

# MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN VE ÖĞRENCİLERİNİN KESİR VE RASYONEL SAYI KAVRAMINA AİT TANIMLAMALARI\*

## ARAŞTIRMA MAKALESİ

### Selami ERCAN<sup>1</sup>, Döndü Gamze AKTAŞ<sup>2</sup>

\* Bu çalışma “ Öğretmen ve Öğrencilerin Kesir ve Rasyonel Sayı Kavram Tanımları” isimli yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

1 Doç. Dr., Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi, ercans@gazi.edu.tr, ORCID: 0000-0002-6936-2179.

2 Şehit Adem Çelik Anadolu Lisesi, Hafik/SİVAS, dgamzeaktas@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9187-690X.

Geliş Tarihi: 23.03.2020 Kabul Tarihi: 12.08.2020 DOI: 10.37669/milliegitim.707913

**Öz:** Kavramın tanımını zihninde inşa edemeyen öğrencinin kazandığı işlem bilgisi de kalıcılıktan uzak olmaktadır. Sayı kavramının öğrenimi ve öğretimi gerek kavramsal gerekse işlemsel bilgisi yönüyle okul öncesi çağlardan başlayarak yaşam boyu devam eden bir süreçtir. Bu bağlamda araştırmamızın amacı ortaöğretim öğrencilerinin kesir ve rasyonel sayı kavramları hakkındaki kavram tanımlamalarını incelemek ve matematik öğretmenlerinin bu iki kavramı nasıl tanımladıklarını tespit etmek; ayrıca öğretmenlerin öğretim süreçlerinde bu iki kavramı işleme biçimlerini ve öğrencilerde neler gözlemlediklerini araştırmaktır. Bu çalışma nitel desenli bir araştırmadır. Araştırmamızın katılımcı grubu, 2018-2019 eğitim-öğretim yılı içinde, 9. Sınıf düzeyinde, İç Anadolu Bölgesinde bulunan bir ilinde dört farklı okulda öğrenim gören toplam 188 öğrenci ve Millî Eğitim Bakanlığına bağlı okullarda çalışan 24 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Veri toplama aracı olarak, katılımcı öğrenci grubuna uygulanmak üzere kesir ve rasyonel sayı kavramları ile ilgili kavram tanımı tespit formu ve katılımcı öğretmenler ile yapılmak üzere yarı yapılandırılmış mülakat formu geliştirilmiştir. Toplanan verilerin betimsel analizi yapılmıştır. Çalışmamızın sonunda ulaşılan sonuçlar, öğrencilerin kesir ve rasyonel sayı kavramları ile ilgili yanlış tanımlamalara sahip olduklarını ve bu tanımlara öğretmenlerin bu iki kavram ile ilgili bilgilerinin yetersizliğinin ve yanlış yönlendirmelerinin sebep olduğunu göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesir, rasyonel sayı, kavram tanımı

# DEFINITIONS OF MATHEMATICS TEACHERS AND STUDENTS FOR THE CONCEPT OF THE PROPERTY AND RATIONAL NUMBER

## Abstract:

The process knowledge gained by the student who cannot build the definition of the concept in his mind is far from permanent. Learning and teaching of the number concept is a lifelong process starting from preschool ages in terms of both conceptual and operational knowledge. In this context, the aim of the study is to examine the concept definitions of secondary education students about fraction and rational number concepts and to determine how mathematics teachers define these two concepts; It is also to investigate the way teachers handle these two concepts in their teaching processes and what they observe in students. This study is a qualitative research. The participant group of the research consisted of 188 students studying in four different schools in a province located in the Central Anatolia Region in the 9th grade level in 2018-2019 academic year and 24 math teachers working in schools affiliated to the Ministry of Education. As a data collection tool, the concept definition determination form related to fraction and rational number concepts and a semi-structured interview form to be made with participant teachers have been developed to be applied to the participant student group. Descriptive analysis of the collected data was made. The results obtained at the end of the study show that students have false definitions about fraction and rational number concepts, and these definitions are caused by teachers' inadequacy and misleading knowledge about these two concepts.

**Keywords:** Fraction, rational number, concept definition

## 1. Giriş

Kavramlar bireylerin algılamaları ile doğrudan alakalı olduğundan bir kavramın anlamı bireyden bireye farklılık gösterebilir. Burada önemli olan bir kavram için bireyin zihninde yapılandığı kişisel kavram tanımı ile kavramın ilgili literatürde kabul gören formal tanımının kuramsal temelde birbirinden farklı olmaması gerektirir. Tall ve Vinner'a göre kullandığımız birçok kavram formal olarak tanımlanmamıştır, bizler bunları uygun durumlarda deneyimleyerek öğreniriz. Daha sonraki süreçlerde kavramlar gerçek tanımı olsun ya da olmasın, arındırılarak yeniden de yorumlanabilir. Kavram tanımı bir birey tarafından ezberci bir biçimde veya kavramla bağlantılı olarak, bir bütün halinde daha anlamlı şekilde öğrenilebilir (Tall & Vinner, 1981). Bu öğrenmelerden ikincisi matematik eğitiminde kabul gören kavram tanımıdır. Zira bi-

rey tarafından kavramın zihinde anlamlandırılmasıyla kavram tanımı yapılandırılmış olacaktır. Matematik öğretiminde karşılaşılan birçok problemin kaynağı, kavram bilgisinden ziyade işlem bilgisine odaklı bir sürecin yürütülmesidir. Kavramın tanımını zihninde inşa edemeyen öğrencinin kazandığı işlem bilgisi de kalıcılıktan uzak olmaktadır. Matematikteki birçok kavram birbirleriyle ilişkilidir, her yeni kavram kendinden önceki kavramın üzerine kurulan yeni ve başka bir ilişkidir. Matematik öğretiminde bu yapıya dikkat etmek gerekir. Bu durum, kavram tanımının biliniyor olmasının kavramsal bilgiye ulaşmada yeterli olmadığını ifade etmektedir. Bu açıdan kavramsal anlama için, hem kavramın matematiksel tanımının iyi bilinmesi hem de kavramın tanımı ve özellikleri ile farklı bağlamlar arasındaki ilişkilerin kurulabilmesi gerekmektedir. (Çevikbaş & Argün, 2017, s. 553)

Bu çalışmaya konu olan kesir ve rasyonel sayı kavramları; MEB matematik öğretim programında kesir kavramı birinci sınıftan itibaren bütün ve yarımın uygun modellerle (somut nesnelere) gösterimi ve bu iki alt kavram arasındaki ilişkinin açıklanmasıyla başlamakta ilerleyen sınıflarda yarım, çeyrek, kesir, pay, payda, kesir çizgisi, birim kesir, basit kesir, bileşik kesir, tam sayılı kesir, kesirlerde işlemler ve sıralamayla devam etmektedir. Rasyonel sayı kavramı matematik öğretim programlarında ilk kez yedinci sınıfta rasyonel sayıları tanıtır ve sayı doğrusu üzerinde gösterir ifadesiyle karşılaşılmaktadır. Her tam sayının, paydası 1 olan bir rasyonel sayı olduğu vurgulanır; rasyonel sayıları ondalık gösterimi yer verilmiştir. İlerleyen sınıflarda rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir, tam kare olmayan sayıların kareköklerinin rasyonel sayı olarak belirtilemediğine (iki tam sayının oranı şeklinde yazılamadığına) dikkat çekilir ve  $\pi$  sayısı bir irrasyonel sayı olarak tanıtılır. Dokuzuncu sınıf düzeyinde sayı kümelerini birbiriyle ilişkilendirir kazanımıyla doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı ve gerçek sayı kümelerinin sembollerinin tanıtılarak bu sayı kümeleri arasındaki ilişkileri üzerinde durulacağı belirtilmiştir (MEB,2018).

Matematikte kesir kavramı, eş parçalara bölünmüş bir bütünün parçalarından biri veya birkaçı; iki sayının birbirine bölünmüş hali; bir topluluğun veya bir koleksiyonun parçalarından biri veya bazıları şeklinde ifade edilmektedir(Argün vd., 2014, s.278). Rasyonel sayı kavramının formal tanımı;  $Z^* = Z \setminus \{0\}$  olmak üzere kesirler kümesi  $Z \times Z^*$  üzerinde “ $(a,b) \sim (c,d)$  olması için gerek ve yeter şart  $a \cdot d = b \cdot c$  olmasıdır.” şeklinde tanımlanan denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının her birine rasyonel sayı denir ve  $(a,b)$  olan rasyonel sayı  $\frac{a}{b}$  şeklinde gösterilir. Rasyonel sayıların temsilcileri kesirler; yani, iki tam sayının oranı biçimindeki ifadeler olduğu için bu sayı kümesine “orsal sayı” anlamında rasyonel sayılar kümesi adı verilmiştir (Argün vd., 2014, s. 435). Doğal ve tam sayı bilgisi rasyonel sayı kavramı için bir ön koşul niteliğindedir. Ancak bu ön koşul ilişkisine rağmen matematik öğretim süreçlerinde kesirlerin ve rasyonel sayıların öğrenimi doğal ve tam sayılara göre oldukça zordur (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Ciosek & Samborska, 2016; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi &

Vosniadou, 2010). Bu zorluğun nedeni, kesir kavramı açısından bakıldığında bir kesrin beş farklı anlamı olmasına rağmen öğretim süreçlerinde kesrin yalnızca parça-bütün temsiline odaklanılması kesir kavramı ile ilgili kısıtlı öğrenmeye neden olmaktadır (Behr vd., 1992; Haser & Ubuz, 2002; Okur & Gürel, 2016; Toluk-Uçar, 2002). Rasyonel sayıların farklı temsillerine erken maruz kalmanın, öğrencilere rasyonel sayılar için daha fazla birbirine bağlı ve uygulanabilir temsil bilgisi geliştirmelerinde yardımcı olacağını belirtmektedir (Moseley, 2005). Diğer taraftan rasyonel sayı kavramının sembolik gösterim çeşitliliği (pay/payda, ondalık, yüzde), sıralama, yoğunluk, birim eleman gibi özellikler bakımından tam ve doğal sayılardan farklı yapıda olması kavramsal olarak anlaşılmasını güçleştirmektedir (Cansız-Aktaş, Apaydın & Aktaş, 2014; Çevikbaş & Argün, 2017; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Rasyonel sayı kavramının işlendiği farklı sınıf düzeylerinden yapılan boylamsal bir araştırmaya göre, öğrencilerin rasyonel sayıyı anlamlandırmada ilk adımları rasyonel sayının sayısal büyüklüğünü anlamaktır katılımcıların kısıtlı bir bölümü rasyonel sayıların yoğun yapısını tam olarak anlamıştır (Van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel ve Van Dooren, 2018). İlkokuldan üniversiteye kadar farklı yaş gruplarından ve fen bilimleri alanlarından mezun katılımcı ile yapılan nitel çalışma kesrin parça-bütün temsiliyle bağlantılı yanlış bir inancı ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmanın sonucuna göre, literatürde bu konuda henüz bir tanımlama olmamasına rağmen katılımcılar bir bütünün  $1/n$  sini elde etmek için bütünü  $n$  tane eşit parçaya ayırmak gerektiği şeklinde yanlış bir algıya sahiptir (Ciosek ve Samborska, 2016). Zira burada “kesin olarak eş parçalardan bahsetmek doğru değildir” vurgusu yapılmaktadır. Çin’de yapılan araştırmada parça-bütün ve ölçme temsilleriyle denk kesirlerin verildiğinde, öğrencilerde kesirli sayıların çarpımsal doğasına ek olarak kesir denkliği kavramının gelişmesi kesirli sayıların anlam bilgisinin inşasına zenginlik katmaktadır (Ni, 2001). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin sayı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı ve irrasyonel sayı kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarının ve bu sayı kavramlarıyla ilgili sahip oldukları kavram yanlışlarının ortaya konulması amaçlanmıştır (Temel ve Eroğlu, 2014). Matematik öğretmen adaylarının, matematiğin temel kavramlarından, bağıntı, küme, rasyonel sayılar, denklik sınıfı gibi kavramların soyut tanımlarını bile bilmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca çalışma sürecinde ele alınan kavramlardan biri olan kesir kavramıyla ilgili katılımcılara kesir kavramı ile rasyonel sayı kavramı arasında bir ilişki olduğundan bile haberdar olmadıkları belirlenmiştir (Argün ve Dede, 2004). Matematik öğretmen adaylarının rasyonel sayılar ile ilgili işlemsel bilgilerinin yüksek, kavramsal bilgilerinin orta ve pedagojik alan bilgilerinin ise düşük düzeyde olduğu belirlenmiştir (Faulkenberry, 2003).

Alan yazındaki çalışmalarda kesir ve rasyonel sayı ile ilgili işlemsel bilgiden kaynaklı kavram yanlışlarına odaklanmaktadır. Kesir gösteriminin farklı anlamlarını (parça-bütün, oran, bölme, işlemci, ölçme) ve bu anlamların yapılandırma sürecini

konu edinen birkaç farklı çalışma olsa da literatürdeki çalışmalar “kesir ve rasyonel sayı” kavramlarını/kavram tanımlarını tek başına derinlemesine inceleme hususunda bir araştırmaya rastlanılmamıştır. Bu çalışmada ana problem olarak matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerin kesir ve rasyonel sayı kavramlarına ilişkin bilgilerinin belirlenmesi; zihinlerindeki kesir ve rasyonel sayı yapılarının incelenmesi mevcut bilgi eksiklikleri ve bu kavramları anlamaya dayalı problemleri tespit edebilme. Bu ana problem çerçevesinde aşağıdaki:

1. Matematik öğretmenleri derslerinde kesir ve rasyonel sayı kavramlarını nasıl tanımlamaktadır?
2. Matematik öğretmenleri kesir ve rasyonel sayı kavramları arasındaki ilişkiyi nasıl ifade etmektedir?
3. Kesir ve rasyonel sayı kavramlarına ilişkin öğrenme sürecinde öğrencilerin kavram tanımları nedir? problemlere cevap aranacaktır.

## **2. Yöntem**

### **2.1. Araştırmanın Modeli**

Bu araştırma nitel bir araştırmadır. İlk olarak öğretmenlerin kesir ve rasyonel sayı kavramları tanımlama ve bu kavramlar arasındaki ilişkisinin farkındalığı verileri toplanıp elde edilen bulgular doğrultusunda öğrenciye ne kadarının aktarıldığı ve bu farkındalığın öğrencide ne kadar etkili olduğu açısından incelendiğinden nitel araştırma yöntemlerinden karma yöntem keşfedici sıralı desen kullanılarak tasarlanmıştır.

### **2.2. Katılımcılar**

Bu çalışmanın örneklem evreni 2018-2019 eğitim-öğretim yılı içinde İç Anadolu bölgesinde Millî Eğitim Bakanlığına bağlı sekiz farklı ortaokul ve ortaöğretimde görev yapan toplam 24 matematik öğretmeni ve dört farklı ortaöğretim kurumunda 9. sınıfta öğrenim gören toplam 188 öğrenci; oluşmaktadır.

### **2.3. Veri Toplama Yöntemi**

Bu çalışmada veriler, öğretmenler ile yarı yapılandırılmış bire bir yüz yüze görüşmeler yapılmıştır. Öğretmenlerden toplanan verilen analiz edilerek ve uzman görüşü alınarak hazırlanan kavram tanımı tespit formu ile toplanmıştır.

### **2.4. Veri Toplama Araçları ve Süreç**

Bu çalışmada, biri kavram tanımı tespit formu diğeri yarı yapılandırılmış görüşme formu olmak üzere iki veri toplama aracı kullanılmıştır. Bu araçlardan kavram tanımı tespit formu ile öğrencilerin kesir ve rasyonel sayı kavramları üzerine kavramsal düşünme ve bilgi düzeylerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Diğer veri toplama aracı ise kesir ve rasyonel sayı kavramları hakkında öğretmenlerin kullandıkları kavram tanımlarının ve bu kavramları öğretim sürecinde nasıl ele aldıklarının belirlenmesini

amaçlayan yine bir yarı yapılandırılmış görüşme formudur. Veri toplama araçlarının içerik, biçim ve amaca uygunluk bakımından yeterli olup olmadığı ile ilgili uygulamalardan önce uzman görüşü alınmıştır. Çalışma sürecinde derinlemesine bir veri analizi yapabilmek için öğrencilerin kesir ve rasyonel sayı kavramına ilişkin kavramsal tanım düzeylerini ölçmek amacıyla bir test oluşturulmuştur. Matematik öğretmenlerinin kesir ve rasyonel sayı kavramları için yaptıkları matematiksel tanımların ve bu kavramların öğretiminde öğrencilerde neler gözlemlediklerinin incelenmesi kapsamında öğretmenlerle yapılan yarı yapılandırılmış mülakat için görüşme formu geliştirilmiştir. Görüşme yapılacak öğretmenlerle daha önceden görüşülerek uygun zaman belirlenmiştir ve görüşmelerin ses kayı edici cihaz ile kayıt altına alınacağı belirtilmiştir. Bu görüşmeler ortalama 20-25 dakika sürmüştür. Öğrencilere uygulanacak kavram tanımı tespit formunun uygulanma sürecinde öncelikle uygulamanın yapılacağı okulu yönetimi ve matematik öğretmenleri ile görüşülerek uygulanabileceği uygun ders saati belirlenmiştir. Uygulamaların tüm aşamaları bizzat araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Testin uygulanmasında öğrencilere detaylı bir şekilde açıklama yapılarak ve soruların içtenlikle cevaplandırılması gerekliliği hususunda bilgilendirme yapılmıştır.

### 2.5. Verilerin Analizi

Veri toplama sürecinde toplanan veriler betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Matematik öğretmenleri ile yapılan görüşmeler kayıt altına alınan veriler metin haline çevrilmiştir. Her bir soruya ait ana temalar belirlenerek ana temalara ilişkin öğretmen görüşlerinden birebir alıntılar yapılmıştır. Alıntılar yapılırken katılımcı öğretmenler Ö1, Ö2, ... Ö24 şeklinde kodlanmıştır. Kavram tespiti formunu dolduran öğrencilerin kayıtlı oldukları okulları LiseA, Lises2, LiseC, LiseD şeklinde kodlanmış ve kavram tanımı tespiti formunun öğrencilere uygulanan kavram tanıma tespit formunun belirlenen ana temalara ilişkin yüzde-frekans değerleri tablolarda yer verilmiştir. Burada kavram tanıma tespiti formu dolduran öğrenci sayıları; 2018-2019 eğitim öğretim yılında 9. Sınıfa devam eden öğrenci dağılımları da LiseA(80), LiseB(41), LiseC(51), LiseD(16) şeklindedir.

### 3. Bulgular

Matematik öğretmenleri kesir ve rasyonel sayı kavramları arasındaki ilişkiyi nasıl ifade ettikleri ve bu kavramları derslerinde nasıl tanımlamakta sorusuna cevap aracaktır.

Öğretmenler bazı sorular için birden fazla görüş belirtmişler ve bu görüşler kodlama yapılırken dikkate alınmıştır. Bu sebeple bazı tablolarda değerler %100'ü geçebilmektedir. Diğer taraftan bazı sorulara görüş belirtmeyen öğretmenler bulunmaktadır. Bu durum da yine analiz yapılırken dikkate alındığından bazı kod dağılım tablolarında değerler %100'e ulaşmamaktadır.

**Tablo 1.** Matematik Öğretmenlerinin Derslerinde Kesir Kavramı ve Rasyonel Sayı Tanımlamaları

Kodlar	Frekans(f)	Yüzdelerik(%)	Öğretmen ifadeleri
Bir bütünü eş parçalarından biri veya birkaçı	19	79,16	<p>“Eş parçalara ayrılmış bir bütündeki parçaları göstermek için kullandığımız ifadeler”(Ö2)</p> <p>“Bir ya da daha fazla bütünü eş parçalara ayırarak bu eş parçalardan istenilen kadarının gösterilmesi”(Ö16)</p> <p>“Bir bütünü parçalarını kesirle ifade ediyoruz.”(Ö13)</p> <p>“Bir bütünü kaç eşit parçaya ayırdığımız gösteren, a/b biçiminde tanımlanan ifadelerdir.”(Ö23)</p>
İki sayının birbirine bölümü/oranı	4	16,6	<p>“bir sayının başka sayıya bölümü”(Ö6)</p> <p>“çokluğun oranı”(Ö11)</p>
a,b∈N, b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilen ifade	5	20,83	<p>“a ve b birer doğal sayı, b sıfırdan farklı olmak üzere <math>\frac{a}{b}</math> şeklinde ifade edilen sayılara kesir denir.”(Ö17)</p> <p>“a/b şeklinde yazılabilen (a,b∈N ve b≠0) sayılara kesir denir.”(Ö21)</p>
a,b∈Z, b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebilen (a,b)	2	8,33	<p>“a ve b birer tam sayı ve b eşit değildir sıfır olmak üzere (a,b) sıralı ikililerinden oluşan bir kümenin her bir elemanına verilen isimdir ve bu sıralı ikililer a/b şeklinde de gösterilir.”(Ö12)</p> <p>“Paydası 0 dan farklı olmak üzere herhangi iki tamsayının birbirine oranı”(Ö24)</p>
Kesirleri, negatif kesirleri ve tam sayıları içine alan sayı kümesi	6	25	<p>“7. sınıfta tamsayılardaki ilişki ile birlikte negatif olanlar ve pozitif olan kesirlerin hepsi sıfırı da dahil ederek rasyonel sayı oluyor.”(Ö1)</p> <p>“Tam ya da kesirli sayıların ortak adı”(Ö9)</p>
a,b∈Z ve b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebilen ifade (İki tam sayının birbirine oranı)	12	50	<p>“a ve b tamsayı olmak ve b sıfırdan farklı olmak şartıyla <math>\frac{a}{b}</math> şeklinde yazılabilen sayılara denir.”(Ö2)</p> <p>“İki tamsayının birbirine oranı ile ifade edilebilen sayılar.”(Ö3)</p> <p>“Bir tamsayının başka bir tamsayıya oranı.”(Ö7)</p> <p>“... 'oranlı sayı' lar anlamına gelen rasyonel sayıları açıklamaya çalışırken, oran ile ifade edilebilen reel sayılara rasyonel sayı denileceğini belirtiyorum.”(Ö24)</p>
a,b∈Z, b≠0 ve a ile b aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilebilen ifade (Birbirine denk kesirlerden oluşan küme)	8	33,33	<p>“Birbirine denk olan kesirlerin meydana getirdiği her kümeye rasyonel sayı denir.”(Ö12)</p> <p>“... rasyonel sayıların kesirlerin en sade hali olduğunu söylerim.”(Ö14)</p> <p>“Q rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, <math>\frac{p}{q} \in Q \Leftrightarrow p,q \in Z</math> ve (p,q)=1”(Ö19)</p> <p>“a ile b aralarında asal olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen (a,b∈Z ve b≠0) sayılara rasyonel sayı denir.”(Ö21)</p>
Kesirleri, negatif kesirleri ve tam sayıları içine alan sayı kümesi	6	25	<p>“7. sınıfta tamsayılardaki ilişki ile birlikte negatif olanlar ve pozitif olan kesirlerin hepsi sıfırı da dahil ederek rasyonel sayı oluyor.”(Ö1)</p> <p>“Tam ya da kesirli sayıların ortak adı”(Ö9)</p>

## Matematik Öğretmenlerinin ve Öğrencilerinin Kesir ve Rasyonel Sayı Kavramına Ait Tanımla...

Tablo 1’de matematik öğretmenlerinin derslerinde kesir kavramını tanımlamaları %79,16’sı kesir kavramını parça-bütün ilişkisiyle, %16,6’sı “iki sayının birbirine bölümü” olarak, %20,83’ü “ $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$  olmak üzere  $\frac{a}{b}$  biçiminde gösterilen ifade” şeklinde, %8,33’ü ise “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  olmak üzere  $\frac{a}{b}$  biçiminde gösterilebilen  $(a, b)$ ” diye tanımlamakta iken Rasyonel sayı kavramını matematik öğretmenlerinin %25’i “iki tam sayının oranı” şeklinde, %33,33’ü “birbirine denk kesirlerden oluşan küme” ifadesiyle ve %50’si “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  ve  $a$  ile  $b$  aralarında asal olmak üzere  $\frac{a}{b}$  biçiminde gösterilebilen ifade” olarak tanımlama yaptıkları görülmektedir.



**Tablo 2.** Matematik Öğretmenlerinin Kesir, Rasyonel Sayı ve Rasyonel İfade Kavramları Arasındaki İlişki Farkındalığı

Kodlar	Frekans(f)	Yüzdellik(%)	Öğretmen ifadeleri
Kesirler rasyonel sayıların alt kümesidir. $(\frac{a}{b})$ ifadesinde $a, b \in \mathbb{N}$ ise kesir, $a, b \in \mathbb{Z}$ ise rasyonel sayıdır.)	11	45,83	"Rasyonel sayı genişleyen ve içine negatifi de alan kesirler. Kesir kısıtlı olan kısım eksiği de ekleyince rasyonel sayı denmiş."(Ö6) "Kesrin pozitif değerler ifade ettiğini rasyonel sayıların ise hem pozitif hem negatif değerler aldığını düşünüyorum."(Ö8) "Rasyonel sayı kesir kavramını kapsar, ama her rasyonel sayıya kesir diyemeyiz."(Ö9) "a/b ifadesinin kesir olabilmesi için a ve b nin bir doğal sayı olması gerekirken rasyonel sayı olabilmesi için bu şart geçerli değildir."(Ö21)
Kesir ile rasyonel sayı aynı anlama gelen iki kavramdır.	3	12,5	"İkisinin de aynı olduğunu düşünüyorum. Sadece sınıf olarak 7. Sınıfa kadar kesir, sonrasında rasyonel sayı olarak isimlendiriyoruz."(Ö2)
Kesir, rasyonel sayıların sembolik gösterimlerinden biridir.	6	25	"kesir, rasyonel sayı gösterimlerinden yalnızca bir tanesi"(Ö7) "rasyonel sayıların gösterim çeşitlerinden birisi kesir şeklinde gösterimdir."(Ö12)
Kesir kavramı rasyonel sayı kavramının somutlaştırılmış halidir.	2	8,33	"Kesir daha somut, rasyonel sayı daha soyut bir kavram"(Ö4)
Rasyonel sayı kesirin en sade halidir.	5	20,83	"Rasyonel sayılar kesirlerin en sade halleridir. Bir rasyonel sayı birden çok kesire denkir."(Ö14) "a/b ifadesinin rasyonel sayı olabilmesi için a ile b nin aralarında asal olması gerekir."(Ö21)
Rasyonel ifadede rasyonel sayı ve kesirden farklı olarak pay ve paydada değişken bulunur.	16	66,66	"Kesir çizgisi olduğunda $(\frac{x+5}{x+2})$ gibi rasyonel ifade olduğunu, pay ve paydada sayı varsa $(\frac{2}{3})$ gibi rasyonel sayı olduğunu düşünüyorum."(Ö2) "Rasyonel ifadelerde, rasyonel sayılardan farklı olarak pay ve paydada değişkenler vardır."(Ö3) "Rasyonel ifadede değişken vardır, rasyonel sayı sadeleşmiştir, kesir sadeleşmemiştir."(Ö19) "P(x)/Q(x) şeklindeki ifade rasyonel ifadedir. Fakat bu durumda rasyonel sayı olabilmesi x'in alabileceği değerlere bağlıdır."(Ö21) "Rasyonel ifadeler içerisinde kesirlerin olduğu ancak bunun yanında değişkenlerin de bulunduğu ifadelerdir. Rasyonel sayılar kendi başlarına bir sayı iken, ifadeler bunların daha geniş halidir."(Ö22)
Rasyonel ifade iki sayının oranını belirtir.	3	12,5	" $\frac{\sqrt{2}}{3}$ gibi herhangi iki sayının oransal olarak karşılaştırılması"(Ö7) "Bir sayının başka bir sayıya oranı"(Ö16) "Rasyonel ifade oranlı ifadelerdir. Her rasyonel sayının bir rasyonel ifade olduğunu fakat tersinin doğru olmadığını düşünüyorum. Rasyonel ifadeler ile kesirler arasında oranlı yazılmaları dışında ortak bir nokta olmadığını düşünüyorum."(Ö24)
Fikrim yok	5	20,83	

Tablo 2’de kesir, rasyonel sayı ve rasyonel ifade kavramları arasında ilişkinin farkındalığına bakıldığında matematik öğretmenlerinin %45,83’ü kesirler rasyonel sayıların alt kümesidir, %12,5’i kesir ile rasyonel sayının aynı kavramlar olduğunu belirterek, %25’i kesiri rasyonel sayıların sembolik gösterimlerinden biri şeklinde ifade ederek, %8,33’ü kesir kavramı rasyonel sayı kavramının somutlaştırılmış halidir, ve %20,83’ü rasyonel sayı kesirin en sade halidir olarak ifade etmekte iken %66,66’sı rasyonel sayı ve kesir olduğunda pay ve paydada sayı olduğunu, rasyonel ifadenin ise pay ve/veya paydasında bilinmeyen olduğunu ifade etmektedirler. Matematik öğretmenlerin %12,5’i rasyonel ifadenin iki sayının birbirine oranını belirttiğini, %20,83’ü ise bu soru ile ilgili fikirlerinin olmadığını ifade etmişlerdir.

**Tablo 3.** Matematik Öğretmenlerinin Öğrencilerinde Kesir ve Rasyonel Sayı Kavramları Arasındaki İlişkiyi Deneyimle Durumu

Yanıt	Frekans(f)	Yüzelik(%)
Evet	19	79,16
Hayır	5	20,83
Kesirde parça-bütün ilişkisi olduğunu rasyonel sayıda oransal bir ilişki olduğunu ifade etme	2	10,52
Rasyonel sayının farklı gösterimlerinden örnekler verme	2	10,52
Rasyonel sayı için denk kesirlerin temsilcisi tanımını yapma	3	15,78
Negatiflik-pozitiflik ayırımından bahsetme	10	52,63
Sadeleşme özelliğini ayırt edici olarak verme	2	10,52

Tablo 4’de göre matematik öğretmenlerinin %79,16’sı öğrencilerinde kesir ve rasyonel sayı kavramlarının aynı şeyi ifade ettiği bilgisini/algısını deneyimlettirdikleri, %20,83’ü ise öğrencilerinde böyle bir bilgi/algı deneyimlettirmediklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca matematik öğretmenlerinin %10,52’si kesirde parça-bütün ilişkisi olduğunu rasyonel sayıda oransal bir ilişki olduğunu ifade ederek, %10,52’si rasyonel sayıların farklı gösterimlerini kullanarak, %52,63’ü kesirlerin pozitif, rasyonel sayının ise hem pozitif hem negatif olabileceğinden bahsederek, %15,78’i rasyonel sayı için denk kesirlerin temsilcisi tanımını yaparak ve %10,52’si sadeleşme özelliğini ayırt edici olarak vererek öğrencilerde farkındalık oluşturmaya çalıştıklarını ifade etmişlerdir.

### Kavram Tanımı Tespit Formuna İlişkin Bulgular

Matematik öğretmenlerinden elde edilen bilgiler ışığında öğrencilere uygulanan kavram tanımlama tespit formunda bulunan sorular Tablo 5 de oluşan temalar ve kodlar verilmiştir.

**Tablo 4.** Kavram Tanımı Formu Temalar ve Kodları

Temalar	Kod
Kesir pay ve paydadan oluşur. Kesir olması için kesir çizgisi olmalıdır. $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir.	A1
$\frac{a}{b}$ ifadesinde a ile b aralarında asal ise bu ifade kesirdir.	A2
$\frac{a}{b}$ ifadesinde $a < b$ ise bu ifade kesirdir. (Kesir çeşitlerini bilmiyor.)	A3
Devirli veya ondalıklı ifadeler kesir değildir.	A4
$\frac{a}{b}$ şeklinde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır.	B1
Devirli veya ondalıklı sayılar rasyonel sayı değildir. (Rasyonel sayıların farklı gösterimlerini bilmiyor.)	B2
Kesir negatif olamaz, rasyonel sayı hem negatif hem pozitif olabilir.	C1
$\frac{a}{b}$ biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır.	C2
Virgüllü sayıda virgülden sonrası sonsuz ise rasyoneldir, sonlu ise kesirdir.	C3

Tablo 4’de öğrencilerin kesir kavramıyla ilgili görüşleri A1, A2, A3, A4; rasyonel sayı kavramıyla ilgili görüşleri B1, B2 ve hem kesir hem de rasyonel sayı kavramıyla bağlantılı görüşleri C1, C2, C3 şeklinde kodlanmıştır. Öğrenciler bazı sınıflandırmaların nedenini yazarken birden fazla görüş belirtmişler ve bu görüşler kodlanırken dikkate alınmıştır. Bu sebeple bazı tablolarda değerler %100’ ü geçebilmektedir. Diğer taraftan bazı sınıflandırmalarda ise öğrenciler sınıflandırma yapmış ancak görüş belirtmemişlerdir. Bu durum da analiz yapılırken dikkate alındığından bazı kod dağılım tablolarında değerler %100 e ulaşmamaktadır.

**Tablo 5.** 5 Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1	C2
LiseA	57	71	78,26	0	8,69
LiseB	17	41	87,5	0	8,33
LiseC	18	35	78,78	9,09	30,3
LiseD	6	38	100	0	40

Tablo 5'e göre LiseA'nın %71'i, LiseB'nin %41'i, LiseC'nin %35'i ve LiseD'nin %38'i 5 sayısını hem kesir hem de rasyonel sayı olarak doğru ifade etmişlerdir. Tablo 5'e göre 5 sayısını yanlış sınıflandırma yapan öğrenci hatalarının LiseA'da %78,26'sı, LiseB'de %87,5'i, LiseC'de %78,78'i ve LiseD'de tamamı " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir." görüşünden kaynaklanmaktadır. Aynı sınıflandırmadaki hataların LiseA'da %8,69'u, LiseB'de %8,33'ü, LiseC'de %30,3'ü ve LiseD'de %40'ı ise " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır" gerekçesiyle yapılmıştır. Ayrıca LiseC'de öğrencilerin %9,09'u " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır" düşüncesiyle yanlış sınıflandırma yapmışlardır.

**Tablo 6.** -12 Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1	C1	C2
LiseA	54	68	0	76,92	38,46	38,46
LiseB	17	41	0	79,16	0	25
LiseC	14	27	0	72,97	0	43,24
LiseD	4	25	0	83,33	0	41,66

Tablo 6'da LiseA'da %68'i, LiseB'de %41'i, LiseC'de %27'si ve LiseD'de %25'i -12 sayısı için hem kesir hem de rasyonel sayı işaretlemesi yaparak doğru sınıflandırmıştır. LiseA'da %76,92'si, LiseB'de %79,16'sı, LiseC'de %72,97 si ve LiseD'de %83,33'ü " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır" görüşünden dolayı yanlış sınıflandırma yapmıştır. Burada öğrenciler  $-\frac{12}{1}$  formuna dönüştürerek -12 sayısının yalnızca rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir. Aynı sınıflandırmaya ait hataların LiseA'da %38,46'sı, LiseB'de %25'i, LiseC'de %43,24'ü ve LiseD'de %41,66'sı ise -12 sayısının negatif olmasından dolayı " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır" gerekçesiyle yapılmıştır. Ayrıca LiseA'da yanlış sınıflandırma yapan öğrencilerin %38,46'sı "Kesir negatif olamaz, rasyonel sayı hem negatif hem pozitif olabilir." düşüncesiyle -12 sayısını -negatif olması nedeniyle- kesir sınıfına dahil etmemişlerdir.

**Tablo 7.**  $-\frac{3}{4}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1	C1	C2
LiseA	68	85	8,33	0	75	16,66
LiseB	31	76	60	0	20	20
LiseC	14	27	62,16	8,10	10,81	21,62
LiseD	2	13	57,14	7,14	28,57	7,14

Tablo 7’de LiseA’da %85’i, LiseB’de %76’sı, LiseC’de %27’si ve LiseD’de %13’ü  $-\frac{3}{4}$  sayısını hem kesir hem de rasyonel sayı olarak doğru olarak ifade etmelerine rağmen LiseA’da %8,33’ü, LiseB’de %60’ı, LiseC’de %62,16’sı, LiseD’de %57,14’ü de yanlış sınıflandırma yapmıştır. Bu yanlış sınıflandırma “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir” görüşünden kaynaklanmaktadır. Yine  $-\frac{3}{4}$  sayısına ait sınıflandırma hatalarının LiseA’da %16,66’sı, LiseB’de %20’si, LiseC’de %21,62’si ve LiseD’de %7,14’ü “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır” düşüncesinden kaynaklanmıştır. Burada  $-\frac{3}{4}$  sayısının negatif olmasından dolayı yalnızca rasyonel sayı olarak işaretlenmiştir. Hataların LiseA’da %75’i, LiseB’de %20’si, LiseC’de %10,81’i ve LiseD’de %28,57’si “Kesir negatif olamaz, rasyonel sayı hem negatif hem pozitif olabilir” gerekçesiyle yapılmıştır. Ayrıca  $-\frac{3}{4}$  sayısını yanlış sınıflandırmadaki hataların LiseC’de %8,10’u ve LiseD’de %7,14’ü  $-\frac{3}{4}$  sayısı “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır” ifadesinden dolayı yalnızca rasyonel sayı olarak işaretleme suretiyle yapılmıştır.

**Tablo 8.**  $\frac{3}{5}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1	C2
LiseA	77	96	33,33	0	66,66
LiseB	32	78	66,66	0	33,33
LiseC	18	35	72,72	6,06	21,21
LiseD	4	25	91,66	16,66	8,33

Tablo 8’de LiseA’da %96’sı, LiseB’de %78’i, LiseC’de %35’i ve LiseD’de %25’i  $\frac{3}{5}$  sayısı için hem kesir hem de rasyonel sayı şeklinde doğru ifade etmelere rağmen LiseA’da %33,33’ü, LiseB’de %66,66’sı, LiseC’de %72,72’si ve LiseD’de %91,66’sı  $\frac{3}{5}$  sayısı “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir” görüşündeki  $\frac{a}{b}$  formuna uygun olmasından kaynaklanmaktadır. Yapılan diğer hatalar ise LiseC’de %6,06’sı ve LiseD’de %16,66’sı, “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel

sayıdır” görüşündeki  $\frac{a}{b}$  formuna uygun olduğu için yalnızca rasyonel sayı olarak işaretleme ve

LiseA’da %66,66’sı, LiseB’de %33,33’ü, LiseC’de %21,21’i ve LiseD’de %8,33’ü “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır.” görüşünden kaynaklanmaktadır.

Burada  $\frac{3}{5}$  pozitif olduğundan yalnızca kesir sınıfına dahil edilmiştir.

**Tablo 9.**  $\frac{2}{4}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	A2	B1	C2
LiseA	3	4	0	1,30	98,70	0
LiseB	8	20	0	3,03	100	0
LiseC	27	53	0	12,50	87,50	8,33
LiseD	10	63	0	0	100	0

Tablo 9’da  $\frac{2}{4}$  sayısının kesir/rasyonel sayı olarak doğru sınıflandırılma oranlarını LiseA’da %4’ü,

LiseB’de %20’si, LiseC’de %53’ü ve LiseD’de %63’ü  $\frac{2}{4}$  dir.  $\frac{2}{4}$  sayısını sınıflandırma hatalarının

LiseA’da %1,3’ü, LiseB’de %3,03’ü, LiseC’de %12,5’i “ $\frac{a}{b}$  ifadesinde a ile b aralarında asal ise bu ifade

kesirdir” görüşünden kaynaklanmaktadır. Burada 2 ile 4 aralarında asal olmadığından  $\frac{2}{4}$  ifadesi kesir

olarak işaretlenmemiştir. Sınıflandırmada yapılan hataların LiseA’da %98,7’si, LiseC’de %87,50’si,

LiseD’de ve LiseB’de ise tamamı “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır”

düşüncesinden kaynaklanmaktadır. Burada  $\frac{2}{4}$  sayısını  $\frac{a}{b}$  formunda olduğundan yalnızca rasyonel sayı

olarak işaretlenmiştir. Ayrıca LiseC’de yanlış sınıflandırma yapan öğrencilerin %8,33’ü “ $\frac{a}{b}$  biçiminde

yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır” düşüncesiyle  $\frac{2}{4}$  sayısını pozitif

olması nedeniyle kesir sınıfına dahil etmiştir.

**Tablo 10.**  $2\frac{1}{5}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	A2	A3	B1	C2
LiseA	79	99	0	0	0	0	100
LiseB	30	73	54,54	0	9,09	0	27,27
LiseC	19	37	53,12	0	18,75	6,25	18,75
LiseD	4	25	83,33	8,33	8,33	0	0

Tablo 10'da  $2\frac{1}{5}$  sayısal ifadesinin kesir/rasyonel sayı olarak doğru sınıflandırılma oranları LiseA'da %99'u, LiseB'de %73'ü, LiseC'de %37'si ve LiseD'de %25'i ifadeyi hem kesir sınıfına hem de rasyonel sayı sınıfına alarak doğru yanıtlamıştır.  $2\frac{1}{5}$  sayısını yanlış sınıflandıran öğrencilerin görüşleri LiseB'de %54,54'ü, LiseC'de %53,12'si ve LiseD'de %83,33'ü " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir" görüşüne dayanmaktadır. Hataların LiseB'de %27,27'si ve LiseC'de %18,75'i " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır." düşüncesiyle yapılmıştır. Ayrıca öğrencilerin LiseD'de %8,33'ü " $\frac{a}{b}$ " ifadesinde a ile b aralarında asal ise bu ifade kesirdir" düşüncesiyle yalnızca kesir sınıflandırması yapmış ve LiseC'de %6,25'i " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır" görüşüyle yalnızca rasyonel sayı sınıflandırması yapmıştır. Yine aynı sınıflandırmada öğrencilerin LiseB'de %9,09'u, LiseC'de %18,75'i ve LiseD'de %8,33'ü " $\frac{a}{b}$ " ifadesinde  $a < b$  ise bu ifade kesirdir." görüşüyle yanlış sınıflandırmıştır.

**Tablo 11.** 0,6 Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	A4	B2	C2	C3
LiseA	72	90	25	50	0	25	0
LiseB	32	78	33,33	55,55	0	11,11	0
LiseC	19	37	12,5	15,62	3,12	34,37	43,75
LiseD	4	25	33,33	33,33	41,66	0	25

Tablo 11'de 0,6 sayısının kesir/rasyonel sayı olarak okullara göre doğru sınıflandırılma oranları LiseA'da %90'ı, LiseB'de %78'i, LiseC'de %37'si ve LiseD'de %25'i dir. 0,6 sayısını yanlış sınıflandırmadaki öğrenci hatalarının LiseA'da %25'i, LiseB'de %33,33'ü, LiseC'de %12,5'i ve

LiseD’de %33,33’ü “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir” görüşünden kaynaklanmaktadır.

Aynı sınıflandırmadaki hataların LiseA’da %50’si, LiseB’de %55,55’i, LiseC’de %15,62’si ve LiseD’de %33,33’ü “Devirli veya ondalıklı ifadeler kesir değildir” fikrine dayanmaktadır. Öğrenciler bu düşünceyle 0,6 ifadesinin kesir olmadığını belirtmişlerdir. Benzer şekilde aynı sınıflandırma hatalarının LiseC’de %3,12’si ve LiseD’de %41,66’sı “Devirli veya ondalıklı sayılar rasyonel sayı değildir.” düşüncesine göre 0,6 ifadesini rasyonel sayı olarak sınıflandırmama suretiyle yapılmıştır. Yapılan diğer hata grubundaki öğrencilerin LiseA’da %25’i, LiseB’de %11,11’i, LiseC’de %34,37’si “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir, negatif ise rasyonel sayıdır” görüşünden yola çıkarak 0,6 pozitif olduğundan yalnızca kesir olarak sınıflandırmıştır. Bu ifadeyi sınıflandırmada yapılan hataların oranları LiseC’de %43,75’i ve LiseD’de %25’i “Virgüllü sayıda virgülden sonrası sonsuz ise rasyoneldir, sonlu ise kesirdir” düşüncesiyle 0,6 ifadesini yalnızca kesir olarak sınıflandırmıştır.

**Tablo 12.**  $3,4\bar{2}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	A4	B1	B2	C2	C3
LiseA	59	74	9,53	19,04	9,52	0	9,52	28,57
LiseB	19	46	31,81	54,54	9,09	31,81	4,54	0
LiseC	14	27	18,91	37,83	5,40	16,21	2,70	32,43
LiseD	3	19	30,76	69,23	0	61,53	0	0

Tablo 12’de  $3,4\bar{2}$  sayısının kesir/rasyonel sayı olarak doğru sınıflandırılma oranlarının LiseA’da %74’ü, LiseB’de %46’sı, LiseC’de %27’si ve LiseD’de %19’u  $3,4\bar{2}$  dir.  $3,4\bar{2}$  sayısı için hatalı sınıflandırma yapan öğrencilerin dağılımı LiseA’da %9,53’ü, LiseB’de %31,81’i, LiseC’de %18,91’i ve LiseD’de %30,76’sı “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir” görüşünden kaynaklanmaktadır. Benzer bir bakış açısıyla LiseA’da %9,52’si, LiseB’de %9,09’u, LiseC’de %5,4’ü “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır” görüşüyle hatalı sınıflandırma yapmıştır. Aynı sınıflandırmadaki hataların LiseA’da %19,04’ü, LiseB’de %54,54’ü, LiseC’de %37,83’ü ve LiseD’de %69,23’ü “Devirli veya ondalıklı ifadeler kesir değildir” fikrine dayanmaktadır. Benzer şekilde aynı sınıflandırma hatalarının LiseB’de %31,81’i, LiseC’de %16,21’i ve LiseD’de %61,53’ü “Devirli veya ondalıklı sayılar rasyonel sayı değildir” düşüncesine göre  $3,4\bar{2}$  ifadesini rasyonel sayı olarak sınıflandırmama suretiyle yapılmıştır. Başka bir hatalı sınıflandırma yapan öğrencilerin LiseA’da %9,52’si, LiseB’de %4,54’ü, LiseC’de %2,7’si “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen sayı pozitif ise kesir,



negatif ise rasyonel sayıdır” görüşünden yola çıkarak  $-3,4\bar{2}$  pozitif olduğundan- yalnızca kesir olarak sınıflandırmıştır. Yapılan son hatalı sınıflandırmada LiseA’da %28,57’si ve LiseC’de %32,43’ü “Virgüllü sayıda virgülden sonrası sonsuz ise rasyoneldir, sonlu ise kesirdir” düşüncesiyle  $3,4\bar{2}$  ifadesini yalnızca rasyonel sayı olarak sınıflandırmıştır.

**Tablo 13.**  $\pi = 3,14\dots$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1
LiseA	41	51	94,87	5,13
LiseB	21	51	80	30
LiseC	9	18	26,19	76,19
LiseD	4	25	8,33	91,66

Tablo 13’te  $\pi = 3,14\dots$  sayısının kesir/rasyonel sayı olarak okullara göre doğru sınıflandırılma oranları LiseA’da ve LiseB’de %51’i, LiseC’de %18’i LiseD’de %25’i dir.  $\pi = 3,14\dots$  sayısı için “kesir ve/veya rasyonel sayı değildir” şeklinde sınıflandırma yaparak doğru yanıtlamıştır. Hatalı sınıflandıran öğrencilerin oranları LiseA’da %94,87’si, LiseB’de %80’i, LiseC’de %26,19’u ve LiseD’de %8,33’dür.

“ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir” görüşünden kaynaklanmaktadır. Burada öğrenciler

$\pi = 3,14\dots$  sayısını  $\frac{22}{7}$  olarak düşündüğünden yalnızca kesir olduğunu belirtmişlerdir. Aynı sınıflandırmadaki hataların LiseA’da %5,13’ü, LiseB’de %30’u, LiseC’de %76,19’u ve LiseD’de %91,66’sı “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır” düşüncesiyle  $\pi = 3,14\dots$  sayısını yine  $\frac{22}{7}$  olarak yalnızca rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir.

**Tablo 14.**  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  Sayısal İfadesine Ait Kodların Okullara Dağılımı (%)

Okul	Doğru yanıt sayısı	%	A1	B1
LiseA	17	16	92,06	12,69
LiseB	12	29	86,20	27,58
LiseC	5	10	73,91	43,47
LiseD	0	0	75	41,17

Tablo 14’de  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  sayısının kesir/rasyonel sayı olarak okullara göre doğru sınıflandırılma oranların LiseA’da %16’sı, LiseB’de %29’u, LiseC’de %10’dur. LiseD’de ise  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  sayısı için doğru sınıflandırma

Matematik Öğretmenlerinin ve Öğrencilerinin Kesir ve Rasyonel Sayı Kavramına Ait Tanımla...

yapan öğrenci bulunmamaktadır. Yanlış sınıflandırmadaki öğrenci hatalarının LiseA'da %92,06'sı, LiseB'de %86,20'si, LiseC'de %73,91'i ve LiseD'de %75'i " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade kesirdir" görüşünden kaynaklanmaktadır. Burada öğrenciler  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  sayısında kesir çizgisi olduğundan yalnızca kesir olduğunu belirtmiştir. Yine aynı sınıflandırmadaki hataların LiseA'da %12,69'u, LiseB'de %27,58'i, LiseC'de %43,47'si ve LiseD'de %41,17'si " $\frac{a}{b}$ " biçiminde yazılmış/yazılabilen ifade rasyonel sayıdır" düşüncesiyle  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  sayısının yalnızca rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir.

#### 4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

##### Öğretmen Görüşmelerine İlişkin Sonuçların Tartışması

Görüşme yapılan öğretmenler kesir kavramının yalnızca parça-bütün anlamına odaklı düşünerek, kesir kavramını parça bütün ilişkisiyle tanımlamışlardır. Başka bir grup öğretmen ise yine kesir kavramının diğer anlamları olan 'oran' ve 'bölme' anlamlarını aynı ifadeler gibi düşünerek kesir kavramını -alındığı sayı kümesi önemli olmaksızın- iki sayının birbirine oranı ya da bölümü olarak ifade etmişlerdir. Kesir kavramı için daha formal tanımla yaklaşan öğretmenlerden ise  $\frac{a}{b}$  ifadesinin kesir olması için pozitif olması gerektiğini düşünenler a ve b nin doğal sayı, pozitif olma zorunluluğunun olmadığına odaklananlar ise a ve b nin tam sayı olması gerektiğini belirtmişlerdir. Kesir kavramını anlamsal olarak irdelemeden sadece pay/payda gösterimi olarak yorumlayan öğretmenler ise kesiri bir rasyonel sayının gösterimi olarak ifade etmişlerdir.

Rasyonel sayı kavramı için öğretmenlerin tanımları üç farklı fikre odaklıdır. Bu fikirlerden ilki rasyonel sayıların tam sayıları ve kesirleri içine alan sayı kümesi olarak görmekte, ikinci bir görüş ise rasyonel sayıların tamsayılar kümesinden alınan herhangi iki tamsayının  $\frac{a}{b}$  şeklinde ifade edilmesi suretiyle rasyonel sayının oransal(kesir) gösterimine odaklı bir düşünce ve son görüş ise matematik eğitimi lisans programı kapsamında rasyonel sayıların inşasına bağlı kalarak ortaokul ya da 9. sınıf öğrencilerinin bildiği denk kesirler ve iki sayının aralarında asal olması düşüncesiyle ile verilen tanımlardır. Bazı öğretmenler kesir ile rasyonel sayı kavramları arasında bir altküme ilişkisi kurmuşlardır. Bu bakış açısındaki öğretmenler kesir ifadesinin iki tam sayı arasındaki ilişkiyi ifade eden bir gösterim, rasyonel sayıların ise tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısıyla inşa edilen bir sayı kümesi olduğunu göz ardı ederek kesirleri de bir sayı kümesi gibi düşünmüşlerdir. Rasyonel sayı kavramının formal tanımını temel alan düşünceyle öğretmenler kesir ile rasyonel sayı

arasındaki ilişkiyi sadeleşme özelliğiyle ifade etmişlerdir. Bu araştırma kapsamında görüşme yapılarına kadar kesir ve rasyonel sayı kavramını zihinlerinde karşı karşıya getirmemiş öğretmenler kesir ve rasyonel sayı arasındaki ilişki sorulduğunda bu iki kavramın bir farkı olmadığını belirtmişlerdir. Öğretmenlere ‘rasyonel ifade’ ile ilgili görüşleri sorulduğunda bu kavramı ortaokulda denklemler konusuna hazırlık olarak verilen cebirsel ifadeler konusuyla bağlantılı olarak iki cebirsel ifadenin oranı şeklinde tanımladıkları görülmüştür. Rasyonel ifade kavramını rasyonel sayı ve kesir kavramı ile nasıl ilişkilendirdikleri sorulduğunda ise kesir çizgisiyle gösterimi bu üç kavram için ortak nokta olarak belirtmişlerdir. Öğrencilerinde kesir ve rasyonel sayı kavramlarının aynı şeyi ifade ettiği algısını deneyimleyen öğretmenler bu algıyı düzeltmek için sadeleştirme özelliğini ve rasyonel sayıların farklı gösterimlerini kullanmışlardır. Ayrıca kesir ve rasyonel sayı kavramlarının farklılığını açıklarken kendi düşünceleri doğrultusunda kesirin negatif olamayacağını ancak rasyonel sayının hem negatif hem pozitif değerler alabileceğini ifade eden öğretmenler de vardır. Benzer sonuçlar öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve hatta öğretmenlerin “kesir” ve “rasyonel sayı” kavramlarını aynı kavram gibi düşündükleri (Çevikbaş & Argün, 2017), öğretmen adaylarının kesir ve rasyonel sayı kavramları arasındaki ilişkiyi ifade edemedikleri sonucuna ulaşmışlardır (Dede & Argün, 2004). Öğretmenlerin derslerinde rasyonel sayı kavramını işledikleri süreçte rasyonel sayının kesir gösterimi dışındaki gösterimlerini de (ondalık, devirli ondalık gösterim) içeren zengin örnek çeşitliliği ile rasyonel sayı kavramını vermeleri öğrencilerdeki kısıtlı algılamının önüne geçecektir. Özellikle ilkokul sınıflarından başlayarak öğretimin her kademesinde bir kesir formunun farklı anlamları olabileceği (parça-bütün, oran, bölme, işlemci, ölçme) hususunda öğrencilerde farkındalık oluşturmak bu kavramların anlaşılmasına katkı sağlayacaktır.

### Öğrencilerin Kesir ve Rasyonel Sayı Kavram Tanımlamalarına Yönelik Sonuçları

Öğrenciler  $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış ya da bu forma getirilebilen başka bir deyişle pay, payda ve kesir çizgisi ile verilen ifadelerin kesir olduğu algısına sahiptir. Burada a ve b sayılarının hangi sayı kümesinden olması gerektiği öğrenciler için önemli değildir. Bu durum öğrencilerin kesir kavramının formal tanımını tam olarak bilmediğini göstermektedir. Kesir kavramı için öğrencilerin sahip olduğu başka bir düşünce ise kesirin negatif olamayacağı algısıdır. Bu düşünceyle öğrenciler kavram tanıma testinde verilen negatif ifadeleri kesir sınıfına dahil etmemişlerdir. Bu duruma öğrencinin zihnindeki kesir tanımının temelinde sadece parça-bütün ilişkisinin olması neden olmaktadır. Zira öğrenci bir bütünün negatif parçasının olamayacağı düşüncesiyle kesirin de negatif olamayacağı görüşüne sahiptir. Öğrenciler  $\frac{a}{b}$  ifadesinin kesir belirtmesi için  $a < b$  olması gerektiğini düşünmektedirler. Bu nedenle tam sayılı ve bileşik kesir formunda verilen ifadeleri kesir olarak sınıflandıramamışlardır. Bu hata öğrencilerin kesir çeşitlerini bilmemesinden kaynaklanmaktadır. Öğrencilerin bir kısmı ise  $\frac{a}{b}$  ifa-

desinin kesir belirtmesi için a ile b sayılarının aralarında asal olması gerektiğini belirterek testteki ifadesini kesir olarak sınıflandıramamışlardır. “ $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış ifade kesirdir” görüşüne bağlı olarak bir grup öğrenci devirli veya ondalık gösterimle verilen ifadelerin kesir olamayacağını düşünmektedirler. Bazı öğrenciler  $\frac{a}{b}$  biçiminde yazılmış ya da bu forma getirilebilen ifadelerin rasyonel sayı olduğu fikrine sahiptir. Burada öğrencilerde a ve b sayılarının hangi sayı kümesinden ve a ile b sayıları arasında nasıl bir ilişki olması gerektiği farkındalığı bulunmamaktadır. Bu algı öğrencilerin rasyonel sayı kavramının formal tanımını bilmediğini göstermektedir. Öğrencilerdeki rasyonel sayı kavramı ile ilgili yanlışlardan bir diğeri ise devirli veya ondalık formda verilen yani  $\frac{a}{b}$  gösterimi ile verilmemiş ifadelerin rasyonel sayı olamayacağı görüşüdür. Buradan hareketle öğrencilerin bir rasyonel sayının farklı gösterimleri olabileceği farkındalığına sahip olmadıkları söylenebilir. Öğrenciler bu formla karşılaşmadan önce kesir ve rasyonel sayı kavramlarını zihinlerinde anlamsal olarak karşı karşıya getirmemişlerdir. İşlemsel düzeyde ise bu iki kavramı birbiri yerine kullanmak suretiyle çalışmışlardır. Bundan dolayı verilen bir sayısal ifadeyi kesir/rasyonel sayı olarak sınıflandırırken kafa karışıklığı yaşamışlardır. Öğrenciler  $\frac{a}{b}$  gösteriminin matematik derslerinde ilkokulda ‘kesir’, ortaokuldan itibaren ise ‘rasyonel sayı’ anlamına geldiğini düşünmektedirler. Kesir ve rasyonel sayı kavramlarının matematiksel anlamda farklı kavramlar olduğunu düşünen öğrencilerin bir kısmı bu iki kavram arasında işaret anlamında bir farklılık olduğu düşüncesine sahiptir. Bu bağlamda öğrenciler kesirin negatif olamayacağını düşünerek,  $\frac{a}{b}$  şeklindeki bir ifadenin önünde eksi olduğunda rasyonel sayı olarak sınıflandırmışlardır. Bir başka deyişle öğrenciler rasyonel sayıların kesirleri ve kesirlerin negatiflerini içine alan bir sayı kümesi olduğunu düşünmektedirler. Kesir ve rasyonel sayı kavramlarının matematiksel anlamda farklı kavramlar olduğunu düşünen öğrencilerin diğer bir kısmı ise, virgüllü olarak verilen bir sayıyı tahlil ederken virgülden sonrasına bakmış ve virgülden sonrası sonsuz olduğunda rasyonel sayı, virgülden sonrası sonlu olduğunda kesir olarak sınıflandırma yapabilmişlerdir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar da bu iki kavram arasındaki ilişki bakımından literatürü desteklemekle beraber araştırmacıların bu farkındalığını da doğrular niteliktedir. Bununla beraber bu düşüncenin temelinde yatan kavram tanımlarını inceleme amaçlı yürütülen bu çalışmanın sonucunda ise öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin kesir ve rasyonel sayı kavramlarının tanımlarını doğru yapamadıkları, bu iki kavramın benzerliklerini ve farklılıklarını ifade etmede yetersiz kaldıkları görülmektedir. Bu bağlamda rasyonel sayı kavramı, matematik eğitimi programları lisans düzeyindeki rasyonel sayıların inşasını temel alan ve öğrencilerin bildiği denk kesirler ve iki sayının aralarında asal olması fikirleriyle yapılan tanımlar-

la tanıtılması matematik eğitimi açısından şüphesiz yerinde olması düşünülmektedir. Ayrıca kesir ve rasyonel sayıların öğretimi sürecinde öğrencilerin zihninde kavramsal bilginin derinleşmesinin ardından işlemsel bilgilere yer verilebilir.

### Kaynakça

- AKTAŞ, D. Y., & Cansız Aktaş, M. (2012). Öğrencilerin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlamaları. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 103-110.
- ARGÜN, Z., Arkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- BEHR, M. J., Harel G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning research perspectives* (pp. 296-333). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- CANSIZ AKTAŞ, M., Apaydın, Z., & Aktaş, D. Y. (2014). 9. Sınıf öğrencilerinin rasyonel sayılar kümesinin yoğunluğunu anlama düzeyleri. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, 39(171).
- CIOSEK, M., & Samborska, M. (2016). A false belief about fractions - What is its source? *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 20-32. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.02.001>
- ÇEVİKBAŞ, M., & Argün, Z. (2017). Geleceğin matematik öğretmenlerinin rasyonel ve irrasyonel sayı kavramları konusundaki bilgileri. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 30(2), 551-581.
- DEDE, Y., & Argün, Z. (2004). Starting point of mathematical thinking: The role of mathematical concepts. *Educational Administration in Theory & Practice*, 39, 338-355.
- FAULKENBERRY, E. E. D. (2003). *Secondary mathematics preservice teachers' conceptions of rational numbers* (Doctoral dissertation). Oklahoma State University Faculty of the Graduate College, Oklahoma.
- HASER, Ç., & Ubuz, B. (2002). Kesirlerde kavramsal ve işlemsel performans. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, 27(126), 53-61.
- MEB (2018). Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, *İlkokul ve ortaokul (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) matematik dersi öğretim programı*. Ankara: MEB.
- MEB (2018). Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11, 12. Sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- MOSELEY, E. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2005), 37-69. doi:10.1007/s10649-005-5031-2
- NI, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 400-417. doi:10.1006/ceps.2000.1072

Matematik Öğretmenlerinin ve Öğrencilerinin Kesir ve Rasyonel Sayı Kavramına Ait Tanımla...

- NI, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. [https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001\\_3](https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3)
- OKUR, M., & Çakmak Gürel, Z. (2016). Ortaokul 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram yanlışları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 922-952.
- TALL, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12(1981), 151-169.
- TEMEL, H., & Eroğlu, A. O. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırılmaları üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 22(3), 1263-1278.
- TOLUK, Z. (2002). İlköğretim öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 19(2), 81-103.
- VAMVAKOUSSI, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, 37(2015) 50-55. <http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.002>
- VAMVAKOUSSI, X., & Vosniadou S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209. <https://doi.org/10.1080/07370001003676603>
- VAN HOOFF, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, 61(2018), 99-108. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010>
- VINNER, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14:3, 293-305, DOI: 10.1080/0020739830140305