Öneri, C.1, S.4.
Ocak 1996, ss.147-151.

MENKUL KIYMETLER PİYASASINDA SÜREKLİ FİYAT SÜREÇLERİ ÜZERİNE

Ömer ÖNALAN [1]

[1] *MÜ.İİBF, İşletme Bölümü, Araştırma Görevlisi*

Abstract: Most of the continuous-time finance models, it is assume that securities prince processes are continuous, operations of the market frictionless and continuous trading opportunities exist.

Generally it's supposed that those market characteristics are independent from the Stochastic processes chosen.

In this paper, in a market which is frictionless and in which the trade is continuous, by using processes which has continuous trajectories, whe research for the stochastic processes class that makes the equilibrium be possible.

Sürekli zamanlı finans modellerinin çoğunda, menkul kıymet fiyat sürecinin sürekli olduğu piyasanın ise işlem maliyetsiz ve sürekli ticaret fırsatlarının varlığı kabul edilir.

Genelde bu piyasa karakteristiklerinin, seçilen stokastik süreçten bağımsız olduğu varsayılır. Bu çalışmada, ticaretin sürekli ve işlemlerin maliyetsiz olduğu bir piyasada, sürekli yörüngeli süreçleri kullanarak, dengeyi mümkün kılan stokastik süreç sınıfını araştırıyoruz.

I.GİRİŞ

Finans modellerinde en sık kullanılan sürekli zamanlı süreçler **diffizyonlar** dır. Bir diffisyon süreci, sürekli yörüngelere sahip bir **güçlü Markov süreci** dir. Böyle süreçlerin yörüngeleri sınırsız değişim gösterirler

Acaba fiyatları, sınırlı değişimli yörüngelere sahip bir süreçle göstermek mümkün müdür?

Arbitraj fırsatlarının mümkün olabilmesi için fiyatların, sınırlı değişimli yörüngelere sahip stokastik süreçlerle gösterilmesi gerektiğini iddia ediyoruz.

Bu iddianın arkasındaki sezgisel gerçek şudur:

Sürekli, sınırlı değişimli fiyat süreçleri için ardışık küçük artmalar arasında anlamlı pozitif korelasyonun olmasıdır[1,2].

Eğer arbitraj imkanı yoksa fiyatlar sınırsız değişime sahip olmalıdır[3].

Sürekli fonksiyonlar için düzgünlüğü üç seviyede tanımlayabiliriz[4].

a) Sonlu değişim

b)Mutlak süreklilik

c) Sürekli yoğunluk ile Mutlak süreklilik

Eğer bir fiyat sürecinin yörüngeleri (b) anlamında düzgünse bu; fiyat değişim oranının her menkul kıymet için iyi tanımlanmış olduğunu ifade eder.(c) anlamındaki düzgünlük ise, fiyat değişim oranın zamanla değiştiğini söyler. Menkul kıymetler farklı ise (c) anlamındaki düzgünlük arbitraj fırsatlarını gerektirir.

II.TEMEL KAVRAMLAR VE NOTASYONLAR

K farklı menkul kıymetin ticaretinin yapıldığı bir piyasa düşünelim. Her bir k menkul kıymeti için;

X_k : Bu menkul kıymetin fiyat sürecini göstersin.

$X_k(t)$: k. menkul kıymetin bir hissesinin t-zamandaki fiyatı

$X_k(0)=1$ ve X_k'nın sürekli, kesinlikle pozitif ve sonlu değişime sahip olduğunu kabul edelim.

$S_k(t)$: k.menkul kıymetinin t-zamanında elde tutulan hisselerinin sayısı

$V(t)$: t - zamanında elde tutulan portföyün toplam değeri yani,

$$V(t) = \sum_{k=1}^{K} X_k(t).S_k(t) \qquad t \geq 0 \qquad (1)$$

p, sabit bir reel sayı olsun. Bir birimlik başlangıç yatırımı ile bir portföy düşünelim. Bu aşamadan sonra portföye herhangi bir yatırım yapılmıyor. Yani elde tutulma değeri, $[X_k(t)]^{p}$' ye oranlanarak sürekli düzeltiliyor. Bu son özelliği şöyle de ifade edebiliriz.

$$\frac{X_k(t).S_k(t)}{V(t)} = \frac{[X_k(t)]^p}{\sum_{j=1}^{K}[X_j(t)]^p} \qquad (2)$$

p'nin büyük değerleri için (2) eşitliği, oransal olarak büyük miktarda yüksek fiyatlanmış menkul kıymetin ekte tutulduğunu söyler. p'nin küçük değerleri ise bunun tersini ifade eder.

p=1 ise (2) denklemi al ve elde tut stratejisi'ni tanımlar. Burada her k ve t için,

$S_k(t)=1/k$ dır.

P=0 ise (2) denklemi, zamanın her bir noktasında her bir menkul kıymetin elde tutulma değerini 1'e eşitleyen bir stratejiyi gösterir[3], şimdide(2), bilindiğinde portföyün zamana göre düzeltilmesi problemini ele alalım.

(2) denkleminden şunu elde ederiz.

$$S_k(t) = \frac{V(t)[X_k(t)]^{p-1}}{\sum_{j=1}^{K}[X_j(t)]^p} \qquad (3)$$

V' yı S_1, S_2, ...S_k 'yı ihtiva etmeyecek şekil ifade edelim.

Portföye sonradan yatırım yapılmaması diferansiyel ifade ile şu şekilde yazılabilir.

$$dV(t) = \sum S_k(t)dX_k(t) \qquad (4)$$

Bu ise, portföyün değerindeki tüm değişmelerin kapital kazanç/kayıplarından olduğunu söyler.

P≠0 için (3) ve (4)' ü birlikte düşünürsek,

$$dV(t) = \frac{V(t)\sum[X_k(t)]^{p-1}dX_k(t)}{\sum[X_k(t)]^p}$$
$$dV(t) = \frac{V(t)\sum\frac{1}{p}d[X_k(t)]^p}{\sum[X_k(t)]^p} \qquad (5)$$

Yani,

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{d\sum[X_k(t)]^p}{\sum[X_k(t)]^p} \qquad (6)$$

veya

$$d\log V(t) = \frac{1}{p}\cdot\log\sum[X_k(t)]^p \qquad (7)$$

V(0)= $X_k(0)=1$ gerçeğini kullanmak suretiyle (7)'den şu sonucu çıkarırız.

$$V(t) = \left\{\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{K}[X_k(t)]^p\right\}^{1/p} \qquad (8)$$

V(t), $X_1(t)$,$X_2(t)$, ...$X_k(t)$ fiyatlarının **p. mertebeden kuvvet ortalaması** dır[2]. çalışmanın bundan sonraki kısmında, p. kuvvet ortalamasını V(t)'den ziyade $V^p(t)$ ile göstereceğiz (3) deki ticaret stratejismede **p-stratejisi** denir.

P=0 olması durumunda,

$$V^0(t) = \left\{ \prod_{k=1}^{K} X_k(t) \right\}^{1/K} \qquad (9)$$

geometrik orta'dır. Bu stratejiler sadece geçmişin ve şu an ki fiyatların bilgisini ister.

Şimdide bu tür stratejilerin arbitraj fırsatlarını nasıl kurduğunu açıklayalım:

Kuvvet ortalamalarının aşağıda sıralayacağımız bir takım özellikleri[5] da kanıtlanmıştır.

1- $-\infty < p < q < \infty$ ise sadece $X_1(t)=...=X_k(t)$

olduğu zaman $V^p(t) \leq V^q(t)$ olur.

Arbitraj karı yapmak için:

Sıfır zamanında her bir hisse senedinden 1/K hisse al ve bu portföyü q-stratejisine göre yönet, yine sıfır zamanında her bir hisse senedinin 1/K hissesini sat ve bu kısa pozisyonları p- stratejisine göre yönet.

Bu işlem hiç bir yatırım yapmaksızın t-zamanında

$V^p(t) - V^q(t)$ lik bir kazanç üretecektir.

[6] 'un deyimi ile p-stratejisinin kendisini finanse eden olduğunu göstermedik.

Şimdi genel bir durumda, p-stratejisinin kendisini finanse eden olduğunu gösterelim.

p'yi çok büyütüp, q'yu da çok küçültmek suretiyle limit alırsak şunu görürüz.

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{K}\sum X_k(t)^q\right)^{1/q} = \operatorname*{Max}_{k=1,2,..K}\{X_k(t)\} \qquad (10)$$

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{K}\sum X_k(t)^p\right)^{1/p} = \operatorname*{Min}_{k=1,2,..K}\{X_k(t)\} \qquad (11)$$

$q \to \infty$ olduğunda, elde edilen strateji, sadece en yüksek fiyatlanmış menkul kıymetin elde tutulması stratejisine yaklaşır.

Buradaki analizimiz, geometrik fiyat göstergelerinin yanıltıcı olduğunu kanıtlamak için yukarda tanımlanan stratejiyi kullanan [2]'ün bir genişlemesidir.

$f:\mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ bir fonksiyon olsun. Bir $0\leq a\leq b\leq\infty$ aralığı ve [a,b] nın $a\leq x_1\leq x_2\leq...\leq x_n\leq b$ şeklindeki sonlu parçalanması $p=(x_1,x_2,...,x_n)$'yi düşünelim.

$$V_f(p) = \sum_{i=2}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| \qquad (12)$$

yi tanımlayalım.

Ayrıca

$$V_f[a,b] = \operatorname{Sup}\left\{ V_f(p) : p, [a,b] \text{nin sonlu parçalanması} \right\} \qquad (13)$$

$V_f[a,b] < \infty$ f' ye [a,b] aralığında sonlu değişimlidir denir ve $f\varepsilon BV[a,b]$ olarak, gösterilir.

$V_f[a,b]$: f [a,b] aralığındaki toplam değişimi

$f\varepsilon BV[a,b]$ olması için gerek ve yeter koşul f'nin [a,b] üzerindeki iki artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilmesidir[7:100].

$f\varepsilon BV[a,c]$ ve $a<b<c$ ise,

$V_f[a,b] + V_f[b,c] = V_f[a,c]$

II.RİEMANN-STİELTJES İNTEGRALLERİ

Daha önce sınırlı değişimli yörüngelere sahip sürekli fiyat süreçlerinin arbitraj fırsatlarına imkan verdiğini iddia etmiştik. Bu iddianın ispatı Riemann-Stieltjes integrallerine bağlı olarak verilecektir.

f ve g, [0,∞) aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olmak üzere Riemann-Stieltjes integralleri aşağıdaki formdadır.

$$\int_0^T f(t)dg(t), \qquad 0 \leq T < \infty \qquad (14)$$

Bu kısımda Riemann-Stieltjes integrasyonun daha sonra ihtiyaç duyacağımız bazı özelliklerini çok kısa olarak vereceğiz: Bu tür integrallerin tam tanımı için[4:14-212]'e bakılabilir.

f sürekli, $g \varepsilon BV[0,T]$ ise f, $[0,T]$ aralığında g'ye göre integrallenebilir[4] .

Zincir Kuralı: f ve g, $g \varepsilon BV[0,\infty)$ olmak üzere$[0,\infty)$ 'da sürekli olsunlar. $\phi: R \to R$ sürekli diferansiyellenebilirse,

$$\int_0^T f(t)d\phi[g(t)] = \int_0^T f(t)\phi'[g(t)]dg(t), \quad 0\langle t \langle \infty \quad (15)$$

Değişken Dönüşümü: h, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli $g \varepsilon BV[0,\infty)$ sürekli olsun.

$$\int_0^t h[g(u)]dg(u) = \int_{g(0)}^{g(t)} h(v)dv \quad (16)$$

Şimdide V^P nin (4)'ü gerçeklediğini gösterelim

p> 0 için biliyoruz ki,

$$S_k(t) = V^P(t) = \frac{[X_k(t)]^{P-1}}{\sum_j [X_j(t)]^P}$$

ve (17)

$$V^P(t) = \left\{ \left(1/k\right) \cdot \sum_k [X_k(t)]^P \right\}^{1/P}, X_1, X_2, \ldots, X_k$$

stokastik süreçleri, sürekli, kesinlikle Pozitif ve sınırlı değişime sahipti.

$$V^P(t) = V^P(0) + \sum_k \int_0^t S_k(u)dX_k(u)$$

(18)

aşağıdaki ifadeye göz atalım.

$$\sum_k \int_0^t X_k(u)dS_k(u) = 0 \quad (19)$$

[4:s.219]

(18)'in sağ tarafındaki ikinci terim; yatırımcının t-zamanına kadar ki toplam kapital kazancını gösteriyor. (18) portföyün piyasa değerindeki tüm değişmelerin kapital kazanç veya kayıpların olduğunu söylüyor. (19) ise aynı şeyi daha basit bir şekilde ifade ediyor. net işlem maliyetini gösteriyor. Diğer bir deyişle, herhangi bir periyotta menkul kıymetin satışı ile elde edilen gelir, aynı periyottaki menkul kıymet alımlarının maliyeti ile dengeleniyor.

Basit Stratejilerle Yaklaşım.

T>0, N büyük sabit bir tamsayı, n=0,1,2,...N için $t_n = n\,T/N$ olsun.

Şöyle bir ticaret stratejisi düşünelim:

Her bir menkul kıymetten t_0-zamanında 1/K birim alınıyor ve bu t_1 -zamanına kadar elde tutuluyor. Yani her bir menkul kıymetin $S_k(t_1)$ birimi satın alınmıştır. Benzer şekilde herbir t_i zamanında her bir menkul kıymetin $S_k(t_i)$ birimi satın alınmıştır. Takip edilen bu strateji her bir $[t_i,t_{i+1}]$ aralığında $S_k(t)$ 'ye yakındır. Bu strateji kendini finanse eden değildir. Fakat her bir Strateji için $[0,t]$ 'de net işlem maliyeti

$$\sum_k \int_0^t X_k(u)dS_k(u)$$

için yaklaşık değeri gösterir.

Böylece Riemonn-Stieltjes integrasyon teorisi kullanılarak kendini finanse eden. Stratejiye basit stratejilerle yaklaşılabilir.

Ticaretin t_n - zamanlarında yapıldığını kabul edelim.

$$S_{Nk}(t_n) = V_N^P(t) = \frac{[X_k(t_n)]^{P-1}}{\sum_j [X_j(t_n)]^P} \quad (20)$$

olur. Burada

Öneri, C.1, S.4.

$$V_N^P(t_n) = \sum_k S_{Nk}(t_{n-1})X_k(t_n) \qquad (21)$$

her bir örnekten eğri (yörünge) için,

$$\lim_{N\to\infty} V_N^P(T) = V^P(T) \qquad (22)$$

dir.

III.SONUÇ

Ticaretin sürekli ve istem maliyetlerinin olmadığı bir piyasada, denge fiyatları sürekli ise, bunlar sınırsız değişimli olmalıdır. Değişim sınırlı ise arbitraj fırsatları mevcuttur. Böylece fiyat süreçlerinin karakteristikleri ve piyasanın karakteristikleri arasındaki bağlantıyı göstermiş oluyoruz.

Fiyat süreçleri mutlak sürekli iken tüm menkul kıymetler aynı olmazsa arbitraj fırsatları ortaya çıkar. Fakat mutlak sürekli olmayan, sonlu değişimli fiyat süreçleri için aynı şeyleri söyleyemeyiz.

KAYNAKLAR

[1]-Breeden D.F. 1979, A intertemponel asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, Journal of Financial Economics 7; 265-96.

[2]-Hodges, S.Dand Schaefer, S.M. 1974, on the interpretation of the geometric mean: A comment, Journal of financial and Quantitative Analysis 9: 497-507.

[3]-Merton, R.C., 1973 a An intertemporal capital asset pricing model, Econometrica, 41, 867-88.

[4]-Bartle, R.G..1976, Elements of Real Analysis 2.ed. Newyork: Wiley.

[5]-Hardy, G.H., Little wood, J.E. and. Polya, G. 1959. Inequatities 2d ed. Cambridge.

[6]-Horrison. J.M and Kreps, D., 1979, Martingales and arbitrage in multiperiot securities markets, Journal of Economic, Theory 20, 381-408.

[7]-Royden, E, 1963, Real Analysis, 2d ed. Newyork; Macmillian.

[8]-Cox.j. Ingersoll, J. and Ross, s., 1985 An intertemporal general equilibrium model of asset prices. Econometrica 53. 363-374.

[9]-Dellacherie, C. and Meyer, P.A., 1982, Probabilities and Potential B, Amsterdam.

[10]-Duffie, D. 1988, Security markets: Stochastic models, Academia Press, Boston.

[11]-Rao, M., 1987, Measure theory and integration, John Wiley, Newyork.

[12]-Ross, S.1977, Return, riskond Arbitrage, in: I.Friend and J. Bicksler ads. Risk and Return in Finance. Balinger, Cambridge, MA, 189-218.

[13]-Sethi, S. 1984, A note on a simplefied aproach to the valuation of risky streams. operations Research Letterss 3, 13-17.