www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 2 (2009) 59-69

İstatistikçiler Dergisi

Meijer’in G fonksiyonu ve istatistik teorisinde kullanımı

Funda Erdugan

Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü,01330 Yüreğir-Adana, Türkiye
ferdugan@cu.edu.tr

Sevgi Yurt Öncel

Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü,71450 Yahşihan-Kırıkkale, Türkiye
syoncel@gmail.com

Özet

Bu çalışmada, Matematik, İstatistik, Fizik ve ilişkili diğer bilim dallarında geniş bir uygulama alanına sahip olan Meijer’in G fonksiyonu incelenmiştir. G fonksiyonunun bazı temel özellikleri tanıtılmış ve türevleri ile ilgili bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca sık kullanılan bazı temel fonksiyonlar, G fonksiyonu olarak ifade edilmiş ve örnekler verilmiştir. Son olarak ise sürekli rastgele değişkenlerin çarpımının dağılımının elde edilmesinde Meijer’in G fonksiyonunun kullanımı ve çeşitli uygulamalar verilmiştir.

Anahtar sözcükler: *Meijer’in G fonksiyonu; Mellin dönüşümü; Rastgele değişkenlerin dönüşümünün dağılımı.*

Abstract

The Meijer’s generalized function

In this study Meijer’s G function investigated which is application area in Mathematics, Statistics, Physics and connected other science branches. Some basic properties of G function have been defined and then its derivative properties have been given. Besides some frequently appearing elementary functions are expressed in terms of the G function and then are illustrated. Lastly, it was mentioned from Meijer’s G function technique for obtain for the distribution of continuous random variables multiplied and gave some applications.

Keywords: *Meijer’s G function; Mellin transformation; Distribution of random variables transformation.*

1. Giriş

Bu çalışmada C.S. Meijer tarafından ileri sürülen ve genelleştirilmiş bir fonksiyon olan G fonksiyonu tanıtılacak ve istatistiksel uygulamalarına değinilecektir. Meijer’in G fonksiyonunun özel durumlarının farklı disiplinlerdeki pek çok bilimsel çalışmada kullanıldığı görülmektedir. Özellikle integral hesabını kolaylaştırdığından, istatistik ve fizik problemlerinde Meijer’in G fonksiyonuna büyük önem verilmektedir.

İstatistik teorisinde, rastgele değişkenlerin bir dönüşümünün dağılımını belirleyebilmek önemli bir problemdir. Springer (1979), rastgele değişkenlerin çarpımlarının dağılımlarının Laplace ve Mellin dönüşümü yardımıyla bulunmasını ifade etmiştir. Rastgele değişkenlerin bir fonksiyonunun dağılımının bulunması hakkında yapılan benzer çalışmalar Springer (1966, 1970), Glen ve ark. (2004), Salo ve ark. (2006), Nadarajah and Kotz (2006), Beutner and Kamps (2008), Nadarajah ve Gupta (2008), Glickman ve Xu (2008), Nadarajah, (2008) tarafından yapılmıştır. Bu problemin çözümünde kullanılan klasik tekniklerden biri de olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniğidir. Şamilov ve arkadaşları (2006), olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniğinde karşılaşılan yeni ek rastgele değişkenler tanımlama, rastgele değişkenler arasında birebir dönüşüm yapma ve Jakobiyen hesaplama zorluklarından kurtulabilmek için Heaviside ve Dirac genelleştirilmiş fonksiyonunu kullanmışlardır. Bu çalışmada ise rastgele değişkenlerin çarpımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümünden yararlanarak Meijer'in G fonksiyonu biçiminde elde edilmiştir.

2. Meijer'in G fonksiyonunun tanıtımı

$i=\sqrt{-1}$, $z \neq 0$ ve L, $\mathbb{C}$'de kapalı uygun bir eğri olmak üzere

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-s\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+s\right)} z^{-s} ds \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **Meijer'in G fonksiyonu** veya kısaca **G fonksiyonu** denir ve

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right) \equiv G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right) \equiv G_{p,q}^{m,n}\left(z\right) \equiv G\left(z\right) \quad (2)$$

ifadelerinden birisi ile gösterilir. Burada,

- $\Gamma(.)$, $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ biçiminde tanımlanan Gamma fonksiyonu,
- $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$,
- $a_1,\cdots,a_p$ ve $b_1,\cdots,b_q$ parametreleri $\Gamma\left(b_j+s\right)$'nin kutup noktaları olmayan ancak $\Gamma\left(1-a_k-s\right)$'nın kutup noktaları olabilen kompleks sayılar,
- $-b_j-v \neq 1-a_k+\lambda$, $j=1,2,\cdots,m$; $k=1,2,\cdots,n;$ $v,\ \lambda=0,1,\cdots$

dır.

2.1. Meijer'in G fonksiyonu için varlık koşulları

G fonksiyonu, ya $j=1,2,\cdots,m$ için $\Gamma\left(b_j+s\right)$'in kutup noktaları ya da $k=1,2,\cdots,n$ için $\Gamma\left(1-a_k-s\right)$'in kutup noktaları yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu nedenle, G fonksiyonu için varlık koşulları aşağıdaki gibidir.

i) $q \geq 1$, $q > p$ **:** $z \neq 0$ olan tüm z'ler için $G(z)$ mevcuttur,

ii) $q \geq 1$, $q = p$ **:** $|z|<1$ için $G(z)$ mevcuttur,

iii) $p \geq 1$, $p > q$ **:** $z \neq 0$ olan tüm z'ler için $G(z)$ mevcuttur,

iv) $p \geq 1$, $q = p$ **:** $|z|>1$ için $G(z)$ mevcuttur.

(i) ve (ii) durumlarında $G(z)$, $j=1,2,\cdots,m$ için $\Gamma\left(b_j+s\right)$'in kutup noktalarındaki rezidüleri toplamından ve (iii) ile (iv) durumlarında ise $G(z)$, $\Gamma\left(1-a_k-s\right), k=1,2,\cdots,n$'in kutup noktalarındaki rezidüleri toplamından elde edilir. [3, 7]

2.2 Meijer'in G fonksiyonunun bazı temel özellikleri

Bu kesimde G fonksiyonuna ve türevine ait temel özellikler aşağıda maddeler halinde verilecek ve bu özelliklerin bazılarının kullanımı 4. bölümde örneklerle açıklanmaya çalışılacaktır.

1. $$z^{\alpha} G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1+\alpha,\ldots,a_p+\alpha\\ b_1+\alpha,\ldots,b_q+\alpha\end{matrix}\right.\right) \text{ dır.}$$

2. $$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{z}\left|\begin{matrix}1-b_1,\ldots,1-b_q\\ 1-a_1,\ldots,1-a_p\end{matrix}\right.\right), \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z) \text{ dır.}$$

3. $$1\le n\le p-1 \text{ için } \left(a_p-a_1\right)G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1-1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)+G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{p-1},a_p-1\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right) \text{ dır.}$$

4. $$\left(1-a_1+b_1\right)G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1-1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)+G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1+1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right), \quad m,n\ge 1 \text{ dır.}$$

5. $$z^k\frac{d^k}{dz^k}\left[G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)\right]=G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(z\left|\begin{matrix}0,a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q,k\end{matrix}\right.\right) \text{ dır.}$$

6. $$z\frac{d}{dz}G_{p,q}^{m,n}\left(az\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(az\left|\begin{matrix}a_1-1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)+\left(a_1-1\right)G_{p,q}^{m,n}\left(az\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right), \quad n\ge 1 \text{ dır.}$$

7. $$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{-b_1}G_{p,q}^{m,n}\left(az\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right)\right]=(-1)^k z^{-k-b_1}G_{p,q}^{m,n}\left(az\left|\begin{matrix}a_p\\ b_1+k,b_2,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right), \quad m\ge 1, k=1,2,\cdots \text{ dır.}$$

8. $$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{a_1-1}G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right)\right]=(-1)^k z^{a_1-k-1}G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\left|\begin{matrix}a_1-k,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right) \quad n\ge 1, k=1,2,\cdots \text{ dır [4, 7].}$$

2.3 Meijer'in G fonksiyonunun Mellin dönüşümü

$\tilde{f}(z)=\int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}f(x)dx$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun **Mellin dönüşümü** ve $f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{z=c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z}\tilde{f}(z)dz$ ifadesi ise $\tilde{f}(p)$ fonksiyonunun **ters Mellin dönüşümüdür**. $\int_0^{\infty}\left|f(x)\right|x^{z-1}dx$ integrali $z>0$ için sınırlı ise $\tilde{f}(z)$ dönüşümü vardır. $c>z$ için ise $f(x)$ fonksiyonunun tersi alınabilir. (1) ile tanımlanan G fonksiyonuna ters Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}G_{p,q}^{m,n}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)dx=g(s) \qquad (3)$$

elde edilir. (1) denkleminin sol tarafında yer alan G fonksiyonunda ki z değişkenine βz dönüşümü uygulandığında

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\beta x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right) dx \tag{4}$$

elde edilir ve 2. özellikten

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{\beta x} \,\middle|\, \begin{matrix} 1-b_1,\ldots,1-b_q \\ 1-a_1,\ldots,1-a_p \end{matrix}\right) dx \tag{5}$$

bulunur. (5) eşitliğinde $\frac{1}{x} = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty y^{-s-1} G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{y}{\beta} \,\middle|\, \begin{matrix} 1-b_1,\ldots,1-b_q \\ 1-a_1,\ldots,1-a_p \end{matrix}\right) dy \tag{6}$$

elde edilir. (4), (5) ve (6) denklemlerinde genel olarak $p \le q$ eşitsizliğini göz önüne alabiliriz. Eğer $p \ge q$ olursa (6) denkleminin yerine (4) denklemi kullanılabilir.

3. Uygulamalar

3.1 Keyfi olarak seçilmiş parametrelerle Meijer'in G fonksiyonunun değerlendirilmesi

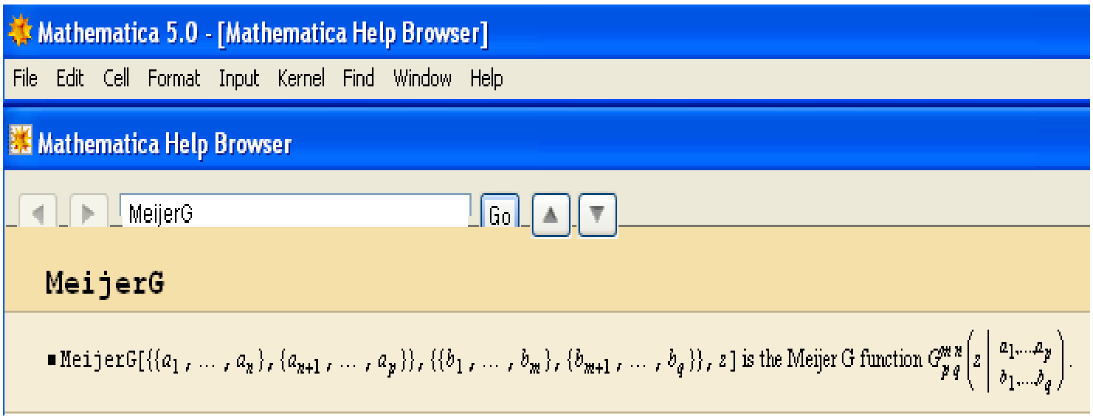
Meijer'in G fonksiyonunun parametreleri keyfi (özel) olarak seçilince son derece basit fonksiyonlara eşit olduğu görülebilir. Bunlardan bazıları

- $G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| a\right) = z^a e^{-z}, \quad z \ne 0$
- $G_{1,1}^{1,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right) = \frac{(1-z)^{a-1}}{\Gamma(a)}, \quad |z| < 1$
- $G_{1,1}^{1,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha+\beta+1 \\ \alpha \end{matrix}\right) = \frac{z^\alpha (1-z)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \quad |z| < 1$
- $\frac{2^{2a}}{\Gamma(2a)} G_{2,2}^{1,2}\left(-z^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 1-a, \frac{1}{2}-a \\ 0, \frac{1}{2} \end{matrix}\right) = (1+z)^{-2a} + (1-z)^{-2a}, \quad |z| < 1$
- $\frac{a^{-\beta/\alpha}}{\Gamma(\gamma)} G_{1,1}^{1,1}\left(az^\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} 1-\gamma+\beta/\alpha \\ \beta/\alpha \end{matrix}\right) = \frac{z^\beta}{(1+az^\alpha)^\gamma}, \quad |az^\alpha| < 1$
- $G_{2,2}^{1,2}\left(\pm z \,\middle|\, \begin{matrix} 1,1 \\ 1,0 \end{matrix}\right) = \ln(1 \pm z), \quad |z| < 1$
- $z G_{2,2}^{1,2}\left(-z^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ 0, -\frac{1}{2} \end{matrix}\right) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad |z| < 1$

şeklindedir. Bu örnekler kolaylıkla çoğaltılabilir.

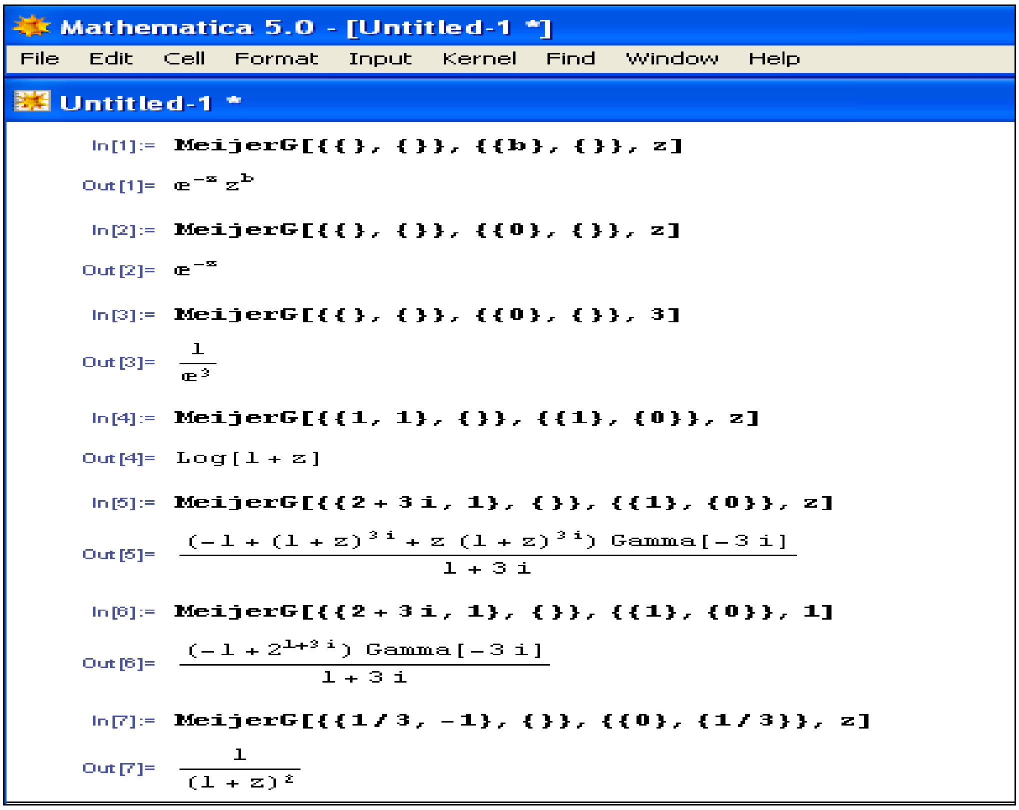
3.2 Mathematica programında Meijer'in G fonksiyonu

G fonksiyonu ile işlemler çeşitli bilgisayar paket programlarına da yapılabilmektedir. Örneğin parametreleri belirlenmiş bir G fonksiyonu, Mathematica (v.5) paket programında



Şekil 1. Mathematica (v.5) paket programında Meijer'in G fonksiyonu

Şekil 1'deki biçiminde tanımlanmaktadır. Örnek olarak $G^{1,0}_{0,1}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \\ b\end{matrix}\right)$, $G^{1,0}_{0,1}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \\ 0\end{matrix}\right)$, $G^{1,0}_{0,1}\left(3\,\middle|\,\begin{matrix} \\ b\end{matrix}\right)$, $G^{1,2}_{2,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}1,1 \\ 1,0\end{matrix}\right)$, $G^{1,2}_{2,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}2+3i,1 \\ 1,0\end{matrix}\right)$, $G^{1,2}_{2,2}\left(1\,\middle|\,\begin{matrix}2+3i,1 \\ 1,0\end{matrix}\right)$, $G^{1,2}_{2,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}1/3,-1 \\ 0,1/3\end{matrix}\right)$ fonksiyonlarının ifadesi sırasıyla



Şekil 2. Mathematica (v.5) paket programında istenen fonksiyonların çıktısı

biçiminde Mathematica (v.5.) den hesaplanabilir. Yukarıdaki örneklerde parametre değerlerindeki küçük bir değişikliğin sonuçlardaki büyük etkisini gösterebilmek için $m,\ n,\ p,\ q$ değerleri aynı kalmıştır.

3.3 Meijer'in G Fonksiyonunu kullanarak sürekli rastgele değişkenlerin çarpımlarının dağılımının elde edilmesi

İstatistik teorisinde, rastgele değişkenlerin bir dönüşümünün dağılımını belirleyebilmek önemli bir problemdir. Bu problemin çözümü için iyi bilinen tekniklerden birisi de olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniğidir. Rohatgi (1976, syf. 141), X ve Y sürekli rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x,y)$ olmak üzere $V = X.Y$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun $f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,\frac{v}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right|dx$ olarak elde edilebileceğini ortaya koymuştur. Daha sonra bu teknik ikiden fazla rastgele değişkenin bir fonksiyonunun (dönüşümünün) dağılımının bulunması için geliştirilmiştir. Ancak bu tekniğin uygulanmasında yeni ek rastgele değişkenler tanımlama, rastgele değişkenler arasında birebir dönüşüm yapma ve Jakobiyen hesaplama zorlukları mevcuttur.

Özellikle rastgele değişkenlerin çarpımlarının veya birbirlerine oranlarının dağılımının elde edilmesinde Mellin dönüşümü büyük kolaylık sağlamıştır ve yeni rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu Meijer'ın G fonksiyonu olarak karşımıza çıkmaktadır.

$X_1, X_2, \ldots, X_k$ birbirinden bağımsız ve her biri $f_j\left(x_j\right)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rastgele değişkenler olmak üzere $Y = \prod_{j=1}^{k} X_j$ dönüşümüyle verilen Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edebilmek için izlenecek adımlar şöyledir:

1. X_j 'nin $(s-1)$ inci momenti $E\left(X_j^{s-1}\right) = \int_0^{\infty} x_j^{s-1} f_j\left(x_j\right) dx_j$ elde edilir. Burada $E\left(X_j^{s-1}\right)$, $f_j\left(x_j\right)$ 'nin Mellin dönüşümüne karşılık gelir.

2. 1. Adımda elde edilen $E\left(X_j^{s-1}\right)$'ler kullanılarak ve $X_1, X_2, \ldots, X_k$ rastgele değişkenlerinin bağımsızlığından yararlanılarak $E\left(Y^{s-1}\right) = \prod_{j=1}^{k} E\left(X_j\right)^{s-1}$ elde edilir.

3. $E\left(Y^{s-1}\right)$ 'nin ters Mellin dönüşümü alınarak Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y\left(y\right)$ bulunur.

4. Elde edilen $f_Y(y)$ fonksiyonu, Meijer'in G fonksiyonu cinsinden ifade edilir.

Örnek 3.3.1 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ Beta dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere X_j 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_j\left(x_j\right) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\alpha_j + \beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} x_j^{\alpha_j - 1}\left(1 - x_j\right)^{\beta_j - 1}, & 0 < x_j < 1, \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, \cdots, k \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olmak üzere. $Y = \prod_{i=1}^{k} X_i$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu nedir?

Çözüm: Bu durumda X_j^{s-1}'in beklenen değeri $f_j(x_j)$'nin Mellin dönüşümü olmak üzere

$$E\left(X_j^{s-1}\right)=\int_0^1 x_j^{s-1} f_j\left(x_j\right) dx_j =\int_0^1 x_j^{s-1}\frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} x_j^{\alpha_j-1}\left(1-x_j\right)^{\beta_j-1} dx_j$$

$$=\frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)}\int_0^1 x_j^{\alpha_j+s-2}\left(1-x_j\right)^{\beta_j-1} dx_j$$

$$=\frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)\Gamma\left(\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j+s+\beta_j-1\right)} \quad , \quad R\left(\alpha_j+s-1\right)>0 \ , \ j=1,\cdots,k$$

biçiminde elde edilir. $X_1, X_2, \ldots, X_k$'nin istatistiksel olarak bağımsızlığını kullanarak

$$E\left(Y^{s-1}\right)=E\left(X_1^{s-1}\right)\cdot E\left(X_2^{s-1}\right)\cdots E\left(X_k^{s-1}\right)=C\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)}{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j+s-1\right)}$$

yazılabilir. Burada $C=\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)}$ dir. $E\left(Y^{s-1}\right)$'nin ters Mellin dönüşümü alınarak Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y)=\frac{C}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)}{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j+s-1\right)} y^{-s} ds\ , \quad 0<y<1$$

olarak elde edilir. $f_Y(y)$ fonksiyonu ise Meijer'in G fonksiyonu yardımıyla

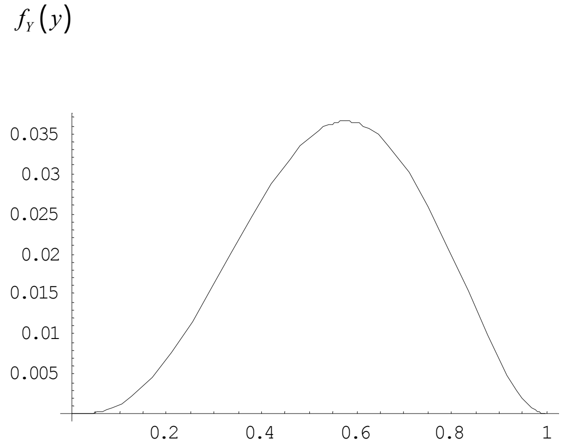
$$f_Y(y)=CG_{k,k}^{k,0}\left(y\left|\begin{matrix}\alpha_j+\beta_j-1\,,\ j=1,\ldots,k\\ \alpha_j-1\,,\ j=1,\ldots,k\end{matrix}\right.\right), \quad 0<y<1$$

olarak yazılabilir. [7]

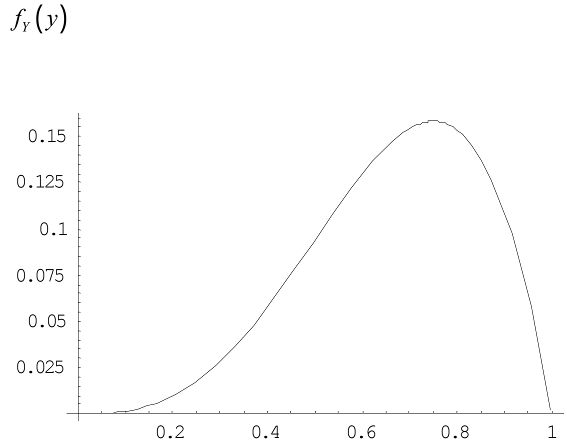
Örneğin, $k=2$ için X_1 ve X_2 sırasıyla (α_1,β_1) ve (α_2,β_2) parametrelerine sahip Beta dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun. $Y=X_1\cdot X_2$ dönüşümü yapıldığında Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y)=\frac{\Gamma\left(\alpha_1+\beta_1\right)\Gamma\left(\alpha_2+\beta_2\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)} G_{2,2}^{2,0}\left(y\left|\begin{matrix}\alpha_1+\beta_1-1\,,\ \alpha_2+\beta_2-1\\ \alpha_1-1\,,\ \alpha_2-1\end{matrix}\right.\right), \quad 0<y<1 \text{ için}$$

olarak elde edilir ve keyfi olarak seçilen parametre değerleri için Mathematica paket programında çizilen grafikler Şekil 3'de verilmiştir.



$(\alpha_1 = 5,\ \beta_1 = 1)$ ve $(\alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 2)$ için



$(\alpha_1 = 5,\ \beta_1 = 1)$ ve $(\alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 1)$ için

Şekil 3. Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

3.4 Bir astrofizik probleminin istatistiksel yöntemlerle çözümünde Meijer'in G fonksiyonunun kullanımı

Yıldızlar ve kozmoloji nükleer bileşimi alanlarındaki araştırmaların en önemli amaçlarından birisi, termonükleer reaksiyon oranlarını bulmaktır. Füzyon plazmalarının tüm uygulamaları pratik olarak termonükleer reaksiyon oranlarının özel durumlarındaki teorileri ile kontrol edilir. $\int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt$ integrali, oran teorisi, nükleer enerji üretme, nötron problemi ve astrofiziğin diğer dallarında kullanılan temel integrallerden birisidir. Bu integralin sonucunun elde edilmesinde kullanılan istatistiksel yöntemler ve sonucun G fonksiyonu ile nasıl ifade edildiği aşağıdaki örnekle verilecektir.

Örnek 3.4.1 $\int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt = ?$

Çözüm: X_1 ve X_2 rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve sırasıyla $f_1(t) = c_1 t^{1-n\rho} e^{-t}$ ve $f_2(t) = c_2 e^{-t^{\frac{n}{m}}}$ (c_1 ve c_2 sabit olmak üzere) olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip rastgele değişkenler olsun. Önce $Y = X_1 \cdot X_2$ dönüşümü ile verilen Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulabilmek için $Y = X_1 \cdot X_2$ ve $U = X_1$ olarak seçilerek Rohatgi (1976, syf. 141)'nin verdiği

$$f(y) = \int_0^\infty f_1(u) f_2\left(\frac{y}{u}\right) u^{-1} du \tag{7}$$

(7) eşitliğinde $u = at$ ve $y = az^{\frac{m}{n}}$ biçiminde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f(y) = c_1 c_2 \int_0^\infty (at)^{-1} (at)^{1-n\rho} e^{-at} e^{-\left(\frac{z^{\frac{m}{n}}}{t}\right)^{\frac{n}{m}}} dt = c_1 c_2 a^{1-n\rho} \int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt \tag{8}$$

elde edilir. Ayrıca kesim 4.4'de verilen teknik kullanılarak Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y)$ 'yi elde edebilmek için $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ 'nin sırasıyla Mellin dönüşümleri alınırsa

$$g_1(s) = E\left(X_1^{s-1}\right) = \int_0^\infty t^{s-1} f_1(t)\,dt = c_1 \int_0^\infty t^{1-n\rho+s-1} e^{-t}\,dt = c_1 \Gamma(1-n\rho+s), \quad R(1-n\rho+s) > 0$$

$$g_2(s) = E\left(X_2^{s-1}\right) = \int_0^\infty t^{s-1} f_2(t)\,dt = c_2 \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t^{\frac{n}{m}}}\,dt = c_2 \frac{m}{n} \Gamma\left(\frac{ms}{n}\right), \qquad R(s) > 0$$

elde edilir. X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin birbirinden bağımsızlığı kullanılarak

$$E\left(Y^{s-1}\right) = E\left(X_1^{s-1}\right) \cdot E\left(X_2^{s-1}\right) = c_1 \Gamma(1-n\rho+s) c_2 \frac{m}{n} \Gamma\left(\frac{ms}{n}\right)$$

eşitliği üzerinden ters Mellin dönüşümü alındığında

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c_1 c_2 \left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{ms}{n}\right) \Gamma(1-n\rho+s) \left(a z^{\frac{m}{n}}\right)^{-s} ds \tag{9}$$

elde edilir. Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniği ile (8), Mellin dönüşümü tekniği ile (9) biçiminde elde edilmiştir. (8) ve(9) denklemlerinin birbirine eşitliği kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$a^{-n\rho+1} \int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{ms}{n}\right) \Gamma(1-n\rho+s) \left(a z^{\frac{m}{n}}\right)^{-s} ds \tag{10}$$

elde edilir.(10) eşitliğinin sağ tarafında $\frac{s}{n} = k$ dönüşümü yapılırsa

$$a^{-n\rho+1} \int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} m \Gamma(mk) \Gamma(1-n\rho+nk) \left(a^n z^m\right)^{-nk} dk \tag{11}$$

elde edilir.(11) eşitliğinin sağ tarafında yer alan Gamma fonksiyonlarının çoklu çarpım formülleri

$$\Gamma(mk) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mk-\frac{1}{2}} \Gamma(k) \Gamma\left(k+\frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(k+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mk-\frac{1}{2}} \Gamma(k) \prod_{j=1}^{m-1} \Gamma\left(k+\frac{j}{m}\right),$$

$$\Gamma(1-n\rho+nk) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+nk-\frac{1}{2}} \Gamma\left(k+\frac{1-n\rho}{n}\right) \Gamma\left(k+\frac{2-n\rho}{n}\right) \cdots \Gamma\left(k+\frac{n-n\rho}{n}\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+ns-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right)$$

olmak üzere (11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a^{-n\rho+1} \int_0^\infty t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} m(2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{ms-\frac{1}{2}} \Gamma(s) \prod_{j=1}^{m-1} \Gamma\left(s+\frac{j}{m}\right) (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+ns-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right) \left(a^n z^m\right)^{-s} ds$$

$$= \frac{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-n\rho} (2\pi)^{\frac{2-m-n}{2}}}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Gamma(s) \prod_{j=1}^{m-1} \Gamma\left(s+\frac{j}{m}\right) \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right) \left(m^{-m} n^{-n} a^n z^m\right)^{-s} ds$$

$$= m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-n\rho} (2\pi)^{\frac{2-m-n}{2}} G_{0,m+n}^{m+n,0}\left(\frac{z^m a^n}{m^m n^n} \middle| 0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, \frac{1-n\rho}{n}, \ldots, \frac{n-n\rho}{n} \right)$$

biçiminde aranan integralin değeri G fonksiyonuna bağlı olarak elde edilir. [7, 8]

4. Sonuç ve öneriler

Meijer'in G fonksiyonu Matematiğin çeşitli alanlarında kullanıldığı gibi özel durumları İstatistik, Ekonometri, Fizik ve ilişkili diğer alanlarda da görülmektedir. Alınması zor integrallerin sayısal hesaplamaları G fonksiyonu ile yapılabilmektedir. Ayrıca çeşitli matematiksel yazılım programlarından da faydalanılarak keyfi parametre değerleri için kompleks integralin değeri bilinen fonksiyonlar cinsinden de ifade edilebilmektedir. İstatistik teorisinde önemli bir problem olan rastgele değişkenlerin bir fonksiyonunun dağılımının elde edilmesi probleminde olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu tekniklerine alternatif olarak, sürekli dağılımlar için Meijer'in G fonksiyonu ve Mellin dönüşümünden yararlanılmaktadır. Dolayısıyla bu yöntemde yeni ek rastgele değişkenler tanımlama, rastgele değişkenler arasında birebir dönüşüm yapma ve Jakobiyen hesaplama işlemlerini yapmaya gerek yoktur. Ayrıca Fizikte, rezonans, biten rezonans, termonükleer reaksiyon oranı için bazı integrallerin hesaplanabilmesi için de istatistiksel teknikler kullanılarak Meijer'in G fonksiyonu cinsinden sonuçlar elde edilebilmektedir.

İstatistikte kullanım alanı oldukça geniş olan sıra istatistikleri, rekor değerler ve bu rastgele değişkenlerin en genel hali olan genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin önemi büyüktür. Meijer'in G fonksiyonu yardımıyla sürekli dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları, dağılım fonksiyonları ve bunlardan yararlanarak momentleri ifade edilebilmektedir. Literatürde mevcut olan bazı karakterizasyon problemlerinin çözümleri Meijer'ın G fonksiyonu kullanılarak incelenebilir.

Kaynaklar

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, (1970), *Handbook Of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*, National Bureau Of Standards Applied Math. Series 55, 10th Printing.

[2] E. Beutner, U. Kamps , (2008), *Models Of Ordered Data And Products Of Beta Random Variables,* Advances In Mathematical And Statistical Modeling, 101-106, Chapter 8, Birkhäuser Boston, Edit By Bc Arnold, N Balakrishnan, Jm Sarabia, R.

[3] F. Erdugan, (2007), *Meijer'in Genelleştirilmiş Fonksiyonu Ve İstatistikte Kullanımı*, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi).

[4] E. E. Fitchard, V. Franco, (1980), *Differential Properties Of Meijer's G-Function,* J.Phys. A.Math.Gen., 13, 2331–2340.

[5] A. G. Glen, L. M. Lemis, J. H. Drew, (2004), *Computing The Distribution Of The Product Of Two Continuous Random Variables*, Computational Statistics And Data Analysis, 44, 3, 451-464.

[6] T. S. Glickman, F. Xu, (2008), *The Distribution Of The Product Of Two Triangular Random Variable*s, Statistics And Probability Letters, 78, 16, 2821-2826.

[7] A. M. Mathai, (1993), *A Handbook Of Generalized Special Functions For Statistical And Physical Sciences*, Clarendon Press, Oxford.

[8] A. M. Mathai, H. J. Haubold, (2002), *Review Of Mathematical Techniques Applicable In Astrophysical Reaction Rate Theory*, Astrophysics And Space Science, 282, 265-280.

[9] S. Nadarajah, S. Kotz, (2006), *Comments On "On The Distribution Of The Product Of Independent Rayleigh Random Variables"*, Ieee Transactions On Antennas And Propagation, 54, 11, 3570-3571.
[10] S. Nadarajah, A. K. Gupta, (2008), *A Product Pareto Distribution*, Metrika, 68, 2, 199-208.
[11] S. Nadarajah, (2008), *Exact Distribution Of The Linear Combination Of P Gumbel Random Variables*, International Journal Of Computer Mathematics, 85, 9, 1355–1362.
[12] V. K. Rohatgi, (1976), *An Introduction To Probability Theory Mathematical Statistics*, Wiley, New York.
[13] J. Salo, H. M. El-Sallabi, P. Vainikainen, (2006), *The Distribution Of The Product Of Independent Rayleigh Random Variables*, Ieee Transactıons On Antennas And Propagatıon, 54, 2, 639-643.
[14] M. D. Springer, W. E. Thompson, (1966), *The Distribution Of Products Of İndependent Random Variables*. Siam Journal On Applied Mathematics 14, 3, 511–526.
[15] M. D. Springer, W. E. Thompson, (1970), *The Distribution Of Products Of Beta, Gamma And Gaussian Random Variables*, Siam Journal On Applied Mathematics, 18, 4, 721–73.
[16] M. D. Springer, (1979), *The Algebra Of Random Variables*, Wiley, New York.
[17] A. Şamilov, E. Ağaoğlu, Y. M. Kantar, (2006), *Dirac Ve Heaviside Genelleştirilmiş Fonksiyonlarını Kullanarak Rastgele Değişkenlerin Dağılımlarının Elde Edilmesi*, İstatistik Günleri Sempozyumu, Antalya, 123-128.