



## Yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde dairesel verilerde ortalama yön için ardışık testin uygulanması

K. Özgür Peker

Anadolu Üniversitesi  
Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü  
Yunusemre Kampüsü  
26470, Eskişehir, Türkiye  
opeker@anadolu.edu.tr

Sevil Bacanlı

Hacettepe Üniversitesi  
Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü  
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye  
sevil@hacettepe.edu.tr

### Özet

*Yönel veri çalışmalarının çoğunda seçilen örneklemelere ilişkin verilerin elde edilmesi oldukça masraflı ve güç olmaktadır. Bu nedenle verilerin ardışık olarak elde edilmesi çoğu zaman zorunlu hale gelmektedir. Bu çalışmada, dairesel veri analizi kuramının temelini oluşturan von Mises dağılımı kullanılarak, yoğunlaşma parametresinin bilinmediği durumda ortalama yön için ardışık test süreci incelenmektedir. Ayrıca, testin uygulaması olarak veri türetimi yoluna gidilmiştir. Elde edilen sonuçlar değerlendirilerek, testin kullanımına ilişkin yorumlar yapılmıştır.*

**Anahtar sözcükler:** Dairesel veri; von Mises dağılımı; Ardışık test; Ortalama yön; Yoğunlaşma parametresi.

### Abstract

#### Application of the sequential test of the mean direction for the circular data when the concentration parameter is unknown

*In most of the directional data studies, obtaining data about selected samples is very expensive and difficult. Therefore, obtaining data sequentially usually becomes necessary. In this study, using the von Mises distribution which is the basis for the theory of circular data analysis, a sequential testing process for the mean direction is examined when the concentration parameter is unknown. Also, an illustrative application of the test is performed on a generated data. Also, an illustrative application of the test is performed on a generated data. After evaluating the obtained results, some interpretations are given relating to the use of the test.*

**Keywords:** Circular data; von Mises distribution; Sequential test; Mean direction; Concentration parameter.

### 1. Giriş

Birçok bilim dalında elde edilen gözlem ölçüm değerlerinin açısal olduğu görülür. Bu tür verilerin, özellikle biyoloji, coğrafya, jeoloji, jeofizik, tıp, meteoroloji ve okyanus-bilim alanlarında uygulamaları bulunmaktadır. Açısal gözlemler, rassal deneylerde farklı biçimlerde ortaya çıkabilirler. Bu gözlemler, rüzgar yönleri, kuşların serbest bırakıldıktan sonraki uçuş yönleri, hayvanların herhangi bir uyarılmaya karşı verdikleri yönel tepkiler, okyanuslardaki akıntı yönleri, biyoritimler gibi doğrudan ölçümler şeklinde olabilir. Açısal veriler dolaylı olarak, bazı periyodik ve açığa dönüştürülmüş zaman ölçümleri olarak da elde edilebilirler. Örneğin, belirli bir yılda herhangi bir hastalığın aylık olarak ortaya çıkma oranı açısal veriye dönüştürülebilir.

Elde edilen açısız gözlem değerleri merkezi orijin olan bir birim çemberin üzerinde noktalar ile veya bu noktalarla orijini birleştiren birim vektörler şeklinde gösterilebilir. Bu şekilde bir dairesel gösterim bulunduğu için, iki-boyutlu yönler olarak ifade edilebilen gözlem değerleri “dairesele veri” olarak adlandırılabilir.

Dairesel veri analizi, bilinen istatistiksel veri analizinden oldukça farklı özellikler gösterir. Çünkü, elde edilen gözlemlerin aldığı değerler, “sıfır-yönü” ve “dönüş doğrultusu” seçimine göre değişebilmektedir. Dolayısıyla, bilinen birçok istatistiksel teknik ve ölçüler tamamen yanlış olmasa da çoğu zaman hatalı sonuçlar vermektedir.

Olasılık dağılımları istatistiksel veri analizinde önemli bir yer tutar. Birim çember üzerindeki en temel dağılım “dairesele düzgün dağılım”dır. Elde edilen dairesele veriler, çemberin çevresi üzerinde herhangi bir yöne doğru yoğunlaşmaksızın düzgün olarak yayılma gösteriyor ise, veriler dairesele düzgün dağılım gösteriyor demektir. Diğer önemli dağılımlar; “Cardioid”, “Sarmal Cauchy” ve “Sarmal Normal” dağılımlarıdır. “von Mises dağılımı” ise bilinen normal dağılıma benzer olarak, dairesele veri analizi teorisinin oluşturulmasında önemli bir rol oynamaktadır [5].

Yapılan araştırmaların çoğunluğunda örneklem hacmi önceden belirlenmektedir. Çünkü, sabit örneklem hacimli test sürecinde örneklemin önceden belirlenmesi gerekir. Bu yöntem uygulamalarda çoğu kez zaman kaybına ve de yüksek bir maliyete yol açmaktadır. Ardışık test süreçleri yardımıyla, bu güçlükler giderilebilmektedir. Test için, örneklem hacminin önceden belirlenmesine ihtiyaç yoktur. Çünkü, örneklem hacmi bir rassal değişkendir. Test süreci tek bir gözlemle başlar ve test istatistiği ile karşılaştırılarak hipotezlerden biri kabul edilinceye dek sürer. Dolayısıyla, örneklem hacminde büyük tasarruf sağlanır. Bu özelliğinden dolayı, verilerin ardışık olarak elde edildiği araştırmalarda ardışık test süreçlerinin uygulanması daha uygundur [6].

Çalışmanın ikinci bölümünde, von Mises dağılımı kısaca tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde,  $\kappa$  yoğunlaşma parametresinin bilinmediği durumda, von Mises dağılımı için tek örneklem ortalama yön testi, dördüncü bölümde, yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde ortalama yön için Wald’ın ardışık testi incelenmiştir. Beşinci bölümde ise, testin uygulaması olarak von Mises dağılımından veri türetilmiş ve incelenen ardışık testin işleyişi bu veriler üzerinde gösterilmiş ve son olarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

## 2. von Mises dağılımı

von Mises dağılımına sahip bir  $\theta$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \mu < 2\pi, \quad \kappa \geq 0 \quad (1)$$

olarak verilir ve bu fonksiyon  $VM(\mu, \kappa)$  ile ifade edilir. Burada,  $\mu$  parametresi “ortalama yön”,  $\kappa$  değeri ise “yoğunlaşma parametresi” olarak tanımlanır.  $I_0(\kappa)$  ise; birinci tür ve sıfır sırasında dönüştürülmüş Bessel fonksiyonudur ve

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos(\phi - \mu)} d\phi = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r} (r!)^{-2} \quad (2)$$

biçiminde tanımlanır [4].

von Mises yoğunluk fonksiyonu, hem ortalama yön hem de mod yönü olan  $\mu$ ’ye göre simetriktir.  $\kappa$  parametresi; dağılımın  $\mu$  yönü etrafındaki yoğunlaşma ölçüsünü ifade eder.  $\kappa$  parametresinin alabileceği

minimum değer sıfırdır ve bu durumda dağılım düzgün dağılıma dönüşür. Dağılım,  $\kappa$  değeri arttıkça,  $\mu$  etrafında gittikçe yoğunlaşır.

Daha önce de belirtildiği gibi, von Mises dağılımı dairesel veri analizinde en sık kullanılan dağılımdır. Ancak, çember üzerindeki normal dağılım olarak kabul edilebilmesine karşın, normal dağılımın tüm özelliklerine sahip değildir [8].

### 3. Yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde von Mises dağılımı için tek örneklem ortalama yön testi

Örneklemin çekildiği dağılımın ortalama yönünün  $\mu_0$  olduğu hipotezinin test edilmek istendiği varsayalım. Yapılan gerçek uygulama çalışmalarının büyük çoğunluğunda,  $\kappa$  yoğunlaşma parametresi bilinmemektedir. Bu nedenle, bu çalışmada yoğunlaşma parametresinin bilinmediği durum üzerinde durulmuştur. Test için güven aralığı belirlenmesi yolu izlenebileceği gibi, doğrudan test uygulama yoluna da gidilebilir. Bu test süreci ise,  $n$  örneklem hacmine ve de  $\hat{\kappa}$  yoğunlaşma parametresi tahminine bağlıdır.

von Mises dağılımı için ortalama yönün dairesel standart hatası tahmini;

$$\hat{\sigma}_{VM} = \frac{1}{\sqrt{nR\hat{\kappa}}} \quad (3)$$

biçiminde hesaplanır. Test istatistiği ise;

$$E_n = \frac{\sin(\bar{\theta} - \mu_0)}{\hat{\sigma}_{VM}} \quad (4)$$

olarak tanımlanır. Bu değer  $\alpha$  anlam düzeyinde, standart normal dağılım tablosundan elde edilen değerle karşılaştırılır. Farklı türdeki alternatif hipotezler için karşılaştırmalar aşağıda verildiği gibi yapılır:

- $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  testi için  $|E_n| > z_{\alpha/2}$  ise  $H_0$  reddedilir.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1 : \mu < \mu_0$  testi için  $\mu_0 - \pi < \bar{\theta} < \mu_0$  ve  $E_n < -z_{\alpha}$  ise  $H_0$  reddedilir.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1 : \mu > \mu_0$  testi için  $\bar{\theta} < \mu_0 + \pi$  ve  $E_n > -z_{\alpha}$  ise  $H_0$  reddedilir.

$n$  ve  $\hat{\kappa}$ 'nin aldığı değerlere bağlı olarak testin kullanılabilirdiği durumlar Çizelge 1'de verilmektedir.

**Çizelge 1.** Örneklem hacmi  $n$  ve  $\hat{\kappa}$  değerlerine bağlı olarak testin uygulanabildiği durumlar [1].

$\hat{\kappa}$	$n$
$0.4 \leq \hat{\kappa} < 1.0$	$n \geq 25$
$1.0 \leq \hat{\kappa} < 1.5$	$n \geq 15$
$1.5 \leq \hat{\kappa} < 2.0$	$n \geq 10$
$\hat{\kappa} \geq 2.0$	Bütün $n$ 'ler

#### 4. Yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde ortalama yön için ardışık test

von Mises dağılımına sahip bir kitlede ortalama yönün olasılık oranlarının ardışık testi,  $\kappa$  parametresinin bilindiği (U-testi) ve bilinmediği durum (V-testi) için incelenmiştir [2, 7].

$\kappa$  parametresinin bilindiği durum olan U-Testi'nde eşitlik (1)'de verilen von-mises yoğunluk fonksiyonu için ardışık test gerçekleştirilir. Uygulamalarda çoğu zaman, yoğunlaşma parametresinin bilindiği varsayımı gerçekçi olmayabilir. Bu durumda  $\kappa$  parametresinin bilinmediği durum için ortalama yönün testini gerçekleştirmek gerekir. Bilinmediği durum için önerilen V-testi'nde,  $\kappa$ 'nın bilinmesine ilişkin herhangi bir varsayım bulunmamakta, ancak hipotezlerin kurulup test edilmesine ilişkin olarak  $\mu_0$  ve  $\kappa$  parametrelerinin bir fonksiyonu bulunabilmektedir. Bu fonksiyon, dağılımı bilinmeyen yoğunlaşma parametresinden bağımsızdır [10]. Bu çalışmada,  $\kappa$  parametresinin bilinmediği durum için önerilen Wald'ın ardışık testi incelenmiştir.

$\theta$  rassal değişkeni, ortalama yön  $\mu_0$  ve yoğunlaşma parametresi  $\kappa$  olmak üzere von Mises dağılımına sahip olsun. Ardışık olarak gözlenen dairesel veriler, sırasıyla  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  ile ifade edilirse, (1) eşitliğinde verilen von Mises dağılımının olabirlik fonksiyonu ( $\lambda_n$ );

$$\lambda_n = \frac{1}{[2\pi I_0(\kappa)]^n} e^{\kappa \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu_0)} = [2\pi I_0(\kappa)]^{-n} e^{\kappa \cos \mu_0 \sum_{i=1}^n \cos \theta_i + \kappa \sin \mu_0 \sum_{i=1}^n \sin \theta_i} \quad (5)$$

$C = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i$ ,  $S = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i$ ,  $\tau = \cos \mu_0$ ,  $v = \sin \mu_0$  olarak belirtilirse;

$$\lambda_n = [2\pi I_0(\kappa)]^{-n} e^{\kappa \tau C + \kappa v S} \quad (6)$$

biçiminde elde edilir. Burada C ve S;  $\mu_0$  ve  $\kappa$  parametreleri için yeterli istatistiklerdir [4]. Ayrıca,  $R = \sqrt{C^2 + S^2}$  bileşke uzunluğunun dağılımı,  $\mu_0$ ,  $\kappa$ 'dan bağımsız olarak kurulan  $H_0$  ve  $H_1$  hipotezleri için ardışık test bulmada kullanılabilir. Yönsel veri dağılım teorisine göre, R'nin dağılımının, bu bağımsızlık kriterini karşılamadığı bilinmektedir. Fakat, ardışık sürecin her bir aşamasında C bilindiği için, R | C'nin koşullu yoğunluk fonksiyonununun dikkate alınması gerekir. Bu fonksiyon;

$$f(R | C) = \frac{\frac{R}{2} \phi_n(R^2) e^{\delta \sqrt{R^2 - C^2}}}{\sqrt{R^2 - C^2} \int_0^{\infty} \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta^2} dt} \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Burada,  $\phi_n(R^2)$ ;

$$\phi_n(R^2) = \int_0^{\infty} u J_0(Ru) J_0^n(u) du \quad (8)$$

olarak formüle edilir.  $J_p(u)$  değeri; p-inci sıra standart Bessel fonksiyonudur ve

$$J_p(u) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r [\Gamma(p+r+1)\Gamma(r+1)]^{-1} \left(\frac{1}{2}u\right)^{2r+p} \quad (9)$$

olarak ifade edilir.  $\delta$  ise,

$$\delta = \kappa v = \kappa \sin \mu_0 \quad (10)$$

olarak verilir [4].

(7) eşitliğinde verilen fonksiyon,  $\delta$  formu dışında,  $\mu_0$  ve  $\kappa$ 'dan bağımsızdır. Dolayısıyla test edilecek hipotezler  $\delta$ 'ya ilişkin olarak kurulur;

$$\begin{aligned} H_0 : \delta &= \delta_0 \\ H_1 : \delta &= \delta_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Ardışık test için gereken olabilirlik fonksiyonu;

$$L_n = \frac{f(R|C|\delta_1, n)}{f(R|C|\delta_0, n)} = \frac{\frac{R}{2} \phi_n(R^2) e^{\delta_1 \sqrt{R^2 - C^2}}}{\sqrt{R^2 - C^2} \int_0^{\infty} \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_1^2} dt} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - C^2} \int_0^{\infty} \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_0^2} dt}{\frac{R}{2} \phi_n(R^2) e^{\delta_0 \sqrt{R^2 - C^2}}} \quad (12)$$

olarak elde edilir. Sadeleştirmeler yapıлып, eşitliğin her iki tarafının logaritması alındığında;

$$\ln L_n = (\delta_1 - \delta_0) \sqrt{R^2 - C^2} + \ln \left[ \int_0^{\infty} \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_0^2} dt \right] - \ln \left[ \int_0^{\infty} \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_1^2} dt \right] \quad (13)$$

bulunur [3].

Olasılık oranlarının ardışık testinde, test istatistiği  $Z_i = \ln L_n$  değeri,  $\ln A$  ve  $\ln B$  değerleriyle karşılaştırılarak hipotez hakkında bir karara varılır [9].

A ve B değerleri, 1. ve 2. tip hata olasılıklarına bağlı olarak elde edilen kritik değerlerdir ve bu değerler;

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (14)$$

biçiminde tanımlanır. Az önce de belirtildiği gibi, test istatistiği  $\ln A$  ve  $\ln B$  ile karşılaştırılarak aşağıdaki üç karardan birine ulaşılır:

- 1- Eğer  $\ln L_n \leq \ln B$  ise,  $H_0$  hipotezi kabul edilerek sürece son verilir.
- 2- Eğer  $\ln L_n \geq \ln A$  ise,  $H_0$  hipotezi reddedilerek sürece son verilir.
- 3- Eğer  $\ln B < \ln L_n < \ln A$  ise, bir gözlem daha eklenerek sürece devam edilir.

Buna göre, n-inci gözlem elde edildikten sonra V-testi;

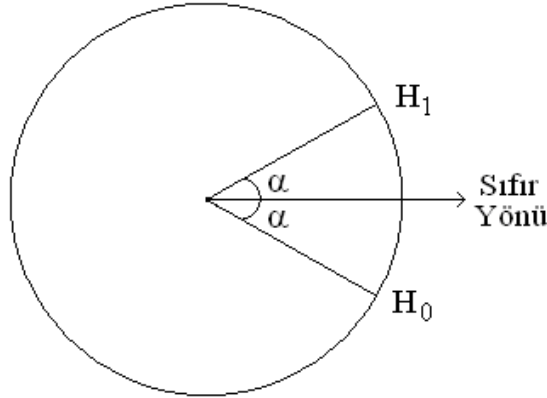
$$\ln B < (\delta_1 - \delta_0)S + \ln \left[ \int_0^\infty \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_0^2} dt \right] - \ln \left[ \int_0^\infty \cos Ct J_0^n \sqrt{t^2 - \delta_1^2} dt \right] < \ln A \quad (15)$$

biçiminde elde edilir.

Eğer,  $-\delta_1 = \delta_0$  ise, V-testi;

$$\ln B < (\delta_1 - \delta_0)S < \ln A \quad (16)$$

biçiminde yazılabilir. Şekil 1'den V-testi'nin, sıfır yönünden ve sıfır yönünün ters tarafından açılabilir olarak eşit uzaklıklardaki iki ortalama yönün testi olduğu görülmektedir.



**Şekil 1.** Zıt yönlerde, fakat ortalama yöne eşit uzaklıkta açılardaki hipotezler için V-testi gösterimi

Uygulamada bu testin  $\delta_0 = -\delta_1$  durumu dışında kullanılması pek mümkün olmamaktadır [2].

Ayrıca, bu testte,  $E(S) = E \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right) = 0$  olduğu için, ortalama örneklem sayısı tanımsızdır.

## 5. Sayısal Örnek

Bu bölümde, von Mises dağılımına sahip dairesel verilere ilişkin yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde, tek örneklem ortalama yön testinin yapılması ve yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde ortalama yön için ardışık testin kullanımına ilişkin sayısal bir örnek verilmiştir. Bu amaçla, von Mises dağılımından veri türetilmiştir.

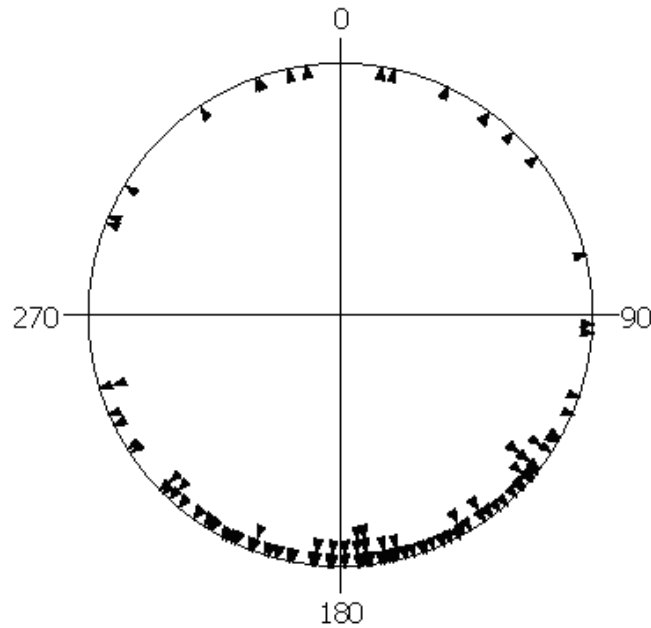
Örnek sırasında, Oriana 2.02e ve S-Plus 6.2 for Windows olmak üzere iki adet paket programdan yararlanılmıştır. Oriana paket programı dairesel veri analizi için hazırlanmış bir programdır. S-Plus paket programında ise, dairesel veriler için CircStats Library fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

von Mises dağılımından veri türetimi işlemi için, ortalama yön  $\mu = 170^\circ$  ve yoğunlaşma parametresi  $\kappa = 1.5$  değerleri seçilerek, von Mises dağılımından  $N = 1000$  birimlik veri türetilmiş ve bu kitleden  $n = 100$  birimlik örneklem çekilmiştir. Bu örneklem değerleri Çizelge 2’de görülmektedir:

**Çizelge 2.** von Mises dağılımından türetilen verilerden seçilen örneklem

Sıra No	$\theta$	Sıra No	$\theta$	Sıra No	$\theta$	Sıra No	$\theta$	Sıra No	$\theta$
1	128.090	21	145.036	41	131.239	61	187.688	81	109.940
2	192.374	22	123.844	42	195.614	62	113.987	82	183.812
3	160.137	23	292.425	43	182.449	63	201.046	83	206.726
4	225.408	24	179.737	44	174.540	64	156.315	84	223.079
5	171.844	25	158.752	45	182.714	65	191.803	85	165.776
6	226.897	26	168.622	46	326.882	66	151.853	86	212.333
7	143.526	27	129.647	47	213.164	67	141.638	87	176.947
8	216.222	28	167.974	48	208.653	68	152.284	88	170.458
9	12.635	29	186.376	49	36.879	69	176.793	89	170.446
10	244.160	30	293.228	50	133.819	70	348.332	90	341.644
11	134.223	31	119.648	51	51.499	71	120.507	91	131.224
12	186.218	32	136.271	52	237.997	72	226.290	92	43.041
13	197.629	33	167.819	53	223.398	73	253.421	93	198.501
14	139.815	34	238.590	54	352.315	74	123.763	94	175.003
15	154.352	35	179.914	55	149.909	75	169.383	95	174.435
16	253.366	36	173.554	56	202.018	76	174.311	96	76.480
17	94.507	37	128.436	57	247.452	77	25.308	97	201.918
18	211.507	38	340.785	58	92.800	78	163.971	98	176.438
19	151.315	39	9.179	59	301.457	79	130.421	99	207.019
20	128.735	40	161.916	60	220.200	80	205.289	100	145.680

Çizelge 2’deki verilerden elde edilen ham veri grafiği Şekil 2’de verilmektedir.



**Şekil 2.** Von Mises dağılımından türetilen verilerden seçilen örneklemin ham veri grafiği

von Mises dağılımından türetilen 1000 dairesel gözlem değerinden seçilmiş olan 100 hacimlik örneklem için ortalama yön  $\bar{\theta} = 172.884^\circ$  olarak elde edilir. Bu değer, klasik aritmetik ortalama hesabı ile yani açısal gözlem değerlerinin toplamının terim sayısına bölünmesi yoluyla hesaplınsaydı,  $\bar{\theta} = 176.45^\circ$  sonucu elde edilecekti, ki bu değer dairesel ortalama yöne tam olarak eşit olmasa da yakın bir değerdir. Ancak, özellikle gözlem sayısının az olduğu veri setlerinden elde edilen dairesel ortalama yön ile klasik yöntem kullanılarak hesaplanan ortalama yön değerleri kimi zaman tam tersi yön sonuçları gösterebilmektedir. Ayrıca, aynı veri seti için örneklem aritmetik ortalaması, sıfır noktası ve dönüş doğrultusu seçimine bağlı olarak da farklılık gösterebilir. Verilen bir dairesel veri seti için, doğrusal verilerde genel olarak kullanılan aritmetik ortalama merkezi bir ölçü değil, sıfır yönü ve dönüş doğrultusu seçiminin bir fonksiyonudur. Bu nedenle, dairesel veriler için bir konum ölçüsü olarak kullanılması sakıncalıdır. Örneklem varyansında da aynı problemle karşılaşılır. Örneklemden hesaplanan klasik varyans değeri 4461.83 iken dairesel varyans değeri 0.431 olarak bulunur. Bu da dairesel veriler için, bilinen varyansın hiç uygun bir tanımlayıcı istatistik olmadığını göstermektedir.

Örneklem için ortalama bileşke uzunluğu  $\bar{R} = 0.569$  ve yoğunlaşma parametresi tahmini  $\hat{\kappa} = 1.389$  olarak hesaplanır. Buna göre seçilen örneklem  $VM(172.88, 1.39)$  dağılımına sahiptir.

$\kappa$ 'nın bilinmediği durumda  $H_0 : \mu = 170^\circ$  ve  $H_1 : \mu \neq 170^\circ$  hipotezleri test edilmek istendiğinde, gerekli test istatistiği (3) ve (4) nolu eşitliklerden;  $\hat{\sigma}_{VM} = 0.1125$  ve  $E_n = 0.4472$  olarak hesaplanır.  $|E_n| = |0.4472| < 1.9604 = z_{0.05/2}$  olduğundan  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

von Mises dağılımından türetilen verilerin ardışık olarak elde edildiği düşünülün. Yoğunlaşma parametresinin bilinmediği durumda ortalama yön için V-testi'ni uygulamak amacıyla, S-Plus paket programı kullanılarak bir program yazılmıştır. Bu program yardımıyla, araştırmacılar önceden belirledikleri birinci ve ikinci tip hata olasılıklarında, kurdukları hipotez doğrultusunda V-testi için sınır değerlerini ve aşama aşama test istatistiği değerlerini görebilmekte ve testi sonuçlandırabilmektedir. V-testine ilişkin algoritma aşağıda verildiği gibidir:

#### V-testinin algoritması:

Adım 1:  $\mu_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  değerlerini belirle,

Adım 2:  $\delta_0$  ve  $\delta_1$  değerini hesaplatır,

Adım 3: Alt ve üst sınır değerlerini hesaplatır,

Adım 4: i-inci gözlem değerini gir ( $i = 1, \dots, n$ ),

Adım 5: Test istatistiği  $\leq$  Alt sınır ise  $H_0$  kabul. i. gözlemden sonra iterasyon durur.

Adım 6: Test istatistiği  $\geq$  Üst sınır ise  $H_0$  red. i. gözlemden sonra iterasyon durur.

Adım 7: Alt sınır  $<$  Test istatistiği  $<$  Üst sınır ise bir gözlem daha ekle ve Adım 4'e git.

Yoğunlaşma parametresinin bilinmediği varsayıldığında, test edilecek hipotezler (10) eşitliği kullanılarak,

$$H_0 : \delta = 0.2605$$

$$H_1 : \delta = -0.2605$$

biçiminde kurulabilir. Hata olasılıkları için örnek olarak  $\alpha = 0.05$  ve  $\beta = 0.10$  değerleri seçildiğinde, V-testi için elde edilen bilgisayar çıktısı Çizelge 3'te verilmektedir:



**Çizelge 3.** V-Testi program çıktısı

Gözlem No	Gözlem	Test istatistiği
1	128.090	-0.41005
2	192.374	-0.29840
3	160.137	-0.47542
4	225.408	-0.10441
5	171.844	-0.17832
6	226.897	0.20207
7	143.526	-0.10764
8	216.222	0.20023
9	12.635	0.08627
10	244.160	0.55517
11	134.223	0.18181
12	186.218	0.23824
13	197.629	0.39603
14	139.815	0.05985
15	154.352	-0.16566
16	253.366	0.33353
17	94.507	-0.18586
18	211.507	0.08642
19	151.315	-0.16366
20	128.735	-0.57006
21	145.036	-0.86863
22	123.844	-1.30135
23	292.425	-0.81975
24	179.737	-0.82214
25	158.752	-1.01095
26	168.622	-1.11373
27	129.647	-1.51490
28	167.974	-1.62345
29	186.376	-1.56559
30	293.228	-1.08682
31	119.648	-1.53961
32	136.271	-1.89976
33	167.819	-2.00969
34	238.590	-1.56503
35	179.914	-1.56582
36	173.554	-1.62431
37	128.436	-2.03241
38	340.785	-1.86094
39	9.179	-1.94405
40	161.916	-2.10577
41	131.239	-2.49755

alt sınır ---> -2.25129  
üst sınır ---> 2.89037

Ho hipotezi kabul edilir.

41. gözlemden sonra süreç sona erer.

Bu sonuçlara göre,  $n = 41$  gözlemden sonra alt sınır aşıldığı için süreç sona erer ve  $H_0$  hipotezi kabul edilir.

## 6. Sonuç ve değerlendirme

Test sonuçlarından da görüldüğü gibi, örneklem hacmi yönünden ardışık test sabit örneklem hacimli testlere göre daha avantajlıdır. Özellikle verilerin ardışık olarak geldiği araştırmalarda bu tür ardışık testlerin kullanımı kolaylık sağlar.

Dairesel verilerin kullanıldığı araştırmalarda bilinen istatistiksel yöntemlerin kullanılması araştırmacıyı yanlış sonuçlara götürmektedir. Dolayısıyla, dairesel veriler için bilinen yöntemlerin uyarlanması gerekir. Veriler ardışık olarak elde edildiğinde, ölçüm sonuçlarına seri halde ulaşılır. Dolayısıyla, bu durum için sabit örneklem hacimli testlerin kullanılması uygun değildir. Elde edilen birikimli verileri ardışık olarak test etmek gerekir. Ayrıca, örneklem hacmi yönünden ardışık test sabit örneklem hacimli testlere göre daha avantajlıdır. Bu amaçla çalışmada, verilerin ardışık olarak geldiği ve yoğunlaşma parametresinin önceden bilinmediği durum için geliştirilen V-testi incelenmiştir. Ayrıca, hazırlanan yazılım yardımıyla istenen hata olasılıklarında kaç gözlemle testin sonuçlandırılacağı ortaya çıkmaktadır. Uygulanan test sonunda önemli miktarda kazanç elde edilemediği takdirde,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametreleri değiştirilerek kolayca istenen sonuca ulaşılabilir.

## Kaynaklar

- [1] N.I. Fisher, (1993), *Statistical analysis of circular data*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.
- [2] R.J. Gadsden, G.K. Kanji, (1981), Sequential analysis for angular data, *The Statistician*, 30, No. 2, 119-29.
- [3] R.J. Gadsden, G.K. Kanji, (1982-83), Sequential analysis applied to circular data, *Commun. Statist.-Sequential Analysis*, 1(4), 304-314.
- [4] K.V. Mardia, (1972), *Statistics of directional data*, Academic Press, London, England.
- [5] K.V. Mardia, P.E. Jupp, (2000), *Directional statistics*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England.
- [6] K.Ö. Peker, (2002), *Dairesel Veriler ve Ardışık Testlerde Kullanımı*, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Eskişehir.
- [7] K.Ö. Peker, S. Bacanlı, (2007), A Sequential Test For The Mean Direction Applied To Circular Data and An Application, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, Cilt: 20 – Sayı: 2 : 1-13.
- [8] G.J.G. Upton, B. Fingleton, (1989), *Spatial data analysis by example vol. 2*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.
- [9] A. Wald, (1947), *Sequential analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA.
- [10] G.B. Wetherill, (1975), *Sequential methods in statistics*, Chapman & Hall, London, England.