DOI: 10.17714/gumusfenbil.732116 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Modülüs Fonksiyonu ile Tanımlanmış Genelleştirilmiş Büyük Lebesgue Dizi Uzaylarının Topolojik Bazı Özellikleri

Some Topologıcal Properties of Generalized Grand Lebesgue Sequence Spaces Defined by Modulus Function

Oğuz OĞUR*[1,a]

[1] *Giresun Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 28200, Giresun*

• Geliş tarihi / *Received*: 04.05.2020 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 08.09.2020 • Kabul tarihi / *Accepted*: 25.09.2020

Öz

Bu çalışmada, Rafeiro vd. (2018) tarafından tanımlanan büyük Lebesgue dizi uzayları modülüs fonksiyonu yardımıyla genelleştirildi. Ayrıca, bu uzayların bazı topolojik ve kapsama özellikleri incelendi.

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş Büyük Lebesgue Dizi Uzayları, Modülüs Fonksiyonu, Paranormlu Uzaylar.

Abstract

In this paper, the grand Lebesgue sequence spaces defined by Rafeiro vd. (2018) were generalized using modulus function. Also, some topological and inclusion properties of these spaces were examined.

***Keywords**: Generalized Grand Lebesgue Sequence Spaces, Modulus Function, Paranormed Spaces*.

*[a] Oğuz OĞUR; oguz.ogur@giresun.edu.tr, Tel: (0454) 310 10 00, orcid.org/0000-0002-3206-5330

1. Giriş

Bu çalışmada, $\mathbb{N}, \mathbb{R}\ ve\ \mathbb{C}$ sembolleri ile sırasıyla doğal sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar kümeleri gösterilsin. Modülüs fonksiyon kavramı ilk defa Nakano (1953) tarafından tanımlanmış ve temel bazı özellikleri verilmiştir. Aşağıdaki dört koşulu sağlayan $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna bir modülüs fonksiyonu denir:

1) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,
2) her $x,y\in[0,\infty)$ için $f(x+y)\le f(x)+f(y)$,
3) f fonksiyonu artandır,
4) Sıfırın sağında f fonksiyonu süreklidir.

Böylece modülüs fonksiyonun $[0,\infty)$ aralığında sürekli olduğu sonucu çıkarılır. Modülüs fonksyonları sınırlı veya sınırsız olabilirler. Örneğin, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ fonksiyonu sınırlı fakat $0<p<1$ için $f(x)=x^p$ sınırsızdır. Modülüs fonksiyonunun tanımındaki 2) özelliğinden her $n\in\mathbb{N}$ için $f(nx)\le nf(x)$ sağlanır. Buradan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$f(x)\le f\left(nx\frac{1}{n}\right)\le nf\left(\frac{x}{n}\right) \tag{1}$$

ve böylece

$$\frac{1}{n}f(x)\le f\left(\frac{x}{n}\right) \tag{2}$$

eşitsizliği elde edilir. f bir modülüs fonksiyonu ve w kompleks dizilerin uzayı olmak üzere

$$L(f)=\{x\in w:\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}f(|x_k|)<\infty\} \tag{3}$$

uzayı bir FK-uzayıdır (Ruckle, 1973). Ruckle, bu uzayı A. Wilansky' nin "$\{e_1,e_2,\dots\}$ birim vektörlerinin sınırlı kümesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır?" sorusunun cevabını ararken tanımlamıştır. Yine, bütün $L(f)$ uzaylarının arakesitinin sonlu bütün dizilerin uzayı olduğunu göstermiştir. Eğer pozitif x reel sayıları için $f(x)=x$ alınırsa $\mathrm{L}(f)$ uzayı ℓ_1 uzayına indirgenir. Bu uzaylar birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Maddox, 1986; Savaş, 1999; Malkowsky ve Savaş, 2000; Oğur, 2015). Ayrıca, Oğur ve Duyar (2016) modülüs fonksiyonu yardımıyla Lorentz dizi uzaylarını genelleştirmiştir.

X bir vektör uzayı olmak üzere $p:X\to[0,\infty)$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda bir paranorm denir;

i) $p(0)=0$,

ii) her $x\in X$ için $p(-x)=p(x)$,

iii) $x\in X,\lambda\in\mathbb{C},(\lambda_n),\mathbb{C}$ uzayında bir dizi ve $(x_n),X$ vektör uzayında bir dizi olmak üzere eğer $n\to\infty$ iken $|\lambda_n-\lambda|\to 0$ ve $p(x_n-x)\to 0$ ise $p(\lambda_n x_n-\lambda x)\to 0$ sağlanır. (Bu özelliğe skalerle çarpımın sürekliliği denir).

$1<p<\infty$ olmak üzere $L^{p)}$ büyük Lebesgue uzayı ilk olarak Iwanec ve Sbordone (1992) tarafından tanımlanmıştır. Jain ve Kumari (2012) bu uzayları $\Lambda_{q),w}, 0<q<\infty$, büyük Lorentz uzaylarına taşımışlardır. Samko ve Umarkhadzhiev (2018) bu uzayların bazı temel özelliklerini çalışmışlardır. Rafeiro vd (2018) $\ell^{p),\theta}, 1\le p<\infty$ ve $\theta>0$, büyük Lebesgue dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylar üzerinde tanımlı bazı operatörlerin özelliklerini çalışmışlardır. Bu çalışmada, Rafeiro vd (2018) tarafından tanımlanan $\ell^{p),\theta}$ uzayı f modülüs fonksiyonu yardımıyla genelleştirilmiş ve bazı temel özellikleri gösterilmiştir. f modülüs fonksiyonu verilsin. $1\le p<\infty$ ve $\theta>0$ için

$$\ell_{p),\theta}(f)=\left\{x\in w:\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}[f(|x_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}<\infty\right\} \tag{4}$$

kümesi tanımlansın.

$\ell_{p),\theta}(f)$ için geçerli bütün özellikler, $f(x)=x$ alındığında $\ell^{p),\theta}$ büyük Lebesgue dizi uzayı elde edileceğinden, bu uzaylar üzerinde çalışmak daha avantajlı olacaktır.

2. Bulgular

Bu bölümde, $\ell_{p),\theta}(f)$'nin bazı topolojik ve kapsama özellikleri verilmiştir.

Teorem 2.1: f modülüs fonksiyonu olmak üzere $\ell_{p),\theta}(f), 1 \leq p < \infty$, kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat: $\ell_{p),\theta}(f)$' nin w uzayının bir alt uzayı olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $a=(a_k), b=(b_k) \in \ell_{p),\theta}(f)$ için

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k+b_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} &\leq \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|+|b_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\ &\leq \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)+f(|b_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\ &\leq \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}+\\ &+\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\ &< \infty.\end{aligned} \tag{5}$$

Keyfi $\mu \in \mathbb{C}$ için $|\mu| \leq T_\mu$ olacak şekilde bir $T_\mu \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, modülüs fonksiyonunun özelliğinden

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|\mu a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} &\leq \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(\left|T_\mu a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\ &\leq T_\mu \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\ &< \infty\end{aligned} \tag{6}$$

bulunur. Bu ise $\ell_{p),\theta}(f)$' nin bir kompleks vektör uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.2: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayı

$$g_{\theta,f}(a)=\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^\theta \sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \tag{7}$$

fonksiyonu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat: $g_{\theta,f}$ fonksiyonunun tanımından $g_{\theta,f}(a)=g_{\theta,f}(-a)\ ve\ g_{\theta,f}(0)=0$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca, (5) denkleminden $g_{\theta,f}(a+b) \leq g_{\theta,f}(a)+g_{\theta,f}(b)$ sağlanır. Eğer $g_{\theta,f}$ fonksiyonunun skalerle çarpımın sürekliliğini sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için $m \to \infty\ iken\ g_{\theta,f}\left(a^{(m)}-a\right) \to 0\ ve\ \left|\lambda^{(m)}-\lambda\right| \to 0$ özelliklerini sağlayan $\left(a^{(m)}\right) \subset \ell_{p),\theta}(f)$ ve $\left(\lambda^{(m)}\right) \subset \mathbb{C}$ dizileri verilsin. $g_{\theta,f}$ fonksiyonunun üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a^{(m)}-\lambda a\right) \leq g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a^{(m)}-\lambda^{(m)}a\right)+g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a-\lambda a\right) \tag{8}$$

bulunur. $R=\left(\left[\!\left[\sup_m\left|\lambda^{(m)}\right|\right]\!\right]+1\right)$ olmak üzere modülüs fonksiyonunun monotonluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a^{(m)}-\lambda^{(m)}a\right) &= \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(\left|\lambda^{(m)}a_k{}^{(m)}-\lambda^{(m)}a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &= \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(\left|\lambda^{(m)}\right|\left|a_k{}^{(m)}-a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\le R\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(\left|a_k{}^{(m)}-a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &= R g_{\theta,f}\left(a^{(m)}-a\right) \end{aligned} \tag{9}$$

bulunur. Buradan $m \to \infty$ $iken$

$$g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a^{(m)}-\lambda^{(m)}a\right) \to 0 \tag{10}$$

olduğu görülür. $m \to \infty$ $iken$ $\left|\lambda^{(m)}-\lambda\right| \to 0$ olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\lambda^{(m)}-\lambda\right| \le Q \tag{11}$$

olacak şekilde bir Q doğal sayısı bulunabilir. Keyfi pozitif δ sayısı verilsin. $a \in \ell_{p),\theta}(f)$ olduğundan öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[f\left(\left|\lambda^{(m)}-\lambda\right|\left|a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} &\le \sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[f\left(Q\left|a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\le Q\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[f\left(\left|a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

olur. Buradan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[f\left(\left|\lambda^{(m)}a_k-\lambda a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} < \frac{\delta}{2} \tag{13}$$

olduğu elde edilir. Yine f modülüs fonksiyonunun sürekliliğinden $m \to \infty$ $iken$

$$\sup_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{k_0-1}\left[f\left(\left|\lambda^{(m)}a_k-\lambda a_k\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} < \frac{\delta}{2} \tag{14}$$

bulunur. Buradan, (13) ve (14) ifadeleri kullanılırsa $m \to \infty$ $iken$

$$g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a-\lambda a\right) \to 0 \tag{15}$$

olur. Böylece, (10) ve (15) ifadelerinden $m \to \infty$ $iken$

$$g_{\theta,f}\left(\lambda^{(m)}a^{(m)}-\lambda a\right) \to 0 \tag{16}$$

elde edilir. Bu ise $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayının $g_{\theta,f}$ fonksiyonu ile birlikte bir paranormlu uzay olduğunu gösterir.

Uyarı 2.1: (7) ifadesiyle verilen $g_{\theta,f}$ fonksiyonunun tanımdaki supremumun ε' nun sonlu bir aralığında alınması yeterlidir. $x > 0$ için $x \to xe^{x}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $W(x)$ (Lambert fonksiyonu) olmak üzere

$$g_{\theta,f}(a)=\sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}[f(|a_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \tag{17}$$

olur. Burada $W(1/e)\cong 3{,}57$ şeklindedir (Rafeiro vd, 2018).

Teorem 2.3: $1\le p<\infty$ olmak üzere $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayı $g_{\theta,f}(a)$ paranormu ile bir tam uzaydır.

İspat: $(a^{(s)})$, $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde, her $\tau>0$ için $s,t\ge n_0$ olduğunda

$$\begin{aligned}g_{\theta,f}\left(a^{(s)}-a^{(t)}\right)&=\sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{m=1}^{\infty}\left[f\left(\left|a_m^{(s)}-a_m^{(t)}\right|\right)\right]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\\&<f(\tau)\left(\frac{1}{W(1/e)}\right)^{\frac{\theta}{p\left(1+\frac{1}{W(1/e)}\right)}}\end{aligned} \tag{18}$$

olacak şekilde n_0 doğal sayısı vardır. Buradan, $s,t\ge n_0$ olduğunda

$$\left|a_m^{(s)}-a_m^{(t)}\right|<\tau \tag{19}$$

olur. Bu ise her m doğal sayısı için $\left(a_m^{(s)}\right)$ dizisinin $\mathbb{C}$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Buradan, $s\to\infty$ iken

$$a_m^{(s)}\to a_m \tag{20}$$

olacak şekilde $a_m\in\mathbb{C}$ vardır. $a=(a_m)$ olarak tanımlansın. $a=a^{(s)}+\left(a^{(s)}-a\right)$ olduğundan $a\in\ell_{p),\theta}(f)$ olur. Ayrıca, $s,t\to\infty$ iken

$$g_{\theta,f}\left(a^{(s)}-a\right)\le g_{\theta,f}\left(a^{(s)}-a^{(t)}\right)+g_{\theta,f}\left(a^{(t)}-a\right)\to 0 \tag{21}$$

bulunur. Bu $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayının üzerindeki paranorm ile bir tam uzay olduğunu gösterir.

Teorem 2.4: f ve h iki modülüs fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki kapsamalar sağlanır;

i) Eğer $limsup\frac{f(t)}{h(t)}<\infty$ ise $\ell_{p),\theta}(h)\subset\ell_{p),\theta}(f)$.
ii) $1\le p<\infty$ için $\ell_{p),\theta}(h)\cap\ell_{p),\theta}(f)\subset\ell_{p),\theta}(f+h)$.

İspat:
i) Hipotezden, her t pozitif reel sayısı için

$$f(t)\le Kh(t) \tag{22}$$

olacak şekilde $K>0$ sayısı vardır. Böylece, $x\in\ell_{p),\theta}(h)$ için

$$f(x_k)\le Kh(x_k) \tag{23}$$

yazılır. Buradan $\sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}}\left(\varepsilon^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}[f(|x_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\le Kg_{\theta,h}(x)<\infty$ (24)

bulunur. Bu ise $x\in\ell_{p),\theta}(f)$ olduğunu gösterir.

ii) $x \in \ell_{p),\theta}(h) \cap \ell_{p),\theta}(f)$ verilsin. Buradan,

$$\begin{aligned}\sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=1}^{\infty}[(f+h)(|x_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} &\leq \sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=1}^{\infty}[f(|x_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &+ \sup_{0<\varepsilon<\frac{1}{W(1/e)}} \left(\varepsilon^{\theta} \sum_{k=1}^{\infty}[h(|x_k|)]^{p(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ &\leq g_{\theta,f}(x) + g_{\theta,h}(x) \\ &< \infty \end{aligned} \tag{25}$$

elde edilir. Bu ise $x \in \ell_{p),\theta}(f+h)$ olduğunu gösterir.

3. Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışmada, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere büyük Lebesgue dizi uzayları modülüs fonksiyonu yardımıyla $\ell_{p),\theta}(f)$ uzayına genelleştirilmiş ve bu uzayın temel topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bazı kapsama özellikleri verilmiştir.

Kaynaklar

Iwaniec, T. ve Sbordone, C., 1992. On the Integrability of the Jacobian Under Minimal Hypotheses. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 119(2), 129-143.

Jain, P. ve Kumari, S., 2012. On Grand Lorentz Spaces and the Maximal Operator. Georgian Mathematical Journal, 19, 235-246.

Maddox, I.J., 1986. Sequence Spaces Defined by a Modulus. Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 100, 161-166.

Malkowsky, E. ve Savaş, E., 2000. Some λ −Sequence Spaces Defined by a Modulus. Archiv der Mathematik, 36(3), 219-228.

Nakano, H., 1953. Concave Modular. Journal of the Mathematical Society of Japan, 5, 29-49.

Oğur, O., 2015. A New Double Cesaro Sequence Space Defined by Modulus Functions. Journal of Applied Functional Analysis, 10(1), 109-116.

Oğur, O. ve Duyar, C., 2016. On Generalized Lorentz Sequence Space Defined by Modulus Functions. Filomat, 30(2), 497-504.

Rafeiro, H., Samko, S., Umarkhadzhiev S., 2018. Grand Lebesgue Sequence Spaces. Georgian Mathematical Journal, 19(2), 235-246.

Ruckle, W. H.,1973. FK-Spaces in which the Sequence of Coordinate Vectors is Bounded. Canadian Journal of Mathematics, 25, 973-978.

Samko, S. ve Umarkhadzhiev S., 2017. On Grand Lebesgue Spaces on Sets of Infinite Measure. Mathematische Nachrichten, 290, 913-919.

Savaş, E., 1999. On Some Generalized Sequence Spaces Defined by a Modulus. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 30(5), 459-464.

Wilansky, A., 1964. Functıonal Analysis: New York, Blaisdell.