www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 5 (2012) 43-50

İstatistikçiler Dergisi

Pareto Dağılımının Parametrelerinin İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklemlere Dayalı En Küçük Kareler Tahmini

Buğra Saraçoğlu

Selçuk Üniversitesi
Fen Fakültesi İstatistik Bölümü
42250-Kampüs, Konya, Türkiye,
bugrasarac@selcuk.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik (EÇO) ve en küçük kareler (EKK) tahmin edicilerinin yanları, hata kareler ortalamaları ve varyansları Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırıldı. Ayrıca, değişik sansür şemaları için Pareto dağılımının β parametresi için EÇO tahmin edicisinin kullanılması, λ parametresi için ise EKK tahmin edicisinin kullanılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: İlerleyen tür sansürleme, en çok olabilirlik (EÇO) tahmin edicisi, en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi, Hata kareler ortalaması (HKO), Pareto dağılımı, Monte Carlo simülasyonu.

Abstract

Least Squares Estimation of Parameters of Pareto Distribution Based on Progressive Type-II Right Censored Samples

In this study, bias, mean square error (MSE) and variances of maximum likelihood (ML) and least squares (LS) estimators based on progressive type-II right censored samples for parameters of Pareto distribution are comparised by using Monte Carlo simulation method. Moreover, it is concluded that used MLE for parameter β *and LSE for parameter* λ *of Pareto distribution for various censoring schemes.*

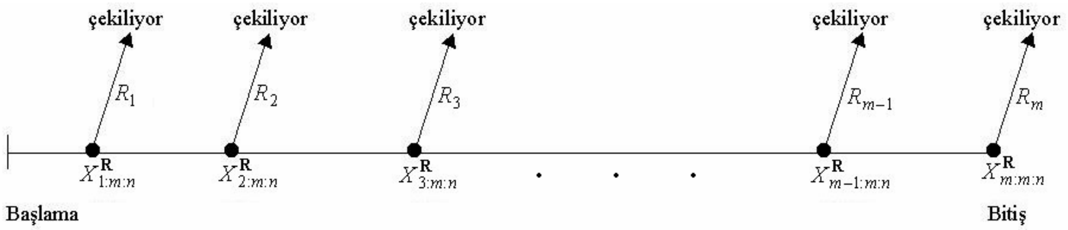
Keywords: *Progressive type-II right censoring, Maximum likelihood estimator (MLE), Least squares (LS) estimator , Mean square error, Pareto distribution, Monte Carlo Simulation.*

1. Giriş

Bir sistemin güvenilirliği için sonuç çıkarımı yaparken sistemi oluşturan tüm bileşenlerin bozulma zamanlarını gözlemlemek her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin; bir klinikte tedavi gören hastalara ilişkin veriler, eksiksiz gözlenemeyebilir veya pahalı bir elektronik parçanın yaşam zamanı hakkında bilgi edinmek için yapılan yaşam testinde, parçaların hepsinin bozulmalarının gözlenmesi, maliyeti ve test zamanını artıracağından istenmeyebilir. Bu tip durumlarda, deney yada gözlem sonrası sansürlenmiş veri elde edilir. Tıp, biyoloji, sigortacılık, mühendislik, kalite kontrol ve bir çok alanda sansürlenmiş verilerle karşılaşılmaktadır.

Deney ya da gözlemler sonucunda değişik sansür türleriyle karşılaşmak mümkündür. Birinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, t gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce, sistemdeki bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. İkinci tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, n birimden oluşan bir sistemin bozulan $k \le n$ biriminin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. Rasgele sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli ise birimlerin bozulma zamanlarının başka bir rasgele olaydan dolayı sansürlenmesi durumudur ([7],[8]).

İkinci tip sansürlemenin en popüler olanı, ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlemedir. Bu sansürleme modeli şu şekilde izah edilebilir: n sayıda bileşenin (aynı yaşam zamanı dağılımına sahip) yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen *1.* bozulma ile rasgele R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini, daha sonra hayatta kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, *2.* bozulma ile rasgele R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece m. bozulma ile rasgele R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle m bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen m hacimli örnekleme ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem denir [2]. Burada $n = m + \sum_{i=1}^{m} R_i$ biçimindedir ve $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şeması olarak adlandırılır.



Şekil 1. İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem plânı

$X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olan dağılımdan alınan ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X^{\mathrm{R}}_{1:m:n}, X^{\mathrm{R}}_{2:m:n}, \ldots, X^{\mathrm{R}}_{m:m:n}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A \prod_{i=1}^{m} f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i} \quad, -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty \tag{1}$$

biçiminde verilir, burada;

$$A = n(n - R_1 - 1) \times \cdots \times (n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{m-1} - m + 1) \tag{2}$$

şeklindedir. (1)'de $\mathbf{R} = (0, \ldots, 0)$ alınırsa bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\mathbf{R} = (0, \ldots, n - m)$ alınırsa tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

$X^{\tilde{R}}_{s:m:n}$, 1 ortalamalı üstel (standart üstel) dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü s. sıra istatistiği olmak üzere bu rasgele değişkene ilişkin beklenen değer, varyans ve kovaryanslar;

$$E\left(X^{R}_{s:m:n}\right)=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{n-\left(\sum_{j=1}^{i-1}R_j\right)-i+1}\ ,\quad s=1,2,\ldots,m \tag{3}$$

$$Var\left(X^{R}_{s:m:n}\right)=\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{1}{n-\left(\sum_{j=1}^{i-1}R_j\right)-i+1}\right\}^2\ ,\quad s=1,2,\ldots,m \tag{4}$$

$$Cov\left(X^{R}_{r:m:n},X^{R}_{s:m:n}\right)=Var\left(X^{R}_{r:m:n}\right)\ ,\quad r<s \tag{5}$$

şeklindedir [2].

Bir sistemin güvenilirliği incelenirken; ilgilenilen rasgele değişken yaşam zamanıdır. Bir rasgele değişkenin dağılımı, yaşam zamanı dağılımı olarak adlandırılan, Weibull, Gamma, Lognormal, Pareto I ve Gompertz gibi dağılımlar olabilmektedir. Bazı dağılımlar için İlerleyen tür tip-II sağdan sansürleme altında parametre tahmini ile ilgili bazı makaleler ve tezler [3],[4], [5], [6], [7], [8], [11], [12] ve [16] olarak sıralanabilir.

İlerleyen tür tipII sağdan sansürlü örneklem durumunda bir sistemin yaşam zamanının Pareto dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğu düşünüldüğünde bu dağılımın parametreleri için en küçük kareler tahminin elde edilmesi ve bu tahmin edicinin en çok olabilirlik tahmin edicisiyle karşılaştırılması ve hangi tahmin edicinin kullanılması gerektiğini önermek tahmin problemi için çok önemlidir.

Pareto Dağılımı ilk olarak [13] tarafından ortaya atılmıştır. X rasgele değişkeni, Pareto I dağılımına sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x)=\lambda\beta^{\lambda}x^{-(\lambda+1)},\quad x>\beta>0,\ \lambda>0 \tag{6}$$

$$F(x)=1-\beta^{\lambda}x^{-\lambda} \tag{7}$$

şeklindedir. Bu dağılım gerçekte Pearson Tip-VI dağılımının özel bir halidir. Hazard (bozulma) oranı $h(x)=\lambda x^{-1}$ olup azalandır. Pareto I dağılımının beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=\lambda\beta(\lambda-1)^{-1},\ \lambda>1 \tag{8}$$

$$Var(X)=\beta^2\lambda\left\{(\lambda-1)^2(\lambda-2)\right\}^{-1},\ \lambda>2 \tag{9}$$

biçimindedir. Pareto I dağılımı aynı zamanda Lomax dağılımı olarak da bilinir. Pareto I dağılımı için $Pareto\,I(\lambda,\beta)$ gösterimi kullanılacaktır. Tam örneklem durumunda, Pareto dağılımının parametrelerinin tahmini konusunda birçok çalışma yapılmıştır ([1], [10] ve [15]). Örneklemin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü olması durumunda ise Pareto dağılımı için parametre tahmini konusunda yapılan bazı çalışmalar [8], [9] [14] ve [17] biçiminde gösterilebilir.

Bu çalışmada, Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik (EÇO) ve en küçük kareler (EKK) tahmin edicilerinin yanları, hata kareler ortalamaları ve varyansları Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla karşılaştırıldı.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, $Pareto\,I(\lambda,\beta)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmin edicileri elde edilmiştir ve bu tahmin edicilerin karşılaştırılmasında Monte Carlo simulasyonu kullanılmıştır.

2. Pareto Dağılımının Parametrelerinin İlerleyen Tür Tip-II Sağdan Sansürlü Örneklemlere Dayalı Tahmini

Bu bölümde, Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmini konusu incelenecektir.

2.1. En çok olabilirlik tahmini

$X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$ $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere (1) ve (6) kullanılarak log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\log L\left(\beta,\lambda \mid \mathrm{x}^{\mathrm{R}}\right) = \log A + m\log\lambda + n\lambda\log\beta \sum_{i=1}^{m}\left(-\lambda\left(R_i+1\right)-1\right)\log\left(x^{\mathrm{R}}_{i:m:n}\right),\ \beta < x^{\mathrm{R}}_{1:m:n} < x^{\mathrm{R}}_{2:m:n} < \cdots < x^{\mathrm{R}}_{m:m:n} \tag{10}$$

Burada $\mathrm{x}^{\mathrm{R}} = \left(x^{\mathrm{R}}_{1:m:n}, x^{\mathrm{R}}_{2:m:n}, \ldots, x^{\mathrm{R}}_{m:m:n}\right)$ ve A, (2)'de tanımlandığı gibidir. Log-olabilirlik fonksiyonunun λ ve β 'ya göre türevlerinin 0 'a eşitlenmesi sonucunda λ ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta} = X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} \tag{11}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\log\left(X^{\mathbf{R}}_{i:m:n}\right) - n\log\left(\hat{\beta}\right)} \tag{12}$$

biçimindedir [11].

2.2. En küçük kareler tahmini

X, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken ise $Z = \lambda\log(X) - \lambda\log(\beta)$ rasgele değişkeni, 1 ortalamalı üstel (standart üstel) dağılıma sahip bir rasgele değişken olur.

$X^{R}_{s:m:n}$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımından alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü s. sıra istatistiği olmak üzere $Z^{R}_{s:m:n} = \lambda\log\left(X^{R}_{s:m:n}\right) - \lambda\log\left(\beta\right)$, standart üstel dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü s. sıra istatistiğidir.

$x^{R}_{1:m:n}, x^{R}_{2:m:n}, \ldots, x^{R}_{m:m:n}$, $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımından alınan ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemin gözlenen değerleri olsun. Bu çalışmada amaç $Pareto\, I(\lambda,\beta)$ dağılımının λ ve β parametrelerini tahmin etmektir. Bunun için

$$Z^{R}_{s:m:n} = \lambda\log\left(x^{R}_{s:m:n}\right) - \lambda\log\left(\beta\right) + \varepsilon_s \tag{13}$$

regresyon denklemi göz önüne alınsın. Regresyon denklemini tahmin etmek için gerekli olan $z^{R}_{s:m:n}$ örneklem değeri, bilinmeyen λ ve β parametrelerine bağlı olduğundan $z^{R}_{s:m:n}$ değeri gözlenemez ancak

$z^R_{s:m:n}$ değeri yerine tahmin değeri kullanılabilir. Bu çalışmada $z^R_{s:m:n}$'nin tahmin değeri olarak standart üstel dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin beklenen değerleri kullanılmıştır. Yani, $z^R_{s:m:n} = E\left(Z^R_{s:m:n}\right)$ şeklindedir. Burada $E\left(Z^R_{s:m:n}\right)$ değerleri (3) eşitliği ile hesaplanabilir. Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini için geliştirilen yöntemden [11] faydalanarak λ ve β parametreleri tahmin edilebilir. (13) ile verilen regresyon denklemi parametrelerine göre lineer değildir. Bu çalışmada λ ve β parametrelerinin en küçük kareler tahminlerinin elde edilmesinde Marquardt algoritması [11] kullanılmıştır.

3. Simülasyon Çalışması

$Pareto(\lambda,\beta)$ dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem elde etmek için [3] tarafından önerilen algoritma kullanılabilir. Bu algoritma aşağıda verilmiştir.

$W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik bir örneklem ve

$$V_i = W_i^{\left(i+\sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{14}$$

olmak üzere

$$U^{R}_{i:m:n} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{15}$$

biçiminde $U^R_{i:m:n}$ rasgele değişkeni tanımlansın. Bu durumda $U^R_{1:m:n} < U^R_{2:m:n} < \cdots < U^R_{m:m:n}$ $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış $R = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmaktadır. Son olarak $X^R_{i:m:n} = F^{-1}\left(U^R_{i:m:n}\right)$, $i = 1,2,\ldots,m$ rasgele değişkeni tanımlansın. Burada $F^{-1}(\cdot)$, sayı üretilmek istenilen sürekli dağılımın, dağılım fonksiyonunun tersidir. O zaman $X^R_{1:m:n} < X^R_{2:m:n} < \cdots < X^R_{m:m:n}$, sürekli F dağılımından alınmış R sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmaktadır [3].

Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve en küçük kareler tahmin edicilerinin performanslarını yan, varyans ve HKO bakımından incelemek ve karşılaştırmak için, λ, β, n, m, R ve k değerleri için $Pareto(\lambda,\beta)$ dağılımından ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem alınarak 15000 tekrarlı simülasyon çalışması sonucunda elde edilen sonuçlar Çizelge 1 ve Çizelge 2 'de verilmiştir. Bu tablolardan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

4. Sonuç ve öneriler

Bu çalışmada, Pareto dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik (EÇO) ve en küçük kareler (EKK) tahmin edicilerinin yan, HKO ve varyanslarına ilişkin bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapıldı ve elde edilen sonuçlar Ekler bölümündeki Çizelge 1 ve Çizelge 2 'de verilmiştir. Bu tablolardan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- n sabit tutulup m arttırıldığında, λ ve β parametresinin EÇO ve EKK tahmin edicilerinin yanları ve HKO 'ları azalmaktadır.

- Bütün sansür şemaları için, β 'nın EKK tahmin edicisinin yanı ve HKO 'sı, EÇO tahmin edicisinin yanına ve HKO 'sına göre daha büyük elde edilmiştir. Dolayısıyla değişik sansür şemaları için β için EÇO tahmin edicisinin kullanılması gerektiği önerilebilir.

- Bütün sansür şemaları için, λ 'nın EKK tahmin edicisinin yanı ve HKO 'sı, EÇO tahmin edicisinin yanına ve HKO 'sına göre daha küçük elde edilmiştir. Dolayısıyla değişik sansür şemaları için λ için EKK tahmin edicisinin kullanılması gerektiği önerilebilir.

Kaynaklar

[1] B. R. Asrabadi, 1990, Estimation in the Pareto distribution, *Metrika*, 37, 199–205.
[2] N. Balakrishnan, R. Aggarwala, 2000, *Progressive Censoring: Theory, Methods And Applications*, Birkhauser, Boston.
[3] N. Balakrishnan, R. A. Sandhu, 1995, A Simple Simulation Algorithm For Generating Progressively Type-II Censored Sample, *American Statistician,* 49,2, 229-230.
[4] A.C. Cohen, N.J. Norgaard, 1975. Progressively Censored Sampling in the Three- Gamma Distribution Technometrics 19 3 333-340.
[5] A.C. Cohen, 1976. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. Technometrics 18 1 99-103.
[6] Z.F. Jaheen, 2003. Prediction of Progressive Censored Data From the Gompertz Model, Communications in Stat.-Simul Comp 32 3 663-676.
[7] Kale, B., 2003. İlerleyen Tür Sansürlenmiş Sıra İstatistikleri:Dağılım Özellikleri Ve Uygulamalar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
[8] C. Kus, 2004, Bazı yaşam zamanı dağılımlarının parametrelerinin tam ve sansürlü verilere dayalı tahmini, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi.
[9] C. Kus, C., M.F. Kaya, 2007, Estimation for the Parameters of The Pareto Distribution under Progressive Censoring, *Communication in Statistics: Theory and Methods,* 36, 7, 1359-1365.
[10] H. J. Malik, 1970, Estimation of the Parameters of the Pareto Distribution, *Metrika* , 15, 126–132.
[11] D. W. Marquardt, 1963, An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 11, No. 2, 431-441.
[12] N.R. Mann, 1971. Best Linear Invariant Estimation For Weibull Parameters Under Progressive Censoring. Technometrics 13 3 521-533.
[13] V. Pareto, 1897, *Cours d'economie Politique,* Vol II, *F. Rouge, Lausanne*.
[14] S. Parsi, M. Ganjali, N. S. Farsipour, 2010, Simultaneous Confidence Intervals for the Parameters of Pareto Distribution under Progressive Censoring, *Communications in Statistics- Theory and Methods* 39, 94–106.
[15] R. E. *Quandt,* 1966, Old and New Methods of Estimation and the Pareto Distribution. *Metrika* , 10, 55–82.
[16] J. S. White, 1969, The Moments of Log-Weibull Order Statistics, *Technometrics,* 11 373-386.
[17] S. J. Wu, 2003, Estimation For the Two-Parameter Pareto Distribution Under Progressive Vensoring with Uniform Removals. J. *Statist. Comp.Simul.* 73, 2, 125-134.

EKLER

Çizelge 1. $(\lambda, \beta) = (2,2)$ için EKK ve EÇO tahmin edicilerinin yan, varyans ve HKO değerleri

Durum 1: $(\lambda, \beta) = (2,2)$		EKK						MLE					
		Yan		Varyans		MSE		Yan		Varyans		MSE	
(n,m)	Sansür Şeması	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
$(15,8)$	$(7,0,\ldots,0)$	0.0970	-0.0835	0.7288	0.0639	0,7382	0.0709	0.5865	0.0675	1.2246	0.0044	1,5686	0.0089
$(15,8)$	$(0,\ldots,0,7)$	0.0738	-0.0331	0.5734	0.0111	0,5788	0.0122	0.6504	0.0695	1.3347	0.0054	1,7577	0.0102
$(15,10)$	$(5,0,\ldots,0)$	0,1268	-0,0726	0,6950	0,0598	0,7111	0,0651	0,4941	0,0686	0,9654	0,0056	1,2094	0,0103
$(15,10)$	$(0,\ldots,0,5)$	0,0413	-0,0415	0,4383	0,0138	0,4400	0,0155	0,4499	0,0658	0,7348	0,0049	0,9373	0,0092
$(15,15)$	$(0,0,\ldots,0)$	0,0719	-0,0546	0,4447	0,0521	0,4499	0,0551	0,2877	0,0683	0,3932	0,0050	0,4760	0,0097
$(30,10)$	$(20,0,\ldots,0)$	0,1272	-0,0677	0,6526	0,0521	0,6687	0,0566	0,5118	0,0337	0,9964	0,0011	1,2584	0,0023
$(30,10)$	$(0,\ldots,0,20)$	0,0829	-0,0172	0,4341	0,0028	0,4409	0,0031	0,5377	0,0324	0,8587	0,0012	1,1478	0,0023
$(30,15)$	$(15,0,\ldots,0)$	0,0793	-0,0544	0,4333	0,0417	0,4396	0,0447	0,3181	0,0362	0,4301	0,0015	0,5313	0,0028
$(30,15)$	$(0,0,\ldots,15)$	0,0623	-0,0141	0,3109	0,0039	0,3148	0,0041	0,3334	0,0373	0,4335	0,0014	0,5447	0,0028
$(30,30)$	$(0,0,\ldots,0)$	0,0372	-0,0453	0,2569	0,0290	0,2583	0,0311	0,1705	0,0347	0,1896	0,0012	0,2187	0,0024
$(100,10)$	$(90,0,\ldots,0)$	0,1225	-0,0810	0,6462	0,0547	0,6612	0,0612	0,5310	0,0101	0,9300	0,0001	1,2119	0,0002
$(100,10)$	$(0,\ldots,0,90)$	0,0055	-0,0070	0,3916	0,0003	0,3917	0,0003	0,5046	0,0098	0,9238	0,0001	1,1785	0,0002
$(100,30)$	$(70,0,\ldots,0)$	-0,0041	-0,0508	0,2310	0,0293	0,2310	0,0319	0,1355	0,0104	0,1576	0,0001	0,1760	0,0002
$(100,30)$	$(0,0,\ldots,70)$	-0,0078	-0,0069	0,1416	0,0006	0,1417	0,0006	0,1335	0,0103	0,1620	0,0001	0,1798	0,0002
$(100,100)$	$(0,0,\ldots,0)$	0,0043	-0,0195	0,0822	0,0101	0,0823	0,0105	0,0496	0,0099	0,0460	0,0001	0,0485	0,0002

Çizelge 2. $(\lambda, \beta) = (4,8)$ için EKK ve EÇO tahmin edicilerinin yan, varyans ve HKO değerleri

Durum 1: $(\lambda, \beta) = (4,8)$		EKK						MLE					
		Yan		Varyans		MSE		Yan		Varyans		MSE	
(n,m)	Sansür Şeması	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
$(15,8)$	$(7,0,\ldots,0)$	-0,5684	-0,2420	0,5762	0,3837	0,8993	0,4422	1,3742	0,1307	5,9659	0,0205	7,8544	0,0376
$(15,8)$	$(0,\ldots,0,7)$	-0,4384	0,0372	0,6686	0,2435	0,8608	0,2449	1,3808	0,1321	6,6706	0,0170	8,5773	0,0344
$(15,10)$	$(5,0,\ldots,0)$	-0,5417	-0,2268	0,5412	0,3631	0,8346	0,4146	0,9994	0,1299	3,6292	0,0167	4,6280	0,0336
$(15,10)$	$(0,\ldots,0,5)$	-0,4416	-0,0202	0,5765	0,2108	0,7716	0,2112	1,0091	0,1340	3,6868	0,0198	4,7050	0,0378
$(15,15)$	$(0,0,\ldots,0)$	-0,4919	-0,2089	0,4270	0,2709	0,6690	0,3145	0,6871	0,1413	1,9879	0,0180	2,4600	0,0380
$(30,10)$	$(20,0,\ldots,0)$	-0,5554	-0,2418	0,5725	0,3242	0,8809	0,3827	0,9102	0,0634	3,1888	0,0044	4,0172	0,0084
$(30,10)$	$(0,\ldots,0,20)$	-0,3311	0,0554	0,6264	0,1494	0,7361	0,1524	1,0687	0,0661	3,9208	0,0045	5,0629	0,0088
$(30,15)$	$(15,0,\ldots,0)$	-0,4455	-0,1694	0,4139	0,2319	0,6124	0,2606	0,6294	0,0670	1,8439	0,0042	2,2401	0,0087
$(30,15)$	$(0,0,\ldots,15)$	-0,2727	0,0170	0,4521	0,1107	0,5265	0,1110	0,6864	0,0648	1,8297	0,0043	2,3008	0,0085
$(30,30)$	$(0,0,\ldots,0)$	-0,3314	-0,1430	0,3451	0,1267	0,4549	0,1472	0,2340	0,0688	0,6461	0,0048	0,7009	0,0095
$(100,10)$	$(90,0,\ldots,0)$	-0,5392	-0,1887	0,4977	0,3029	0,7884	0,3385	0,9654	0,0193	3,2126	0,0004	4,1446	0,0008
$(100,10)$	$(0,\ldots,0,90)$	-0,3422	0,0976	0,6279	0,1431	0,7450	0,1526	1,0083	0,0202	3,9081	0,0004	4,9248	0,0008
$(100,30)$	$(70,0,\ldots,0)$	-0,3561	-0,1552	0,3619	0,1263	0,4887	0,1503	0,2428	0,0213	0,6546	0,0005	0,7136	0,0009
$(100,30)$	$(0,0,\ldots,70)$	-0,1352	0,0184	0,3481	0,0306	0,3664	0,0309	0,2595	0,0193	0,6313	0,0004	0,6986	0,0007
$(100,100)$	$(0,0,\ldots,0)$	-0,1277	-0,0705	0,2062	0,0441	0,2225	0,0491	0,0758	0,0201	0,1523	0,0004	0,1581	0,0008