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ancak ve ancak } x \in A \\ 0, & \text{ancak ve ancak } x \notin A \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada 1 tamamen A kümesine ait olan, 0 ise A kümesine ait olmayan elemanları gösterir. Keskin mantıkta ara değerlere yer yoktur.

Keskin mantığın daha fazla üzerinde durduğu önermeler mantığında

$$\wedge,\ \vee,\ \underline{\vee},\ \Rightarrow \text{ ve } \Leftrightarrow$$

bağlaçları kullanılarak bileşik önermeler oluşturulur.

Önermelerin aldığı doğruluk değerleri ne olursa olsun mantıksal ifade hep doğru değerini alıyorsa bu ifadeye totoloji, hep yanlış değerini alıyorsa çelişki denir. p ve q gibi iki önerme denk ise $p \Leftrightarrow q$ bir totolojidir. Totolojilerde önermeler başka önermelerle değiştirilse bile yine totolojidirler.

$\wedge$ ve $\vee$ bağlaçları idempotent, komütatif, asossiyatif ve birbirleri üzerine distribütiftirler. Yine bu bağlaçlar için;

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

De Morgan Denklikleri mevcuttur. $\underline{\vee}$ bağlacı komütatif ve asossiyatif olup

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q;$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

özellikleri geçerlidir. Bu sistemin izomorf olduğu Boole Cebri ise, bir İngiliz matematikçisi ve mantıkçısı olan G.Boole'un tamamen matematik prensiplerden hareket ederek mantık üzerinde yaptığı sembolik metodu kapsar.

Önermeler mantığındaki önermelerin değerlendirilmesi için kullanılan (D) ve (Y) sembolleri yerine burada sırasıyla (1) ve (0) kullanılır.

Bir B sınıfı, (+) ve (·) ikili işlemlerine göre aşağıdaki postülaları gerçekliyorsa B'ye Boole Cebri denir.

(P_1): (+) ve (·) komütatiftir.

(P_2): B de farklı iki birim elemanı mevcuttur. (+) ya göre 0 ve (·) ya göre 1.

(P_3): Bu işlemlerden biri diğeri üzerine distribütiftir.

(P_4): B nin her a elemanı için yine B de olan bir a' elemanı vardır, öyle ki $a + a' = 1$ ve $a \cdot a' = 0$ olur.

Boole Cebrinde (+) ve (·) işlemleri önermeler mantığındaki sırasıyla $\vee$ ve $\wedge$ bağlaç-larının yerini alır. Ayrıca Boole Cebrinde tümleyeni göstermek için kullandığımız " ′ " sembolü önermeler mantığındaki " ~ " sembolü ile eşdeğerdir.

IV. Fuzzy Mantık ve Tarihçesi

1965 yılında Lotfi A. Zadeh belirsizliğin temsili için araç olarak Fuzzy kümeler ve Fuzzy Mantık teorisini geliştirmiştir. Bunu takiben Rescher, Dubois and Prade, Lakeoff, Yager Bellman, Kandel ve diğerleri Fuzzy Mantığın gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. Geçmişte belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Bunun yanı sıra son otuz yılda gelişen Fuzzy kümeler kuramı ise, belirsizlik ifade eden terimler ve kavramların gelişigüzel bir ayırıma tabi tutulmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak çok değerli kümeler kuramı ve kapsamı içinde tanımlanmalarına yol açmıştır.

Fuzzy Mantık temelde çok değerli mantık, olasılık kuramı ve yapay zeka alanları üzerine oturtulmuştur.

Fuzzy Mantık için matematiğin gerçek dünyaya uyarlanması diyebiliriz. Çünkü Fuzzy Mantık; Keskin Mantığın açık/kapalı, soğuk/sıcak, hızlı/yavaş gibi ikili denetim değişkenlerinden oluşan keskin dünyayı, az açık/az kapalı, serin/ılık, biraz hızlı/biraz yavaş gibi gevşek (soft) niteleyicilere belli üyelik dereceleri atayarak gerçek dünyamıza yansıtmayı ve gerçek dünyayı daha yaklaşık temsil eden sistemler oluşturmayı başarmıştır.

V. Günümüze Değin Birkaç Uygulama Alanı Örnekleri

Fuzzy Mantığın teorik yapısından doğan çıkarımlar Fuzzy denetimin uygulama alanlarına yansımıştır. Fuzzy denetimin ilk uygulamaları genellikle endüstriyel alanlarda, çimento sanayiinde, su arıtma sistemlerinde, nükleer reaktör, asansör ve vinç denetimi gibi alanlarda olmuştur. Kuzey Japonya'nın Sendai kentindeki metro sisteminde Fuzzy Mantığın çok başarılı bir biçimde kullanılması Fuzzy denetim uygulamalarına büyük bir hız kazandırmış ve bu olay Japonya'da büyük bir patlama yaratmıştır. 1987'de başlayan bu patlama 1990'da zirveye ulaşarak Fuzzy denetimin çok büyük bir alan içerisinde kullanılmasıyla sonuçlanmıştır.

Lori Valigra'nın "Feeding Fads with Fuzzy Logic" adlı makalesi özetle aşağıdaki şekildedir. Japon tüketicileri, dünyada teknolojinin en çok farkında olan tüketici grubunu oluştururlar. Ülkede tüketim mamülleri üreten firmalar çok hızlı bir şekilde teknolojiyi laboratuvarlardan piyasaya taşırlar. Bunlardan biri de, belirsiz bilginin insan yetenekleri ile işlenmesini taklit eden yapay zeka benzeri bir teknoloji olan Fuzzy Mantığıdır. Japonlar Fuzzy Mantığını, borsa alım satım kararlarının desteklenmesinde, vakum temizleyiciler, çamaşır makinaları vb. gibi pratik uygulamalarda kullanmaktadırlar.

Ayrıca Andrew Tanzer ve Gary Slutsker "Why Fuzzy Logic is Good Bussines" adlı makalesinde; Amerika'da ortaya atılan Fuzzy Mantığı tüketim mamüllerinin ve komplike endüstriyel işlemlerin yapılmasında yararlı olmuştur. Gerçekten bir çok Japon ev aleti üreticisi; buzdolapları, tost makinaları, mikro dalga fırınlar, havalandırma cihazları, vakum temizleyicilerinin yeni modellerinde Fuzzy Mantık kontrolcüleri kullanmışlardır. Fuzzy Mantık kontrolü sabit olarak değişen değişkenleri içeren kontrol işlemlerine sahip eski bilim dallarında kullanılan yeni bir tekniktir. Yöntem, bir takım tanımları işlemleştirerek insan muhakemesini simüle etme konusunda matematikçilere ve mühendislere yardımcı olur. Fuzzy Mantığı, basit programlama ve daha az kural kullanarak pazara yeni ürünler sunulmasını ve maliyetlerin düşürülmesini hızlandırır demektedirler.

Earl Cox ve Martin Goetz "Fuzzy Logic Clarified" adlı makalesinde ise şunları vurgulamaktadırlar. Fuzzy, matematiğin Fuzzy Mantığı olarak adlandırılan formuna dayanan kesin olmayan düşünme tekniğidir. Ayrıca uygulama, geliştirme problemlerine bir çözüm oluşturabilir. Fuzzy muhakemesi, insan ve uzman düşünüşünü yazılım mantığı yoluyla bilgisayar ortamına aktarımını gerçekleştirir. Fuzzy Mantığı genel amaçlı makinaların belirsiz bilginin işlenmesi ile insan diline yakınlaşmasını sağlar. Fuzzy Mantığı kavramını anlamak için Fuzzy küme teorisi olarak adlandırılan ve herhangi bir elemanın bir küme içinde kısmi elemanlığını inceleyen matematiksel düşüncenin kavranması demektir. Fuzzy Mantığı

1) bilgi erişimi,
2) uzman sistemlerin oluşturulması,
3) uygulama, geliştirme ve tutma

gibi birtakım bilgisayar uygulamalarının otomatikleşmesini sağlar.

Mark Jablonowski "Fuzzy Logic and Insurance Decisions" adlı bilimsel çalışmasında özetle aşağıdakileri ele almıştır. Son 25 yıldır sigorta kararları literatürü Keskin Mantığa dayandırılmıştır. Keskin karar kuralları, sigorta eğitiminin bir köşe taşı olarak geçerliliğini korusa da, bu kurallar çok nadiren gerçek hayatta kullanılırlar. Fuzzy Mantığı birtakım kesinlikten uzak ölçeklerle doğal ve organize bir şekilde kesinlikten uzak olayları değerlendirir. Fuzzy Mantığının kullanılması ile en büyük fayda karar vermede sağlanmıştır. Fuzzy Mantığı sigorta risk kararlarında, risk yönetiminde ve kayıpların kontrolünde risk analizi yapılması ve başarılı gerçek hayat kurallarına ulaşılması için bir çerçeve oluşturur.

Şu an otuzdan fazla ülkede Fuzzy Mantık konusunda araştırmalar yapılmakta olup, Çin'de bu alanda uğraşan bilim adamı sayısı on binin üzerindedir. Onun en yakın takipçisi Japonya ise uygulama açısından belirgin bir şekilde başı çekmektedir.

VI. Fuzzy Mantık ve Fuzzy Kümelerinin Temel Kuralları

Fuzzy Mantık Fuzzy küme teorisine dayanan bir matematiksel disiplindir. Doğruluğun ve yanlışlığın derecesini ele alır. Fuzzy Mantık iki değerli mantığın çok değerli mantığa genelleştirilmesidir. Çok değerli mantık ise doğruluk uzayı [0,1] reel aralığı olan sayılamaz değerli mantıktır. Bilindiği gibi [0,1] reel aralığı sayılamaz bir aralıktır. Keskin Mantıkta ifade ettiğimiz $\mu_A(x)$ karakteristik fonksiyon Fuzzy Mantıkta [0,1] aralığında değerler alabilen üyelik fonksiyonu (membership function) adını alır. X evrenindeki bir A Fuzzy alt kümesi $A=[(x,\mu_A(x))], x\in X$ sıralı ikililerinin bir kümesi olarak gösterilir. Ayrıca bunu eğer X sonlu bir evren ise

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\mu_A(x_2)/x_2+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$$

olarak ve yahut X sonsuz bir evren ise

$$A=\int_X \mu_A(x)/x.$$

olarak ifade edebiliriz.

Şimdi Fuzzy kuramsal küme işlemlerini verelim. A ve B X'in Fuzzy alt kümeleri olsunlar.

1. Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x)/x=\int_X \mu_B(x)/x$$

ise A=B dir.

2. Ancak ve ancak

$$\int_X \mu_A(x)/x\le\int_X \mu_B(x)/x$$

ise $A\subseteq B$ dir.

3. $\vee$ maksimum işareti olmak üzere

$$A\cup B=\int_X(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))/x$$

ile tanımlanır.

4. $\wedge$ minimum işareti olmak üzere

$$A\cap B=\int_X(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x))/x$$

ile tanımlanır.

5. A'nın tümleyeni

$$\overline{A}=\int_X(1-\mu_A(x))/x$$

dir.

6. $AB=\int_X \mu_A(x)\mu_B(x)/x,$

α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$A^\alpha=\int_X(\mu_A(x))^\alpha/x$$

ve α $\mathrm{Sup}_X\mu_A(x)\le 1$ olacak şekilde α herhangi negatif olmayan bir reel sayı ise

$$\alpha A=\int_X \alpha\mu_A(x)/x$$

dir. Özel olarak, yoğunlaşma işlemi

$$CON(A)=A^2$$

ile tanımlanırken, genişleme işlemi

$$DIL(A)=A^{0.5}$$

ile ifade edilir.

7. $$A\oplus B=\int_X 1\wedge(\mu_A(x)+\mu_B(x))/x$$

sınırlı toplamı,

$$AQB=\int_X 0\vee(\mu_A(x)-\mu_B(x))/x$$

sınırlı farkı tanımlar.

8. $V=\{x^\alpha | x\in X\}$ olmak üzere

$$^\alpha A=\int_V \mu_A(x)/x^\alpha$$

dır.

9. $A_1,\cdots,A_k$ sırasıyla $X_1,\cdots,X_k$ ların Fuzzy alt kümeleri iseler, $A_1,\cdots,A_k$ ların Kartezyen çarpımı

$$A_1\times\cdots\times A_k=\int_{X_1\times\cdots\times X_k}(\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_k}(x_k))/(x_1,\cdots,x_k)$$

ile gösterilir. Bu ise $A_1\times\cdots\times A_k$ nın, üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_k}(x_1,\cdots,x_k)=\mu_{A_1}(x_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_k}(x_k)$$

ile ifade edilen $X_1\times\cdots\times X_k$ nın Fuzzy alt kümesi olduğunu gösterir.

Yukarıdaki kuramsal küme işlemlerini bir örnekte gösterelim.

Örnek :

X={1,2,3,4,5} ve
A=0.5/1+1/2+0.7/5,
B=0.6/1+1/4+0.4/5
olsunlar, bu halde

$$A \cup B = 0.6/1+1/2+1/4+0.7/5$$

$$A \cap B = 0.5/1+0.4/5$$

$$\bar{A} = 0.5/1+1/3+1/4+0.3/5$$

$$AB = 0.3/1+0.28/5$$

$$A^2 = 0.25/1+1/2+0.49/5$$

$$0.5A = 0.25/1+0.5/2+0.35/5$$

$$CON(B) = 0.36/1+1/4+0.16/5$$

$$DIL(B) = 0.77/1+1/4+0.63/5$$

$$A \oplus B = 1/1+1/2+1/4+1/5$$

$$A \ominus B = 1/2+0.3/5$$

$$^3A = 0.6/1+1/64+0.4/125$$

dır.

VII. Fuzzy Önermesel Mantık
Fuzzy Önermeler

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sonlu tanım kümelerinde değerler alabilen elemanter mantıksal değişkenler olsunlar.

$$x_i = \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$$

tanım kümesi n_i değerden oluşur. Tüm tanım kümelerinin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ kartezyen çarpımı $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_n$ inci kuvvetten bir Ω evrenini oluşturur. Tüm tanım kümelerinin ve evrenin klasik anlamda kümeler olduğu farzedilir. Yani Fuzzy değildirler. Buna göre $\omega = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \Omega$ tüm değişken değerlerinin sıralı n-lisidir.

Tanım 1 :

Tanım kümesi tanımından herhangi bir fuzzy doğruluk fonksiyonu bir fuzzy önermedir.

x_i değişkeni için

$$\mu_i(x_i): X_i \to [0,1]$$

doğruluk fonksiyonuna elemanter fuzzy önerme denir. Doğruluk fonksiyonu tanım kümesinin bir elemanının vermek üzere,

$$\mu_i(j_i) \in [0,1] \quad (j_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1)$$

sayısına önermenin bileşeni denir.

Eğer x_i değişkeninin X_i tanım kümesi 0 ve 1 değerlerini içerirse, o zaman buna Boole değişkeni denir. Eğer Boole değişkeni için önermenin doğruluk değerleri {0,1} ile kısıtlı ise o zaman

$$\mu(x_i): \{0,1\} \to \{0,1\}$$

önermesi de aynı zamanda bir Boolean niceliktir. Aşağıda tanımlandığı gibi sadece dört Boole önermesi olabilir.

- {0,0}(x_i)=1, doğruluk sabiti 1;
- {1,1}(x_i)=0, doğruluk sabiti 0;
- {0,1}(x_i)=x_i, bu önerme aynı zamanda $+x_i$ ya da x_i^+ ile de ifade edilebilir.
- {1,0}(x_i)=$\sim x_i$, bu önerme aynı zamanda $-x_i$ ya da x_i^- ile de ifade edilebilir.

Önermeleri tanımlamak için iki yol vardır. Bunlar genişlik ve yoğunluktur. Genişlik tüm önermelerin bileşenlerinin toplamı ile ilgilidir ve Fuzzy kümelerin temsili için yaygın olarak kullanılır. Yoğunluk ise kümenin elemanlarının farklı özelliklerinin varlığını doğruluk fonksiyonunun değerlerini vermede kullanılır. Elemanter önermeler sadece genişlik açısından tanımlanabilirler. Çünkü tanım kümesi elemanları birbirinden ayrılabilir özelliğe sahiptir. Mantıksal değişkenler özelliklerde önemli bir rol içermek üzere yoğunluk için şu örneği verebiliriz :

Eğer $x_i = j_i$ ise
$\mu(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) = 0.5$ aksi takdirde
$\mu(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle) = 0$ dır. Eğer sadece bir değişken varsa genişlik durumu elde edilir. Böylece genişlik yoğunluğun özel bir halidir.

Elemanter önermeleri yazmak için
1- Tam yazım
2- Özet yazım
3- Sembolik yazım
kullanılır.

1- Tam yazım :

$$x_i = \{0{:}\mu_i(0), 1{:}\mu_i(1), \ldots, n_i - 1{:}\mu_i(n_i - 1)\}$$

şeklindedir. Burada, değişken değerleri ve buna karşılık gelen bileşenler açıkça belirtilmiştir.

2- Özet yazım :

$$\{\mu_i(0), \mu_i(1), \ldots, \mu_i(n_i - 1)\}(x_i)$$

şeklindedir. Burada değişken ve bileşenlerin sıralı listesi verilmiştir

3- Sembolik yazım :

Önerme değişkenin solunda yer almaktadır. Burada $\mu_i(x_i)$ şeklindedir. Daha karmaşık önermeler, elemanter önermelerin bileşiminden ve üst üste kullanımından elde edilir. Her zaman olduğu gibi parantezler önceliği ifade etmek için kullanılır.

Önermelerin bileşimi geleneksel olarak iki önerme ve $\wedge$ (ayrılma), $\vee$ (birleşme) ve $\rightarrow$ (karıştırma) mantıksal bağlaçları üzerine kurulmuştur. Yani eğer μ ve v iki önerme ise o zaman $\mu \wedge v$, $\mu \vee v$ ve $\mu \rightarrow v$ ler de aynı zamanda önermedir.

Bir önermenin diğer önerme üzerinde kullanılması, yani μ ve v iki önerme olmak üzere $v(\mu)$ nün de bir önerme olduğunu gösterir. Buna rağmen v önermesi herhangi bir önerme değildir. Bu önerme [0,1] aralığına bağlı olarak yani

$$v{:}[0,1] \rightarrow [0,1]$$

olarak formüle edilmelidir.

Başka bir önermenin içerdiği μ önermesi değerlerini [0,1] tanım aralığında alan bir değişken olarak gözönüne alınabilir. Bundan dolayı, μ için alışılmış değişken durumundaki gibi bir önerme meydana getirilmesi mümkün olabilir.

[0,1] doğruluk aralığı için iki özel önermeyi tanımlayalım. ~ ya da - değilleme önermesi $x \in [0,1]$ olmak üzere $\sim(x) = 1 - x$ doğruluk fonksiyonu ile tanımlıdır. ~ klasik anlamda değilleme ile aynıdır. + önermesi değillemenin karşıtı olup $+(x) = x$ ile tanımlıdır. Değilleme ve toplama işaretleri her zaman olduğu gibi ya sol tarafa ya da önermenin sağ üst köşesine yazılır. Örneğin

$$+(\mu \wedge v),\ \sim(\mu \wedge v),\ \overline{(\mu^+ \wedge v)}.$$

Sabit önerme özel bir önerme türüdür. Sabit önermenin tanım kümesi sadece $\varnothing$ küme elemanına sahiptir. Sabit önerme sembolünün en düşük indeksi sıfıra eşit sayılır. Böylece

$$\mu_0{:}\{\varnothing\} \rightarrow [0,1]$$

sabit önermesi tam olarak tanımlıdır ve diğerlerinden sadece $\mu_0(\varnothing) \in [0,1]$ bileşeni ile ayırt edilebilir.

Her hangi bir önerme Fuzzy Önermeler Mantığının iyi oluşturulmuş bir formül ya da sadece bir formülüdür. Böylece bir formülün notasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1.Elemanter ve sabit önermeler formüldürler.

2.Eğer μ ve v formül iseler $\mu \wedge v$, $\mu \vee v$, $\mu \rightarrow v$ lerde formüldürler.

3.Eğer μ bir formül ve v [0,1] üzerinde bir önerme ise o zaman $v(\mu)$ de bir formüldür.

Tanım 2 :

$\mu = \mu_0 \vee \mu_1 \vee \cdots \vee \mu_n$ önermesi tüm değişkenler için μ_0 sabit önermesi ve $\mu_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ elemanter önermelerinin ayrılımından oluşan Fuzzy bir ayrılmadır. $\mu = \mu_0 \wedge \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_n$ formülü fuzzy birleşmedir.

Fuzzy önermelerin global iki karakteristik özelliğini inceleyelim. Global karakteristiğin anlamı, tüm elemanlar ve bunlara karşılık gelen önermelerin tanımlı olduğu tanım kümesindeki tüm doğruluk fonksiyonu değerlerinin hesaplanmasıdır.

Tanım 3 :

Önermenin tanımlı olduğu tanım kümesi üzerinde alabildiği en yüksek doğruluk değerine yoğunluk (consistency) denir.

Tanım 4 :

Önermenin en küçük doğruluk değerini aldığı doğruluk fonksiyonuna önermenin sabiti denir.

$$\mu(x): \to [0,1]$$

olmak üzere sabit(μ)=$\min_{x \in X} \mu(x)$ dir.

Her ne kadar da tek bir sayı ile ifade edilseler de önerme sabitinin sabit önermeden farklı olduğuna dikkat etmeliyiz. Bunlardan önerme sabiti [0,1] aralığında bir nümerik değerdir. Sabit önerme ise bir önerme ve sonuç olarak Fuzzy Önermeler Mantığının bir formülüdür. Önerme sabiti geçerliliğinin derecesi olarak düşünülür. μ_0 sabit önermesinin sabiti kendi bileşenine eşittir: $(\mu_0) = \mu_0(\varnothing)$.

Tanım 5 :

Fuzzy Önermeler Mantığının formülleri daha önce tanımlanmış Ω evreni üzerinde tanımlıdır. Tanımlama kuralları formül üzerinde verildiğinde evrendeki herhangi bir noktada doğruluk fonksiyonunun aldığı değerin nasıl hesaplanacağını tanımlar. Bunlar;

1.Elemanter μ_i önermesi evren üzerindeki $\mu_i : \Omega \to [0,1]$ önermesini tanımlar öyle ki

$\mu_i(\omega) = \mu_i(\langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle) = \mu_i(x_i)$ dir.

2.μ_0 sabit önermesi

$$\mu_0(\omega) = \mu_0(\langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle) = \mu_0(\varnothing)$$

olacak şekilde evren üzerinde

$$\mu_i : \Omega \to [0,1]$$

önermesini tanımlar.

3.μ ve v iki formül olsun. O zaman $\mu \wedge v$ ve $\mu \vee v$ aşağıdaki şekilde tanımlanırlar.

$$(\mu \wedge v)(\omega) = \min(\mu(\omega), v(\omega))$$

$$(\mu \vee v)(\omega) = \max(\mu(\omega), v(\omega)).$$

$\mu \to v$ formülü $\sim(\mu) \vee v$ ile eşdeğerdir.

4.$(\mu \to v)(\omega) = v(\mu(\omega))$

olmak üzere $v(\mu)$ formülü evren üzerindeki $v(\mu): \Omega \to [0,1]$ önermesi ile tanımlıdır.

Bu kurallara göre elemanter ve sabit önermeler bunlara karşılık gelen doğruluk fonksiyonunun tüm evrene genişletilmesi ile tanımlanır. Birleşme ve ayrılma sırasıyla minimum ve maksimum operatörleri ile tanımlıdırlar.

4.üncü kurala göre ~ değillemesi önermenin değerini ters yönde değiştirir. + (toplama) ise bir değişim yapmaz.

Böylece aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$\sim\sim\mu = \mu$ ve $+\mu = \mu$ dür.

Eğer x_i değişkeni için μ_i ve v_i elemanter önermeler iseler o zaman

$$\mu_i \wedge v_i = \{\mu_i(0), \dots, \mu_i(n_i - 1)\}(x_i)$$
$$\wedge \{v_i(0), \dots, v_i(n_i - 1)\}(x_i)$$

$$= \{\min(\mu_i(0), v_i(0)), \dots,$$
$$\min(\mu_i(n_i - 1), v_i(n_i - 1))\}(x_i)$$

$$\mu_i \vee v_i = \{\mu_i(0), \dots, \mu_i(n_i - 1)\}(x_i)$$
$$\vee \{v_i(0), \dots, v_i(n_i - 1)\}(x_i)$$

$$= \{\max(\mu_i(0), v_i(0)), \dots,$$
$$\max(\mu_i(n_i - 1), v_i(n_i - 1))\}(x_i)$$

bileşke fonksiyonları açık olarak denktirler.

Ayrıca Fuzzy Mantığın temelini mantık kurallarında;

- totoloji
- $\vee$ ayrılma
- $\rightarrow$ karıştırma
- $\leftrightarrow$ denklik
- $\wedge$ birleşme
- $\mid$ Sheffer bağıntısı
- $\downarrow$ Pierce bağıntısı
- ex tek ayrılış
- $\circ$ çelişki

şeklinde sıralayabiliriz. Yukarıdaki bağlaçlar ve $\rightsquigarrow$ bağlacı tanımlı olmak üzere üç farklı mantık tanımlıdır. Burada ex, $\mid$, $\downarrow$ ve $\rightsquigarrow$ sırasıyla $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ ve $\leftarrow$ bağlaçlarının değillerini ifade eder. $\tilde{P}(X)$ evreni, $\cup$, $\dot{\cup}$ ve $\hat{+}$ ayrılmayı, $\cap$, $\dot{\cap}$ ve $\cdot$ birleşmeyi ve $^{-}$ değili ifade etmek üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan üç farklı mantık mevcuttur. Ayrıca v(P), v(Q) sırasıyla P ve Q önermelerinin doğruluk değerlerini ifade eder ve v(P), v(Q)$\in$[0,1] dır.

i) $(\tilde{P}(X),\cup,\cap,^{-})$ ile Birleşmiş Mantık

$\cup$ ve $\cap$ işlemlerinin temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla

$$v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$$
$$v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$$

dır. Ayrıca $\vee$ ve $\wedge$ komütatif, asossiyatif, idempotent ve birbirleri üzerine distribütif olup soğurma ve De Morgan özellikleri geçerlidir.

ii) $(\tilde{P}(X),\dot{\cup},\dot{\cap},^{-})$ ile Birleşmiş Mantık

$\dot{\cup}$ ve $\dot{\cap}$ nin temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla,

$$v(P \dot{\vee} Q) = \min(1, v(P) + v(Q))$$
$$v(P \dot{\wedge} Q) = \max(0, v(P) + v(Q) - 1)$$

dir. $\dot{\vee}$ ve $\dot{\wedge}$ komütatiftir, asossiyatiftir ve De Morgan özelliğini sağlarlar. Fakat $\dot{\vee}$ ve $\dot{\wedge}$ ne idempotent ne de birbirleri üzerine distribütiftir. $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\mid$, ex, $\rightsquigarrow$, $\downarrow$ bağlaçlarının bu mantıktaki ifadeleri

$\dot{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\dot{\wedge}$, $\|$, $\underline{ex}$, $\approx>$, $\downarrow\downarrow$ dır.

$v(P) = p$ ve $v(Q) = q$ olmak üzere

$$v(P \Leftrightarrow Q) = 1 - |p - q|$$
$$v(P\ \underline{ex}\ Q) = |p - q|$$
$$v(P^{\bullet}Q) = 1$$
$$v(P^{\circ}Q) = 0 \quad \text{dır.}$$

iii) $(\tilde{P}(X),\ \hat{+},\ \cdot,\ ^{-})$ ile Birleşmiş Mantık

$\hat{+}$ ile $\cdot$ ' nın temelini oluşturan ayrılma ve birleşme sırasıyla,

$$v(P \gamma Q) = v(P) + v(Q) - v(P)\cdot v(Q),$$
$$v(P \& Q) = v(P)\cdot v(Q)$$

dır. γ ve $\&$ komütatif ve asossiyatiftir. Fakat γ ve $\&$ ne idempotent ne de birbirleri üzerine distribütiftir. De Morgan özelliği burada da geçerlidir.

VIII. Fuzzy Model Mantık

Çoğu araştırmacılar Zadeh'in Fuzzy küme teorisinin temelini teşkil eden bazı çok değerli mantık sınıfları için "Fuzzy Mantık" ifadesini kullanmışlardır. Ancak çok değerli mantığı ilk olarak 1920 lerde Polonyalı matematikçi Lukosiewiecz gündeme getirmiş ve çok değerli mantığın temellerini atmıştır. Çok değerli mantıkta örneğin bir şahsın boy uzunluğu için "uzundur" önermesini kullanalım. Açık ki, uzunluğu tanımlamak için sonsuz doğruluk değerine gereksinim duyarız. Bu "uzundur" önermesini, örneğin Türk insanı için 1.85 metre sınırını koyarsak, bu ölçünün altındakiler kısadır sınırlamasını yapmadıkça, çok değerli mantık düşüncesine ihtiyaç vardır. Ancak çok değerli mantık teknikte ve diğer uygulamalarda ileriye gidememiştir. Bu aşamada Fuzzy Mantık devreye girmiştir. Fuzzy Mantığı çok değerli mantıktan ayıran nokta, Fuzzy Mantığın "hemen hepsi", "birkaç", "çok", "az", "birçok", "biraz" gibi birçok nicelikleri hesaplayabilir olmasıdır. Sonuçlar Fuzzy dır.

Fuzzy Mantıkda doğruluğun kendisinin de Fuzzy olmasına izin verilir. Bu yolla Fuzzy Mantık belirsiz gerçek dünya ile iyi bir eşleme sağlayabilir. Bununla beraber, çok değerli mantık kesin doğruluk değerleri [0,1] aralığının dışında olmayan Fuzzy Mantık gibi görülebilir.

Lakeoff, □ ve ◊ model operatörlerine göre yazılan aşağıdaki değerlendirmeleri, bağıntılara ve niceliklere göre yazılan semantik doğruluk fonksiyonlarının bir kümesine ekleyerek Fuzzy model mantığı oluşturmuştur.

$$v(\Box P,\omega)=\operatorname*{Inf}_{\omega R\omega'} v(P,\omega'),$$
$$v(\Diamond P,\omega)=\operatorname*{Sup}_{\omega R\omega'} v(P,\omega')$$

Burada $\omega,\omega'\in W$ ve ω evrenindeki P'nin doğruluk değeri v(P) dir. R ise "mümkün evrenler" arasındaki bir alternatif yansıma bağıntısıdır. W mümkün evrenlerin kümesini oluşturur. Değerlendirmelerin $\Box P = \sim\Diamond\sim P$, $(v(\sim P,\omega)=1-v(P,\omega))$ ile uygun olduğuna dikkat edilmelidir. $v(\Box P,\omega)=\alpha$, P'nin doğruluk değerini ω'ya alternatif herhangi bir evrendeki α'dan daha küçük olmadığı anlamına gelir. Lakeoff, bir derece için zorunlu olarak doğru olan bir duruma "Asal sayıların yaklaşık sayısı 4N+1 formundadır" örneğini verir. Bu yolla kurulan Fuzzy Model Mantığın elektronik ve nakil araçlarında kullanılabilirliğini ve uygulamalarını görmek mümkündür.

IX. Fuzzy Değerli Mantık

Fuzzy değerli mantık, doğruluk uzayı [0,1] reel aralığı üzerindeki Fuzzy sayıların kümesi olan bir çok değerli mantıktır. Fuzzy değerli mantık kavramını geliştirmek için Zadeh tarafından geliştirilen genişletme prensibini ve Fuzzy çıkarımı kullanarak işe başlayacağız.

f, $y=f(x_1,\cdots,x_r)$ olacak şekilde $X_1\times\cdots\times X_r$ den Y evrenine bir tasvir olsun. Genişletme prensibi

$$\mu_B(y)=\operatorname*{Sup}_{\substack{x_1,\cdots,x_r\\ y=f(x_1,\cdots,x_r)}} \min\left(\mu_{A_1}(x_1),\cdots,\mu_{A_r}(x_r)\right)$$

ve

$$f^{-1}(y)=\varnothing \text{ ise } \mu_B(y)=0$$

olacak şekilde f fonksiyonunu, r tane A_r Fuzzy kümesinden Y deki bir B Fuzzy kümesine tasvir etmemize yardımcı olur. Bunu bir örnek üzerinde açıklayalım.

f fonksiyonunun $X_1=\{a,b,c\}$ ve $X_2=\{x,y,z\}$ deki sıralı ikililerin $Y=\{p,q,r,s\}$ kümesine bir tasviri olduğunu kabul edelim. f aşağıdaki matrisle tanımlanmış olsun;

$$\begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ \hline a & p & q & r \\ b & s & r & s \\ c & s & q & p \\ \hline \end{array}$$

$$A_1=0.2/a+0.9/b+0.4/c$$

ve

$$A_2=0.3/x+0.6/y+1/z$$

olacak şekilde A_1, X_1 üzerinde ve A_2 ise X_2 üzerinde tanımlı Fuzzy kümeler olsunlar. p, q, r ve s'in

$$B=f(A_1,A_2)\in\tilde{P}(Y)$$

Fuzzy kümesindeki üyelik değerleri genişletme prensibi kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mu_B(p) = \max[\min(0.2, 0.3), \min(0.4, 1)] = 0.4$$
$$\mu_B(q) = \max[\min(0.2, 0.6), \min(0.4, 0.6)] = 0.4$$
$$\mu_B(r) = \max[\min(0.2, 1), \min(0.9, 0.6)] = 0.6.$$
$$\mu_B(s) = \max[\min(0.9, 0.3), \min(0.9, 1), \min(0.4, 0.3)] = 0.9$$

Böylece, genişletme prensibinden

$$f(A_1, A_2) = 0.4/p + 0.4/q + 0.6/r + 0.9/s$$

elde edilir.

Fuzzy Çıkarım

Keskin Mantıkta verilen önermelerden bir sonuca varmaya çıkarım denir. Keskin Mantıkta önermeler kesin ve açık olup, çıkarım ise önermelerin birbirleri ile tam olarak uyuştuğu zaman yapılabilir. Buna örnek olarak

Önerme 1: Bebekler konuşamazlar.
Önerme 2: Ayşe bir bebektir.
Çıkarım: Ayşe konuşamaz.

verilebilir.

Fuzzy sistemlerde ise girişler soğuk, sıcak,ılık,orta,yüksek,yavaş gibi dilsel değişkenlerden oluşur ve bu girişler hakkında sonuca varmak ve karar verme ancak yapay zekanın kullandığı Eğer-o halde türünden kuralların kullanılması ile mümkündür. Buna örnek verecek olursak;

Bilgi : Hava çok soğuksa çok sıkı giyin.
Gerçek : Hava biraz soğuk.
Çıkarım: Biraz sıkı giyin.

Fuzzy Mantık kuramı makinalara insanların verilerini işleyebilme ve onların deneyimlerinden ve önsezilerinden yararlanarak çalışabilme yeteneği verir. Yapay zekadan farkı sembolik bir süreç olmaması ve kullandığı kural sayısının göreceli olarak çok daha az olmasıdır.

Fuzzy kümeler teorisi olasılık teorisine bir başka bakış açısı değildir. Çünkü olasılık teorisi rastgele olayların ölçülmesini konu alır. Halbuki Fuzzy küme teorisi ve Fuzzy Mantık bir elemanın bir kümeye hangi dereceyle ait olduğunu gösterir.

X. Fuzzy Mantığın Dezavantajları ve Avantajları

a- Fuzzy Mantığın Dezavantajları

Fuzzy Mantığın belirli bir formal tasarım metodunun olmayışı ve halen iyi metriklere sahip bulunmayışı, Fuzzy Mantığın ne zaman kullanılması gerektiğinin ve geleneksel yöntemlerden ne kadar iyi sonuç vereceğinin kestirilmesini zorlaştırmaktadır. Ayrıca Fuzzy Mantık uygulamalarında kullanılan kuralların mutlaka uzman deneyimlerine bağlı olarak konulması gereksinimi, ve üyelik fonksiyonları deneme ile bulunduğu için zaman kaybının olabileceği dezavantajları arasında sayılabilir.

b- Fuzzy Mantığın Avantajları

Fuzzy Mantığın en güçlü uygulamaları, lineer olmayan ve girişlerinde veya tanımlanmalarında belirsizlik bulunan karmaşık sistemlerin gerçekleştirilmesinde karşımıza çıkar. Zadeh çok büyük doğal (hava, doğal biçimler, okyanuslar gibi) veya insan yapısı (ekonomi, borsa veya seçimler gibi) sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için Fuzzy Mantığın en iyi olduğunu savunur. Kontrol sistemleri de dahil olmak üzere

i) Yeterli doğrulukta modellenemeyen çok karmaşık sistemler,

ii) Önemli ölçüde lineer olmayan sistemler,

iii) Girişlerinde veya tanımlarında belirsizlik olan sistemler,

için Fuzzy Mantığı kullanmak en iyi çözümü verir.

Fuzzy Mantığın her durumda bir sonuç sistemi olduğunu vurgulamak yanlış bir düşüncedir. Gerçek dünyadaki olayların açıklanması ve teknolojiye aktarılması geleneksel mantıksal sistemler yerine Fuzzy Mantığının kullanılması ile daha başarılı olacağı açıktır.

Fuzzy Mantık çok karmaşık, lineer olmayan, belirsizlik içeren, geleneksel yöntemlerle oluşturulamayan sistemlerin oluşturulmasına olanak tanır. Sistemin kısa sürede gerçekle-nebilmesi ve yeni olanaklara açık olması da avantajları arasındadır. Ayrıca Fuzzy Mantığın insan düşünüş tarzına yakın olması, matematiksel modellere uyum sağlaması, uygulamalarının hızlı ve ucuza mal olması insan davranışlarını formüle etmesi, karar aşamalarını açık bırakmayacak şekilde tanımlaması, sistemlerde insan müdahalesine yer vermemesi Fuzzy Mantığın avantajlarındandır.

Sonuç

Fuzzy Mantık için genel kuralların dışına çıkacak başka modellerin geliştirilmesi değil de Fuzzy Mantık kullanılarak sanayiide, insan davranışlarında, dilde ve her türlü ev aletlerinde, ulaşım araçlarında uygulamalarının yapılması bizlere bu alanda daha da ilerleme olanağı tanıyacaktır.

Öneri, C.1, S.2
Ocak, 1995, ss.3-15

Kaynaklar

1-AKSOY Y., 1978. Matematik Lojik: 1-27.

2-BAŞBUĞ A., Şubat 1994. Byte Türkiye, Bulanık Teknoloji: 147-151.

3-BLACK M., 1937. Vagueness : An Exercise in Logical Analysis, Philosophy of Science, Cilt 4; No. 4, 427 - 455.

4-KANDEL A., 1986. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications:1-13,123-135.

5-KARANFİL S., 1994. Yüksek Lisans Tezi - Bulanık Kümeler ve Bulanık Mantığın Temelleri.

6-KAUFMANN A., and GUPTA M.M., 1991. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and Applications: 1-35.

7-KAYNAK O., 1992. Şişe Cam Semineri-Bulanık Denetim ve Endüstriyel Uygulamaları: 1-14.

8-KLIR G.J., and FOLGER T.A., 1988. Fuzzy Sets, Uncertainty and Information: 1-33.

9-KOSKO B., and ISAKA S., Eylül 1993. Bilim Dergisi - Puslu Mantık : 56 - 61.

10-SAVINON A.A., 1993. Fuzzy Sets and Systems, Fuzzy Propositional Logic: Vol. 60, 9-17.

11-TÜRKŞEN İ.B., 1985. Yöneylem Araştırma Dergisi, Cilt:4, Sayı:1, Bulanık Kümeler Kuramı ve Uygulamaları: 1-15.

12-WILDBERGER A.M., 1994. ESS' 94 European Simulation Symposium, Introduction to Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.

13-ZADEH L.A., 1975. Fuzzy Logic and its Application to Approximate Reasoning Information Processing, Proc. IFIP Congress, Vol. 74, No. 3, 591 - 594.

14-ZADEH L.A., 1987 Fuzzy Sets and Applications : Selected Papers by L.A. ZADEH, der. YAGER R.R., vd., A Wiley - Interscience Publication.

15-ZADEH L.A., 1992. Fuzzy Logic : Advanced Concepts and Structures. I.E.E.E. Educational Activities.