www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 1 (2008) 68-79

İstatistikçiler Dergisi

BAĞIMLI RİSKLER İÇİN TOPLAM HASAR MİKTARININ DAĞILIMI

Mehmet PIRILDAK

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü,
06800, Beytepe, Ankara, Türkiye
pirildak@hacettepe.edu.tr

Ömer ESENSOY

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü,
06800, Beytepe, Ankara, Türkiye
esensoy@hacettepe.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde sigorta kollarının bağımlı olması durumu ele alınmıştır. Sigorta şirketleri portföylerinde farklı sigorta kollarına ait poliçeler bulundurmaktadır. Risk kuramıyla ilgili aktüeryal çalışmalarda genellikle sigorta kollarının bağımsız olduğu varsayımı yapılır. Ancak bu varsayım çoğu zaman gerçekçi bir varsayım değildir. Çalışmada farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde, hasar sayılarının bağımlı olması durumu genel etki modeliyle incelenmiş ve toplam hasar miktarının dağılımı hızlı Fourier dönüşümü kullanılarak bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: *Bağımlı Riskler, Hasar Dağılımları.*

ABSTRACT

AGGREGATE CLAIM DISTRIBUTION OF DEPENDENT RISKS

This work is concerned with the portfolio consisting of dependent classes of business. In the portfolio of an insurance company, there exist policies from different classes of business. In most actuarial literature related to risk theory, it is assumed that classes of business are independent. However, there are practical situations for which this assumption is not appropriate. The number of claims for a portfolio consisting of different classes of business is assumed to be dependent and studied by means of common shock models and the aggregate loss distribution is calculated by fast Fourier transform (FFT).

Key Words: *Dependent Risks, Loss Distributions.*

1. GİRİŞ

Sigortacılıkta belirli bir zaman aralığında gerçekleşen hasar ya da kayıplara yapılan ödeme miktarlarının toplamı, toplam hasar miktarı olarak adlandırılır. Toplam hasar miktarının dağılımı, hasar sayısı ve hasar miktarının dağılımları temel alınarak hesaplanır. Literatürde toplam hasar miktarının dağılımının hesaplanması için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Konvulüsyon yöntemi, Panjer'in geriye doğru özyineli (recursive) algoritması, hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transformation, FFT) bunlardan birkaç tanesidir. Geleneksel olarak aktüeryal çalışmalarda portföyde yer alan poliçelerin birbirinden bağımsız oldukları varsayımı yapılır. Ancak bu varsayım çok gerçekçi bir varsayım olmamaktadır ve son yıllarda yapılan çalışmalarda risklerin bağımlı olması durumu ele alınmaktadır. Genel olarak bağımlı hasarların bileşik dağılımlarının bulunabilmesi için risklerin marjinal dağılımların bilinmesi yeterli olmayacaktır.

Bu nedenle bağımlılık modelinin seçimi bağımlılığı yaratan mekanizmaya bağlı olarak yapılmalıdır.

Bu çalışmada farklı sigorta kollarından oluşan bir sigorta portföyünde, sigorta kolları arasında bağımlılık olduğu durumlar için toplam hasar miktarının dağılımı FFT yöntemi hesaplanacaktır. Çalışmada öncelikle toplam hasar miktarının hesaplanması ve risk modelleri hakkında bilgi verilecektir.

2. Toplam Hasar Miktarının Dağılımı

Oluşan N sayıda hasar için yapılan X_i ödemelerinin toplamı, toplam hasar miktarı S

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N \tag{1}$$

olarak tanımlanır. X raslantı değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f_X(i) = P(X = i)$$

biçiminde kesikli olarak tanımlanmıştır. Burada X'in aldığı değerler hasar miktarı için seçilen uygun bir birim ve bunun katları biçimindedir.

S'nin olasılık fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f_S(s) &= P(S = s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(S = s|N = n) \end{aligned} \tag{2}$$

ile gösterilir. Eşitlik (1)'de verilen toplam, karakteristik fonksiyonlar türünden aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \phi_S(t) &= E\left[e^{it(S)}\right] = E_N\left[E\left[e^{it(X_1+...+X_N)}|N\right]\right] \\ &= E_N\left[\phi_X(t)^N\right] = P_N(\phi_X(t)) \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Burada P_N hasar sayısı N'nin olasılık çıkaran (probability generating function) fonksiyonudur [4], [3].

2.1. Hızlı Fourier Dönüşümü

Karakteristik fonksiyonların hızlı Fourier dönüşümü (FFT) kullanılarak ters fonksiyonunun bulunmasıyla kesikli raslantı değişkenlerinin yoğunluk fonksiyonları elde edilir.

Tanım (1):

Herhangi bir $f(x)$ sürekli olasılık fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx \tag{4}$$

ile tanımlanır. Orjinal fonksiyon ise kendi Fourier dönüşümünden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-itx}dt \tag{5}$$

fonksiyonu ile yeniden elde edilebilir [3]. Tanımda verilen $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunda, $\tilde{f}(t)$ onun karakteristik fonksiyonu olur. $f(x)$ fonksiyonu kesikli olduğunda Tanım(1), Tanım(2)'deki gibi genelleştirilebilir.

Tanım (2):

Eğer f_x x' in, n dönem boyunca periyodik olan, tüm tamsayı değerleri için tanımlanmış bir fonksiyon ise (tüm f_x değerleri için; $f_{x+n} = f_x$); $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ vektörünün Kesikli Fourier Dönüşümü $\tilde{f}_x$, $x = ..., -1, 0, 1, ...$, için

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right) \qquad k=...-1,0,1,... \tag{6}$$

ile tanımlanır. Buna ek olarak $\tilde{f}_k$ 'da ayrıca n dönem boyunca periyodiktir. $\tilde{f}_k$ fonksiyonunun ters dönüşümü ile orjinal fonksiyon yeniden aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$f_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right), \qquad j=...-1,0,1,... \tag{7}$$

(3) eşitliği kullanılarak toplam hasar miktarının dağılımı FFT yöntemi ile bulunabilir. FFT yöntemi ile toplam hasar miktarının dağılımının bulunmasında kullanılacak algoritma aşağıdaki gibi verilmiştir:

- Hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu $F_X(x)$, r tamsayı olmak üzere $m=2^r$ olacak biçimde kesikli hale getirilir. Burada m, toplam hasar miktarının dağılımında ($f_S(x)$) istenilen nokta sayısını verecek biçimde seçilmelidir (Eğer hasar miktarları dağılımdaki nokta sayısı $m=2^r$'den az ise dağılım vektörünün sonuna, vektörün uzunluğu n oluncaya kadar sıfır eklemek gerekmektedir).
- Önceki adımda elde edilen hasar miktarlarının dağılımına FFT uygulanır ve böylece X' in karakteristik fonksiyonu elde edilir. Buradaki sonuç $m=2^r$ uzunluğunda bir vektör olacaktır.
- (3) eşitliği kullanılarak toplam hasar miktarı S' nin karakteristik fonksiyonu elde edilir.
- Önceki adımda elde edilen S'nin karakteristik fonksiyonuna ters (Inverse) FFT (IFFT) uygulanarak toplam hasar dağılımı elde edilmiş olur [4],[6].

3. Farklı Sigorta Kollarının Birleştirilmesi

N ve K gibi bağımsız iki raslantı değişkeninin toplamı karakteristik fonksiyonlar cinsinden

$$\phi_{N+K}(t) = E\left[e^{it(N+K)}\right] = E\left[e^{itN}.e^{itK}\right] = E\left[e^{itN}\right].E\left[e^{itK}\right] = \phi_N(t).\phi_K(t) \tag{8}$$

biçiminde yazılabilir.

İki farklı sigorta kolunun birleştirildiği varsayıldığında:

- Birinci sigorta kolunun hasar sayısı N ve hasar miktarı X ,
- İkinci sigorta kolunun hasar sayısı K ve hasar miktarı Y olsun.
- N, X, K ve Y birbirinden bağımsız olduğu varsayılsın.

Bu durumda iki sigorta kolunun birleşimi

$$Z = (X_1 + ... + X_N) + (Y_1 + ... + Y_K)$$

olarak tanımlanır ve Eşitlik (3) ile Eşitlik (8) yardımıyla karakteristik fonksiyonlar cinsinden

$$\phi_Z(t) = P_N(\phi_X(t)).P_K(\phi_Y(t)) \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Karakteristik fonksiyonlar arasındaki ilişki ve bir önceki bölümde verilen hızlı Fourier dönüşümü algoritması kullanılarak toplam hasar miktarının dağılımı elde edilebilir [6].

3.1. Bağımlı Değişkenlerin (Risklerin) Toplamı

Poliçeler arasında bağımlılık olduğu varsayıldığında, bağımlı değişkenlerin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonları aşağıda verilen Teorem yarımıyla bulunabilir.

Teorem:
Herhangi bir *k* değeri için $X_1,X_2, ..., X_k$ bağımlı değişkenlerinin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu $P_{X_1,...,X_k}$ ve bileşik karakteristik fonksiyonu $\phi_{X_1,...,X_k}$ ise; $S = X_1 + X_2 + ... + X_k$ toplamının olasılık çıkaran fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir [6]:

$$P_S(t) = P_{X_1,...,X_k}(t,...,t), \qquad \phi_S(t) = \phi_{X_1,...,X_k}(t,...,t).$$

Benzer bir eşitlik S'nin karakteristik fonksiyonunu elde etmek için de yazılabilir. S'nin karakteristik fonksiyonu elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü uygulanarak S'nin olasılık fonksiyonu elde edilir.

3.1.1. Hasar Sayıları Bağımlı Sigorta Kollarının Toplamı

Hasar sayıları bağımlı olan iki portföy için;
N: Birinci Portfoyün hasar sayısını,
K: İkinci Portföyün hasar sayısını,
X: Birinci Portfoyün hasar miktarını,
Y: İkinci Portföyün hasar miktarını
göstersin. N ve K hasar sayılarının bağımlı olduğu, hasar sayılarının hasar miktarından bağımsız ve X_i ve Y_j raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayıldığında iki portföyün toplam hasar dağılımı,

$$S = (X_1 + ... + X_N) + (Y_1 + ... + Y_K) \quad (10)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda toplam hasarın olasılık çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} P_S(t) &= E[t^S] = E[t^{(X_1+...+X_N)+(Y_1+...+Y_K)}] \\ &= E_{N,K}E\left[t^{(X_1+...+X_n)+(Y_1+...+Y_m)} \mid N = n,\ K = m\right] \\ &= E_{N,K}\left[P_X(t)^N P_Y(t)^K\right] \\ &= P_{N,K}(P_X(t), P_Y(t)) \end{aligned}$$

olarak, karakteristik fonksiyonlar cinsinden ise

$$\phi_S(t) = P_{N,K}(\phi_X(t), \phi_Y(t)) \quad (11)$$

biçiminde yazılır [6].

3.1.2. Genel Etkili Poisson Modeli

Farklı sigorta kollarının birleştirilmesinde temel Poisson Modeli için k farklı sigorta kolunun birleştirildiği varsayılsın. j=1,2,...,k, olmak üzere j'inci sigorta kolunun hasar sayısı λ_j parametresi ile Poisson dağılıma sahip olsun. Hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu da F_j olsun. Burada farklı sigorta kollarından gelen hasar miktarlarının birbirinden bağımsız olduğu varsayılsın. Bu durumda toplam hasar miktarı için karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\begin{aligned}\phi_S(t) &= \prod_{j=1}^{k} P_{N_j}(\phi_{X_j}(t)) \\ &= \prod_{j=1}^{k} e^{\lambda_j(\phi_{X_j}(t)-1)} \\ &= e^{\lambda(\phi_X(t)-1)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k$ ve

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\phi_{X_1}(t) + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}\phi_{X_k}(t)$$

dir. Dolayısıyla k farklı sigorta kolunun "birleştirilmiş toplam hasar miktarının" hasar sayısının dağılımı $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k$ parametreli Poisson dağılımı, hasar miktarının dağılımı

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}F_2(x) + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}F_k(x) \qquad (12)$$

olur.

Bireysel riskler, hasarı yaratan mekanizmaya ya da genel ekonomik–yasal değişikliklere bağımlı olabilir. Bireysel riskler arasındaki etkileşimin bir dış etkiye bağlı olduğu durumların modellenmesi gerekir. Yüksek afet riski olan bölgelerde, afetin yarattığı genel etki (common shock), sigorta kolları arasındaki bağımlılığın artmasına neden olabilir.
Genel etkili Poisson modeli Wang (1998), Wu ve Yuen (2003) ile Cossette ve Marceau (2000) tarafından yapılan çalışmalarda da ele alınmıştır.

Bağımlı iki birleşik Poisson dağılımının toplamı ele alındığında;

1. Portföy için: Hasar sayısı N_1, λ_1 parametresi ile Poisson dağılımına ve hasar miktarı X ise $f_1(x)$ olasılık dağılımına sahip olsun.
2. Portföy için: Hasar sayısı N_2, λ_2 parametresi ile Poisson dağılımına ve hasar miktarı Y ise $f_2(y)$ olasılık dağılımına sahip olsun.

X ve Y'nin birbirinden ve (N_1, N_2)'den bağımsız olduğu, ancak N_1 ve N_2' nin genel etki modeliyle bağımlı olduğu varsayılsın.

$$N_1 = N_0 \oplus N_{1b}, \qquad N_2 = N_0 \oplus N_{2b}.$$

Burada N_0~Poisson(λ_0), N_{1b}~Poisson(λ_1-λ_0) ve N_{2b}~Poisson(λ_2-λ_0) olur. Modelde N_1 ve N_2 arasındaki bağımlılık N_0 dan kaynaklanmaktadır.
Genel etki modelinde (N_1, N_2) 'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu $Cov[N_1,N_2] = Var[N_0] = \lambda_0$ iken

$$\begin{aligned}P_{N_1,N_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{N_1}, t_2^{N_2}\right] \\ &= \exp[\lambda_1(t_1-1) + \lambda_2(t_2-1) + \lambda_0(t_1-1)(t_2-1)]\end{aligned}$$

ile gösterilebilir.
İki risk portföyünün toplamı ise

$$S = (X_1 + ... + X_{N_1}) + (Y_1 + ... + Y_{N_2})$$

ile gösterilir ve toplam hasar miktarı,

$$f(x)=\frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_0}f_1(x)+\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_0}f_1(x)+\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_0}f_{1*2}(x) \tag{13}$$

biçiminde tanımlanmış Birleşik Poisson ($\lambda_1+\lambda_2-\lambda_0$) dağılımına sahip olur. Burada f_{1*2}: f_1 ve f_2'nin konvulüsyonunu göstermektedir . Böylece Genel Etkili Poisson Modeli için hasar sayısı ve miktarının dağılımları elde edilir [6].

3.1.3. Genel Etkili Negatif Binom Modeli

Negatif Binom dağılımı

$$P(N=n)=\binom{\alpha+n-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n}, \qquad \alpha,\lambda>0,\ n=0,1,2,... \tag{14}$$

biçiminde verilmiş olsun. Bu durumda Negatif Binom için olasılık çıkaran fonksiyon;

$$P_N(t)=[1-\lambda(t-1)]^{-\alpha} \tag{15}$$

olarak yazılabilir. Hasar sayısının dağılımına bakılmaksızın genel bir ilişki yazılması durumunda, toplam hasar sayısının ortalaması her sigorta kolunun hasar sayılarının ortalamalarının toplamına eşittir:

$$E[N_{agg}] = E[N_1]+ E[N_2]+...+ E[N_k] \tag{16}$$

Toplam hasar sayısının ortalaması ise,

$$Var[N_{agg}] = Var\left[\sum_{i=1}^{k} N_i\right]=\sum_{i=1}^{k} Var[N_i]+2\sum_{i<j} Cov\left[N_i,N_j\right] \tag{17}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada $Cov\left[N_i,N_j\right]=\rho_{ij}\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}$ olarak tanımlanır.

Farklı sigorta kollarının toplamının incelendiği modelde toplam hasar sayısının dağılımının belirlenmesinde sade ve direkt bir yaklaşım hasar sayılarının Negatif Binom dağılımlı olduğunun varsayılmasıdır. Bu durumda Negatif Binom'un parametreleri Eşitlik (16) ve (17)'de verilen $E[N_{agg}]$ ve $Var[N_{agg}]$ ile tahmin edilebilir. Sigorta kollarının bileşiminin hasar miktarı ise yine her bir sigorta kolunun bireysel hasar miktarlarının ağırlıklılandırılmış ortalamasıyla bulunur:

$$F(x)=\frac{E[N_1]}{E\left[N_{agg}\right]}F_1(x)+\frac{E[N_2]}{E\left[N_{agg}\right]}F_2(x)+...+\frac{E[N_k]}{E\left[N_{agg}\right]}F_k(x)\ . \tag{18}$$

k risk portföyünün hasar sayılarının marjinal dağılımları N_1~Negatif Binom(α_1,λ_1),..., N_k~Negatif Binom(α_k,λ_k) olarak verilsin. $\alpha_0 \le \min\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ olmak üzere her N_j, (j=1,...,k)

$N_j = N_{ja} \oplus N_{jb}$, $\quad N_{ja} \sim NB(\alpha_0,\lambda_j)$, $\quad N_{jb} \sim NB(\alpha_j - \alpha_0,\lambda_j)$

biçiminde birimlere ayrılsın.

N_{jb} 'lerin bağımsız olduğu varsayıldığında ($N_1,...,N_k$) için bileşik olasılık çıkaran fonksiyon

$$P_{N_1,...,N_k}(t_1,...,t_k)=\{1-\lambda_1(t_1-1)-...-\lambda_k(t_k-1)\}^{-\alpha_0}\prod_{j=1}^{k}\{1-\lambda_j(t_j-1)\}^{\alpha_0-\alpha_j}$$

olur [5].

Negatif Binom için de j'inci sigorta koluna ait toplam hasar sayısı iki raslantı değişkeninin toplamıyla bulunmaktadır.

$$N_j = N_{jj} + N_{j0} \tag{19}$$

Burada,

N_{jj} : j'inci sigorta koluna ait bağımsız hasarların sayısını,

N_{j0} : bağımlı hasarların sayısını,

N_j : j'inci sigorta koluna ait toplam hasar sayısını ifade etmektedir.

$$N_{jj} \sim NB(\alpha_{jj}, \lambda_j) \quad (j = 1,2)$$
$$N_{j0} \sim NB(\alpha_0, \lambda_j) \quad (j = 1,2) \tag{20}$$

n adet bağımsız ve (α_i, λ) parametreli Negatif Binom raslantı değişkeninin toplamı $\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i, \lambda\right)$ parametresiyle Negatif Binom dağılır [1].
Bu durumda

$$Cov[N_i, N_j] = \alpha_0 \lambda_i \lambda_j = \frac{\alpha_0}{\alpha_i \alpha_j} E[N_i] E[N_j] \tag{21}$$

olur.

Genel Etkili Negatif Binom modeli'nde bağımlı değişkenlerin bileşik olasılık dağılım fonksiyonu

$$P_{N_{10},N_{20}}(t_1, t_2) = E\left[E\left[t_1^{N_{10}}\ t_2^{N_{20}} \mid \Theta\right]\right] = M_\Theta[\lambda_1(t_1 - 1) + \lambda_2(t_2 - 1)]$$
$$= [1 - \lambda_1(t_1 - 1) - \lambda_2(t_2 - 1)]^{-\alpha_0}$$

olur. Bu nedenle N_1,N_2'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{N_1,N_2}(t_1, t_2) = E\left[t_1^{(N_{11}+N_{10})} t_2^{(N_{22}+N_{20})}\right]$$
$$= E\left[t_1^{N_{11}}\right] E\left[t_2^{N_{22}}\right] E\left[t_1^{N_{10}} t_2^{N_{20}}\right]$$
$$= \prod_{j=1}^{2} [1 - \lambda_j(t_j - 1)]^{-\alpha_{jj}} P_{N_{10},N_{20}}(t_1, t_2) \tag{22}$$

eşitliği ile yazılabilir.

4. SAYISAL ÖRNEK

Genel Etkili Poisson Modeli ve Genel Etkili Negatif Binom Modeliyle bağımlı sigorta kollarının toplam hasar miktarı dağılımları önceki bölümde verilenler yardımıyla bulunabilir. Toplam hasar dağılımının kesikli olarak hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle bulunabilmesi için farklı bilgisayar programlarını kullanmak mümkündür. Hasar miktarı dağılımlarını kesiklileştirebilmek amacıyla, kullanılan yuvarlama yönteminde, adım sayısı olarak $n=2^r$ koşulunu sağlayan değişik n değerleri denenmiştir. Hesaplamalarda Microsoft Excel programında Fourier dönüşümü için desteklenen en yüksek adım sayısı olan 4096 değeri kullanılmıştır. Ayrıca kesiklileştirme işleminde kullanılacak olan h aralığı, seçilen adım sayısının yüksekliği göz önüne alınarak ve hasar miktarlarının dağılım foksiyonundaki değişimini en düşük seviyede tutmak için h=1 olacak biçimde seçilmiştir.

4.1. Genel Etkili Poisson Modeli Örneği

Genel etkili Poisson modelinde sigorta kollarının aşağıda verilen dağılımlara sahip olduğu varsayılmıştır.

Birinci Sigorta kolu için: X_1~Üstel (0,5)

N_1~Poisson(5)

İkinci Sigorta kolu için: X_2~Pareto (3;4)

N_2 ~Poisson(5)

Genel etkili Poisson modeli, bu iki sigorta kolu için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$N_1 = N_{11} + N_{12}$

$N_2 = N_{22} + N_{12}$.

Burada N_{11}, N_{22} ve N_{12} raslantı değişkenleri λ_{11}, λ_{22} ve λ_{12} parametreli bağımsız Poisson dağılımlı raslantı değişkenleridir:

N_1~Poisson($\lambda_{11}+\lambda_{12}$) ve

N_2~Poisson($\lambda_{22}+\lambda_{12}$) olur.

Bu durumda N_1 ve N_2 arasındaki bağımlılık her iki değişken için ortak birim olan N_{12}'den kaynaklanmaktadır ve N_1 ile N_2 arasındaki kovaryans; $\mathrm{Cov}[N_1,N_2] = \lambda_{12}$ ile gösterilir.

Toplam hasar miktarı S'nin ortalaması ve varyansı ise sırasıyla

$E[S] = (\lambda_{11}+\lambda_{12})E[X_1] + (\lambda_{22}+\lambda_{12})E[X_2]$,

$$\mathrm{Var}[S] = (\lambda_{11} + \lambda_{12})E\left[X_1^2\right] + (\lambda_{22} + \lambda_{12})E\left[X_2^2\right] + 2\lambda_{12}E[X_1]E[X_2]$$

olur.

Farklı korelasyon katsayıları için λ_{12}'nin aldığı değerler Çizelge 1'de verilmiştir. Toplam Hasar miktarının dağılımı kesikli olarak elde edilmiş ve Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 1. Genel Etkili Poisson modeli için korelasyon katsayıları

	$\rho(N_1,N_2)=0$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$
λ_{12}	0	2	4
$\mathrm{Cov}[N_1,N_2]$	0	2	4

Çizelge 2. Genel Etkili Poisson Modeline Göre Hesaplanmış Toplam Hasar Miktarı Dağılımları

	$\rho(N_1,N_2)=0$		$\rho(N_1,N_2)=0,4$		$\rho(N_1,N_2)=0,8$	
s	**f(s)**	**F(s)**	**f(s)**	**F(s)**	**f(s)**	**F(s)**
0	0,00061	0,00061	0,00181	0,00181	0,00542	0,00542
1	0,00190	0,00250	0,00398	0,00580	0,00688	0,01230
2	0,00398	0,00649	0,00689	0,01269	0,01024	0,02254
3	0,00687	0,01336	0,01034	0,02303	0,01376	0,03629
4	0,01045	0,02381	0,01419	0,03722	0,01738	0,05367
5	0,01457	0,03838	0,01824	0,05546	0,02097	0,07465
6	0,01903	0,05741	0,02231	0,07777	0,02443	0,09907
7	0,02359	0,08100	0,02624	0,10401	0,02764	0,12671
8	0,02804	0,10904	0,02988	0,13389	0,03051	0,15723
9	0,03219	0,14123	0,03312	0,16702	0,03300	0,19022
10	0,03588	0,17711	0,03588	0,20289	0,03505	0,22527
11	0,03899	0,21610	0,03810	0,24099	0,03664	0,26192
12	0,04144	0,25754	0,03975	0,28075	0,03778	0,29970
13	0,04320	0,30074	0,04085	0,32160	0,03848	0,33818
14	0,04427	0,34501	0,04140	0,36300	0,03874	0,37692
15	0,04467	0,38969	0,04145	0,40445	0,03862	0,41554
16	0,04447	0,43415	0,04105	0,44550	0,03815	0,45370
17	0,04371	0,47787	0,04024	0,48574	0,03737	0,49107
18	0,04250	0,52036	0,03908	0,52482	0,03633	0,52739
19	0,04089	0,56126	0,03765	0,56247	0,03506	0,56246
20	0,03899	0,60025	0,03599	0,59846	0,03362	0,59608
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	0,00145	0,98659	0,00179	0,98357	0,00211	0,98040
51	0,00129	0,98788	0,00159	0,98516	0,00188	0,98228
52	0,00114	0,98902	0,00141	0,98658	0,00168	0,98396
53	0,00101	0,99003	0,00126	0,98784	0,00151	0,98547
54	0,00090	0,99093	0,00112	0,98896	0,00135	0,98682
55	0,00080	0,99173	0,00100	0,98996	0,00121	0,98803
56	0,00071	0,99244	0,00090	0,99086	0,00108	0,98911
57	0,00064	0,99308	0,00080	0,99166	0,00097	0,99008
58	0,00057	0,99365	0,00072	0,99238	0,00087	0,99095
59	0,00051	0,99417	0,00064	0,99302	0,00078	0,99173
60	0,00046	0,99463	0,00058	0,99360	0,00070	0,99244
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4.2. Genel Etkili Negatif Binom Modeli Örneği

Genel etkili Poisson modeline benzer şekilde iki sigorta kolunun aşağıda verilen dağılımlara sahip olduğu varsayılsın.

Birinci Sigorta kolu için: X_1~Üstel (0,5)

N_1~Negatif Binom (1;5)

İkinci Sigorta kolu için: X_2~Pareto (3;4)

N_2 ~ Negatif Binom (1;5)

Genel etkili Negatif Binom modeli, bu iki sigorta kolu için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$N_1 = N_{11} + N_{10}$

$N_2 = N_{22} + N_{20}$

olarak yazılır. $N_{jj} \sim NB(\alpha_{jj},\lambda_j)$ ve $N_{j0} \sim NB(\alpha_0,\lambda_j)$ tanımlamaları geçerlidir. Poisson modelinden farklı olarak burada bağımlılık için α_0 değerini bulmak gereklidir. $Cov[N_1,N_2]$ ve Eşitlik (20) yardımıyla α_0 değeri bulunabilir.

Toplam hasar miktarı S'nin ortalaması ve varyansı;

$E[S] = (\alpha_{11}+ \alpha_0)E[X_1] + (\alpha_{22}+ \alpha_0)\, E[X_2]$

$$Var[S]=\alpha_1\lambda_1 E\left[X_1^2\right]+\alpha_1\lambda_1^2(E[X_1])^2+\alpha_2\lambda_2 E\left[X_2^2\right]+\alpha_2\lambda_2^2(E[X_2])^2+2\alpha_0\lambda_1\lambda_2 E[X_1]E[X_2]$$

olarak yazılır.

Genel etkili Negatif Binom modeli için beklenen farklı korelasyon katsayıları için kovaryans değerleri ve α_0 değerleri Çizelge 3'te ve Genel Etkili Negatif Binom Modeline göre kesikli olarak elde edilen Toplam Hasar miktarının dağılımı Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 3. Genel Etkili Negatif Binom modeli için korelasyon katsayıları

	$\rho(N_1,N_2)=0$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$
α_0	0	0,48	0,96
$Cov[N_1,N_2]$	0	12	24

Çizelge 4. Genel Etkili Negatif Binom Modeline Göre Hesaplanmış Toplam Hasar Miktarı Dağılımları

	$\rho(N_1,N_2)=0$		$\rho(N_1,N_2)=0,4$		$\rho(N_1,N_2)=0,8$	
s	**f(s)**	**F(s)**	**f(s)**	**F(s)**	**f(s)**	**F(s)**
0	0,04529	0,04529	0,07200	0,07200	0,11446	0,11446
1	0,03012	0,07541	0,03773	0,10973	0,04384	0,15830
2	0,03125	0,10667	0,03676	0,14649	0,04017	0,19847
3	0,03214	0,13880	0,03602	0,18251	0,03759	0,23605
4	0,03269	0,17150	0,03524	0,21775	0,03545	0,27151
5	0,03294	0,20443	0,03437	0,25212	0,03357	0,30507
6	0,03291	0,23735	0,03342	0,28554	0,03185	0,33692
7	0,03267	0,27001	0,03239	0,31793	0,03026	0,36718
8	0,03224	0,30225	0,03132	0,34925	0,02877	0,39595
9	0,03166	0,33391	0,03022	0,37948	0,02737	0,42332
10	0,03096	0,36487	0,02910	0,40858	0,02606	0,44937
11	0,03017	0,39504	0,02798	0,43655	0,02481	0,47419
12	0,02930	0,42433	0,02686	0,46341	0,02364	0,49783
13	0,02837	0,45271	0,02575	0,48916	0,02253	0,52036
14	0,02741	0,48012	0,02466	0,51382	0,02148	0,54184
15	0,02642	0,50654	0,02359	0,53741	0,02048	0,56231
16	0,02542	0,53196	0,02255	0,55997	0,01953	0,58184
17	0,02441	0,55637	0,02154	0,58151	0,01863	0,60047
18	0,02340	0,57977	0,02056	0,60208	0,01777	0,61824
19	0,02240	0,60217	0,01962	0,62169	0,01696	0,63520
20	0,02141	0,62358	0,01870	0,64040	0,01618	0,65138
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	0,00400	0,93794	0,00403	0,92270	0,00412	0,90871
51	0,00376	0,94170	0,00383	0,92653	0,00394	0,91264
52	0,00353	0,94524	0,00363	0,93016	0,00377	0,91641
53	0,00332	0,94856	0,00345	0,93361	0,00360	0,92001
54	0,00312	0,95168	0,00328	0,93688	0,00344	0,92345
55	0,00293	0,95462	0,00311	0,93999	0,00329	0,92675
56	0,00276	0,95737	0,00295	0,94295	0,00315	0,92989
57	0,00259	0,95996	0,00280	0,94575	0,00301	0,93291
58	0,00243	0,96239	0,00266	0,94841	0,00288	0,93579
59	0,00228	0,96468	0,00253	0,95094	0,00275	0,93854
60	0,00215	0,96683	0,00240	0,95334	0,00263	0,94117
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5. SONUÇ

Farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde sigorta kollarına ait hasar sayılarının bağımlı olması durumunda toplam hasar miktarının hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle hesaplanması ele alınmıştır. Farklı sigorta kollarının birleştirilmesi işlemi için karakteristik fonksiyonlar yardımıyla konvulüsyon metodu kullanılmıştır. Bileşik karakteristik fonksiyonların elde edilmesi, bileşik dağılım fonksiyonların elde edilmesine göre daha kolay olduğundan toplam hasar miktarının bulunmasında karakteristik fonksiyonlar kullanılmıştır.

Toplam hasar miktarının dağılımının elde edilebilmesi için belirlenen dağılımların kesikli dağılım biçimine getirilmesi gerekmektedir. Çalışmada dağılımları kesikli biçime getirmek için Klugman ve diğerleri (1998) 'de verilen yuvarlama yöntemi kullanılmıştır. Kesiklileştirme işlemi için adım sayısı olarak $m=2^r$ koşulunu sağlayan değişik m değerleri kullanılmıştır. Çalışmada sunulan değerler ise $m=4096$ için bulunan değerlerdir. Değişik m değerleri için yapılan hesaplamalarda hızlı Fourier yönteminin m değerine duyarlı olduğu ve buna göre m değeri küçüldükçe sonuçlarda sapma olduğu gözlemlenmiştir.

Ayrıca çalışmada bağımlı hasar sayısının bulunması için sigorta kollarının hasar sayıları arasındaki kovaryanstan yararlanılmıştır. Seçilen korelasyon katsayıları için bulunan kovaryanslar yardımıyla bağımlı hasar sayısına ilişkin parametreler bulunmuştur. Bulunan bağımlı hasar sayıları kullanılarak toplam hasar miktarı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 3 ve Çizelge 4'te sunulmuştur.

KAYNAKLAR:

[1] Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business, Insurance: Mathematics and Economics 26(2), 133–149.

[2] Daykin, C., Pentaikainen, T., Pesonen, M., (1994). *Parctical Risk Theory for Actuaries,* London, Chapman & Hall.

[3] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., (2001). *Modern Actuarial Risk Theory,* Boston, Kluwer Academic Publishers.

[4] Klugman, S. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E., (1998). *Loss Models: From Data to Decisions,* New York, John Wiley & Sons, Inc.

[5] Panjer, H. H., (1981). *Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions,* ASTIN Bulletin 12, 22-26.

[6] Wang, S., (1998). *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms,* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 848-939.

[7] Wu, X., Yuen, K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business. Insurance: Mathematics and Economics 33(1), 117-133.