www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 2 (2009) 1-8

İstatistikçiler Dergisi

Faiz oranının rastlantı değişkeni olması durumunda tam hayat ve dönem sigortaları

Esra Satıcı
Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
İstatistik Bölümü
eelagoz@hacettepe.edu.tr

Cenap Erdemir
Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
cenap@hacettepe.edu.tr

Özet

Sigortacılıkta karşılaşılan en önemli problem faiz oranlarının belirsizliğidir. Genellikle, kolaylık olması açısından, faiz oranları bütün yıllar itibariyle sabit bir değer olarak alınmaktadır. Bununla birlikte, Türkiye gibi gelişmekte olan ülkelerde faiz oranları sürekli değişkenlik göstermektedir. Bu çalışmada, dönem ve tam hayat sigortalarında faiz oranlarının bağımsız rastlantı değişkeni olması durumu incelenmiş, faiz oranlarına bağlı dağılım fonksiyonları verilmiş ve gerçek veriler ile bir uygulama yapılmıştır. Uygulamada, yıllık vadeli mevduat faiz oranları ve tüketici fiyat endeksi oranları göz önüne alınarak, reel faiz oranları üzerinden uygun dağılıma karar verilmiştir. Hem sabit hem de stokastik faiz oranları için, CSO 1980 mortalite tablosu kullanılarak tam hayat sigortasına ait aktüeryal bugünkü değerler hesaplanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Faiz oranı rastlantı değişkeni, Hayat sigortası, Aktüeryal bugünkü değer.*

Abstarct

Whole life and term insurance under random rates of interest

The main problem in insurance is unknown interest rate. Typically, for simplicity, it is assumed that underlying interest rate is fixed and the same for all years. However, the interest rate that will apply in future years of course neither known nor constant like in Turkey. In this paper, we consider that annual rates of interest are independent random variables in term insurance and whole life insurance, Distribution functions of term insurance and whole life insurance are given and results of numerical example based on real data are discussed. In example, regarding annual interest rates on deposits and consumer price index rates, it has been decided to use appropriate distribution over real interest rates. For both constant and stochastic interest rates, by using CSO 1980 mortality table actuarial present values which belong to whole life insurance have been calculated and the results compared.

Keywords: *Random interest rate, Life insurance, Actuarial present value.*

1. Giriş

Sigortacılıkta karşılaşılan en önemli problemlerden biri, faiz oranlarının belirsizliğidir. Sigorta hizmeti veren bir kurumun yükümlülüklerini yerine getirebilmesi için aktüeryal denklik ilkesini gözeterek, aktüeryal ilkeler ışığında kararlar alması gerekmektedir. Aktüeryal dengeyi en fazla etkileyen ve belirsizliğinden dolayı riski giderilemeyen en önemli faktör faiz oranıdır. Faiz oranı için genelde sabit bir değer alınarak denklikler kurulmaktadır. Türkiye gibi ekonomik belirsizlikleri ve dalgalanmaları yaşayan ülkelerde bu şekilde bir yaklaşımda bulunmak uygun olmamakta, uzun vadede aktüeryal dengeyi tehdit etmektedir.

Faiz oranları değişkenliği hesaplamalara üç şekilde dahil edilebilir;

i) Mevcut ekonomik gelişmeler takip edilerek ve ilgili kurumun varlık değerleme performansı dikkate alınarak bir yada daha fazla sayıda faiz senaryosu oluşturulabilir. Faiz senaryoları kısaca, demografik ve ekonomik göstergelere bağlı faiz oranları taslağı biçiminde tanımlanmaktadır. Eldeki verilerin güvenirliğine göre, tek bir senaryo kullanılabileceği gibi birden çok senaryoda kullanılabilir.

ii) Faiz oranlarının bağımlı rastlantı değişkeni olduğu varsayımı altında zaman serisi yaklaşımı ile sonuca gidilebilir veya diğer makroekonomik değişkenler de dahil edilerek kapsamlı stokastik modeller oluşturulabilir. Bu konudaki deneyimler, faiz oranı modellemelerinde AR modelinin MA modeline kıyasla daha başarılı sonuçlar verdiğini göstermiştir [2].

iii) Faiz oranlarının dönemler itibariyle biribirinden bağımsız olduğu varsayımı altında geçmiş veriler incelenerek uygun dağılıma karar verilebilir. Bu dağılıma ilişkin parametreler ışığında aktüeryal bugünkü değerler hesaplanabilir.

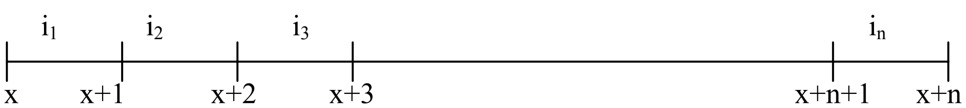
Bu çalışmada, faiz oranının dağılımı bilinen bağımsız rastlantı değişkeni olması durumunda, dönem ve tam hayat sigortası fonksiyonlarının dağılımları hakkında bilgi verilmiş ve konuya ilişkin bir uygulama yapılmıştır. Uygulama kısmında, 1981-2002 yıllarına ait yıllık mevduat faiz oranları ve Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) oranları kullanılarak yıllık reel faiz oranları elde edilmiş, bağımsız oldukları gösterilmiş, literatürde sıklıkla kullanılan logaritmik dönüşüm ile reel faiz oranları için uygun dağılıma karar verilmiştir. Buradan aktüeryal bugünkü değer fonksiyonlarının temelini oluşturan iskonto fonksiyonu dağılımına ulaşılmıştır. Elde edilen dağılıma uygun olarak tam hayat sigortası aktüeryal bugünkü değerleri, kullanılan 1980 CSO Mortalite Tablosundaki her yaş için ayrı ayrı ayrı hesaplanmıştır. Sonuçlar, uygulamada esas alınan yıllarda, ülkemizde uygulanan %9 teknik faiz oranına göre elde edilen aktüeryal bugünkü değerler ile karşılaştırılmıştır. Çalışma kapsamında, sembollerin üzerinde kullanılan "~" işareti, faizin rastlantı değişkeni olarak alındığını göstermektedir.

2. Tam hayat ve dönem sigortaları

Bu bölümde, hayat sigortalarında riske neden olan aşağıdaki bilinmezler dikkate alınmıştır:

i) Sigortalının kalan ömrü
ii) Faiz Oranları

i_t ; [t-1,t) dönemine ait, dağılımı bilinen faiz oranı rastlantı değişkenidir.



Dönem sigortasının bugünkü değeri, sabit faiz varsayımı altında aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x . v^{k+1} . \tag{1}$$

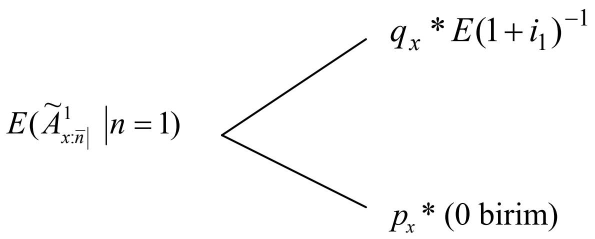
Faiz oranı rastlantı değişkeni olduğunda, v^k yerine, $\prod_{t=0}^{k-1} E(1+i_{t+1})^{-1}$ ifadesinin kullanılması gerekir.

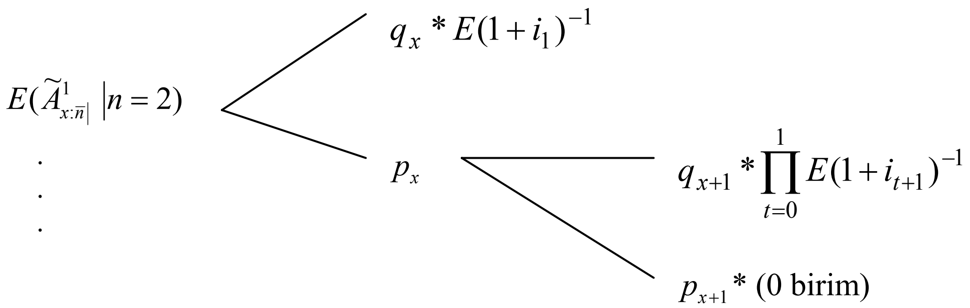
Bu durumda bugünkü değer,

$$E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x . \prod_{t=0}^{k} E(1+i_{t+1})^{-1} \tag{2}$$

olur [3].

Dönem uzunluğuna göre, teminata ilişkin dönem sigortasının beklenen değeri, $E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|})$, için üç diyagram aşağıda verilmiştir:





Bu diyagrama göre, $E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|})$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|}) = E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n-1}|}) + q_{x+n-1} \cdot \left(\prod_{k=x}^{x+n-2} p_k \right) \cdot \left(\prod_{t=0}^{n-1} E(1+i_{t+1})^{-1} \right) \qquad \forall n \geq 2 \tag{3}$$

$$E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|}) = p_x . E(\tilde{A}^1_{x+1:\overline{n-1}|}) . E(1+i_1)^{-1} + q_x . E(1+i_1)^{-1} \qquad \forall n \geq 2 \tag{4}$$

n=0 için $E(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|}) = 0$ olacağı unutulmamalıdır.

İlk yılın sonunda kişinin durumu (ölü ya da yaşıyor olmasına göre),

$$\begin{aligned} P(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|} \leq z) &= P(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|} \leq z \mid N=0).P(N=0) + P(\tilde{A}^1_{x:\overline{n}|} \leq z \mid N=1).P(N=1) \\ &= P\left((1+i_1)^{-1} \leq z\right).q_x + P\left((1+i_1)^{-1}.\tilde{A}_{x+1:\overline{n-1}|} \leq z\right).p_x \end{aligned} \tag{5}$$

olur.

Eş.(5)'de N aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$N = \begin{cases} 0\ , & \text{eğer x yaşındaki sigortalı ilk yıl ölürse (x,x+1)} \\ 1\ , & \text{öteki değerler} \end{cases} \tag{6}$$

$\alpha^{(z)}_{x:\overline{n}|}$, $\widetilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ ’in dağılım fonksiyonu olmak üzere, i_1 ’den hareketle, aşağıdaki şekilde elde edilir [3],

$$\alpha^{(z)}_{x:\overline{n}|} = q_x \; P\left(i_1 \geq \frac{1}{z} - 1\right) + p_x \int_r \alpha^{(z(1+r))}_{x+1:\overline{n-1}|} \; f^{(r)}_{i_1} dr \qquad \forall n \geq 2 \tag{7}$$

$$\alpha^{(z)}_{x:\overline{0}|} = \begin{cases} 0\ , & z < 0 \\ 1\ , & z \geq 0 \end{cases} \qquad \forall \text{ x=0,1,2,...} \tag{8}$$

Faiz oranının rastlantı değişkeni olarak alındığı tam hayat sigortasında ise, $\widetilde{A}_x$ 'in dağılımı, dönem sigortası $\widetilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ 'de $n = \infty$ alınarak elde edilebilir. Buna göre beklenen değer,

$$E\left(\widetilde{A}_x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x . \prod_{t=0}^{k} E(1 + i_{t+1})^{-1} \tag{9}$$

olur.

$\zeta^{(z)}_x$, $\widetilde{\text{A}}_\text{x}$ 'in birikimli dağılım fonksiyonu olmak üzere, i_1 koşulu altında aşağıdaki gibi elde edilmiştir [3],

$$\zeta^{(z)}_x = q_x . P(i_1 \geq \frac{1}{z} - 1) + p_x . \int_r \zeta^{(z(1+r))}_{x+1} . f^{(r)}_{i_1} . dr \tag{10}$$

3. Uygulama

Sigortacılık sektöründe Türk Lirası poliçelere ait birikimlerin yapıldığı yatırımlardan biri vadeli mevduatlardır. Çalışma kapsamında 1981-2002 yıllarına ait yıllık vadeli mevduat faiz oranları alınmıştır. Söz konusu oranlar, ilgili döneme ilişkin enflasyon oranından arındırılarak reel faiz oranlarına ulaşılmıştır. İnceleme reel faiz oranları üzerinden yapılmıştır. Otokorelasyon testi ile bağımsız rastlantı değişkeni oldukları gösterilmiştir.

k. dönem faiz oranı i_k olarak tanımlanmıştır. Enflasyon için Tüketici Fiyatları Endeksi (TÜFE) oranları baz alınmış ve e_k ile gösterilmiştir. *k*. döneme ilişkin reel faiz oranı, i^r_k, aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanmıştır (http://www.treasury.gov.tr/...):

$$i_k^r = \frac{1+i_k}{1+e_k} - 1 \tag{11}$$

Yıllık mevduat faiz oranları, i_k, enflasyon oranları, e_k ve reel faiz oranları, i_k^r, EK-1'de sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü sütunlarda verilmiştir.

Reel faiz oranları üzerinden; "anlık faiz oranı" olarak adlandırılan, $y_k = \log(1+i_k^r)$, dönüşümü yapılmıştır. Ham veri ve dönüşüm sonucu elde edilen veriler EK-1'de verilmiştir. Dönüştürülmüş veri seti üzerinde yapılan otokorelasyon testi sonucunda faiz oranlarının bağımsız olduğu sonucuna varılmış, normal dağılıma uygunluk Kolmogorof-Simirnov testi ile yoklanmıştır. Buna göre "p" olasılık değeri 0,765 olarak bulunmuş ve y_k'nın 0,0214 ortalama ve 0.0011 varyans ile normal dağıldığı görülmüştür.

Buna göre, $(1+i_k^r)$ rastlantı değişkeni aşağıdaki ortalama ve varyans ile log-normal dağılır:

Ortalama: $$E(1+i_k^r) = \exp(0.0214 + \frac{0.0339}{2})$$
$$= 1.0391$$

Varyans: $$Var(1+i_k^r) = (e^{0.0339} - 1)\exp(0.0428 + 0.0339)$$
$$= 0.0372$$

$\log \tilde{v}_n = -\sum_{k=1}^{n} \log(1+i_k^r)$ rastlantı değişkeni $N(-n\mu, n\sigma^2)$ dağıldığına göre iskonto fonksiyonu, $\tilde{v}_n = \prod_{k=1}^{n} (1+i_k^r)^{-1}$, log-normal dağılımına sahiptir. Ortalaması ve varyansı aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanır:

$$E[\tilde{v}_n] = e^{-n(\mu - \sigma^2/2)} \tag{12}$$

$$Var(\tilde{v}_n) = \left(e^{n\sigma^2} - 1\right)\left(e^{n(-2\mu+\sigma^2)}\right) \tag{13}$$

Eş. (12) ve Eş.(13)'e göre iskonto fonksiyonunun ortalaması ve varyansı aşağıda verildiği gibi elde edilir:

$$E\left[\left(1+i_k^r\right)^{-1}\right] = \exp\left(-0.0214 + \frac{0.0339}{2}\right)$$
$$=0.99556$$

$$Var\left[\left(1+i_k^r\right)^{-1}\right] = \left(e^{0.0339} - 1\right)\left(e^{-2(0.0214)} + 0.0339\right)$$
$$= 1.0265$$

k. dönem faiz oranı i_k^r ve gelecekte kalan ömür K'nın tam bağımsız olduğu varsayımı altında tam hayat sigortası için aktüeryal bugünkü değer, aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır [1]:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_x &= E\left[\widetilde{v}_{K+1}\right] \\ &= E_{\widetilde{v}} E_{K|\widetilde{v}}\left[\widetilde{v}_{K+1}\right] \\ &= E_{\widetilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{v}_{K+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}\right]\end{aligned} \tag{14}$$

İskonto fonksiyonu log-normal dağılıma sahip olduğuna göre aktüeryal bugünkü değer eşitliği,

$$\widetilde{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\mu-\sigma^2/2\right)(k+1)} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \tag{15}$$

olur. $\mu = 0.0214, \sigma^2 = 0.0011$ olduğuna göre,

$$\widetilde{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-0.0209(k+1)} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x}$$

olarak bulunur.

Aktüeryal bugünkü değer hem deterministik hem stokastik faiz oranı varsayımı altında hesaplanmıştır. Mortalite tablosu olarak, Devlet İstatistik Enstitüsü'nün nüfus verilerine dayanarak 2000'li yılların başında yaptığı ortalama yaşam beklentisine yakın sonuçlar vermesi açısından *CSO 1980 Erkek Mortalite Tablosu* esas alınmıştır. Sonuçların bir kısmı aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Tablo 1. Tam hayat sigortası için aktüeryal bugünkü değerler

Yaş	Stokastik Bugünkü Değerler	Deterministik Bugünkü Değerler
0	0,2439215	0,0177145
1	0,2459211	0,0151923
2	0,2503127	0,0155062
3	0,2548616	0,0159275
4	0,2595186	0,0163971
5	0,2643007	0,0169389
6	0,2692250	0,0175792
.	.	.
.	.	.
.	.	.
93	0,9409830	0,7846729
94	0,9462234	0,8011972
95	0,9520062	0,8200610
96	0,9583794	0,8416013
97	0,9652616	0,8657005
98	0,9723892	0,8915228
99	0,9793169	0,9174312

Sonuçlar incelendiğinde, stokastik bugünkü değerlerin, faiz oranlarındaki dalgalanma riskini de içerdiğinden, deterministik bugünkü değerden daha yüksek olduğu görülmektedir.

4. Sonuç ve yorum

Sonuç olarak stokastik faiz varsayımlı modelin deterministik modele göre daha yüksek bugünkü değerler verdiği görülmektedir. Hesaplanan bugünkü değerlerin, 1 birim tam hayat sigortası teminatına karşı alınan primler olduğu düşünüldüğünde, stokastik faiz varsayımının sigortacıyı faiz oranlarındaki dalgalanmalara karşı korumakta olduğu göze çarpmaktadır. Bunun yanında primlerin deterministik faiz oranlarına kıyasla daha yüksek olması, sigortalının poliçe satın alma aşamasında ki seçimini olumsuz yönde etkileyebilir. Fakat aktüeryal varsayımların ve istatistiklerin ihtiyatlı belirlenmediği durumlarda da, yüksek miktarlara ulaşabilecek ek yükümlülükler nedeniyle, sosyal ve ekonomik dengeler bozuluma uğramaktadır.

Kaynaklar

[1] N.L. Jr. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt, (1997), *Actuarial Mathematics*, The Society of Acituaries.

[2] S.G. Kellison, (1991), *The Theory of Interest*, Second Edition, Richard D. Irwin,Inc.

[3] B. Levikson, R. Yosef, (2001), *Annuities and Life Insurance Under Random Interest Rates*, Actuarial Research Clearing House, http://www.soa.org/bookstore/arch/2001.2_tb.html.

EK-1. Veriler

Dönem (Yıllar)	Mevduat Faiz Oranları	Enflasyon (TÜFE) Oranları	Reel Faiz Oranları	Log. Dön. Faiz Oranları
1981	0,5	0,361	0,102130786	0,042233134
1982	0,5	0,224	0,225490196	0,088309841
1983	0,425	0,311	0,086956522	0,036212173
1984	0,45	0,483	-0,022252192	-0,009773149
1985	0,5	0,506	-0,003984064	-0,001733713
1986	0,517	0,368	0,108918129	0,044899483
1987	0,481	0,387	0,06777217	0,028478597
1988	0,693	0,737	-0,025331031	-0,01114286
1989	0,657	0,633	0,014696877	0,006336324
1990	0,567	0,603	-0,022457891	-0,009864526
1991	0,783	0,66	0,074096386	0,031043255
1992	0,887	0,701	0,109347443	0,045067587
1993	0,822	0,661	0,096929561	0,04017874
1994	1,214	1,063	0,073194377	0,030678389
1995	0,822	0,936	-0,058884298	-0,02635698
1996	1,089	0,804	0,157982262	0,063701907
1997	1,065	0,857	0,112008616	0,046108152
1998	0,955	0,846	0,059046587	0,024915065
1999	0,467	0,649	-0,110369921	-0,050790542
2000	0,456	0,549	-0,060038735	-0,026890043
2001	0,625	0,545	0,051779935	0,021924882
2002	0,482	0,297	0,142636854	0,057908228

Kaynak: TCMB, DTM, DİE