Öneri, C.1, S.2
Ocak, 1995, ss.123-132

POZİNOMİAL GEOMETRİK PROGRAMLAMA

Arş.Gör. Tuncay Can[*]

GİRİŞ

Geometrik programlama, posynomial veya signomial kısıtlar altında yine posynomial veya signomial amaç fonksiyonunu optimal yapma problemidir. Konveks olmayan programlama problemini konveks programlama problemine indirgeyerek global optimum sonuçlar sağlar ve bazı özel şartlarda amaç fonksiyonunun optimal değeri için alt ve üst sınır belirler.

İlk olarak mühendislik alanındaki problemleri çözebilmek amacıyla algoritma geliştirilmesi amacıyla ortaya çıkmasına karşın bugün birçok alana uygulanabilmektedir. Envanter Teorisi, Pazar Karışımı problemlerine uygulanması ilginçtir. Doğrusal olma-yan programlama başlığı altında incelenmesine karşın, diğer tüm programlama teknik- lerine göre üstünlüğü onun doğrusal olmayan programlama başlığından ayrı bir başlık altında incelenmesine yol açmıştır. Sağlam bir matematik teorisi vardır. Geometrik programlamada kullanılan kavramları anlayabilmek ve takip edebilmek için iyi bir opti- mizasyon teorisi bilgisi gerekmektedir.

Bu yazıda geometrik programlamaya bir giriş yapılarak bu programlama hakkında okuyucuya bir fikir verilecektir. Diğer yazılarda bu programlamanın uygulamala- rı üzerinde durulacaktır.

1. POZİNOMİAL FONKSİYONLAR

Bir pozinomial fonksiyon

$$y \equiv y(x) = \sum_{t=1}^{T} C_t p_t(x) \qquad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. C_t verilen pozitif reel sayılar ve

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)'$

iken $p_t(x)$ fonksiyonu; a_{tn} herhangi reel sayı olmak üzere

$$p_t(x) = \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} \qquad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada y' nin bir polinom olmadığı derhal görülebilir. Çünkü te-rimlerin katsayıları C_t $(t = 1,\ldots, T)$ pozitiftir ve x_n' in kuvvetlerinin doğal sayı olma zo-runluluğu yoktur.

y fonksiyonunu "amaç fonksiyonu" olarak adlandıralım ve bu fonksiyonu mini-mum yapan değerleri (varsa) araştıralım. Önce kısıtsız problemi gözönüne alalım ve y fonksiyonunu minimize eden $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*$ değerlerini bulmaya çalışalım.

Minimumda; y fonksiyonunun birinci mertebeden kısmî türevleri alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

Şu halde,

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \sum_{t=1}^{T} C_t a_{tk} x_k^{a_{tk}-1} \prod_{n \neq k} x_n^{a_{tn}} = 0$$

$$(k = 1,\ldots,N)$$

elde edilir. Bütün x_n pozitif değerleri için yukarıdaki denklem sistemi

$$\sum_{t=1}^{T} C_t a_{tk} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} = 0 \qquad (k = 1,\ldots,N) \quad (1.3)$$

sistemine dönüşür.

(1.3) N bilinmeyenli; N tane doğrusal olmayan denklem sistemidir. Böyle bir sistemi çözmek çok zordur. En iyi metodlar bile yakınsak olmalarına karşın gerçek çözümü (kökü) bulmakta zorlanırlar.

Doğrusal olmayan denklemlerin çözümü, çok değişkenli bir fonksiyonun optimizasyonu için klasik metodu gerektirir.

$$\sum_{t=1}^{T} C_t a_{tk} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} = 0 \qquad (k = 1,\ldots,N)$$

denklemleri (yerel) optimum için gerekli şartları ifade eder.

[*] M.Ü. İİBF, İşletme Bölümü, Araştırma Görevlisi

Bunun yerine aşağıdaki yaklaşımı gözönüne alalım:

y fonksiyonunun minimum değerini y^* ile gösterelim. y^*, bağımsız değişkenle-rin optimal değerleri (x_n^*) bilinmeksizin bulunabilir.

Bunun için önce ω_t ile göstereceğimiz optimal ağırlıkları tanımlamalıyız. Bu optimal ağırlıklar

$$w_t = \frac{C_t P_t}{y^*}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ağırlıkların toplamının

$$\sum_{t=1}^{T} \omega_t = 1 \qquad (1.5)$$

olduğu açıktır.

(Gerçekten

$$\omega_1 = \frac{C_1 p_1 (x^*)}{y^*},\ \omega_2 = \frac{C_2 p_2}{y^*}, \ldots,\ \omega_T = \frac{C_T p_T}{y^*}$$

olmak üzere bu ağırlıklarının toplamının

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_T = 1$$

olduğu görülür.)

(1.3) ve (1.4) denklemlerinden

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t y^* = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

elde edilir.

(Gerç ekten,

$$\sum_{t=1}^{T} C_t a_{tn} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} = 0 \text{ eşitliğinde } p_t = \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}}$$

yazarsak

$$\sum_{t=1}^{T} C_t a_{tn} p_t = 0 \qquad (\Delta)$$

elde edilir.

$$\omega_t = \frac{C_t p_t}{y^*} \quad \text{bağıntısından}$$

$$p_t = \frac{\omega_t y^*}{C_t} \qquad (C_t > 0)$$

elde edilir ki bu p_t ifadesini (Δ) formunda yerine yazarak

$$\sum_{t=1}^{T} C_t a_{tn} \frac{\omega_t y^*}{C_t} = \sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t y^* = 0$$

bulunur.)

y^* pozitif olduğundan dolayı

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t = 0 \quad (n = 1, \ldots, N) \qquad (1.6)$$

yazılabilir.

Şimdi, w_t değerlerinin bilinmesiyle y^* doğrudan bulunabilir. Gerçekten,

$$y^* = \prod_{t=1}^{T} (y^*)^{\omega_t} = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{C_t p_t (\underline{x}^*)}{\omega_t} \right]^{\omega_t}$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{C_t}{\omega_t} \right)^{\omega_t} \prod_{T=1}^{T} \left[p_t (\underline{x}^*) \right]^{\omega_t} \qquad (1.7)$$

Fakat

$$\prod_{t=1}^{T} \left[p_t (\underline{x}^*) \right]^{\omega_t} = \prod_{t=1}^{T} \left(\prod_{n=1}^{N} (x_n^*)^{a_{tn}} \right)^{\omega t}$$

$$= \prod_{n=1}^{N} \prod_{t=1}^{T} (x_n^*)^{a_{tn} \omega_t} = \prod_{n=1}^{N} (x_n^*)^{\sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t}$$

eşitliği geçerlidir.

Oysa (1.6) bağıntısından $\sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t = 0$

olduğundan

$$\sum_{t=1}^{T}\left[p_t\left(\underline{x}^*\right)\right]^{\omega_t}=1$$

elde edilir. Şu halde (1.7) bağıntısından

$$y^*=\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t}$$

elde edilir ki y^*, C_t katsayıları ve w_t optimal ağırlıklarından hesaplanabilir.

Şimdi y fonksiyonu optimal yapma problemi w_t değişkenlerinin bulunması problemine dönüşmüştür. (1.5) ve (1.6) denklemleri T bilinmeyenli $(N+1)$ denklemden oluşur.

(Gerçekten,

$$\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_T=1 \longrightarrow \sum_{t=1}^{T}\omega_t=1$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\omega_1+a_{21}\omega_2+\ldots+a_{T1}\omega_T=0 \\ a_{12}\omega_1+a_{22}\omega_2+\ldots+a_{T2}\omega_T=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1N}\omega_1+a_{2N}\omega_2+\ldots+a_{TN}\omega_T=0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{t=1}^{T}a_{tn}\omega_t=0 \quad (n=1,\ldots,N)$$

T bilinmeyenli $(N+1)$ denklem elde edilir.)

Bu lineer denklem sisteminin katsayılarından oluşan matrisin determinantı sıfırdan farklı ise sistemin tek bir çözümü vardır.

Örnek:

$$\text{Min } y=C_1x_1^{-3}x_2^{-2}+C_2x_1^{3}x_2+C_3x_1^{-3}x_2^{3}$$

$$y=C_1x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}+C_2x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}+C_3x_1^{a_{31}}x_2^{a_{32}}$$

$$y=\sum_{t=1}^{3}C_t\prod_{n=1}^{2}x_n^{a_{tn}} \quad ,$$

$$p_t=\prod_{n=1}^{2}x_n^{a_{tn}} \qquad (t=1,2,3)$$

$$p_1=x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}$$

$$p_2=x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}$$

$$p_3=x_1^{a_{31}}x_2^{a_{32}}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\omega_t=1 \quad , \quad \sum_{t=1}^{T}a_{tn}\omega_t=0$$

$$\left.\begin{array}{r} \omega_1+\omega_2+\omega_3=1 \\ -3\omega_1+3\omega_2-3\omega_3=0 \\ -2\omega_1+\omega_2+3\omega_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\omega_1=0.4,\ \omega_2=0.5,\ \omega_3=0.1$$

C_1=60, C_2=50, C_3=20 olarak verilsin. Şu halde

$$y^*=\left(\frac{C_1}{\omega_1}\right)^{\omega_1}\left(\frac{C_2}{\omega_2}\right)^{\omega_2}\left(\frac{C_3}{\omega_3}\right)^{\omega_3}$$

$$y^*=\left(\frac{60}{0.4}\right)^{0.4}\left(\frac{50}{0.5}\right)^{0.5}\left(\frac{20}{0.1}\right)^{0.1}=125.8$$

$$y^* = \frac{C_t p_t(x^*)}{\omega_t} \quad \Rightarrow$$

$$C_t p_t(x^*) = y^* \omega_t \quad , \ t = (1,2,3)$$

$$C_1 p_1 = \omega_1 y^* \Rightarrow 60 x_1^{-3} x_2^{-2} = 0.4\text{x}125.8 = 50.32$$

$$C_2 p_2 = \omega_2 y^* \Rightarrow 50 x_1^3 x_2 \quad = 0.5\text{x}125.8 = 62.9$$

$$C_3 p_3 = \omega_3 y^* \Rightarrow 20 x_1^{-3} x_2^3 \quad = 0.1\text{x}125.8 = 12.58$$

$$x_1^* = 1.12, \ x_2^* = 0.944$$

2. ARİTMETİK-GEOMETRİK ORTALAMA EŞİTSİZLİĞİ

v_1 ve v_2 gibi iki pozitif sayının (veya fonksiyonun) aritmetik ortalaması

$$\frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

şeklinde gösterilir. Bu iki sayının geometrik ortalaması ise

$$(v_1 v_2)^{1/2} \quad \text{veya} \quad v_1^{1/2} v_2^{1/2}$$

şeklindedir. Negatif olmayan sayıların veya fonksiyonların aritmetik ortalamaları, bun-ların geometrik ortalamalarından daima büyük veya en fazla eşittir.

Şu halde $v_1, v_2 \geq 0$ için

$$\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 \geq v_1^{1/2} \cdot v_2^{1/2} \qquad (2.1)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Gerçekten,

$$(v_1 - v_2)^2 \geq 0 \quad (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2 \geq 0)$$

bağıntısının geçerli olduğu biliniyor. Bu eşitsizliğin her iki yanına

$$4 v_1 v_2$$

pozitif değeri eklenirse

$$v_1^2 + 2v_1 v_2 + v_2^2 \geq 4 v_1 v_2$$

elde edilir. Sonuçta

$$(v_1 + v_2)^2 \geq 4 v_1 v_2 \Rightarrow \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)^2 \geq v_1 v_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1 + v_2}{2} \geq v_1^{1/2} v_2^{1/2}$$

(2.1) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Bu eşitsizlik koşulu ile aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği genelleştirilebilinir. Örneğin v_1, v_2, v_3 pozitif sayıları ve fonksiyonları için

$$\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_3 \geq v_1^{1/3} v_2^{1/3} v_3^{1/3} \qquad (2.2)$$

bağıntısı yazılabilir. en genel halini vermeden önce ağırlıklı ortalamayı tanımlayalım.

3. AĞIRLIKLI ORTALAMA

$v_2 = v_3$ alınırsa (2.2) eşitsizliği

$$\frac{1}{3} v_1 + \frac{2}{3} v_2 \geq v_1^{1/3} v_2^{2/3}$$

eşitsizlik haline dönüşür. Bu bağıntı, ağırlıklı aritmetik ortalamayı ve onun geometrik eşitliğini tanımlar.

Şimdi, aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki simetri genelleştirilebilinir.

$v_1, v_2, \ldots, v_T$ herhangi pozitif sayılar ve $w_1, w_2, \ldots, w_T$ toplamları bire eşit olan po- zitif ağırlıklar olmak üzere

$$\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \ldots + \omega_T v_T \geq v_1^{\omega_1} v_2^{\omega_2} \ldots v_T^{\omega_T} \quad (3.1)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eşitlik ancak $v_1 = v_2 = \ldots = v_T$ olduğu zaman geçerlidir.

Bu eşitsizliği kullanabilmek için (1.1) de verilen denklem aşağıdaki gibi yazıla-bilir.

$$y = \sum_{t=1}^{T} \omega_t \left(\frac{c_t p_t}{\omega_t} \right)$$

(3.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{t=1}^{T} c_t p_t = \sum_{t=1}^{T} \omega_t \left(\frac{c_t p_t}{\omega_t} \right) \geq \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t p_t}{\omega_t} \right)^{\omega_t} =$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{\omega_t} \right)^{\omega_t} \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t p_t}{\omega_t} \right)^{\omega_t}$$

bağıntısı "predual fonksiyon" olarak adlandırılacaktır. w_t ($t=1,\ldots T$) 'ler dual değişken-leridir.

$$\prod_{t=1}^{T} \left(\frac{c_t}{\omega_t} \right)^{\omega_t}$$

bağıntısı ise "dual fonksiyon" olarak adlandırılacaktır.

(Amaç fonksiyonu

$$y = C_1 x_1^{-3} x_2^{-2} + C_2 x_1^3 x_2 + C_3 x_1^{-3} x_2^3$$
$$(c_1,\ c_2,\ c_3 > 0)$$

şeklinde ise, predual fonksiyon

$$\left(\frac{C_1 x_1^{-3} x_2^{-2}}{\omega_1} \right)^{\omega_1} \left(\frac{C_2 x_1^3 x_2}{\omega_2} \right)^{\omega_2} \left(\frac{C_3 x_1^{-3} x_2^3}{\omega_3} \right)^{\omega_3}$$

şeklindedir. Predual fonksiyonu

$$\left(\frac{C_1}{\omega_1} \right)^{\omega_1} \left(\frac{C_2}{\omega_2} \right)^{\omega_{21}} \left(\frac{C_3}{\omega_3} \right)^{\omega_{31}} x_1^{-3\omega_1 + 3\omega_2 - 3\omega_3} x_2^{-2\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3}$$

şeklinde yazıldığında x_1 ve x_2 nin kuvvetlerinin sırasıyla

$-3\omega_1 + 3\omega_2 - 3\omega_3$ ve

$-2\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3$ olduğu ve

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn} \omega_t = 0$$

bağıntısından dolayı x_1 ve x_2 'nin kuvvetlerinin sıfıra eşit olduğu görülür.

$$y^* = \frac{C_t p_t}{\omega_t} \quad (t = 1, \ldots, T)$$ **eşitliğinden**

$$\frac{C_1 p_1}{\omega_1} = \frac{C_2 p_2}{\omega_2} = \frac{C_3 p_3}{\omega_3} = y^*$$

elde edilir. Şu halde

$$\frac{60(1.12)^{-3}(0.944)^{-2}}{0.4} =$$
$$= \frac{50(1.12)^3(0.944)}{0.5} =$$
$$= \frac{20(1.12)^{-3}(0.944)^3}{0.1} = 125.8$$

4. ZORLUK DERECESİ (DEGREES OF DIFFICULTY)

Terimlerin sayısı ve bağımsız doğrusal denklemlerin sayısı arasındaki fark, "zorluk derecesi" olarak adlandırılır.

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tn}\omega_t = 0 \qquad (n = 1, \dots, N)$$

koşuluna "ortogonalite koşulu" ve

$$\sum_{t=1}^{T} \omega_t = 1$$

koşuluna da "normalite koşulu" adı verilir.

Kısıtsız pozinomial problem için N ortogonalite koşulu ve bir normalite koşulu vardır. Şu halde bu denklemler T-(N+1)

zorluk derecesine sahiptirler. Bu sayı büyüdüğü zaman problemi çözmek zorlaşır.

$$y = 40x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} + 20x_1x_2 + $$
$$+10x_1x_3 + 40x_2x_3 + 5x_1$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu örnek için (1.5) ve (1.6) denklemlerinden

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 = 1 \quad \text{(Normalite Koşulu)}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \qquad + \omega_5 = 0 \\ -\omega_1 + \omega_2 \qquad + \omega_4 \qquad = 0 \\ -\omega_1 \qquad + \omega_3 + \omega_4 \qquad = 0 \end{array}\right\} \text{(Ortogonalite koşulu)}$$

Bu beş bilinmeyenli dört denklem olduğu için tek bir çözüme sahip değildir. T=5, (N+1)=4 T-(N+1)=1 zorluk derecesine sahiptir. Bu lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır ve ilk dört ağırlığı, beşinci ağırlık cinsinden çözersek

$$\omega_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\omega_5 \qquad \omega_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\omega_5$$

$$\omega_3 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\omega_5 \qquad \omega_4 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\omega_5$$

elde edilir.

ω_5 in her seçimi ω_1, ω_2, ω_3, ve ω_4 ün değerlerini verir ki bu değerler normalite ve ortoganalite koşullarını sağlarlar. Problem, bu sonsuz değerler arasından y fonksiyonu-nu minimum yapan optimal ağırlıkları bulmaktır.

Şimdi sadece ω_5 bilnmeyen değişkene bağlı $d(\omega_5)$ ile gösterilen ve "substitudet dual fonksiyon olarak adlandırılan fonksiyonu (1.8) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$d(\omega_5) = \left[\frac{40}{\frac{1}{5}(2-\omega_5)}\right]^{1/5(2-\omega_5)} \left[\frac{20}{\frac{1}{5}(1-3\omega_5)}\right]^{1/5(1-3\omega_5)}$$

$$\left[\frac{10}{\frac{1}{5}(1-3\omega_5)}\right]^{1/5(1-3\omega_5)} \left[\frac{40}{\frac{1}{5}(1+2\omega_5)}\right]^{1/5(1+2\omega_5)} \left(\frac{5}{\omega_5}\right)^{\omega_5}$$

Duffin "substitued dual fonksiyon" olarak adlandırdığı $d(w_5)$ fonksiyonunun w_5^* optimal ağırlığı tarafından maksimum edildiğini ispat etti.

$$d(\omega_5^*) = \underset{\omega_5 \rangle 0}{\text{mak}}\ d(\omega_5) = y^*$$

Genel olarak; Duffin, y fonksiyonunu minimum yapmanın

$$d(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T) = \prod_{t=1}^{T}\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t} \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan $d(w_1, w_2, \dots, w_T)$ dual fonksiyonun ortogonalite ve normalite koşulu altında maksimum yapmak olduğunu gösterdi.

$C_t \rangle 0$ ve $a_{tn} \in \Re$

olmak üzere minimum yapılması istenen

Öneri, C.1, S.2

$$y=\sum_{t=1}^{T} C_t \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}}$$

fonksiyonunu tekrar gözönüne alalım.
Şimdi

$$e^{U_n}=x_n \quad (n=1,\ 2,\dots,N) \qquad (4.2)$$

dönüşümü yapalım. Şu halde problem

$$\text{Minimize} \quad y(\underline{x})=\sum_{t=1}^{T} C_t \prod_{n=1}^{N} e^{U_n a_{tn}} \qquad (4.3)$$

veya

$$y(x)=\sum_{t=1}^{T} C_t \exp\left(\sum_{n=1}^{N} U_n a_{tn}\right) \qquad (4.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi dual geometrik programlama problemini inceleyelim.
Bu programlama problemi

$$\text{Optimal} \qquad d(\underline{\omega})=\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t} \qquad (4.5)$$

$$\text{Kısıtlar} \qquad \sum_{t=1}^{T} a_{tn}\omega_t=0 \quad \text{(Ortogonalite Koşulu)}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\omega_t=1 \quad \text{(Normalite Koşulu)}$$

$$\omega_t \rangle 0$$

(Gerçekten,

$$z(\underline{\omega})=\ln\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t}=\ln\left(\left(\frac{C_1}{\omega_1}\right)^{\omega_1}.\left(\frac{C_2}{\omega_2}\right)^{\omega_2}\dots\left(\frac{C_T}{\omega_T}\right)^{\omega_T}\right)$$

Bütün kısıtlar doğrusal (lineer) olduğundan dolayı dual kısıt kümesi bir konveks bölge oluşturur.

Şimdi $d(\underline{\omega})$ dual amaç fonksiyonunun gücü tanımlanabilir.

$d(\underline{\omega})$ ile çalışmak yerine bunun doğal logaritması olan

$$z(\underline{\omega})\equiv\ln\left(d(\underline{\omega})\right)$$

ile çalışmayı tercih edelim. Bütün w_t (t=1,...,T) değişkenleri $0 < w_t < 1$ bağıntısını gerçeklediğinden dolayı bu mantıklı bir dönüşümdür ve $d(\underline{\omega})$ dual değişkenlerine bağlı
ln ($d(\underline{\omega})$) monotonik bir fonksiyondur.
Şu halde

$$z(\underline{\omega})\equiv\ln\left(d(\underline{\omega})\right)=$$

$$=\ln\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t}=-\sum_{t=1}^{T}\omega_t\ln\left(\frac{\omega_t}{C_t}\right) \qquad (4.6)$$

eşitliği yazılabilir.

$$= \omega_1 \ln\left(\frac{C_1}{\omega_1}\right) + \omega_2 \ln\left(\frac{C_2}{\omega_2}\right) + \ldots + \omega_T \ln\left(\frac{C_T}{\omega_T}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \omega_t \ln\left(\frac{C_t}{\omega_t}\right) = \sum_{t=1}^{T} \omega_t \ln\left(\frac{\omega_t}{C_t}\right)^{-1}$$

$$= -\sum_{t=1}^{T} \omega_t \ln\left(\frac{\omega_t}{C_t}\right) \quad)$$

Fonksiyonlarının toplamının negatif olmasından dolayı $z(\underline{\omega})$ fonksiyonu konkavdır.

Şu halde, dual problem, konveks kısıtlar altında konkav amaç fonksiyonu için denge (sabit) noktasını bulmaktır. Bundan dolayı fonksiyon tek bir mutlak maksimum noktasına sahiptir.

Sonuç olarak amaç, normalite ve ortogonalite koşulları altında $\omega_t > 0$ (t=1,...,T) olmak koşuluyla $z(\underline{\omega})$ dual fonksiyonunu maksimize etmektir.

$$\sum_{t=1}^{T} C_t p_t \geq \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{C_t}{\omega_t}\right)^{\omega_t} \qquad (4.7)$$

olduğunu hepimiz biliyoruz. Orijinal (primal) problemin minimizasyonu, dual proble-min maksimizasyonuna eşittir. Şu halde primal problemin mutlak minimumu, dual problemin mutlak maksimumuna eşittir. Bu çok önemlidir, Çünkü dual problemi çözmek daha kolaydır.

5. DUAL FONKSİYONUN MAKSİMİZASYONU

Şimdi yeter koşulları saptamadan, bir önceki örneğimizi tekrar gözönüne alalım. Optimal ağırlıkları bulmak için tek bir değişken ile sınırlı $d(\omega_5)$ fonksiyonunu maksi-mize edelim. Kolay olduğundan dolayı logaritma ile çalışalım.

$$z(\omega_5) \equiv \ln d(\omega_5) = -\left(\frac{2-\omega_5}{5}\right)\ln\left(\frac{2-\omega_5}{200}\right) - \left(\frac{1-3\omega_5}{5}\right)\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{100}\right) - \left(\frac{1-3\omega_5}{5}\right)\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{50}\right) - \left(\frac{1+2\omega_5}{5}\right)\ln\left(\frac{1+2\omega_5}{200}\right) - \omega_5 \ln\left(\frac{\omega_5}{5}\right) \qquad (5.1)$$

$z(\omega_5)$ fonksiyonunun ω_5 e göre birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{dz}{d\omega_5} = \frac{1}{5}\left(1+\ln\left(\frac{2-\omega_5}{200}\right)\right) + \frac{3}{5}\left(1+\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{100}\right)\right) + \frac{3}{5}\left(1+\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{50}\right)\right) - \frac{2}{5}\left(1+\ln\left(\frac{1+2\omega_5}{200}\right)\right) - \left(1+\ln\left(\frac{\omega_5}{5}\right)\right) = 0 \qquad (5.2)$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2-\omega_5}{200}\right)+\frac{3}{5}\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{100}\right)+\frac{3}{5}\ln\left(\frac{1-3\omega_5}{50}\right)-\frac{2}{5}\ln\left(\frac{1+2\omega_5}{200}\right)$$

$$-\ \ln\left(\frac{\omega_5}{5}\right)+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}-1=0$$

$$= \ln(2-\omega_5)^{1/5}-\ln(200)^{1/5}+\ln(1-3\omega_5)^{3/5}-\ln(100)^{3/5}+\ln(1-3\omega_5)^{3/5}$$

$$-\ln(50)^{3/5}+\ln(1+2\omega_5)^{-2/5}+\ln(200)^{2/5}+\ln\omega_5^{-1}+\ln 5=0$$

$$= \ln\left[(2-\omega_5)^{1/5}(1-3\omega_5)^{6/5}(1+2\omega_5)^{-2/5}\omega_5^{-1}\right]-\ln\left[\frac{(200)^{1/5}(100)^{3/5}(50)^{3/5}}{(200)^{2/5}(5)}\right]=0$$

ortogonalite ve normalite koşullarından dolayı logaritmik olmayan sabitlerin toplamı mutlaka sıfır olacaktır.
Şu halde

$$= \ln\left[(2-\omega_5)^{1/5}(1-3\omega_5)^{6/5}(1+2\omega_5)^{-2/5}\omega_5^{-1}\right]=\ln\left[\frac{(200)^{1/5}(100)^{3/5}(50)^{3/5}}{(200)^{2/5}(5)}\right]$$

olduğundan dolayı ω_5^* optimal ağırlığı

$$(2-\omega_5)^{1/5}(1-3\omega_5)^{6/5}(1+2\omega_5)^{-2/5}\omega_5^{-1}=11.45 \qquad (5.3)$$

eşitliğini sağlar. Burada bir değişken olduğu için tek reel çözüm kolayca bulunabilir. Optimal ağırlık

$$\omega_5^* = 0.0709$$

şeklinde elde edilir. Diğer ağırlıklar ise,

$$\omega_1^* = 0.4-0.2(0.0709)=0.3858$$
$$\omega_2^*\omega_3^* = 0.2-0.6(0.0709)=0.1575$$
$$\omega_4^* = 0.2+0.4(0.0709)=0.2284$$

Şu halde

$$y^*=\left(\frac{40}{0.3858}\right)^{0.3858}\left(\frac{20}{0.1575}\right)^{0.1575}\left(\frac{10}{0.1575}\right)^{0.1575}\left(\frac{40}{0.2284}\right)^{0.2284}\left(\frac{5}{0.0709}\right)^{0.0709}$$

$$y^*=108.75$$

şeklinde bulunur.

$$y^*=\frac{C_t p_t}{\omega_T^*} \qquad (t=1,\ldots,T)$$

eşitliğinden hareketle

$$x_1^* = \frac{(108.75)(0.0709)}{5} = 1.542 \quad , \quad x_3^* = \frac{(108.75)(0.1575)}{10(1.542)} = 1.107$$

$$x_2^* = \frac{(108.75)(0.2284)}{40(1.107)} = 0.561$$

optimal değerleri elde edilir.

KAYNAKÇA

[1] Duffin, R.J., E.L.Peterson, and C.Zener, *Geometric Programming*, Wiley, New York, 1967.

[2] Phillips, D., and C.Beightler, *Applied Geometric Programming*, John Wiley, New York, 1976.

[3] Avriel, M., and A.C.Williams, "*On the Primal and Dual Constraint Sets in Geometric Programming*", J.Math.Anal.and Appl., Vol.32, pp.684-688, 1970.

[4] Passy U., and D.J.Wilde, *Generalized Polynomial Optimization*, Siam Applied Math., Vol.15 No.5, 1967, pp.1344-1356.