

## Kısmen Elastik Zemin Üzerindeki Kiriş Titreşiminin Yarı Analitik ve Nümerik Yöntemler ile İncelenmesi

Hakan ERDOĞAN<sup>1\*</sup>, Safa BOZKURT COŞKUN<sup>1</sup>

**ÖZET:** Bu çalışmada kısmen elastik zemin üzerindeki bir kirişin serbest titreşim problemi incelenmiştir. Kiriş modeli olarak Euler kirişi modeli, zemin modeli olarak da en yaygın kullanılan zemin modeli olan Winkler modeli kullanılmıştır. Elastik zemin üzerindeki kirişlerin titreşim problemi ile ilgili çeşitli araştırmalar literatürde mevcut olmakla birlikte, kısmen elastik zemin problemi için analitik çözümler mevcut olmayıp ve diğer yöntemlerle yapılan çalışmalarda oldukça sınırlıdır. Bu amaçla problemin varyasyonel iterasyon metodu ile önce yarı analitik çözümü yapılmış daha sonra da SAP 2000 yazılımı ile sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Farklı sınır koşulları altında kısmen elastik zemin üzerindeki kirişlerin analizi gerçekleştirilmiş, elastik zeminle desteklenen bölgenin değişimine bağlı olarak ilk dört serbest titreşim frekansı elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kısmen elastik zemin, Kiriş, Titreşim, Varyasyonel iterasyon metodu, Sonlu eleman yöntemi.

### Semi Analytical and Numerical Investigation of Vibration of Beams Partially Supported by Elastic Foundation

**ABSTRACT:** In this study vibration of a beam partially supported by an elastic foundation is investigated. Euler beam model and Winkler foundation as the most widely used foundation model are selected. There are numerous studies in the literature about the vibration of beams on elastic foundations. However, limited studies exist in the literature about the vibration of beams on partially supported by foundation while no analytical solution is available. To this aim a semi-analytical solution is obtained using variational iteration method and then finite element solutions are computed via SAP 2000 software. Free vibration frequencies of a beam on partially supported by foundation are calculated according to different combinations of boundary conditions and first four free vibration frequencies with the varying foundation region are computed.

**Keywords:** Partial elastic foundation, Beam, Vibration, Variational iteration method, Finite element method.

<sup>1</sup>Hakan ERDOĞAN (Orcid ID: 0000-0002-7241-7652), Safa Bozkurt COŞKUN (Orcid ID: 0000-0002-1962-7722), Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, Türkiye

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Hakan ERDOĞAN, e-mail: hakan.erdogan@kocaeli.edu.tr

## GİRİŞ

Elastik zemin üzerindeki kiriş problemi inşaat, makine ve havacılık mühendisliği alanında çalışan araştırmacıların ilgisini çekmiştir ve çekmeye devam etmektedir. Konu hakkında çok sayıda çalışma yapılmış olmakla birlikte, kısmen elastik zemin üzerindeki kirişler hakkında yapılmış olan araştırmalar oldukça sınırlıdır.

Doyle ve Pavlovic (1982), kısmen veya tamamen elastik zemin üzerindeki kirişlerin doğal titreşim frekanslarını elde etmişlerdir. Eisenberger ve ark. (1985), elastik zemin üzerindeki sürekli kirişlerin dinamik analizi için genelleştirilmiş bir çözüm geliştirmişlerdir. Laura ve Cortinez (1987), kısmen elastik zemin üzerindeki kirişlerin doğal titreşim frekanslarını elde etmek için Rayleigh-Schmidt yaklaşımını kullanmışlardır. Kukla (1991), kademeli değişen bir Winkler zemini üzerindeki kirişin analizini gerçekleştirmiştir. Thambiratnam ve Zhuge (1996), elastik zemin üzerindeki kirişlerin dinamik analizi için bir sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Motaghian ve ark. (2011), kısmen elastik zemin üzerindeki kirişlerin titreşimi için analitik çözüm elde etmiştir. Öztürk ve Coşkun (2013), farklı mesnet koşullarına sahip elastik zemin üzerindeki kirişlerin serbest titreşimlerinin analitik çözümlerini incelemiştir. Cazzani (2013), elastik zemin üzerindeki kirişlerin dinamiğini incelemiştir. Çinçin (2018) ve Çinçin ve Coşkun (2019), kısmen elastik zemin üzerindeki kirişlerin titreşimini Adomian ayrıştırma yöntemi ile incelemiştir. Coşkun ve ark. (2014), elastik zemin üzerindeki üniform olmayan Euler kirişlerinin serbest titreşimlerini incelemiştir.

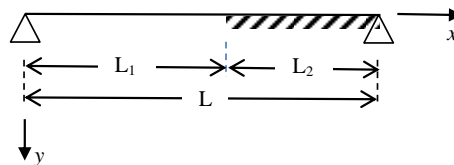
Varyasyonel iterasyon yöntemi adı/kısmi doğrusal/doğrusal olmayan deterministik/stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmış olan bir analitik tahmin yöntemidir (He, 1999; He, 2007). Literatürde kiriş titreşim problemleri için varyasyonel iterasyon metodunu içeren analitik yöntemler de önerilmiştir (Ozturk 2009; Coşkun ve ark. 2011). Varyasyonel teoriye bağlı olarak yarı analitik bir çözüme ulaşılmasını sağlayan yöntem bu çalışmada da başarıyla kullanılmıştır.

Bu çalışmada kısmi Winkler zemini üzerindeki üniform Euler kirişinin titreşim problemi önce varyasyonel iterasyon metodu ile çözülmüş, sonrasında da aynı problem için SAP 2000 yazılımı yardımıyla sonlu eleman çözümü elde edilmiştir. Kirişin zeminle desteklenen kısmının değişimine bağlı olarak serbest titreşim frekansları elde edilmiş, farklı sınır koşulları olan kirişlerin davranışları da incelenmiştir. Zemin yatak katsayısının değişimi de dikkate alınarak farklı Winkler zeminleri için çözümler tekrarlanmıştır.

## MATERYAL VE YÖNTEM

### Kısmen Elastik Zemin Üzerindeki Kiriş

Şekil 1’de kısmen elastik zemin üzerindeki basit mesnetli kiriş görülmektedir. Bu kirişin titreşimi (1) ve (2) numaralı denklemlerle ifade edilmektedir.



Şekil 1. Kısmen elastik zemin üzerindeki kiriş

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Denklem (1), Şekil 1’de görülmekte olan kirişin elastik zemin üzerinde olan bölümünün titreşimini, denklem (2) ise elastik zeminin olmadığı kısımdaki titreşimi ifade etmektedir. Bu denklemlerde  $EI(x)$  kirişin eğilme rijitliğini,  $A$  enkesit alanını,  $\rho$  yoğunluğunu,  $k$  elastik zeminin yatak katsayısını ve  $y$  ise düşey yerdeğiştirmeyi göstermektedir. Eğer kiriş kesiti üniform ise Denklem (1) ve (2) aşağıdaki formu alır.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Yerdeğiştirme  $y(x,t)$  değişkenlere ayırma tekniği ile aşağıdaki formda varsayılacak olursa;

$$y(x, t) = w(x) e^{i\omega t} \quad (5)$$

Denklem (3) ve (4) mod şekillerini verecek olan aşağıdaki denklemlere dönüşürler. Denklem (6)’daki  $\beta^4$  terimi, kirişin elastik zemin üzerindeki kısmı için denklem (7) ve kirişin elastik zeminle desteklenmeyen kısmı için Denklem (8)’deki şekilde ifade edilmektedir.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0 \quad (6)$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2 - k}{EI} \quad (7)$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (8)$$

Farklı mesnetlenme durumlarına göre kiriş için sınır koşulları aşağıdaki gibi alınacaktır.

- Basit mesnet  $w = 0$   $d^2 w / dx^2 = 0$  (9)

- Ankastre mesnet  $w = 0$   $dw / dx = 0$  (10)

- Serbest uç  $d^2 w / dx^2 = 0$   $d^3 w / dx^3 = 0$  (11)

Ek olarak Şekil 1’de  $x=L_1$  noktasında sağlanması gereken süreklilik koşulları da Denklem (9)-(11) arasında verilmekte olan sınır koşullarına eklenmelidir. Bu koşullar sürekliliğin sağlanması gerek noktada yer değiştirmelerin eşitliği, eğimlerin eşitliği, momentlerin eşitliği ve kesme kuvvetlerinin eşitliğinin sağlanmasıdır.

### Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM)

Genel formu aşağıdaki gibi verilmekte olan bir diferansiyel denklemi VİM ile ele alalım. (He 1999;He 2007)

$$Lu + Nu = g(x) \quad (12)$$

Burada  $L$  doğrusal operatör,  $N$  doğrusal olmayan operatör ve  $g(x)$  ise homojen olmayan kaynak fonksiyonudur. VİM’e göre bir doğru fonksiyonel aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^x \lambda(\xi) \{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi \quad (13)$$

burada  $\lambda$  genel Lagrange çarpanıdır ve optimal olarak varyasyonel teori ile elde edilir,  $n$  indisi çözümün mertebesini ve  $\tilde{u}$  ise kısıtlı varyasyonu temsil etmektedir  $\delta \tilde{u} = 0$ . Yöntemin detayları için He (1999) tarafından sunulan uygulamalar incelenebilir.

### Problemnin Vim Formülasyonu

Denklem (6)'da verilen dördüncü mertbe türev doğrusal operatör olarak seçilecek olursa, genel Lagrange çarpanı aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{6}(\xi - x)^3 \quad (14)$$

Böylece,  $w$  için  $n$ . mertbe çözüm aşağıdaki doğru fonksiyonel yardımı ile elde edilebilecektir.

$$w_n(x) = w_{n-1}(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left\{ \frac{d^4 w_{n-1}(\xi)}{d\xi^4} - \beta^4 w_{n-1}(\xi) \right\} d\xi \quad (15)$$

Doğrusal operatör olarak dördüncü mertbe türev seçildiğinden kirişin elastik zemin üzerinde olan ve olmayan iki ayrı bölümünün her birisi için doğrusal operatörün çözümü olan üçüncü mertbe bir polinom başlangıç tahmini olarak seçilecektir. O halde kirişin iki ayrı kısmı için başlangıç tahminleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$w_0^{(1)} = A^{(1)}x^3 + B^{(1)}x^2 + C^{(1)}x + D^{(1)} \quad (16)$$

$$w_0^{(2)} = A^{(2)}x^3 + B^{(2)}x^2 + C^{(2)}x + D^{(2)} \quad (17)$$

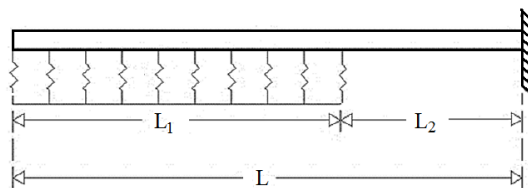
Denklem (16) ve (17)'ye her iki uçtaki mesnetlere ait dört sınır koşulu ve elastik zeminin başladığı noktaya ait dört süreklilik koşulunun uygulanması ile toplam sekiz adet denklem elde edilecektir. Denklem (16) ve (17) toplam sekiz bilinmeyen içermektedir. Sekiz bilinmeyen içeren sekiz denklemi matris formda gösterecek olursak:

$$[K]_{8 \times 8} \{\Lambda\}_{8 \times 1} = \{0\}_{8 \times 1} \quad (18)$$

Burada  $[K]$  matrisi  $\beta$  terimlerini içermektedir ve titreşim frekansının bir fonksiyonudur ve bilinmeyenler vektörü  $\{\Lambda\}$  ise Denklem (16) ve (17)'de verilmekte olan başlangıç tahminlerindeki sekiz bilinmeyen katsayıyı içermektedir. Denklem (18)'in bayağı (aşikar) çözümü kirişin deforme olmamış halidir. O halde Denklem (18)'in bayağı olmayan çözümü bize aradığımız titreşim frekanslarını verecektir. Bunun için katsayı matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Elde edilecek denklemin reel kökleri kirişin farklı modlardaki titreşim frekanslarını verecektir. Mertebesi daha yüksek bir çözüm üst modlarda daha hassas sonuçlar verecektir. Varyasyonel teoriden yola çıkılarak elde edilecek olan bu çözümler problemin yarı analitik çözümleri olarak nitelendirilebilirler.

### BULGULAR VE TARTIŞMA

Thambiratnam ve Zhuge (1996), Şekil 2'de görülmekte olan kirişi çalışmışlardır. Problemden  $EI = 408.4 \text{ kNm}^2$ ,  $\rho A = 30.394 \text{ Ns}^2/\text{m}^2$ ,  $L = 4.0 \text{ m}$  varsayılmış olup boyutsuz elastik zemin açıklığı  $\mu = L_1/L$  olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2. Kısmen elastik zemin üzerindeki konsol kiriş (Thambiratnam ve Zhuge, 1996)

$\mu = 0$  elastik zeminin olmadığı durumu,  $\mu = 1$  ise kirişin tamamen elastik zemin üzerinde olduğu durumu ifade etmektedir. Kısmen elastik zemin durumu,  $\mu$  değeri 0 ile 1 arasında değişirken gerçekleşmektedir.

Çizelge 1 ile 4 arasında Şekil 2’de görülmekte olan kirişin ilk dört doğal titreşim frekansının VİM ile hesaplanmış değerleriyle birlikte aynı problem için yapılmış olan sonlu eleman çözümü de verilmektedir. Sonlu eleman çözümü SAP 2000 yazılımı ile 200 çubuk eleman kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçlar, Çinçin ve Coşkun (2019) tarafından Adomian ayrıştırma yöntemi (ADM) ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 1’den Çizelge 4’e kadar olan sonuçlar değerlendirildiğinde bu çalışmada VİM ile elde edilen değerlerin, ADM ile elde edilen değerlerle aynı hassasiyette olduğu görülmektedir. Çinçin ve Coşkun (2019), ADM ile elde ettikleri çözümlerin Thambiratnam ve Zhuge (1996) tarafından elde edilmiş olan çözümlerle mükemmel bir uyum içerisinde olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla VİM ile elde edilen sonuçların da Thambiratnam ve Zhuge (1996) tarafından elde edilen sonuçlarla mükemmel bir uyum sağladığını söyleyebiliriz. SAP 2000 ile elde edilen sonlu eleman sonuçlarının da yarı analitik çözümlerle neredeyse aynı olduğunu söylemek mümkündür. En büyük fark  $K = 5000$  olduğu durumda ortaya çıkmıştır ve değişim ondalık üçüncü basamakta başlamakta olduğundan bağıl hatanın  $10^{-5}$  mertebesinde olduğu söylenebilir.

**Çizelge 1.** Kısmen elastik zemin üzerindeki konsol kirişin birinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	1.87510	1.87510	1.87508	1.87510	1.87510	1.87508	1.87510	1.87510	1.87508	1.87510	1.87510	1.87508
0.1	1.99429	1.99429	1.99430	2.59291	2.59291	2.59288	3.75894	3.75894	3.75896	4.10512	4.10512	4.10532
0.2	2.06920	2.06920	2.06921	2.88233	2.88233	2.88230	4.16202	4.16202	4.16208	4.59659	4.59659	4.59684
0.3	2.11673	2.11673	2.11671	3.05320	3.05320	3.05317	4.54667	4.54667	4.54672	5.20803	5.20803	5.20822
0.4	2.14571	2.14571	2.14573	3.15692	3.15692	3.15691	4.95621	4.95621	4.95624	5.88048	5.88048	5.88064
0.5	2.16203	2.16203	2.16203	3.21434	3.21434	3.21433	5.34608	5.34608	5.34607	6.63783	6.63783	6.63796
0.6	2.17013	2.17013	2.17013	3.24166	3.24166	3.24165	5.57991	5.57991	5.57991	7.48144	7.48144	7.48151
0.7	2.17345	2.17345	2.17341	3.25226	3.25226	3.25225	5.63163	5.63163	5.63162	8.23318	8.23318	8.23316
0.8	2.17444	2.17444	2.17442	3.25529	3.25529	3.25528	5.63970	5.63970	5.63970	8.41189	8.41189	8.41189
0.9	2.17459	2.17459	2.17461	3.25576	3.25576	3.25574	5.64068	5.64068	5.64067	8.41411	8.41411	8.41411
1.0	2.17460	2.17460	2.17461	3.25578	3.25578	3.25579	5.64071	5.64071	5.64072	8.41416	8.41416	8.41416

**Çizelge 2.** Kısmen elastik zemin üzerindeki konsol kirişin ikinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	4.69409	4.69409	4.69401	4.69409	4.69409	4.69401	4.69409	4.69409	4.69401	4.69409	4.69409	4.69401
0.1	4.69991	4.69991	4.69982	4.75464	4.75464	4.75456	5.40242	5.40242	5.40235	6.82338	6.82338	6.82340
0.2	4.70093	4.70093	4.70084	4.76774	4.76774	4.76766	5.69360	5.69360	5.69354	7.51073	7.51073	7.51075
0.3	4.70121	4.70121	4.70110	4.76942	4.76942	4.76933	5.78156	5.78156	5.78152	8.07869	8.07869	8.07866
0.4	4.70331	4.70331	4.70320	4.78631	4.78631	4.78624	5.79110	5.79110	5.79109	8.37590	8.37590	8.37587
0.5	4.70754	4.70754	4.70746	4.82369	4.82369	4.82362	5.80649	5.80649	5.80648	8.42430	8.42430	8.42429
0.6	4.71237	4.71237	4.71226	4.86757	4.86757	4.86749	5.92610	5.92610	5.92607	8.42777	8.42777	8.42777
0.7	4.71598	4.71598	4.71590	4.90036	4.90036	4.90028	6.10456	6.10456	6.10450	8.43251	8.43251	8.43252
0.8	4.71768	4.71768	4.71758	4.91553	4.91553	4.91545	6.18977	6.18977	6.18971	8.56410	8.56410	8.56406
0.9	4.71806	4.71806	4.71796	4.91894	4.91894	4.91885	6.20749	6.20749	6.20743	8.60459	8.60459	8.60457
1.0	4.71808	4.71808	4.71799	4.91910	4.91910	4.91902	6.20825	6.20825	6.20821	8.60606	8.60606	8.60605

Bundan sonraki kısımda aynı kiriş farklı mesnet koşulları ile incelenecektir. İncelenecek diğer kirişler Şekil 3’de görülmektedir.

Çinçin ve Coşkun (2019), Şekil 3’de görülmekte olan AA, MA ve MM kirişler için ADM ile çözüm elde etmiştir. Bu çalışmada elde edilen VİM sonuçları ADM çözümleri ile Çizelge 5-16 arasında karşılaştırılmıştır.

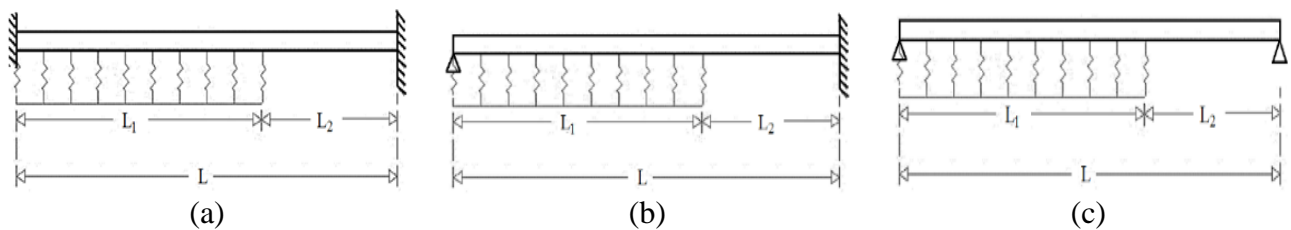
Çizelge 5-16 arasında verilen sonuçlar incelendiğinde AA, MA ve MM kirişleri için VİM ile elde edilen sonuçlar ADM çözümleri ile tam bir uyum içerisinde. Verilen ondalık hassasiyetinde tüm sonuçlar aynı şekilde elde edilmiştir. SAP2000 çözümleri de yarı analitik çözümlerle mükemmel bir uyum içerisinde.

**Çizelge 3.** Kısmen elastik zemin üzerindeki konsol kirişin üçüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	7.85476	7.85476	7.85450	7.85476	7.85476	7.85450	7.85476	7.85476	7.85450	7.85476	7.85476	7.85450
0.1	7.85563	7.85563	7.85537	7.86358	7.86358	7.86333	7.95345	7.95345	7.95322	8.58015	8.58015	8.57996
0.2	7.85572	7.85572	7.85546	7.86446	7.86446	7.86422	7.96064	7.96064	7.96044	8.75646	8.75646	8.75636
0.3	7.85639	7.85639	7.85612	7.87103	7.87103	7.87079	8.01651	8.01651	8.01631	8.77418	8.77418	8.77415
0.4	7.85714	7.85714	7.85687	7.87858	7.87858	7.87833	8.09376	8.09376	8.09353	8.97350	8.97350	8.97340
0.5	7.85730	7.85730	7.85705	7.88029	7.88029	7.88003	8.11854	8.11854	8.11832	9.19179	9.19179	9.19163
0.6	7.85751	7.85751	7.85726	7.88229	7.88229	7.88203	8.12894	8.12894	8.12873	9.22423	9.22423	9.22412
0.7	7.85845	7.85845	7.85691	7.89147	7.89147	7.89121	8.20053	8.20053	8.20033	9.29893	9.29893	9.29885
0.8	7.85950	7.85950	7.85925	7.90175	7.90175	7.90150	8.29054	8.29054	8.29032	9.56314	9.56314	9.56297
0.9	7.85989	7.85989	7.85963	7.90561	7.90561	7.90535	8.32439	8.32439	8.32417	9.68072	9.68072	9.68056
1.0	7.85991	7.85991	7.85965	7.90584	7.90584	7.90559	8.32642	8.32642	8.32620	9.68727	9.68727	9.68713

**Çizelge 4.** Kısmen elastik zemin üzerindeki konsol kirişin dördüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	10.99550	10.99550	10.99504	10.99550	10.99550	10.99504	10.99550	10.99550	10.99504	10.99550	10.99550	10.99504
0.1	10.99580	10.99580	10.99526	10.99780	10.99780	10.99735	11.01940	11.01940	11.01896	11.13750	11.13750	11.13711
0.2	10.99590	10.99590	10.99541	10.99930	10.99930	10.99883	11.03360	11.03360	11.03312	11.18990	11.18990	11.18955
0.3	10.99620	10.99620	10.99569	11.00200	11.00200	11.00148	11.06070	11.06070	11.06022	11.33380	11.33380	11.33332
0.4	10.99620	10.99620	10.99571	11.00230	11.00230	11.00185	11.06450	11.06450	11.06400	11.36370	11.36370	11.36333
0.5	10.99650	10.99650	10.99597	11.00490	11.00490	11.00441	11.08840	11.08840	11.08797	11.44400	11.44400	11.44363
0.6	10.99670	10.99670	10.99624	11.00750	11.00750	11.00697	11.11460	11.11460	11.11406	11.57820	11.57820	11.57780
0.7	10.99680	10.99680	10.99685	11.00790	11.00790	11.00737	11.11820	11.11820	11.11769	11.59620	11.59620	11.59585
0.8	10.99710	10.99710	10.99660	11.01110	11.01110	11.01063	11.14850	11.14850	11.14800	11.70340	11.70340	11.70299
0.9	10.99740	10.99740	10.99690	11.01400	11.01400	11.01353	11.17640	11.17640	11.17591	11.82390	11.82390	11.82343
1.0	10.99740	10.99740	10.99692	11.01430	11.01430	11.01379	11.17900	11.17900	11.17848	11.83480	11.83480	11.83436



**Şekil 3.** Kısmen elastik zemin üzerindeki a) her iki ucu ankastre kiriş (AA kiriş) b) bir ucu sabit mesnetli bir ucu ankastre kiriş (MA) c) her ucu basit mesnetli kiriş (MM)

Çizelge 5. Kısmen elastik zemin üzerindeki AA kirişin birinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004	4.73004
0.1	4.73006	4.73006	4.73007	4.73022	4.73022	4.73021	4.73183	4.73183	4.73184	4.73878	4.73878	4.73881
0.2	4.73046	4.73046	4.73047	4.73421	4.73421	4.73421	4.76969	4.76969	4.76970	4.89312	4.89312	4.89322
0.3	4.73225	4.73225	4.73224	4.75182	4.75182	4.75182	4.91845	4.91845	4.91849	5.31953	5.31953	5.31968
0.4	4.73620	4.73620	4.73621	4.78986	4.78986	4.78987	5.19673	5.19673	5.19675	5.92413	5.92413	5.92429
0.5	4.74180	4.74180	4.74179	4.84281	4.84281	4.84280	5.54951	5.54951	5.54952	6.65809	6.65809	6.65822
0.6	4.74738	4.74738	4.74737	4.89481	4.89481	4.89482	5.88630	5.88630	5.88630	7.49490	7.49490	7.49497
0.7	4.75130	4.75130	4.75130	4.93073	4.93073	4.93072	6.11226	6.11226	6.11224	8.25384	8.25384	8.25382
0.8	4.75308	4.75308	4.75309	4.94672	4.94672	4.94671	6.20459	6.20459	6.20458	8.56738	8.56738	8.56736
0.9	4.75347	4.75347	4.75346	4.95024	4.95024	4.95023	6.22312	6.22312	6.22312	8.61043	8.61043	8.61043
1.0	4.75349	4.75349	4.75349	4.95039	4.95039	4.95039	6.22391	6.22391	6.22391	8.61196	8.61196	8.61196

Çizelge 6. Kısmen elastik zemin üzerindeki AA kirişin ikinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	7.85320	7.85320	7.85321	7.85320	7.85320	7.85321	7.85320	7.85320	7.85321	7.85320	7.85320	7.85321
0.1	7.85323	7.85323	7.85322	7.85345	7.85345	7.85345	7.85560	7.85560	7.85562	7.86500	7.86500	7.86504
0.2	7.85362	7.85362	7.85363	7.85735	7.85735	7.85734	7.89368	7.89368	7.89370	8.03580	8.03580	8.03587
0.3	7.85466	7.85466	7.85466	7.86769	7.86769	7.86769	7.99350	7.99350	7.99349	8.45162	8.45162	8.45166
0.4	7.85559	7.85559	7.85558	7.87703	7.87703	7.87702	8.09074	8.09074	8.09072	8.92381	8.92381	8.92377
0.5	7.85579	7.85579	7.85579	7.87912	7.87912	7.87911	8.12033	8.12033	8.12032	9.19349	9.19349	9.19343
0.6	7.85598	7.85598	7.85598	7.88098	7.88098	7.88099	8.12990	8.12990	8.12991	9.23137	9.23137	9.23137
0.7	7.85691	7.85691	7.85691	7.89002	7.89002	7.89002	8.19993	8.19993	8.19994	9.30219	9.30219	9.30221
0.8	7.85795	7.85795	7.85795	7.90023	7.90023	7.90023	8.28933	8.28933	8.28931	9.56273	9.56273	9.56268
0.9	7.85834	7.85834	7.85834	7.90408	7.90408	7.90408	8.32309	8.32309	8.32309	9.67990	9.67990	9.67988
1.0	4.75349	4.75349	4.75349	4.95039	4.95039	4.95039	6.22391	6.22391	6.22391	9.68644	9.68644	9.68644

Çizelge 7. Kısmen elastik zemin üzerindeki AA kirişin üçüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	10.99560	10.99560	10.99561	10.99560	10.99560	10.99561	10.99560	10.99560	10.99561	10.99560	10.99560	10.99561
0.1	10.99560	10.99560	10.99564	10.99590	10.99590	10.99587	10.99830	10.99830	10.99829	11.00880	11.00880	11.00885
0.2	10.99590	10.99590	10.99592	10.99880	10.99880	10.99878	11.02710	11.02710	11.02716	11.14790	11.14790	11.14794
0.3	10.99630	10.99630	10.99626	11.00210	11.00210	11.00210	11.06110	11.06110	11.06106	11.33270	11.33270	11.33261
0.4	10.99630	10.99630	10.99630	11.00250	11.00250	11.00249	11.06540	11.06540	11.06538	11.36810	11.36810	11.36811
0.5	10.99650	10.99650	10.99655	11.00500	11.00500	11.00500	11.08870	11.08870	11.08873	11.44540	11.44540	11.44544
0.6	10.99680	10.99680	10.99680	11.00750	11.00750	11.00754	11.11460	11.11460	11.11459	11.57830	11.57830	11.57821
0.7	10.99680	10.99680	10.99685	11.00790	11.00790	11.00793	11.11820	11.11820	11.11820	11.59610	11.59610	11.59618
0.8	10.99720	10.99720	10.99717	11.01120	11.01120	11.01120	11.14850	11.14850	11.14853	11.70340	11.70340	11.70341
0.9	10.99750	10.99750	10.99746	11.01410	11.01410	11.01410	11.17650	11.17650	11.17645	11.82390	11.82390	11.82388
1.0	10.99750	10.99750	10.99748	11.01440	11.01440	11.01436	11.17900	11.17900	11.17903	11.83480	11.83480	11.83482



Çizelge 8. Kısmen elastik zemin üzerindeki AA kirişin dördüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	14.13720	14.13720	14.13717	14.13720	14.13720	14.13717	14.13720	14.13720	14.13717	14.13720	14.13720	14.13717
0.1	14.13720	14.13720	14.13720	14.13740	14.13740	14.13744	14.13980	14.13980	14.13984	14.15040	14.15040	14.15045
0.2	14.13740	14.13740	14.13737	14.13920	14.13920	14.13916	14.15720	14.15720	14.15717	14.23760	14.23760	14.23753
0.3	14.13740	14.13740	14.13742	14.13970	14.13970	14.13966	14.16220	14.16220	14.16225	14.26710	14.26710	14.26707
0.4	14.13750	14.13750	14.13753	14.14080	14.14080	14.14080	14.17350	14.17350	14.17346	14.31700	14.31700	14.31697
0.5	14.13760	14.13760	14.13761	14.14160	14.14160	14.14159	14.18160	14.18160	14.18156	14.36200	14.36200	14.36202
0.6	14.13770	14.13770	14.13769	14.14240	14.14240	14.14237	14.18900	14.18900	14.18903	14.39220	14.39220	14.39226
0.7	14.13780	14.13780	14.13781	14.14350	14.14350	14.14353	14.20060	14.20060	14.20062	14.45100	14.45100	14.45103
0.8	14.13790	14.13790	14.13785	14.14400	14.14400	14.14401	14.20520	14.20520	14.20524	14.46960	14.46960	14.46962
0.9	14.13800	14.13800	14.13805	14.14570	14.14570	14.14574	14.22220	14.22220	14.22219	14.54780	14.54780	14.54780
1.0	14.13810	14.13810	14.13805	14.14600	14.14600	14.14601	14.22480	14.22480	14.22483	14.56020	14.56020	14.56020

Çizelge 9. Kısmen elastik zemin üzerindeki MA kirişin birinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660	3.92660
0.1	3.92662	3.92662	3.92660	3.92676	3.92676	3.92674	3.92815	3.92815	3.92817	3.93418	3.93418	3.93421
0.2	3.92699	3.92699	3.92699	3.93043	3.93043	3.93044	3.96278	3.96278	3.96283	4.07220	4.07220	4.07232
0.3	3.92879	3.92879	3.92880	3.94801	3.94801	3.94802	4.10599	4.10599	4.10602	4.45159	4.45159	4.45172
0.4	3.93322	3.93322	3.93323	3.99020	3.99020	3.99021	4.38646	4.38646	4.38652	4.98292	4.98292	4.98308
0.5	3.94057	3.94057	3.94058	4.05776	4.05776	4.05778	4.76820	4.76820	4.76824	5.64125	5.64125	5.64142
0.6	3.94963	3.94963	3.94962	4.13837	4.13837	4.13836	5.19370	5.19370	5.19371	6.45120	6.45120	6.45136
0.7	3.95818	3.95818	3.95819	4.21202	4.21202	4.21202	5.57872	5.57872	5.57870	7.39251	7.39251	7.39259
0.8	3.96416	3.96416	3.96414	4.26182	4.26182	4.26183	5.82500	5.82500	5.82497	8.20987	8.20987	8.20984
0.9	3.96684	3.96684	3.96684	4.28350	4.28350	4.28349	5.91838	5.91838	5.91836	8.48274	8.48274	8.48272
1.0	3.96726	3.96726	3.96725	4.28686	4.28686	4.28685	5.93138	5.93138	5.93137	8.50718	8.50718	8.50717

Çizelge 10. Kısmen elastik zemin üzerindeki MA kirişin ikinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	7.06858	7.06858	7.06857	7.06858	7.06858	7.06857	7.06858	7.06858	7.06857	7.06858	7.06858	7.06857
0.1	7.06861	7.06861	7.06861	7.06881	7.06881	7.06881	7.07086	7.07086	7.07086	7.07977	7.07977	7.07982
0.2	7.06901	7.06901	7.06902	7.07286	7.07286	7.07286	7.11007	7.11007	7.11008	7.25179	7.25179	7.25187
0.3	7.07027	7.07027	7.07026	7.08533	7.08533	7.08533	7.22730	7.22730	7.22730	7.69805	7.69805	7.69812
0.4	7.07178	7.07178	7.07177	7.10045	7.10045	7.10045	7.37477	7.37477	7.37474	8.27597	8.27597	8.27597
0.5	7.07250	7.07250	7.07249	7.10782	7.10782	7.10781	7.46178	7.46178	7.46177	8.75449	8.75449	8.75442
0.6	7.07256	7.07256	7.07257	7.10847	7.10847	7.10848	7.47441	7.47441	7.47442	8.94127	8.94127	8.94122
0.7	7.07310	7.07310	7.07311	7.11354	7.11354	7.11353	7.49873	7.49873	7.49874	8.95598	8.95598	8.95600
0.8	7.07440	7.07440	7.07439	7.12609	7.12609	7.12609	7.59020	7.59020	7.59020	9.04160	9.04160	9.04160
0.9	7.07544	7.07544	7.07544	7.13626	7.13626	7.13626	7.67296	7.67296	7.67295	9.25613	9.25613	9.25609
1.0	7.07565	7.07565	7.07565	7.13833	7.13833	7.13832	7.68968	7.68968	7.68967	9.30496	9.30496	9.30495



Çizelge 11. Kısmen elastik zemin üzerindeki MA kirişin üçüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	10.21020	10.21020	10.21017	10.21020	10.21020	10.21017	10.21020	10.21020	10.21017	10.21020	10.21020	10.21017
0.1	10.21020	10.21020	10.21020	10.21040	10.21040	10.21044	10.21280	10.21280	10.21282	10.22320	10.22320	10.22320
0.2	10.21050	10.21050	10.21052	10.21360	10.21360	10.21365	10.24450	10.24450	10.24448	10.37340	10.37340	10.37344
0.3	10.21100	10.21100	10.21099	10.21830	10.21830	10.21835	10.29230	10.29230	10.29225	10.62090	10.62090	10.62086
0.4	10.21110	10.21110	10.21108	10.21930	10.21930	10.21930	10.30340	10.30340	10.30339	10.71720	10.71720	10.71714
0.5	10.21130	10.21130	10.21127	10.22110	10.22110	10.22112	10.31900	10.31900	10.31897	10.74870	10.74870	10.74869
0.6	10.21170	10.21170	10.21170	10.22530	10.22530	10.22535	10.36000	10.36000	10.35996	10.91540	10.91540	10.91541
0.7	10.21180	10.21180	10.21181	10.22640	10.22640	10.22642	10.37190	10.37190	10.37193	10.99520	10.99520	10.99523
0.8	10.21200	10.21200	10.21196	10.22800	10.22800	10.22800	10.38510	10.38510	10.38508	11.02460	11.02460	11.02466
0.9	10.21240	10.21240	10.21239	10.23230	10.23230	10.23227	10.42490	10.42490	10.42489	11.17270	11.17270	11.17262
1.0	10.21250	10.21250	10.21252	10.23360	10.23360	10.23358	10.43740	10.43740	10.43736	11.22350	11.22350	11.22348

Çizelge 12. Kısmen elastik zemin üzerindeki MA kirişin dördüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	ADM	VİM	SAP2000	ADM	ADM	ADM	VİM	
0.0	13.35180	13.35180	13.35177	13.35180	13.35180	13.35177	13.35180	13.35180	13.35177	13.35180	13.35180	13.35177
0.1	13.35180	13.35180	13.35180	13.35200	13.35200	13.35204	13.35450	13.35450	13.35447	13.36510	13.36510	13.36514
0.2	13.35200	13.35200	13.35200	13.35400	13.35400	13.35405	13.37460	13.37460	13.37456	13.46540	13.46540	13.46535
0.3	13.35210	13.35210	13.35208	13.35490	13.35490	13.35488	13.38320	13.38320	13.38323	13.51630	13.51630	13.51634
0.4	13.35220	13.35220	13.35218	13.35590	13.35590	13.35586	13.39250	13.39250	13.39252	13.55380	13.55380	13.55377
0.5	13.35230	13.35230	13.35232	13.35730	13.35730	13.35729	13.40720	13.40720	13.40718	13.63050	13.63050	13.63048
0.6	13.35240	13.35240	13.35237	13.35770	13.35770	13.35769	13.41090	13.41090	13.41090	13.64500	13.64500	13.64498
0.7	13.35250	13.35250	13.35254	13.35950	13.35950	13.35950	13.42870	13.42870	13.42870	13.72700	13.72700	13.72697
0.8	13.35260	13.35260	13.35258	13.35980	13.35980	13.35985	13.43220	13.43220	13.43221	13.74620	13.74620	13.74620
0.9	13.35270	13.35270	13.35273	13.36140	13.36140	13.36139	13.44710	13.44710	13.44706	13.80920	13.80920	13.80922
1.0	13.35280	13.35280	13.35282	13.36230	13.36230	13.36226	13.45560	13.45560	13.45559	13.84850	13.84850	13.84851

Çizelge 13. Kısmen elastik zemin üzerindeki MM kirişin birinci doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	3.14159	3.14159	3.14158	3.14159	3.14159	3.14158	3.14159	3.14159	3.14158	3.14159	3.14159	3.14158
0.1	3.14211	3.14211	3.14210	3.14677	3.14677	3.14677	3.19094	3.19094	3.19100	3.34684	3.34684	3.34704
0.2	3.14550	3.14550	3.14551	3.17955	3.17955	3.17954	3.43855	3.43855	3.43862	3.91383	3.91383	3.91398
0.3	3.15348	3.15348	3.15347	3.25228	3.25228	3.25229	3.81989	3.81989	3.81993	4.43837	4.43837	4.43851
0.4	3.16594	3.16594	3.16593	3.35775	3.35775	3.35776	4.24289	4.24289	4.24293	4.98268	4.98268	4.98284
0.5	3.18106	3.18106	3.18105	3.47705	3.47705	3.47705	4.68403	4.68403	4.68407	5.63839	5.63839	5.63855
0.6	3.19601	3.19601	3.19602	3.58834	3.58834	3.58834	5.11973	5.11973	5.11974	6.44849	6.44849	6.44866
0.7	3.20807	3.20807	3.20805	3.67367	3.67367	3.67365	5.47862	5.47862	5.47860	7.39146	7.39146	7.39155
0.8	3.21564	3.21564	3.21565	3.72472	3.72472	3.72469	5.67995	5.67995	5.67994	8.20495	8.20495	8.20491
0.9	3.21881	3.21881	3.21881	3.74529	3.74529	3.74529	5.74689	5.74689	5.74688	8.43394	8.43394	8.43392
1.0	3.21929	3.21929	3.21928	3.74836	3.74836	3.74837	5.75562	5.75562	5.75563	8.44962	8.44962	8.44963

Çizelge 14. Kısmen elastik zemin üzerindeki MM kirişin ikinci doğal titreşim frekansı (Hz)

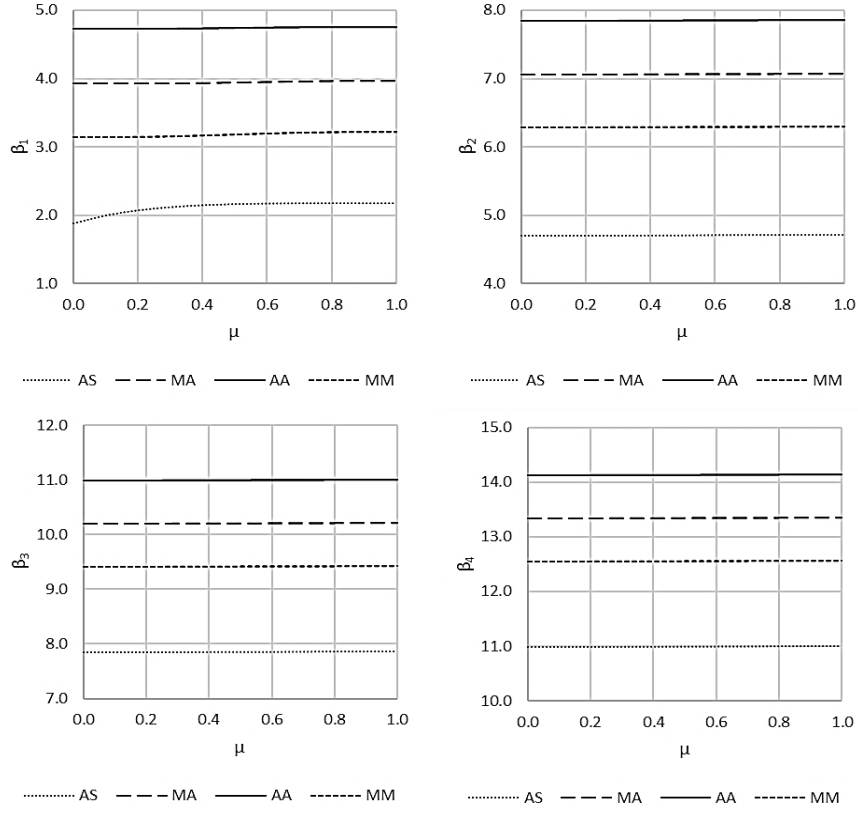
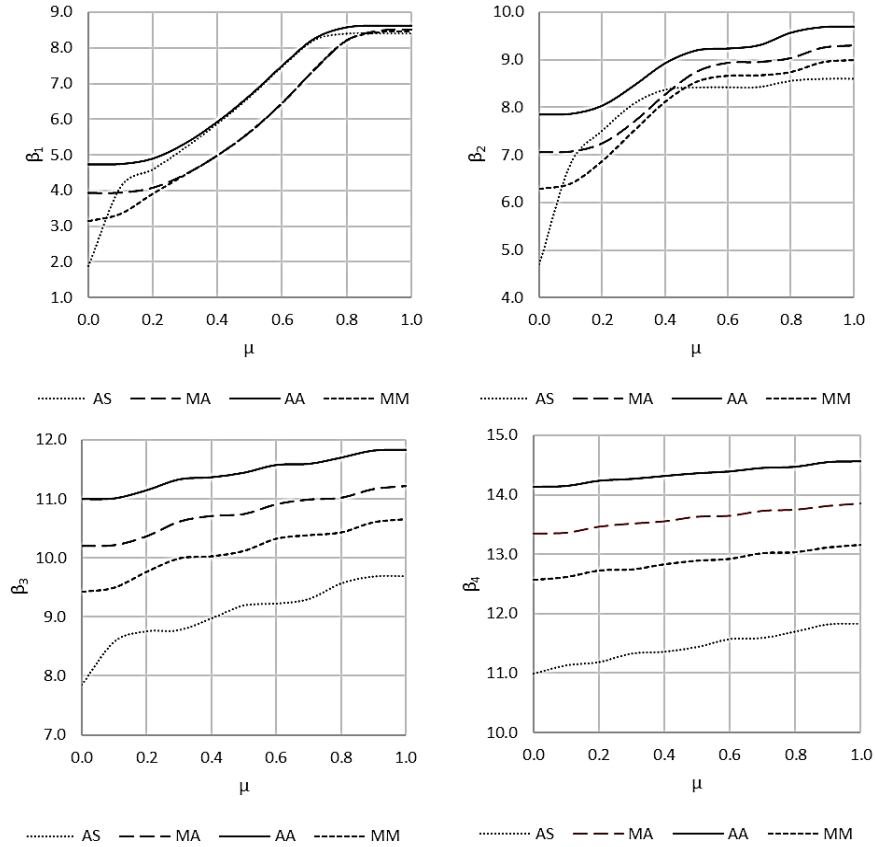
$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	6.28319	6.28319	6.28318	6.28319	6.28319	6.28318	6.28319	6.28319	6.28318	6.28319	6.28319	6.28318
0.1	6.28343	6.28343	6.28342	6.28563	6.28563	6.28563	6.30730	6.30730	6.30732	6.39639	6.39639	6.39650
0.2	6.28473	6.28473	6.28473	6.29855	6.29855	6.29855	6.42956	6.42956	6.42958	6.86922	6.86922	6.86931
0.3	6.28668	6.28668	6.28668	6.31801	6.31801	6.31801	6.61512	6.61512	6.61512	7.50306	7.50306	7.50311
0.4	6.28798	6.28798	6.28798	6.33133	6.33133	6.33132	6.76471	6.76471	6.76469	8.12206	8.12206	8.12205
0.5	6.28823	6.28823	6.28822	6.33409	6.33409	6.33409	6.81964	6.81964	6.81964	8.54295	8.54295	8.54288
0.6	6.28847	6.28847	6.28846	6.33614	6.33614	6.33615	6.82434	6.82434	6.82434	8.67042	8.67042	8.67039
0.7	6.28976	6.28976	6.28975	6.34818	6.34818	6.34819	6.87700	6.87700	6.87701	8.67862	8.67862	8.67863
0.8	6.29170	6.29170	6.29171	6.36682	6.36682	6.36683	7.00199	7.00199	7.00199	8.74860	8.74860	8.74859
0.9	6.29300	6.29300	6.29300	6.37929	6.37929	6.37928	7.09497	7.09497	7.09495	8.95501	8.95501	8.95497
1.0	6.29324	6.29324	6.29324	6.38163	6.38163	6.38163	7.11211	7.11211	7.11211	8.99916	8.99916	8.99916

Çizelge 15. Kısmen elastik zemin üzerindeki MM kirişin üçüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	9.42478	9.42478	9.42477	9.42478	9.42478	9.42477	9.42478	9.42478	9.42477	9.42478	9.42478	9.42477
0.1	9.42493	9.42493	9.42493	9.42626	9.42626	9.42626	9.43948	9.43948	9.43950	9.49650	9.49650	9.49656
0.2	9.42547	9.42547	9.42547	9.43168	9.43168	9.43168	9.49388	9.49388	9.49386	9.76470	9.76470	9.76469
0.3	9.42577	9.42577	9.42576	9.43470	9.43470	9.43470	9.52728	9.52728	9.52727	9.99080	9.99080	9.99074
0.4	9.42582	9.42582	9.42582	9.43524	9.43524	9.43524	9.53165	9.53165	9.53166	10.02600	10.02600	10.02600
0.5	9.42627	9.42627	9.42627	9.43968	9.43968	9.43967	9.57133	9.57133	9.57134	10.11760	10.11760	10.11758
0.6	9.42672	9.42672	9.42672	9.44418	9.44418	9.44418	9.61676	9.61676	9.61675	10.32470	10.32470	10.32467
0.7	9.42678	9.42678	9.42678	9.44474	9.44474	9.44474	9.62333	9.62333	9.62333	10.38370	10.38370	10.38367
0.8	9.42707	9.42707	9.42707	9.44766	9.44766	9.44766	9.64732	9.64732	9.64733	10.43020	10.43020	10.43025
0.9	9.42761	9.42761	9.42761	9.45303	9.45303	9.45303	9.69657	9.69657	9.69655	10.60280	10.60280	10.60275
1.0	9.42776	9.42776	9.42777	9.45450	9.45450	9.45449	9.71018	9.71018	9.71018	10.65530	10.65530	10.65527

Çizelge 16. Kısmen elastik zemin üzerindeki MM kirişin dördüncü doğal titreşim frekansı (Hz)

$\mu$	K = 10			K = 100			K = 1000			K = 5000		
	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000	ADM	VİM	SAP2000
0.0	12.56640	12.56640	12.56637	12.56640	12.56640	12.56637	12.56640	12.56640	12.56637	12.56640	12.56640	12.56637
0.1	12.56650	12.56650	12.56647	12.56730	12.56730	12.56734	12.57600	12.57600	12.57601	12.61410	12.61410	12.61415
0.2	12.56670	12.56670	12.56667	12.56940	12.56940	12.56937	12.59670	12.59670	12.59666	12.72400	12.72400	12.72392
0.3	12.56670	12.56670	12.56670	12.56970	12.56970	12.56967	12.59970	12.59970	12.59974	12.74100	12.74100	12.74104
0.4	12.56690	12.56690	12.56690	12.57170	12.57170	12.57170	12.61950	12.61950	12.61954	12.82840	12.82840	12.82841
0.5	12.56700	12.56700	12.56700	12.57270	12.57270	12.57267	12.62970	12.62970	12.62972	12.88940	12.88940	12.88934
0.6	12.56710	12.56710	12.56710	12.57360	12.57360	12.57363	12.63860	12.63860	12.63857	12.91980	12.91980	12.91982
0.7	12.56730	12.56730	12.56730	12.57570	12.57570	12.57566	12.65870	12.65870	12.65873	13.01600	13.01600	13.01598
0.8	12.56730	12.56730	12.56733	12.57600	12.57600	12.57597	12.66170	12.66170	12.66174	13.03100	13.03100	13.03102
0.9	12.56750	12.56750	12.56754	12.57800	12.57800	12.57798	12.68110	12.68110	12.68111	13.11140	13.11140	13.11134
1.0	12.56760	12.56760	12.56763	12.57890	12.57890	12.57895	12.69050	12.69050	12.69050	13.15380	13.15380	13.15380

Şekil 4.  $K = 10$  için doğal titreşim frekanslarının değişimiŞekil 5.  $K = 5000$  için doğal titreşim frekanslarının değişimi

Şekil 4 ve Şekil 5’de verilen grafikler incelendiğinde artan zemin yatak katsayısının bütün kirişlerin frekans değişimlerinde etkili olmakla birlikte özellikle AS ve MM kirişlerde ilk iki doğal titreşim frekansı üzerinde etkisinin çok daha belirgin olduğu görülmektedir. Şekil 4’da en küçük zemin yatak katsayısı için verilen frekans değişimlerinde frekansın artan zemin bölgesi ile çok fazla değişmediği, sadece AS kiriş için ilk frekansta boyutsuz yatak katsayısının 0 - 0.2 arası küçük değerleri için bir değişiklik meydana getirdiği görülmektedir. Zeminin etkisi belirginleşmedikçe aynı doğal frekans için değerlerin küçükten büyüğe AS, MM, MA ve AA için elde edilmiş olması da beklenen bir sonuçtur. Elastik zeminin olmadığı  $\mu = 0$  için elde edilen değerler de uniform kirişin analitik değerleri ile aynıdır.

## SONUÇ

Bu çalışmada kısmen elastik zemin üzerindeki kirişin farklı mesnetlenme koşulları ve farklı boyutsuz zemin uzunluğu dikkate alınarak titreşimi incelenmiştir. Her ne kadar elastik zemine oturan kiriş problemi üzerinde çokça çalışılmış bir konu olsa da aynı durum literatürde kısmen elastik zemin üzerinde oturan kirişler için geçerli değildir. Literatüre bu anlamda önemli bir katkı olarak değerlendirilebilecek bu çalışma ileride problemin farklı yöntemlerle irdelenmesinde araştırmacılara ıvık tutacak sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Elde edilen yarı analitik ve sonu eleman çözümleri ondalık beş basamak hassasiyete kadar verilmiş ve literatürde mevcut olan çalışmalarla karşılaştırılmış. Uygulanan yöntemlerin başarılı sonuçlar verdiği görülmüş, zemin yatak katsayısındaki değişimin de kiriş mesnetlerinde serbestlik arttıkça doğal titreşim frekanslarını önemli ölçüde etkilediği sayısal değerler ve görsel betimlemelerle ortaya konmuştur. Özellikle etkilerin konsol kiriş için oldukça belirgin olduğu görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- Cazzani A, 2013. On the dynamics of a beam partially supported by an elastic foundation: an exact solution set. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13: 1350045,1-30.
- Coşkun SB, Atay MT, Öztürk B, 2011. Transverse vibration analysis of Euler-Bernoulli beams using analytical approximate techniques. *Advances in Vibration Analysis Research*, F. Ebrahimi, IntechOpen Press, pp.1-22.
- Coşkun SB, Öztürk B, Mutman, U, 2014. Adomian decomposition method for vibration of nonuniform Euler beams on elastic foundation. *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2014)*, Porto, June 30-July 2, 2014, pp:1935-1940.
- CSI, SAP2000, Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, Version 21.02, Computers and Structures, Inc., Berkeley, USA.
- Çinçin C, 2018. Kısmen elastik zemin üzerindeki kiriş titreşiminin Adomian ayrıştırma yöntemi ile analizi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi (Basılmış).
- Çinçin C, Coşkun SB, 2019. Analysis of beam vibrations on partial elastic foundation using Adomian decomposition method. *Kocaeli Journal of Science and Engineering*, 2: 28-33.
- Doyle PF, Pavlovic MN, 1982. Vibration of beams on partial elastic foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10: 663-674.
- Eisenberger M, Yankelevsky DZ, Adin MA, 1985. Vibrations of beams fully or partially supported on elastic foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13: 652-660.
- He JH, 1999. Variational iteration method – a kind of nonlinear analytical technique. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34: 699-708.
- He JH, 2007. The variational iteration method: Reliable, efficient and promising. *Computers and Mathematics with Applications*, 54: 879-880.

- Kukla S, 1991. Free vibration of a beam supported on a stepped elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 149: 259-265.
- Laura PAA, Cortinez VH, 1987. Vibrating beam partially embedded in Winkler-type foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, 113: 143-147.
- Motaghian, SE, Mofida M, Alanjari P, 2011. Exact solution to free vibration of beams partially supported by an elastic foundation. *Scientia Iranica*, 18: 861-866.
- Öztürk B, 2009. Free vibration analysis of beam on elastic foundation by the variational iteration method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10: 1255-1262.
- Öztürk B, Coşkun SB, 2013. Analytical solution for free vibration analysis of beam on elastic foundation with different support conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, ID 470927, 7 pages
- Thambiratnam D, Zhuge Y, 1996. Free vibration analysis of beams on elastic foundation, *Computers and Structures*, 60: 971-980.