Öneri, C.1, S.4.
Ocak, 1996, ss.153-156.

LEKSIKOGRAFIK GEOMETRIK PROGRAMLAMA (LGP)*

Çev.Tuncay CAN [1]

[1] *M.Ü. İİBF, Ekonometri Bölümü, Araştırma Görevlisi*

Abstact:The paper presents the Kuhn-Tucker conditions and duality theory for the lexicographic minimization problem:

$$\text{lex min}\{F(x)|x \in R_n, G(x) \leq O_m\}$$

where F and G are vector valued functions form $R_n \to R_s$ and $R_n \to R_m$, respectively. The lexicographic duality is then applied for problems with polynomials in the objectives and in the constraints.

I-GİRİŞ

Bu makalede leksikografik minimizasyon problemi için dualite teorisi ve Kuhn-Tucker koşulları incelenecektir. LGP problemi, F, $R_n \to R_s$ ve G, $R_n \to R_m$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\text{lex min}\{F(x)|x \in R_n, G(x) \leq O_m\}$$

şeklinde tanımlanır. Leksikografik dualite teorisi, amaç fonksiyonu ve kısıtları pozinom olan problemlere yani pozinom geometrik programlama problemlerine uygulanmaktadır.

F, $R_n \to R_s$ üzerinde ve G, $R_n \to R_m$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\text{lex min}\{F(x)|x \in R_n, G(x) \leq O_m\} \qquad (1)$$

şeklindeki çok amaçlı matematik programlama problemini gözönüne alalım.

$C \in R_{sn}, A \in R_{mn}$ ve $b \in R_m$ olmak üzere

$$\text{lex min}\{Cx|Ax = b, x \geq O_n\} \qquad (2)$$

leksikografik lineer programlama problemini özel bir durum olarak düşünürsek, bu durumda leksikografik dualite teorisi, standart (tek amaçlı) simpleks algoritmasına benzer olarak leksikografik simpleks metodunun yapısını gösterir.

(1) bağıntısındaki Fx) fonksiyonunu

$$F(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)]$$

şeklinde gösterelim

Burada

$$f_k(x) = \sum_{t=1}^{s_k} c_{kt} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ktj}} \quad ; \; k = 1,2,\ldots,s \qquad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Ve yine (1) bağıntısındaki G(x) fonksiyonu

---

* Bu makale M.Luptacik ve F.Turnovec tarafından "European Journal of Operational Research, 51, 1991" dergisinde yayınlanan makaleden bir çeviridir.

$$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)]$$
ve (4)
$$g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} d_{it} \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{itj}-1} \quad ; \; i = 1,2,\ldots,m$$

şeklinde tanımlanır. (3) ve (4) bağıntılarındaki

$$c_{kt}>0 \;,\; d_{it}>0$$

olduğu varsayılır. (3) ve (4) fonksiyonları ile tanımlı (1) problemi (5) ve $x_n>0$ koşulları altında LGP problemi olarak adlandırılır.

II-LEKSİKOGRAFİK OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ

O_n,n boyutlu sıfır vektörü ve O_{mn},mxn boyutlu sıfır matrisi göstersin. Bir $x \in R_n$ vektörü, $x=O_n$ veya bu vektörün sıfır olmayan ilk bileşeni pozitif ise, leksikografik olarak nonnegatiftir ve,

$$x \text{ lex} \geq O_n$$

şeklinde gösterilir. Sıfır olmayan leksikografik nonnegatif bir vektör, leksikografik olarak pozitiftir ve

$$x \text{ lex} > O$$

şeklinde gösterilir. mxn boyutundaki bir A matrisinin bütün sütunları leksikografik olarak nonnegatif ise, A matrisi leksikografik olarak nonnegatiftir ve

$$A \text{ lex} \geq O_{mn}$$

şeklinde gösterilir. Benzer biçimde leksikografik olarak nonpozitif ve leksikografik olarak negatif bağıntıları tanımlanabilir.

F,R_n üzerinde tanımlanmış s boyutlu vektör değerli bir fonksiyon ve X, R_n nin bir alt kümesi olsun. Şu halde herhangi bir $x \in X$ için, bir $x_* \in X$ vektörü F nin leksikografik olarak minimal noktadır. Şu halde

$$F(x_*) \text{ lex} \leq F(x)$$

F fonksiyonunun minimal noktasını bulma problemi leksikografik minimizasyon problemi olarak adlandırılır ve

$$\text{lex min}\{F(x) \mid x \in X\} \tag{6}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi, G R_n üzerinde tanımlanmış m boyutlu vektör değerli fonksiyon olmak üzere X in

$$X = \{x \in R_n \mid G(x) \leq O_m\} \tag{7}$$

olduğunu varsayalım.

F ve G sürekli, türetilebilir vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\text{lex min}\{F(x) \mid G(x) \leq O_m\} \tag{8}$$

problemi matematik programlama leksikografik minimizasyon problemi olarak adlandırılır.

F nin leksikografik olarak minimum noktası olarak tanımlanan (7) bağıntısı (8) bağıntısının optimal çözümü olarak adlandırılır. F ve G nin bütün bileşenleri konveks fonksiyonlar ise (8) bağıntısı ile ifade edilen problem de konvekstir.

$$\nabla_x F(\bar{x})$$

ile $\bar{x}$ noktasında F nin Jakobiyenini göstereceğiz.

III-KONVEKS LEKSİKOGRAFİK PROGRAMLAMA İÇİN DUALİTE TEORİSİ

$$\nabla_x F(x_*) y \text{ lex} < O_s \qquad (9)$$

$$\nabla_x G_a(x_*) y \leq O_a \qquad (10)$$

bağıntılarını sağlayan R_n e ait olmayan bir y elemanı varsa x_* noktası ((8) bağıntısının optimal çözümüdür. Burada G_a, G nin bir alt vektörüdür.

Teorem 1:

i- x_*, (8) probleminin bir optimal çözümü ise

$$\nabla_x F(x_*) + U_* \nabla_x G(x_*) = O_{sn} \qquad (11)$$

$$G(x_*) \leq O_m\,, \qquad (12)$$

$$U_* G(x_*) = O_s\,, \qquad (13)$$

$$U_* \text{lex} \geq O_{sm}\,, \qquad (14)$$

bağıntılarını sağlayan sxm boyutunda bir u_* matrisi vardır.

ii- (8) problemi konveks ise, (11)-(14) koşulları, ayrıca x_* ın (8) probleminin optimal çözüm göstermesi için bir yeterli koşuldur.

Leksikografik Geometrik programlamayı daha iyi analiz etmek için aşağıdaki Lemma'lara ihtiyaç gösterir.

Lemma 1: A mxn boyutunda, B txn boyutunda iki matris verilmiş olsun.

i- Ya

$$A\,x \text{ lex} < O_m, \qquad (15)$$

$$B\,x \leq O_t \qquad (16)$$

sisteminin $x \in R_n$ şeklinde bir çözümü vardır, veya

$$\text{ii- } VA + HB = O_{mn} \qquad (17)$$

eşitliğini gerçekleyen mxm mertebesinde üçgen matris V ve mxt mertebesinde nonnegatif bir H matrisi vardır.

Lemma 2:

i- A, bir mxn matris ve $x \in R_n$ olmak üzere

$$A \text{ lex} \geq O_{mn}\,,\; x \geq O_n$$

bağıntıları verilsin. Şu halde

$$A\,x \text{ lex} \geq O_m$$

yazılabilir.

Lemma 3:

F, birinci mertebeden kısmî türevlere sahip vektör değerli bir fonksiyon olsun. Şu halde, eğer

$$F(y) - F(x) \geq \nabla_x F(x)(y - x) \ ; \ \forall x, y \in X$$

bağıntısı geçerli ise F, $X \subset R_n$ konveks bölgesi üzerinde konvekstir.

IV-SONUÇ

Geometrik programlama, mühendislik modellerinde, yönetim biliminde ve ekonomide çok sık kullanılan doğrusal olmayan programlama probleminin özel ama çok geniş bir sınıfını teşkil eder.

LGP nın kullanışlı olduğunu görmek için geometrik programlama probleminde optimal çözümün tek olduğunu gösteren aşağıdaki sonuca varılmıştır.

Geometrik programlamanın primal probleminin tutarlı olduğunu ve bu primal problemin bileşenleri pozitif olan bir δ maksimizasyon problemine sahip olduğunu varsayalım. Şu halde geometrik programlamanın primal problemi, eğer bu primal problemin üstel matrisin rangı sütunların sayısına eşit ise, bir optimal çözüme sahiptir.

KAYNAKÇA

[1]- Beightler, Ch.S., and Phillips, D.T., Applied Geometric Programming, Wiley, New York, 1976.

[2]- Duffin, R.J., Peterson, E.L., and Zener, C.M., Geometric Programming, Wiley, New York, 1967.

[3]-Isermann, H., Linear Lexicographic optimization, OR. Spectrum 4, 223-228, 1982.

[4]- Martinez-Legar, J.E., Lexicographic order and duality in multiobjective programming, European Journal of Operational Research 33, 342-348, 1988.