

KALIN CİDARLI İÇİ BOŞ SİLİNDİRLERİN DOĞAL FREKANSLARININ (DIŞ/İÇ) ÇAP ORANI VE SINIR ŞARTLARI İLE DEĞİŞİMİ

Vebil YILDIRIM

Çukurova Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Adana / vebil@cu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, sonsuz uzunlukta, kalın cidarlı, homojen ve izotrop lineer elastik malzemeden yapılmış içi boş silindirin serbest titreşim analizi analitik olarak çalışılmıştır. Öncelikle elastisitenin alan denklemleri kullanılarak, Lamé sabitleri cinsinden hareket denklemi elde edilmiş, daha sonra bu denklem Bessel fonksiyonları yardımıyla kapalı olarak çözülmüştür. Her bir olası klasik sınır şartı için, karakteristik serbest titreşim denklemi kapalı formda sunulmuştur. Şimdiki çalışmadan elde edilen sonuçların mevcut literatürle doğrulanması sonrası parametrik bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Boyutsuz serbest titreşim frekanslarının sınır şartları ve silindir (dış çap/iç çap) oranı ile değişimleri grafik olarak gösterilmiş, sonuçların bazıları da tablo halinde sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Serbest Titreşim, Doğal Frekans, Silindirik, Bessel Fonksiyonu, Analitik Çözüm

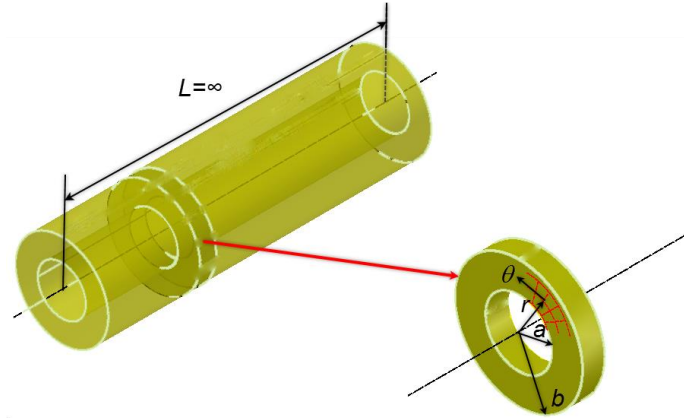
ABSTRACT

In this study exact free vibration analysis is performed for thick-walled infinite hollow cylinders made of an isotropic and homogeneous linear elastic material. Equation of motion in terms of Lamé constants is first derived from field equations of elasticity, and then solved analytically with the help of Bessel's functions. For each classical possible boundary condition the characteristic free vibration equation is presented in closed forms. After verifying the present results with the available literature a parametric study is conducted. Variation of the dimensionless natural frequencies with respect to the boundary conditions and the cylinder aspect ratio (outer radius/inner radius) is illustrated graphically and some numerical results are given in tabular form.

Keywords: Free Vibration, Natural frequency, Cylindrical, Bessel Functions, Analytical Solution

1. Giriş

İnce/kalın cidarlı içi boş silindirler başta basınç kapları ve akışkan taşıyıcı borular olmak üzere farklı endüstrilerde çok çeşitli amaçlar için kullanılmakta olan vazgeçilmez temel yapı elemanlarından (Şekil 1).



Şekil 1. Sonsuz uzunluktaki silindir ve kesit geometrisi

İzotropik ve homojen lineer elastik malzemeden yapılmış silindirlere ait çalışmalar 1890 lı yıllara kadar uzanmaktadır [1] Greenspon [2] elastisite teorisi ile kalın cidarlı silindirlerin eğilme titreşimlerini analitik olarak çalışmıştır. Silindirlerin aksenel-simetrik serbest titreşimi Gladwell ve Tahbaldar [3] tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile ele alınmıştır. Hutchinson içi dolu [4] ve içi boş [5] silindirlerin serbest titreşimini incelemiştir. Singal ve Williams [6] kalın cidarlı silindirlerin serbest titreşimini teorik ve deneysel olarak analiz etmişlerdir. Ghosh [7] Poisson oranına ve (dış/iç) yarıçap oranlarına göre sonsuz uzunluktaki izotropik ve homojen lineer elastik malzemeden yapılmış içi boş silindirlerde boyutsuz serbest titreşim frekanslarını, silindir iç ve dış yüzeyinin gerilmesiz olma durumu için (serbest-serbest sınır şartı) tablo halinde sunmuştur. Ghosh [7] aynı çalışmada Laplace dönüşümü yardımıyla silindirlerde zorlanmış titreşimi de analitik olarak incelemiştir. Silindirik yapıların üç boyutlu serbest titreşim analizleri ile ilgili [8-13] ve sonlu silindirlerin serbest titreşim analizleri ile ilgili [14-16] çalışmalar da literatürde mevcuttur. Bunlardan Mofakhami ve ark. [16] sonsuz uzunluktaki silindirlere ait çözümleri ve değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak, sonlu uzunluktaki silindirlere ait titreşimleri farklı sınır şartları için (ankastre-ankastre ve serbest-serbest) çalışmışlardır. Günümüzde çalışmalar ileri malzemeden yapılmış silindirler konularında hızla devam etmektedir.

Yıldırım [17] söz konusu kalın cidarlı silindirik yapıların termal yükler ile iç ve dış basınçlara maruz kalma ve sabit bir açısal hızla dönme durumlarında aksenel simetrik gerilme ve yer değiştirme analizini analitik olarak incelemiş ve her bir statik yükleme durumu için ayrı ayrı kapalı formüller sunmuştur.

Yıldırım'ın [17] çalışmasının tamamlayıcı bir unsuru olan şimdiki çalışma, silindirlerin radyal doğrultudaki titreşimleri konusunda en temel çalışmaların benzeri bir çalışmadır. Bu çalışmada iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan kalın cidarlı içi boş sonsuz uzunlukta bir silindirin serbest titreşim analizi analitik olarak literatürde mevcut yöntemlerle ele alınmıştır (Şekil 1). Bu çalışmada Ghosh'un [7] çalışması diğer sınır şartlarına genişletilmiş ve her bir sınır şartı için karakteristik denklemler kapalı olarak sunulmuştur. Çalışmadan elde edilen sonuçlar grafik olarak ve tablo halinde sunulmuştur.

Bu çalışmanın asıl amaçlarından biri de, gerek yüksek lisans öğrencilerine gerekse mühendislere konu ile ilgili temel bilgileri ve formülasyonu yeterli ve öz biçimde sunabilmek, elde edilen sayısal sonuçlarla da benzer konulardaki bilimsel çalışmalarda güvenilir ve kolayca ulaşılabilir Türkçe bir referans kaynak oluşturabilmektir.

2. Problemin Formülasyonu ve Çözümü

Eksenel simetrik yükleme durumunda polar koordinatlarda, (r, θ) yer değiştirme-şekil değiştirme ilişkileri, küçük yer değiştirmeler kabulü ile aşağıda verildiği gibidir (Şekil 1).

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (1)$$

Yukarıda ε_r radyal birim şekil değiştirme, ε_θ teğetsel birim şekil değiştirme ve u_r radyal doğrultudaki yer değiştirmedir. Radyal gerilme σ_r , teğetsel gerilme σ_θ ile sembolize edildiğinde, Hooke kanunu adı verilen gerilme-şekil değiştirme ilişkisi isotropik, homojen ve lineer elastik malzemeden yapılmış sonsuz silindirlere için düzlem şekil değiştirme halinde aşağıdaki hali alır.

$$\sigma_r = C_{11} \varepsilon_r + C_{12} \varepsilon_\theta \quad ; \quad \sigma_\theta = C_{12} \varepsilon_r + C_{11} \varepsilon_\theta \quad (2)$$

Burada birim şekil değiştirmelerin katsayıları olan malzeme rijitliklerinin Lamé sabitleri cinsinden ifadesi aşağıda verildiği gibidir.

$$C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu \quad ; \quad C_{12} = C_{21} = \lambda \quad (3)$$

Malzemenin Poisson oranı ν ve elastisite modülü E olmak üzere isotropik ve homojen malzemeler için Lamé sabitleri (4) te olduğu gibi tanımlanmaktadır.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi durumunda, radyal doğrultudaki hareket denkleminin aşağıdaki hali alır.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \frac{\sigma_\theta}{r} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (5)$$

Burada ρ malzeme yoğunluğunu, t ise zamanı göstermektedir. (1) denklemlerinin (2) eşitliğinde yerine konulması halinde

$$\sigma_r = C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \frac{u_r}{r} \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = C_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{11} \frac{u_r}{r}$$

Hooke ilişkileri gerilme-yer değiştirme cinsinden ifade edilebilir. Bu ifadelerin ve radyal koordinata göre radyal gerilmenin birinci türevinin, (5) nolu hareket denkleminde yerine

konulması sonucu sadece radyal yer değiştirmeler cinsinden hareket denklemi, diğer adıyla Navier denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r = \frac{\rho}{C_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (7)$$

Bu denklemde radyal yer değiştirmeler hem radyal koordinatın hem de zamanın birer fonksiyonudurlar. Serbest titreşim problemi için, ω (rad / s) açısıl serbest titreşim frekansı olmak üzere, radyal yerdeğiştirme için aşağıda verilen çarpım şeklindeki harmonik çözümler kabul edilebilir.

$$u_r(r, t) = u_r^*(r) e^{i\omega t} \quad (8)$$

Yukarıda verilen çözümlerin kendisinin ve türevlerinin (7) eşitliğinde yerine konulması sonucu aşağıda görölen Bessel denklemi elde edilir [18-21].

$$\left(-\frac{1}{r^2} + \Omega^2\right)u_r^* + \frac{1}{r} \frac{du_r^*}{dr} + \frac{d^2u_r^*}{dr^2} = 0 \quad (9)$$

Yukarıda yer alan Bessel denkleminin çözümleri birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonları cinsinden, $J_n(x)$ ve $Y_n(x)$, eşitlik (10) da sunulmuştur [17-20].

$$u_r^*(r) = C_1 J_1(r\Omega) + C_2 Y_1(r\Omega) \quad (10)$$

Eşitlik (9) ve (10) da

$$\Omega^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \quad (11)$$

sadeleştirmesi yapılmıştır. (10) çözümlerinin radyal koordinata göre birinci türevi aşağıda olduğu gibi C_1 ve C_2 integrasyon sabitleri cinsinden yazılabilir.

$$\frac{du_r^*}{dr} = \frac{1}{2} C_1 \Omega (J_0(r\Omega) - J_2(r\Omega)) + \frac{1}{2} C_2 \Omega (Y_0(r\Omega) - Y_2(r\Omega)) \quad (12)$$

Tablo 1 de verilen sınır şartlarının uygulanabilmesi için, (10) çözümleri ve Hooke ilişkileri kullanılarak radyal gerilmenin de C_1 ve C_2 integrasyon sabitleri cinsinden elde edilmesi gerekir.

$$\sigma_r^* = \frac{C_1 r \Omega (\lambda + 2\mu) J_0(r\Omega) - 2C_1 \mu J_1(r\Omega) + C_2 r \Omega (\lambda + 2\mu) Y_0(r\Omega) - 2C_2 \mu Y_1(r\Omega)}{r} \quad (13)$$

Tablo 1. Bu çalışmada göz önüne alınan sınır şartları

| | Serbest-Serbest | Ankastre-Serbest | Ankastre-Ankastre | Serbest-Ankastre |
|-------------------------|---------------------|---------------------|-------------------|---------------------|
| İç yüzeyde ($r = a$) | $\sigma_r^*(a) = 0$ | $u_r^*(a) = 0$ | $u_r^*(a) = 0$ | $\sigma_r^*(a) = 0$ |
| Dış yüzeyde ($r = b$) | $\sigma_r^*(b) = 0$ | $\sigma_r^*(b) = 0$ | $u_r^*(b) = 0$ | $u_r^*(b) = 0$ |

Karakteristik denklemler (10) nolu çözümde sınır koşullarının yerine konulması ile bulunmaktadır. Örneğin iç ve dış yüzeyin gerilmersiz olması durumunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{A}_{Serbest-Serbest} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Burada katsayılar matrisinin elemanlarının açık ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a(\lambda + 2\mu)\Omega J_0(a\Omega) - 2\mu J_1(a\Omega)}{a} \\ a_{12} &= \frac{a(\lambda + 2\mu)\Omega Y_0(a\Omega) - 2\mu Y_1(a\Omega)}{a} \\ a_{21} &= \frac{b(\lambda + 2\mu)\Omega J_0(b\Omega) - 2\mu J_1(b\Omega)}{b} \\ a_{22} &= \frac{b(\lambda + 2\mu)\Omega Y_0(b\Omega) - 2\mu Y_1(b\Omega)}{b} \end{aligned} \quad (15)$$

(14) denkleminin serbest titreşim frekansı için sıfırdan farklı çözümleri, katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerdir. Bu nedenle serbest titreşim frekanslarını bulmak için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir. Bu şekilde elde edilen denklem, serbest titreşim için karakteristik denklem adını alır. Tablo 1 de yer alan sınır şartları ile elde edilen kapalı formdaki karakteristik denklemler aşağıda sunulmuştur.

$$|\mathbf{A}_{Serbest-Serbest}| = 2\mu J_1(b\Omega)(a\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(a\Omega) - 2\mu Y_1(a\Omega)) + b\Omega(\lambda + 2\mu)J_0(b\Omega)(2\mu Y_1(a\Omega) - a\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(a\Omega)) + a\Omega(\lambda + 2\mu)J_0(a\Omega)(b\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(b\Omega) - 2\mu Y_1(b\Omega)) - 2\mu J_1(a\Omega)(b\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(b\Omega) - 2\mu Y_1(b\Omega)) = 0 \quad (16a)$$

$$|\mathbf{A}_{Ankastre-Serbest}| = Y_1(a\Omega)(2\mu J_1(b\Omega) - b\Omega(\lambda + 2\mu)J_0(b\Omega)) + J_1(a\Omega)(b\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(b\Omega) - 2\mu Y_1(b\Omega)) = 0 \quad (16b)$$

$$|\mathbf{A}_{Serbest-Ankastre}| = J_1(b\Omega)(2\mu Y_1(a\Omega) - a\Omega(\lambda + 2\mu)Y_0(a\Omega)) + Y_1(b\Omega)(a\Omega(\lambda + 2\mu)J_0(a\Omega) - 2\mu J_1(a\Omega)) = 0 \quad (16c)$$

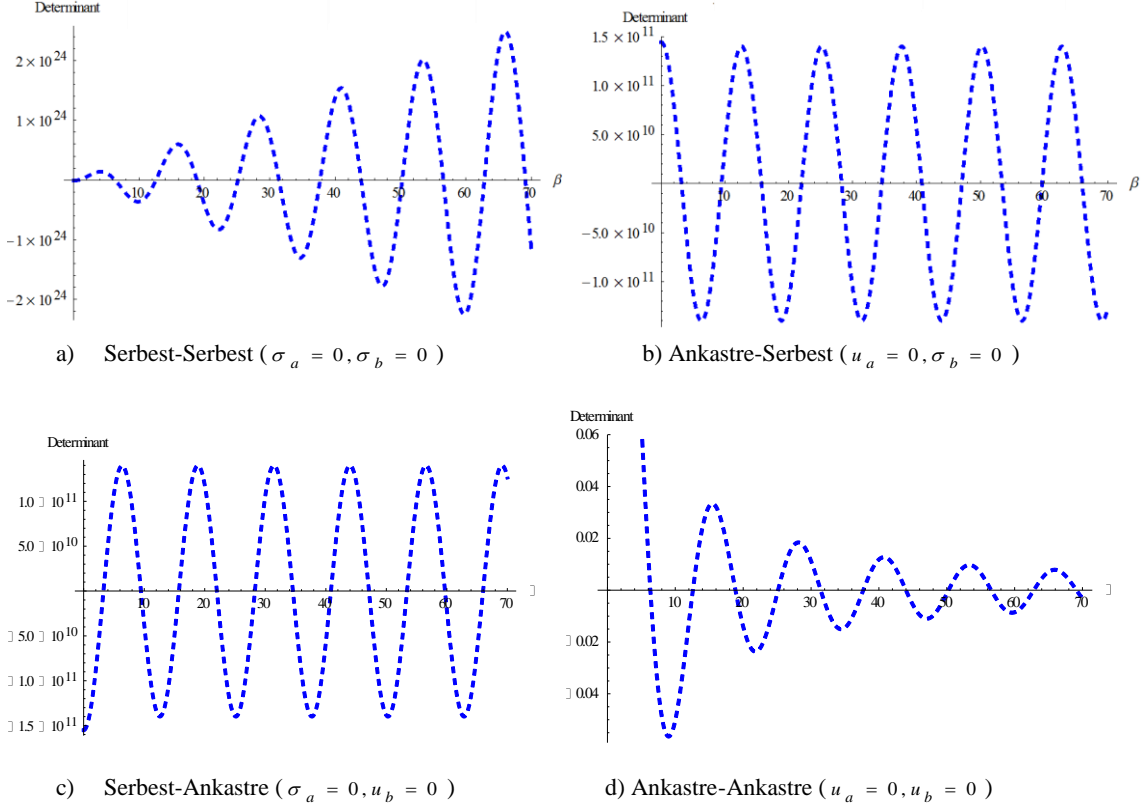
$$|\mathbf{A}_{Ankastre-Ankastre}| = J_1(a\Omega)Y_1(b\Omega) - Y_1(a\Omega)J_1(b\Omega) = 0 \quad (16d)$$

Boyutsuz serbest titreşim frekansı aşağıda tarif edilmiştir.

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}} \omega \quad (17)$$

Eşitlik (16) da sunulan karakteristik determinantın boyutsuz serbest titreşim frekansı ile değişimi $\frac{b}{a} = 1.5$ ve $\nu = 0.3$ için Şekil 2 de sunulmuştur. Determinantları sıfır yapan frekansların

sayısal olarak bulunabilmesi için çok çeşitli nümerik yöntemler olup, bunlardan en çok kullanılanı ikiye bölme yöntemidir.



Şekil 2. Karakteristik determinantın boyutsuz serbest titreşim frekansı ile değişimi ($\frac{b}{a} = 1.5, \nu = 0.3$).

3. Sonuçların Doğrulanması

Literatürde genellikle (serbest-serbest) uçlar için kapalı çözümler bulunmaktadır. (16) denklemleri kullanılarak bu çalışmadan elde edilen sonuçlar Tablo 2 de kalın bir silindir için dört farklı sınır şartında, Tablo 3 te ise ince cidarlı bir silindir için yine dört farklı sınır şartında literatürde mevcut sonuçlarla karşılaştırmalı bir şekilde sunulmuştur.

Tablo 2 ve 3 ün incelenmesinden, uçları gerilmemiş uzun silindire ait literatür sonuçları ile şimdiki çalışma sonuçlarının uyum içinde olduğu görülmektedir.

Yine bu tablolardan Serbest-Ankastre ve Ankastre-Serbest sınır şartlarında elde edilen sonuçların sayısal olarak farklı olmasına rağmen birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. İnce cidarlı silindirlere temel frekanstan sonraki frekanslarda çok belirgin bir şekilde artış görülmektedir. Bu artış miktarı kalın silindirlere daha küçüktür. Örneğin yüzeyleri gerilmemiş kalın silindirde boyutsuz ilk frekans 0.633263, onuncu moddaki frekans 28.2822 iken; yüzeyleri gerilmemiş ince cidarlı silindirde bu değerler birinci modda 0.894602, onuncu modda ise 1413.72 değerine ulaşmaktadır.

Tablo 2. Kalın cidarlı silindir için şimdiki çalışma sonuçlarının literatürle karşılaştırılması
($\nu = 0.3; b/a = 2$)

| Modlar β_i | Serbest-Serbest | | | Ankastre-Serbest | Ankastre-Ankastre | Serbest-Ankastre |
|---------------------|-----------------|--------|----------|------------------|-------------------|------------------|
| | Şimdiki Çalışma | [7] | [21] | Şimdiki Çalışma | Şimdiki Çalışma | Şimdiki Çalışma |
| 1 | 0.633263 | 0.6335 | 0.63563 | 1.633 | 3.19658 | 1.75587 |
| 2 | 3.21655 | 3.218 | 3.21793 | 4.74271 | 6.31235 | 4.76894 |
| 3 | 6.3193 | 6.319 | 6.31999 | 7.87288 | 9.44446 | 7.88733 |
| 4 | 9.44864 | 9.449 | 9.44910 | 11.0092 | 12.5812 | 11.0193 |
| 5 | 12.5842 | 12.58 | 12.58455 | 14.1478 | 15.7199 | 14.1555 |
| 6 | 15.7222 | 15.72 | 15.72249 | 17.2875 | 18.8595 | 17.2938 |
| 7 | 18.8614 | 18.86 | 18.86165 | 20.4278 | 21.9997 | 20.4331 |
| 8 | 22.0013 | 22.00 | 22.00151 | 23.5684 | 25.1402 | 23.5729 |
| 9 | 25.1416 | 25.14 | 25.14180 | 26.7092 | 28.281 | 26.7132 |
| 10 | 28.2822 | 28.28 | 28.28239 | 29.8502 | 31.4219 | 29.8538 |

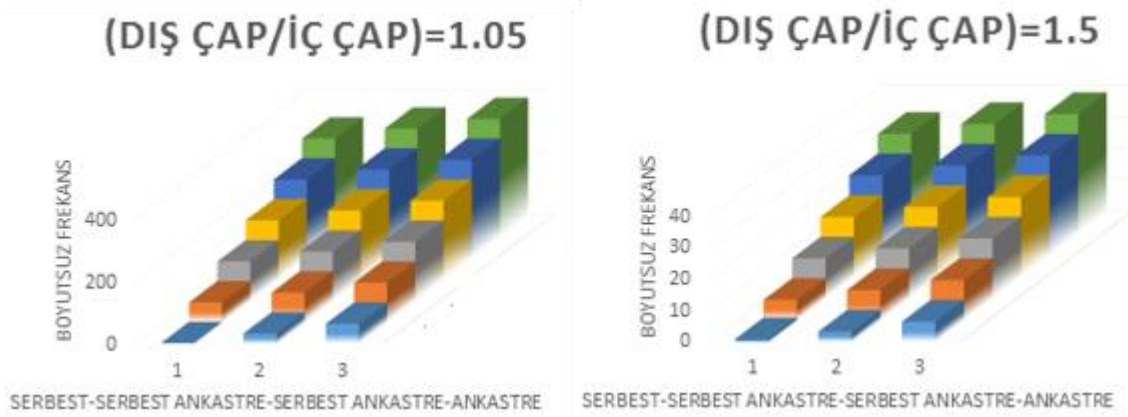
Tablo 3. İnce cidarlı silindir için şimdiki çalışma sonuçlarının literatürle karşılaştırılması
($\nu = 0.3; b/a = 1.02$)

| Modlar β_i | Serbest-Serbest | | Ankastre-Serbest | Ankastre-Ankastre | Serbest-Ankastre |
|---------------------|-----------------|---------|------------------|-------------------|------------------|
| | Şimdiki Çalışma | [7] | Şimdiki Çalışma | Şimdiki Çalışma | Şimdiki Çalışma |
| 1 | 0.894602 | 0.89 | 78.4999 | 157.082 | 78.59 |
| 2 | 157.082 | 157.10 | 235.606 | 314.16 | 235.636 |
| 3 | 314.161 | 314.20 | 392.691 | 471.24 | 392.709 |
| 4 | 471.24 | 471.20 | 549.773 | 628.319 | 549.786 |
| 5 | 628.319 | 628.30 | 706.854 | 785.399 | 706.864 |
| 6 | 785.399 | 785.40 | 863.934 | 942.478 | 863.943 |
| 7 | 942.478 | 942.50 | 1021.01 | 1099.56 | 1021.02 |
| 8 | 1099.56 | 1100.00 | 1178.09 | 1256.64 | 1178.1 |
| 9 | 1256.64 | 1257.00 | 1335.17 | 1413.72 | 1335.18 |
| 10 | 1413.72 | 1414.00 | 1492.25 | 1570.8 | 1492.26 |

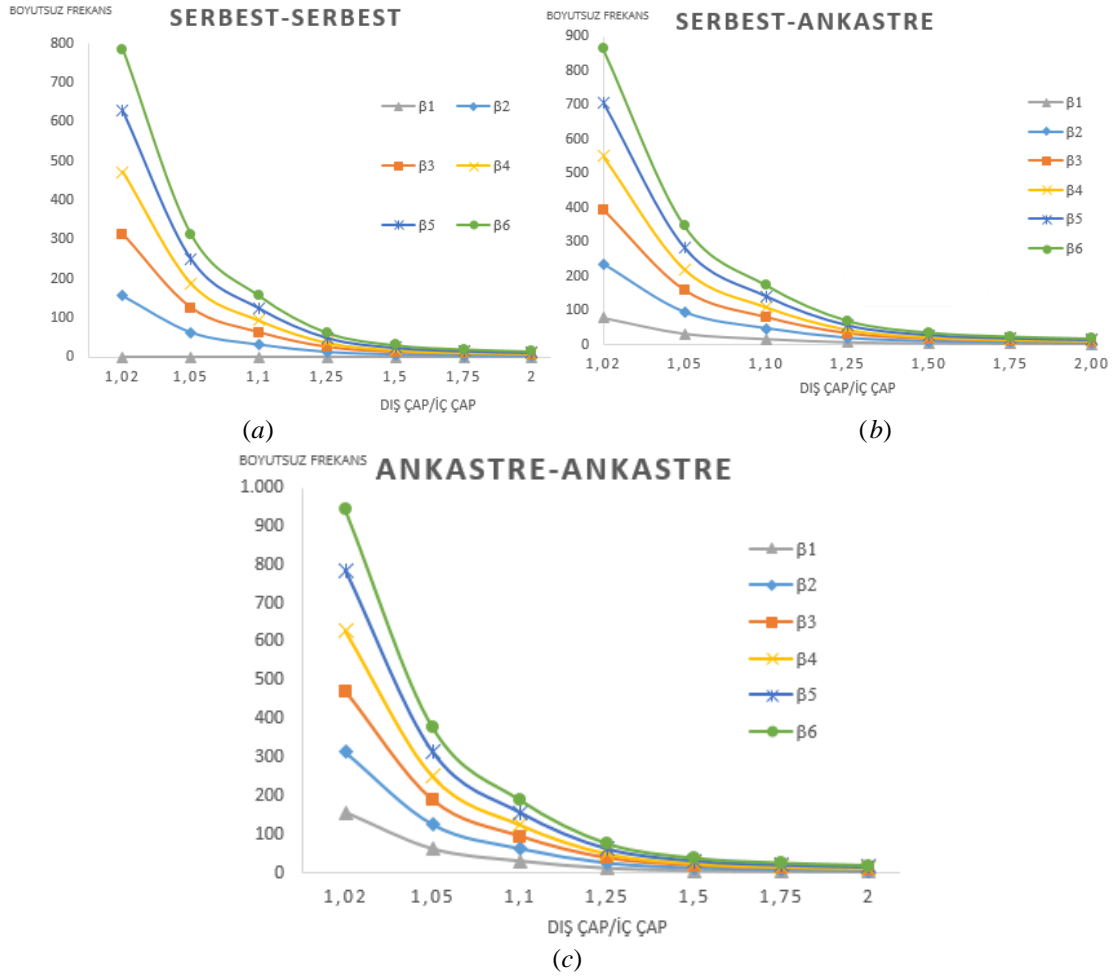
4. Serbest Titreşim Frekanslarının (Dış/İç) Yarıçap Oranları ve Sınır Şartları ile Değişimi

İlk altı moda ait serbest titreşim frekansının iki farklı silindir geometrisinde sınır şartlarına göre değişimi Şekil 3 te sunulmuştur. Şekil 3' ten ($b/a=1.05$) ve ($b/a=1.5$) geometrilerine ve altıncı moda ait frekanslar arasında (10:1) oranı gibi büyük bir oran olduğu görülmektedir.

Şekil 4 te ilk altı moda ait serbest titreşim frekansının üç farklı sınır şartı için (serbest-serbest, serbest-ankastre, ve ankastre-ankastre) (dış/iç) çap oranı ile ($\nu = 0.3$) değişimi gösterilmiştir. Tahmin edilebileceği gibi gerilmesiz yüzeylere sahip olan silindirde boyutsuz frekanslar daha küçüktür. Buna karşılık her iki yüzeyde radyal doğrultudaki serbestlik derecesinin engellenmesi durumunda en büyük frekanslar elde edilmektedir.



Şekil 3. İlk altı moda ait serbest titreşim frekansının iki farklı silindir geometrisinde sınır şartlarına göre değişimi ($\nu = 0.3$)



Şekil 4. İlk altı moda ait serbest titreşim frekansının (a) serbest-serbest sınır şartı için (b) serbest-ankastre sınır şartı için (c) ankastre-ankastre sınır şartı için (dış/iç) çap oranı ile değişimi ($\nu = 0.3$)

5. Sonuç

Bu çalışmada, farklı şekillerde titreşebilen silindirik yapıların sadece aksel simetrik modları hedeflenerek, sonsuz uzunlukta, kalın cidarlı, homojen ve isotrop lineer elastik malzemedan yapılmış içi boş silindirlerin serbest titreşim denklemi analitik olarak Lamé sabitleri cinsinden ve Bessel fonksiyonları yardımıyla kapalı olarak çözülmüştür. Sonuçlar yalnızca aksel simetrik modlara aittir. Dört farklı olası klasik sınır şartı için, karakteristik serbest titreşim denklemi kapalı formda sunulmuştur. Ghosh'un [7] serbest-serbest sınır şartı için yaptığı parametrik çalışma benzeri bir çalışma diğer olası klasik sınır şartları için gerçekleştirilmiştir ($\nu = 0.3$). Boyutsuz serbest titreşim frekanslarının sınır şartları ve silindir (dış çap/iç çap) oranı ile değişimleri grafik olarak gösterilmiş, sonuçların bazıları da tablo halinde sunulmuştur.

Bu çalışmanın asıl amaçlarından biri de yukarıda belirtildiği gibi gerek yüksek lisans öğrencilerine gerekse mühendislere konu ile ilgili temel bilgileri ve formülasyonu yeterli ve öz biçimde sunabilmek, elde edilen sayısal sonuçlarla da benzer konulardaki akademik çalışmalarda güvenilir ve kolay ulaşılabilir Türkçe bir referans kaynak oluşturabilmektir.

Kaynaklar:

- [1] Chree C. The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates. Their Solutions and Applications. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1889; 14: 250–309.
- [2] Greenspon J.E. Flexural Vibrations of a Thick-Walled Circular Cylinder According to the Exact Theory of Elasticity. Journal of Aero/Space Sciences, 1957; 27: 1365–1373.
- [3] Gladwell G.M., Tahbieldar U.C. Finite Element Analysis of Axisymmetric Vibrations of Cylinders. Journal of Sound and Vibration, 1972; 22: 143–157.
- [4] Hutchinson J.R. Vibrations of Solid Cylinders. Journal of Applied Mechanics, 1980; 47: 901–907.
- [5] Hutchinson J.R., El-Azhari S.A. Vibrations of Free Hollow Circular Cylinders. Journal of Applied mechanics, 1986; 53: 641–646.
- [6] Singal R.K., Williams K.A. Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Thick Circular Cylindrical Shell and Rings. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1988; 110: 533–537.
- [7] Ghosh A.K. Axisymmetric Vibration of a Long Cylinder. Journal of Sound and Vibration, 1995; 186(5): 711–721.
- [8] Gazis D.C. Three Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinder. Journal of the Acoustical Society of America, 1959; 31: 568–578.
- [9] Leissa A.W., So J. Accurate Vibration Frequencies of Circular Cylinders from Three-Dimensional analysis. Journal of the Acoustical Society of America, 1995; 98: 2136–2141.

- [10] So J., B Leissa A.W. Free Vibration of Thick Hollow Circular Cylinders from Three-Dimensional analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997; 119: 89–95.
- [11] Liew K.M., Hung K.C., Lim M.K. Vibration of Stress Free Hollow Cylinders of Arbitrary Cross-Section. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1995; 62: 718–724.
- [12] Hung K.C., Liew K.M., Lim M.K. Free Vibration of Cantilevered Cylinders: Effects of Cross-Sections and Cavities. *Acta Mechanica*, 1995; 113: 37–52.
- [13] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au F.T.K. 3D Vibration Analysis of Solid and Hollow Circular Cylinders via Chebyshev–Ritz Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003; 192: 1575–1589.
- [14] Gladwell G.M., Vijay D.K. Natural Frequencies of Free finite Length Circular Cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 1975; 42: 387–397.
- [15] Wang H., Williams K. Vibrational Modes of Thick Cylinders of finite Length. *Journal of Sound and Vibration*, 1996; 191: 1996, 955–971.
- [16] Mofakhami M.R., Toudeshky H.H., Hashemi Sh. H. Finite Cylinder Vibrations with Different End Boundary Conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 2006; 297: 293–314.
- [17] Yıldırım V. Heat-Induced, Pressure-Induced and Centrifugal-Force-Induced Exact Axisymmetric Thermo-Mechanical Analyses in a Thick-Walled Spherical Vessel, an Infinite Cylindrical Vessel, and a Uniform Disk Made of an Isotropic and Homogeneous Material. *International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS)*, 2017; 9(2): 66-87. <http://dx.doi.org/10.24107/ijeas.309786>
- [18] Watson G.N., “A Treatise on the Theory of Bessel Functions”, Cambridge University Press, 1922.
- [19] Bowman. F., “Introduction to Bessel Functions”, New York: Dover, 1958.
- [20] Hildebrand F.B., “Advanced Calculus for Applications”, Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [21] Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.), “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and mathematical tables”, 9th printing, New York, Dover, 1972.
- [22] Keleş İ., Tütüncü N. Exact Analysis of Axisymmetric Dynamic Response of Functionally Graded Cylinders (or Disks) and Spheres”, *Journal of Applied Mechanics*, 2011; 78(6): 061014 (7 pages).